The Annals of Probability
1986, Vol. 14, No. 3, 916–921

CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ POUR LES MULTIPLICATEURS DANS LE TLC BANACHIQUE

PAR M. LEDOUX ET M. TALAGRAND

Université de Strasbourg et Université de Paris VI

Let X be a Banach space valued random variable satisfying the central limit theorem and ξ be a real valued random variable, independent of X. If ξ is in the Lorentz space $L_{2,1}$, the product ξX satisfies the central limit theorem. We show that this condition on ξ cannot be improved, characterizing $L_{2,1}$ as the space of all random variables ξ such that the preceding implication holds for all vector valued X satisfying the central limit theorem. In particular, there exist independent random variables X and ξ both satisfying the central limit theorem such that ξX does not.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans un espace de Banach séparable B, on désigne par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de copies indépendantes de X et, pour tout entier n, par $S_n(X)$ la somme partielle $X_1 + \cdots + X_n$. Une variable aléatoire X à valeurs dans B vérifie le théorème limite central (TLC) si la suite $(S_n(X)/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi pour la topologie étroite sur B. Il est bien connu qu'une variable aléatoire réelle vérifie le TLC si et seulement si elle est centrée et de carré intégrable.

Ce travail est consacré au problème suivant: étant données X à valeurs dans B et ξ à valeurs réelles, indépendantes et vérifiant toutes deux le TLC, le produit ξX satisfait-il encore au TLC? Dans de larges classes d'espaces de Banach (espaces de cotype 2, espaces vérifiant Λ-Ros(2), cf. [2]), les conditions nécessaires et suffisantes qu'il est possible d'obtenir pour la propriété de limite centrale fournissent une réponse positive à cette question. Pour des espaces B quelconques, il a été établi dans [1] (Lemma 2.9) que si X vérifie le TLC dans B et ξ est réelle indépendante de X et appartient à l'espace de Lorentz $L_{2,1}$ [pour $1 \le p,\ q < \infty$, $L_{p,q}$ est l'espace des variables aléatoires réelles η pour lesquelles $\int_0^\infty (t^p P\{|\eta| > t\})^{q/p}\, dt/t < \infty$; $L_{p,p} = L_p$ et $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$ si $q_1 \le q_2$], alors ξX vérifie le TLC. Ce résultat est en fait une conséquence immédiate des propriétés extrémales des indicatrices d'ensembles dans les espaces $L_{p,1}$, comme cela nous a été indiqué par Pisier et Zinn; en effet, si ξ est l'indicatrice d'un événement A, pour tout entier n,

$$E\{\|S_n(\xi X)\|\} = E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j X_j\right\|\right\}$$

$$= E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{S_n(\xi)} X_j\right\|\right\}$$

Received October 1984.
AMS 1980 subject classifications. Primary 60B11, 60B12; secondary 46E30.
Key words and phrases. Théorème limite central, multiplicateurs, espace de Lorentz $L_{2,1}$.

Institute of Mathematical Statistics is collaborating with JSTOR to digitize, preserve, and extend access to *The Annals of Probability.* www.jstor.org

$$\leq E\left\{\sqrt{S_n(\xi)}\right\}\left(\sup_k E\left\{\frac{\|S_k(X)\|}{\sqrt{k}}\right\}\right)$$

$$\leq \sqrt{nP(A)}\left(\sup_k E\left\{\frac{\|S_k(X)\|}{\sqrt{k}}\right\}\right).$$

Approchant toute variable aléatoire positive ξ de $L_{2,1}$ par des variables étagées de la forme $\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon I_{\{\xi > \varepsilon l\}}$ ($\varepsilon > 0$), on tire de cette estimation, après un passage à la limite et en vertu de l'inégalité

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon\sqrt{P\{\xi > \varepsilon l\}} \leq \int_0^{\infty} \sqrt{P\{\xi > t\}}\, dt,$$

que, quelle que soit ξ dans $L_{2,1}$,

$$\sup_n E\left\{\frac{\|S_n(\xi X)\|}{\sqrt{n}}\right\} \leq 2\int_0^{\infty} \sqrt{P\{|\xi| > t\}}\, dt\left(\sup_n E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{\sqrt{n}}\right\}\right).$$

La conclusion découle alors des arguments usuels dans l'étude du TLC (cf. [3]).

Nous nous proposons ici de montrer que le résultat précédent ne peut être amélioré, la condition sur ξ d'appartenance à $L_{2,1}$ apparaissant comme nécessaire et suffisante pour que ξX vérifie le TLC pour toute variable aléatoire vectorielle X indépendante de ξ le vérifiant. La question initiale a donc une réponse négative en général.

THÉORÈME. *Pour toute variable aléatoire réelle ξ n'appartenant pas à l'espace de Lorentz $L_{2,1}$, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans un espace de Banach B, indépendante de ξ et vérifiant le TLC, telle que le produit ξX ne vérifie pas le TLC.*

DÉMONSTRATION. Un argument simple montre qu'il suffit de considérer le cas d'une variable aléatoire ξ positive, et même, par exemple, plus grande que 1. Dans la classe considérée précédemment des variables aléatoires étagées approchant ξ, soit alors

$$\tilde{\xi} = \sum_{l=1}^{\infty} I_{\{\xi > l\}}.$$

Comme $\xi > \tilde{\xi}$ et que notre objectif est de construire X de sorte que la suite $(S_n(\xi X)/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée en probabilité, un principe de contraction montre qu'il suffit d'établir ceci pour la suite $(S_n(\tilde{\xi} X)/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$. La construction s'effectue en deux étapes.

PREMIÈRE ÉTAPE. Soit $\varepsilon > 0$ et $K > 0$; on se propose de construire un espace de Banach F de dimension finie $q = q(\varepsilon, K)$ et une variable aléatoire X à valeurs dans F, indépendante de ξ, tels que:

(1) $$\text{pour tout } n, \quad P\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{\sqrt{n}} \leq 4\right\} \geq 1 - \varepsilon;$$

(2) $$\text{il existe } m = m(\varepsilon, K) \text{ pour lequel } P\left\{\frac{\|S_m(\tilde{\xi} X)\|}{\sqrt{m}} \geq K\right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Cette construction repose sur le choix convenable d'une norme sur $F = \mathbb{R}^q$: pour tout $x = (x_\iota)_{\iota \le q}$ de $\mathbb{R}^q$, soit

$$\|x\| = \|x\|_F = \|x\|_{q,m} = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{|x_{\iota_j}|}{\sqrt{j}};\ \{i_1,\dots,i_m\} \subset \{1,\dots,q\} \right\}$$

où $m \le q$ sont à déterminer en fonction de ε et K. A noter que $\|x\| \le 2\sqrt{m}\ \sup_{\iota \le q}|x_\iota|$. La variable X à valeurs dans F, indépendante de ξ, est définie quant à elle par $X = Y - E\{Y\}$ où:

$$P\{Y = e_i\} = \frac{1}{q}, \qquad i = 1,\dots,q,$$

$(e_\iota)_{\iota < q}$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^q$; il nous sera commode par la suite de représenter Y sous la forme $\sum_{i=1}^{q}\varphi_i e_\iota$ où $(\varphi_1,\dots,\varphi_q)$ désigne un q-uplet de variables aléatoires de Bernoulli d'espérance $1/q$ à supports disjoints. F et X étant ainsi définis, vérifions à présent les propriétés (1) et (2) pour des choix appropriés de m et q. A cet effet, posons $A_l = \{\xi > l\}$ pour tout l; comme $\xi \notin L_{2,1}$, nous pouvons fixer un entier L tel que

$$\sum_{l=1}^{L} \sqrt{P(A_l)} \ge 4K. \tag{3}$$

Posons ensuite $r_l = [\frac{1}{2}mP(A_l)]$ pout tout $l = 1,\dots,L$, [ ] désignant la fonction partie entière, où m sera choisi suffisament grand pour que:

$$2L \le K\sqrt{m} \quad \text{et} \quad r_l \ge \tfrac{1}{4}mP(A_l), \qquad l = 1,\dots,L. \tag{4}$$

On vérifie pour commencer le point (2). $S_m(\tilde{\xi}X)$ s'écrit sous la forme

$$S_m(\tilde{\xi}X) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{\infty} I_{\{\xi_j > l\}}\big(Y_j - E\{Y_j\}\big)$$

où les suites $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de copies indépendantes de ξ et Y respectivement sont indépendantes. En vertu de la loi des grands nombres, $m = m(\varepsilon, K)$ peut être fixé de sorte que, pour tout $l = 1,\dots,L$,

$$P\left\{ \sum_{j=1}^{m} I_{\{\xi_j > l\}} < r_l \right\} < \frac{\varepsilon}{4L}$$

et les relations (4) sont satisfaites. m étant ainsi déterminé, pour tout q assez grand:

$$P\{\exists\, j \ne j', 1 \le j, j' \le m: Y_j = Y_{j'}\} \le \frac{m^2}{q} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{5}$$

et donc, sur un ensemble de probabilité plus grande que $1 - \varepsilon/2$, quel que soit $l = 1,\dots,L$,

$$\sum_{j=1}^{m} I_{\{\xi_j > l\}} Y_j = \sum_{\iota \in I_l} e_\iota$$

où $I_l \subset \{1, \ldots, q\}$, $p_l = \#I_l \geq r_l$ et $I_l \supset I_{l+1}$. Afin de contrôler en outre la partie centrage dans la définition de X, q sera également choisi suffisament grand pour que:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{\infty} I_{\{\xi_j > l\}} > Kq\right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

On a alors, avec probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$ (et l'on conviendra dans les inégalités ci-dessous que $p_{L+1} = 0$ et $\sum_{i=p+1}^{p} = 0$),

$$\begin{aligned}
\|S_m(\tilde{\xi}X)\| &\geq \left\|\sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{m} I_{\{\xi_j > l\}} Y_j\right\| - Kq\|E\{Y\}\| \\
&= \left\|\sum_{l=1}^{L} l \sum_{i \in I_l - I_{l+1}} e_i\right\| - Kq\|E\{Y\}\| \\
&= \sum_{l=1}^{L} l \sum_{i=p_{l+1}+1}^{p_l} \frac{1}{\sqrt{i}} - Kq\|E\{Y\}\| \\
&\geq 2\sum_{l=1}^{L} l\left(\sqrt{p_l + 1} - \sqrt{p_{l+1} + 1}\right) - 2K\sqrt{m} \\
&\geq 2\sum_{l=1}^{L} \sqrt{p_l} - 2L - 2K\sqrt{m} \\
&\geq 2\sum_{l=1}^{L} \sqrt{r_l} - 2L - 2K\sqrt{m},
\end{aligned}$$

et donc, par (3) et (4),

$$\frac{\|S_m(\tilde{\xi}X)\|}{\sqrt{m}} \geq \sum_{l=1}^{L} \sqrt{P(A_l)} - 3K \geq K.$$

Le point (2) est ainsi établi pourvu que q soit assez grand. Nous fixons à présent le choix de q dans la démonstration du point (1). On distingue deux cas. Si $n^2 < \varepsilon q$,

$$P\left\{\exists\, I \subset \{1, \ldots, q\},\ \#I = n\colon S_n(Y) = \sum_{i \in I} e_i\right\} \geq 1 - \varepsilon$$

car la probabilité du complémentaire est plus petite que:

$$P\{\exists\, j \neq j', 1 \leq j, j' \leq n\colon Y_j = Y_{j'}\} \leq \frac{n^2}{q} < \varepsilon.$$

Par suite, avec une probabilité plus grande que $1 - \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\|S_n(X)\| &\leq \|S_n(Y)\| + n\|E\{Y\}\| \\
&\leq 2\sqrt{m \wedge n} + \frac{2n\sqrt{m}}{q} \leq 4\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

Si $n^2 \geq \varepsilon q$,

$$\begin{aligned} P\{\|S_n(X)\| > 4\sqrt{n}\} &= P\left\{\left\|\sum_{i=1}^{q} S_n(\varphi_i - E\{\varphi_i\})e_i\right\| > 4\sqrt{n}\right\} \\ &\leq P\left\{\sup_{i \leq q} |S_n(\varphi_i - E\{\varphi_i\})| > 2\sqrt{\frac{n}{m}}\right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{q} P\left\{|S_n(\varphi_i - E\{\varphi_i\})| > 2\sqrt{\frac{n}{m}}\right\} \end{aligned}$$

et, par orthogonalité,

$$\begin{aligned} P\{\|S_n(X)\| > 4\sqrt{n}\} &\leq \frac{m^2}{16n^2} \sum_{i=1}^{q} E\{|S_n(\varphi_i - E\{\varphi_i\})|^4\} \\ &\leq \frac{qm^2}{16n^2}\left(\frac{n}{q} + \frac{6n^2}{q^2}\right) \\ &\leq \frac{m^2}{16\sqrt{\varepsilon q}} + \frac{3m^2}{8q}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à choisir $q = q(\varepsilon, K, L, m)$ de sorte que (5) et (6) soient réalisées et que cette dernière quantité soit plus petite que ε et la première étape est accomplie.

Deuxième étape. La première étape pour $\varepsilon = 1/2^k$ et $K = k2^{k+2}$, $k = 1, 2, \ldots$ fournit des suites d'entiers (q_k) et (m_k) telles que si F_k désigne $\mathbb{R}^{q_k}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{F_k} = \|\cdot\|_{q_k, m_k}$ et X^k la variable aléatoire indépendante de ξ à valeurs dans F_k définie par $X^k = Y^k - E\{Y^k\}$ et

$$P\left\{Y^k = \frac{e_i}{2^{k+2}}\right\} = \frac{1}{q_k}, \qquad i = 1, \ldots, q_k,$$

on a, pour tout entier k:

$$\inf_n P\left\{\frac{\|S_n(X^k)\|_{F_k}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2^k}\right\} \geq 1 - \frac{1}{2^k}$$

et

$$P\left\{\frac{\|S_{m_k}(\tilde{\xi} X^k)\|_{F_k}}{\sqrt{m_k}} \geq k\right\} \geq 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Posons alors $B = (\prod_k F_k)_{l_2}$ et considérons X à valeurs dans B définie par la suite de ses composantes $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$. On s'assure immédiatement que la variable aléatoire (bornée) X vérifie le TLC: en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_0 tel que

$$\inf_n P\left\{\frac{\|S_n(X - X(k_0))\|}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \varepsilon$$

où $X(k_0)$ est la variable aléatoire de B dont seules les k_0 premières composantes sont non nulles et coincident avec celles de X, et cette approximation uniforme par des variables de dimension finie fournit la conclusion ([3], Théorème 3.1). En revanche ξX ne le vérifie point, la suite $(S_n(\tilde{\xi} X)/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'étant pas même stochastiquement bornée.

Remerciements. Nous remercions A. de Acosta pour une remarque contribuant à une meilleure présentation de l'argument qui suit (6).

RÉFÉRENCES

[1] GINÉ, E. and ZINN, J. (1984). Some limit theorems for empirical processes. *Ann. Probab.* **12** 929–989.

[2] LEDOUX, M. (1985). Sur une inégalité de H. P. Rosenthal et le théorème limite central dans les espaces de Banach. *Israel J. Math.* **50** 290–318.

[3] PISIER, G. (1976). Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. *Séminaire Maurey–Schwartz 1975–76.* Exposés 3 et 4. Ecole Polytechnique, Paris.

DEPARTMENT DE MATHEMATIQUE
UNIVERSITE LOUIS PASTEUR
F-67084 STRASBOURG
FRANCE

EQUIPE D'ANALYSE
UNIVERSITE DE PARIS VI
F-75230 PARIS CEDEX 05
FRANCE