The Annals of Probability
1983, Vol. 11, No. 3, 772–788

UN THEOREME DE LA LIMITE LOCALE POUR UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS DILATANTES ET MONOTONES PAR MORCEAUX

BY J. ROUSSEAU-EGELE

I.R.M.A.R. Rennes

For a class of expansive transformations of the unit interval, we show a local limit theorem for the process $(f \circ T^n)_{n \in N}$, where f is a real bounded variation function. We show also, that the speed in the central limit theorem is $1/\sqrt{n}$.

0. Introduction Considérons une application T de l'intervalle unité dans lui-même, qui soit C^2 par morceaux et dilatante. Lasota et Yorke [19] ont montré qu'il existait une mesure μ, invariante par T, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et dont la densité h est à variation bornée. Sous l'hypothèse que la limite définissant σ^2 existe, Wong [31] a montré un théorème de la limite centrale:

$$\mu\{(1/\sigma\sqrt{n})(\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k - n\mu(f)) < v\} \to (1/\sqrt{2\pi}) \displaystyle\int_{-\infty}^{v} \exp(-u^2/2)\, du$$

où f est à variation bornée et $\sigma^2 > 0$.

En étudiant le spectre de l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T, Keller [18] montre que σ^2 existe et que si $\sigma^2 \neq 0$, alors le théorème de limite centrale est vérifié si le système dynamique (T, μ) est faiblement mélangeant, mais les moyens utilisés montrent que la classe de transformations considérées peut être traitée par une méthode de décomposition spectrale des opérateurs. Cette technique a déjà été utilisée pour les chaînes de Markov par Doeblin et Fortet ([7], [9], [15], [16], [24]) qui ont en particulier étudié les deux exemples principaux: la transformation "fraction continue" et la transformation "$(2x)$mod 1".

On veut ici aller plus loin que le théorème de la limite centrale et obtenir une vitesse en $1/\sqrt{n}$ dans ce théorème et un théorème de la limite locale. Nous utilisons la théorie des perturbations analytiques des opérateurs de Rellich (pour son application aux chaines de Markov, voir Nagaev [23] et aux produits de matrices aléatoires, voir Le Page [20]). Le théorème de la limite locale a été démontré pour la transformation "$(2x)$mod 1" par Moskvin et Postnikov [22] dans le cas d'une fonction indicatrice d'intervalle. La méthode utilisée ici permet d'étendre ces théorèmes au cas général d'une transformation C^2 par morceaux et dilatante et pour une fonction à variation bornée, à valeurs entières ou non.

Dans [14] Hofbauer et Keller montre que l'on a aussi un théorème de la limite central fonctionnel, un principe d'invariance et la loi du logarithme itéré. Les trois résultats peuvent être retrouvés à l'aide des techniques d'opérateurs (cf. Le Page [20] dans un cadre différent).

1. L'opérateur de Perron-Frobenius et ses perturbations.

1.1. On considère une application T de I dans I, où $I = [0, 1]$. On note m, la mesure de Lebesgue et L_m^1, l'espace des fonctions intégrables. On considère une subdivision finie ou dénombrable $\{a_j\}$ de I, où $I_j = (a_{j-1}, a_j)$ est un intervalle ouvert, vérifiant:

Received May 1982; revised October 1982.
AMS 1980 *subject classifications.* Primary, 60F05, 60J05, 60J10; secondary, 10K05, 28D05.
Key words and phrases. Central limit theorem, local limit theorem.

(1) La restriction de T à I_j est strictement monotone et se prolonge en un application C^2 sur $\bar{I}_j$.

(2) $\{T(I_j)\}$ est composé d'un nombre fini d'intervalles distincts.

(3) Il existe un n tel que $\gamma = \inf_{x\in I}|(T^n)'(x)| > 1$.

La condition (1) permet l'existence d'inverses locaux de T et la condition (3) est une condition de dilatation.

L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est l'opérateur ϕ de L_m^1 dans L_m^1 défini par:

$$\int_0^1 \phi f\cdot g\, dm = \int_0^1 f\cdot g\circ T\, dm$$

où $f \in L_m^1$, $g \in L_m^\infty$.

Cet opérateur est une contraction positive de L_m^1 et l'on a $\phi f = f$ si et seulement si la mesure $\mu = fm$ est invariante par T.

L'hypothèse (1) faite sur T permet de donner une forme explicite à ϕ:

$$\phi f(x) = \textstyle\sum_j f(\sigma_j x)\varphi_j(x)\chi_j(x)$$

où σ_j est l'inverse de T sur $J_j = T(\bar{I}_j)$; $\varphi_j(x) = |\sigma_j'(x)|$; χ_j est l'indicatrice de J_j.

1.2. Etudions le spectre de ϕ, mais ϕ étant considéré comme un opérateur sur un sous-espace de L_m^1. Pour $f\colon I \to \mathbb{C}$, on définit la variation de f par $v(f) = \sup\{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k+1})|\}$, la borne supérieure étant prise sur les subdivisions finies de I. Si $f \in L_m^1$, on définit $v(f)$ comme la borne inférieure des variations dans la classe de f. Soit alors $\mathscr{V}$ l'ensemble des fonctions de L_m^1 telle que $v(f) < \infty$. $\mathscr{V}$ est un sous-espace de L_m^1, mais qui n'est pas fermé pour $\|\ \|_1$. Sur $\mathscr{V}$ définissons $\|f\|_{\mathscr{V}} = v(f) + \|f\|_1$. Il est aisé de vérifier que $\|\ \|_{\mathscr{V}}$ est une norme sur $\mathscr{V}$, que $(\mathscr{V}, \|\ \|_{\mathscr{V}})$ est un espace de Banach et que $\mathscr{V}$ est dense dans $(L_m^1, \|\ \|_1)$.

Le spectre de ϕ est décrit à l'aide d'un théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu ([15], [24]):

THEOREME 1. *Soient $\mathscr{V}$ et $\mathscr{L}$ deux espaces de Banach complexe de normes respectives $\|\ \|_{\mathscr{V}}$ et $\|\ \|_{\mathscr{L}}$, avec $\mathscr{V} \subset \mathscr{L}$. On suppose*:

(a) *Si $f_n \in \mathscr{V}$, $f \in \mathscr{L}$, $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\mathscr{L}} = 0$ et $\|f_n\|_{\mathscr{V}} \le C$ pour tout n, alors $f \in \mathscr{V}$ et $\|f\|_{\mathscr{V}} \le C$.*

Soit ϕ un opérateur borné de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{L}$, par rapport à $\|\ \|_{\mathscr{V}}$. On suppose de plus:

(b) $\sup_{n\ge 0}\{\|\phi^n f\|_{\mathscr{L}},\ \ f \in \mathscr{V}, \|f\|_{\mathscr{L}} \le 1\} < \infty$.

(c) *Il existe n_0, $\alpha < 1$ et $\beta < \infty$ tel que*:

$$\|\phi^{n_0} f\|_{\mathscr{V}} < \alpha\|f\|_{\mathscr{V}} + \beta\|f\|_{\mathscr{L}} \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathscr{V}.$$

(d) *Si V et une partie bornée de $(\mathscr{V}, \|\ \|_{\mathscr{V}})$ alors $\phi^{n_0}V$ est relativement compacte dans $(\mathscr{L}, \|\ \|_{\mathscr{L}})$.*

Alors ϕ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module $1: \lambda_1, \cdots, \lambda_p$. Les sous-espaces propres correspondants $E_i = \{f \in \mathscr{L}: \phi f = \lambda_i f\}$ sont de dimension finie et contenus dans $\mathscr{V}$.

L'opérateur ϕ^n peut s'écrire:

$$\phi^n = \textstyle\sum_{i=1}^p \lambda_i^n \phi_i + \psi^n, \quad n \ge 1.$$

où les ϕ_i sont les projections sur les sous-espaces propres E_i, $\|\phi_i\|_{\mathscr{L}} \le 1$ et ψ un opérateur sur L_m^1 tel que $\sup_{n\ge1}\|\psi^n\|_{\mathscr{L}} < \infty$. On a de plus $\phi_j\phi_i = \phi_i\phi_j = 0$ si $i \ne j$, $\phi_i^2 = \phi_i$, $\phi_i\psi = \psi\phi_i = 0$. Enfin $\psi(\mathscr{V}) \subset \mathscr{V}$ et ψ a un rayon spectral $\rho(\psi) < 1$ dans $(\mathscr{V}, \|\ \|_{\mathscr{V}})$.

Rappelons pour commodité la:

PROPOSITION 1([19]). *Si l'application T vérifie* (1), (2) *et* (3), *alors ϕ vérifie les hypothèses du Théorème* 1.

PREUVE. La condition (a) est vérifiée car $\{f \in L^1_m : \|f\|_{\mathscr{V}} \leq c\}$ est compacte dans L^1_m Lorsque la subdivision est finie, Lasota et Yorke [18] ont montré que pour $f \in \mathscr{V}$, on avait: il existe n_0 tel que $v(\phi^{n_0}f) \leq \alpha v(f) + \beta \|f\|_1$ où $\alpha < 1$, $0 < \beta < \infty$ indépendante de f. Lorsque la subdivision est dénombrable, on a le même résultat. Ici la condition (2) est essentielle (voir Pianigiani [28]). Tout d'abord, remarquons que si T vérifie (1) et (2), alors pour tout n, T^n vérifie (1) et (2).

Soit $f \in \mathscr{V}$ et reprenons la démonstration de Lasota et Yorke. Choisissons N tel que $\gamma^N > 2$. Alors $S = T^{nM}$ vérifie (1) et (2). L'opérateur de Perron-Frobenius associé à S est ϕ^{nN}, qui sous sa forme explicite sera noté comme ϕ:

$$\phi^{nN}f(x) = \textstyle\sum_j f(\sigma_j x)\varphi_j(x)\chi_j(x) \quad \text{avec} \quad \varphi_j(x) \leq \gamma^{-N}.$$

On a

$$\begin{aligned} v(\phi^{nN}f) &\leq \textstyle\sum_j v(f \circ \sigma_j)\varphi_j\chi_j \\ &\leq \textstyle\sum_j v_{J_j}(f \circ \sigma_j)\varphi_j + \sum_j |(f \circ \sigma_j)(Ta_{j-1})\varphi_j(Ta_{j-1})| + |(f \circ \sigma_j)(Ta_j)\varphi_j(Ta_j)|. \end{aligned}$$

Or $g = (f \circ \sigma_j)\varphi_j$ est une fonction à variation bornée et on a:

$$|g(x)| + |g(y)| \leq v_{(x,y)}(g) + (2/(y-x)) \int_x^y |g| \, dm$$

d'où

$$v(\phi^{nN}f) \leq 2 \textstyle\sum_j v_{J_j}(f \circ \sigma_j)\varphi_j + \sum_j (2/m(J_j)) \displaystyle\int_{I_j} |f| \, dm.$$

D'après (2), il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\delta = \min_j m(J_j) \quad \text{d'où} \quad \textstyle\sum_j (2/m(J_j)) \displaystyle\int_{I_j} |f| \, dm \leq (2/\delta)\|f\|_1.$$

Il reste à évaluer:

$$\begin{aligned} v_{J_j}(f \circ \sigma_j)\varphi_j = \int_{J_j} |d(f \circ \sigma_j)\varphi_j| &\leq \int_{J_j} |f \circ \sigma_j| \, |\varphi_j'| \, dm + \int_{J_j} \varphi_j \, |d(f \circ \sigma_j)| \\ &\leq K \int_{J_j} |f \circ \sigma_j| \, \varphi_j \, dm + \gamma^{-N} \int_{J_j} |d(f \circ \sigma_j)| \end{aligned}$$

où $K = \sup_j \sup_{x \in J_j}(|\varphi_j'(x)|/\varphi_j(x))$.

Cette constante K est finie ce qui est évident lorsque la subdivision associée à T est finie car T est C^2 par morceaux. Quand la subdivision est dénombrable, la condition (2) permet d'arriver au même résultat. On a donc

$$v_{J_j}(f \circ \sigma_j)\varphi_j \leq K \int_{I_j} |f| \, dm + \gamma^{-N} \int_{I_j} |df|$$

d'où en regroupant les résultats, la condition (c):

$$v(\phi^{nN}f) \leq (2/\gamma^N)v(f) + (K + 2/\delta)\|f\|_1.$$

La condition (d) résulte du fait que l'injection de $\mathscr{V}$ dans L^1_m est compacte et que ϕ est un opérateur borné de $\mathscr{V}$. □

1.3. Comme conséquence du Théorème 1 il existe une fonction $h \in \mathscr{V}$, positive, d'intégrale 1 et telle que $\phi\, h = h$, définie par

$$h = \lim_{n\to\infty}(1/n) \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \phi^k(1).$$

Donc $\mu = hm$ est une mesure de probabilité sur I, invariante par T. On peut supposer que $\lambda_1 = 1$, car 1 est valeur propre de ϕ. Le système dynamique (T, μ) ainsi construit sera supposé faiblement mélangeant, c'est-à-dire 1 est la seule valeur propre de T, et cette valeur propre est simple. L'on voit aisément que:

$$\phi^n f = \phi_1(f) + \psi^n(f)$$

où $\phi_1(f) = m(f)h$. Remarquons que (T, μ) est faiblement mélangeant si et seulement si (T^n, μ) est ergodique pour tout n.

Dans le cas d'une subdivision finie, Bowen [4] donne des conditions pour que T soit faiblement mélangeante. Dans ce cas, on peut démontrer le théorème de la limite centrale ([18]). Pour démontrer le théorème local, nous avons besoin de précisions sur la fonction h (unique puique T est faiblement mélangeante). Pour tout x dans le support de h, on peut montrer qu'il existe une constante $D > 0$ telle que $D \le h(x) \le 1/D$, ([17]). Comme P est un opérateur de L^1_μ, c'est aussi l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T restreinte au support de h. L'on peut donc supposer que pour tout $x \in I$, $D \le h(x) \le 1/D$.

Dans la suite, nous supposons toujours que T vérifie (1), (2), (3) et que (T, μ) est faiblement mélangeant.

L'opérateur ajdoint de T dans L^1_μ est défini par

$$Pf = \phi(fh)/h.$$

Comme $\phi^n(fh) = m(fh)h + \psi^n(fh)$, on a:

$$P^n = \mu + Q^n$$

pour tout $n \ge 1$ et où le rayon spectral de Q dans $\mathscr{V}$, $\rho(Q)$ est strictement inférieur à 1. Remarquons que P vérifie les hypothèses du Théorème 1:

PROPOSITION 2. *L'opérateur P, défini par $Pf = \phi(fh)/h$ est un opérateur borné de $\mathscr{V}$, qui vérifie les hypothèses du Théorème* 1. *En particulier, il existe n_0 tel que*

$$\|P^{n_0}f\|_{\mathscr{V}} \le \alpha\|f\|_{\mathscr{V}} + \beta\|f\|_{1,\mu}$$

où $\alpha < 1$, $\beta < \infty$ et $\|f\|_{1,\mu} = \int_0^1 |f|\, d\mu$.

PREUVE. L'espace $\mathscr{L}$ est L^1_μ et (b) est vérifié car P est une contraction positive de L^1_μ

$$\|Pf\|_{1,\mu} = \int_0^1 |\phi(fh)|\, dm \le \int_0^1 \phi(|f|h)\, dm = \|f\|_{1,\mu}$$

P est un opérateur borné de $\mathscr{V}$, car ϕ est un opérateur borné de $\mathscr{V}$ et que $1/h \in \mathscr{V}$, car $v(1/h) \le (1/D^2)v(h)$. A l'aide de la démonstration de la Proposition 1, on a:

$$\begin{aligned}\|P^{nN}f\|_{\mathscr{V}} &= \|\phi^{nN}(fh)/h\|_{\mathscr{V}}\\ &\le 2\,\|1/h\|_{\mathscr{V}}\|\phi^{nN}(fh)\|_{\mathscr{V}} \qquad \text{car } \|fg\|_{\mathscr{V}} \le 2\|f\|_{\mathscr{V}}\|g\|_{\mathscr{V}}\\ &\le (8/\gamma^N)\,\|1/h\|_{\mathscr{V}}\|h\|_v\|f\|_v\\ &\quad + 2\,\|1/h\|_{\mathscr{V}}(K + 2/\delta + 1)\,\|f\|_{1,\mu}.\end{aligned}$$

□

1.4. *Les Exemples.*

1. *Les β-transformations.*

$$Tx = \{\beta x\}\ \beta > 1, \quad \text{réel où} \quad \{x\} = x - [x].$$

L'opérateur de Perron-Frobenius associé est défini par:

$$\phi f(x) = (1/\beta) \sum_{j=0}^{[\beta]-1} f((x+j)/\beta) + (1/\beta) f((x+[\beta])/\beta)\chi_{[0,\{\beta\}]}(x).$$

Les conditions (1), (2), (3) et le mélange faible sont vérifiées ((T, μ) est de plus exact et donc fortement mélangeant).

Si β est entier, on a donc $\phi = P$, car $h \equiv 1$. Plus généralement, on peut considérer $Tx = \{\beta x + \alpha\}$ où $\beta > 2$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. Ces transformation vérifient (1), (2), (3) et le mélange faible.

2. *La transformation "fraction continue".*

$$Tx = \left\{\frac{1}{x}\right\}, \qquad T(0) = 0.$$

L'opérateur de Perron-Frobenius s'écrit:

$$\phi f(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} f(1/(j+x))(1/(j+x))^2.$$

La condition (3) s'écrit pour $n = 2$:

$$\inf |(T^2)'(x)| = 4$$

et $h(x) = 1/(1+x)\log 2$. Enfin (T, μ) est faiblement mélangeant (même remarque que pour les β-transformations).

1.5. *L'opérateur $P_f(i\theta)$.* Soit $f \in \mathscr{V}$, à valeurs réelles et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $P_f(i\theta)(g) = P(\exp(i\theta f)g)$. L'opérateur $P_f(i\theta)$ s'introduit naturellement dans l'étude du théorème de la limite centrale. En effet, posons:

$$S_n f = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k, \qquad n \geq 1$$

$$S_0 f = 0.$$

On a le lemme suivant:

LEMME 1. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_f^n(i\theta)(g) = P^n(\exp(i\theta S_n f)g)$, $n \geq 0$.*

Cette propriété permet l'étude de la fonction caractéristique de $S_n f$ via les itérées de $P_f(i\theta)$ et donc du spectre de $P_f(i\theta)$.

PREUVE. On a:

$$\begin{aligned} P^n(\exp(i\theta S_n f)g) &= P(P^{n-1}(\exp(i\theta f \circ T^{n-1})\exp(i\theta S_{n-1} f)\cdot g)) \\ &= P_f(i\theta)(P^{n-1}(\exp(i\theta S_{n-1} f)\cdot g)) \end{aligned}$$

car $P^n(f \circ T^n \cdot g) = f \cdot P^n g$ pour $n \geq 1$. □

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons étudier le spectre de $P_f(i\theta)$ lorsque θ est voisin de 0 et aussi pour des valeurs de θ quelconques. Un premier type de résultat est dû à Rellich [8] qui a décrit comment les points isolés du spectre d'un opérateur varient lorsqu'on fait dépendre cet opérateur analytiquement d'un paramètre. La Proposition 4 qui suit permet la démonstration du théorème de la limite centrale.

PROPOSITION 3. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'opérateur $P_f(i\theta)$ est un opérateur continu sur $\mathscr{V}$ (ainsi que sur L^1_μ) et l'application qui à θ fait correspondre $P_f(i\theta)$ est analytique.*

PREUVE.

$$\| P_f(i\theta)g \|_{\mathscr{V}} = \| P(\exp(i\theta f)g) \|_{\mathscr{V}} \leq 2 \| P \|_{\mathscr{V}} \| \exp i\theta f \|_{\mathscr{V}} \| g \|_{\mathscr{V}}.$$

Or

$$\|\exp i\theta f\|_{\mathscr{V}} = v(\exp i\theta f) + 1$$
$$\leq v(\cos \theta f) + v(\sin \theta f) + 1$$
$$\leq 2\,|\theta|\,v(f) + 1$$

d'où $\| P_f(i\theta)(g)\|_{\mathscr{V}} \leq C(\theta)\,\|g\|_{\mathscr{V}}$.

De même

$$\| P_f(i\theta)(g)\|_{1,\mu} \leq \|\exp(i\theta f) g\|_{1,\mu} = \|g\|_{1,\mu}.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} (i\theta)^n/n!\, P(f^n\cdot g)$ est normalement convergente dans $\mathscr{V}$ car

$$|\theta|^n/n!\, \|P(f^n\cdot g)\|_{\mathscr{V}} \leq (2|\theta|)^n/n!\, \|P\|_{\mathscr{V}}\|f\|_{\mathscr{V}}^n\|g\|_{\mathscr{V}}$$

et donc $\theta \to P_f(i\theta)$ est analytique. □

PROPOSITION 4. ([8], [20], [23]) *Il existe un réel $a > 0$ tel que si $|\theta| < a$, alors on ait:*

1) *pour tout $g \in \mathscr{V}$ et $n \geq 1$*

$$P_f^n(i\theta)(g) = \lambda^n(i\theta) N_1(i\theta)(g) + P_2^n(i\theta)(g)$$

où $\lambda(i\theta)$ est l'unique valeur propre de plus grand module de $P_f(i\theta)$ et $|\lambda(i\theta)| > (2 + \rho(Q))/3$.

$N_1(i\theta)$ est la projection sur le sous-espace propre E_θ de dimension 1, correspondant à $\lambda(i\theta)$.

$P_2(i\theta)$ est un opérateur sur $\mathscr{V}$ de rayon spectral

$$\rho(P_2(i\theta)) \leq (1 + 2\rho(Q))/3$$

et $P_2(i\theta)E_\theta = 0$.

2) *les applications $\theta \to \lambda(i\theta)$, $\theta \to N_1(i\theta)$, $\theta \to P_2(i\theta)$ sont analytiques.*

3) $\|P_2^n(i\theta)(1)\|_{\mathscr{V}} \leq C|\theta|\,((1 + 2\rho(Q))/3)^n$ *où C est une constante positive.*

PREUVE. Rappelons brièvement quelques points de la démonstration

1) Soit $R(z)$ la résolvante de P dans $\mathscr{V}$

$$R(z) = 1/(zI - P) = \mu/(z-1) + \sum_{n=0}^{\infty} Q^n/z^{n-1}$$

qui est définie si $|z| > \rho(Q)$ et $z \neq 1$. Posons alors

$$R_{i\theta}(z) = R(z) \sum_{n=0}^{\infty} ((P_f(i\theta) - P)R(z))^n.$$

Si $\|P_f(i\theta) - P\|_{\mathscr{V}} < 1/\|R(z)\|_{\mathscr{V}}$, alors la série précédente converge normalement dans $\mathscr{V}$ et définit la résolvante de $P_f(i\theta)$.

Soient I_1 et I_2 les cercles de centre 1 et 0 et de rayon $\rho_1 = (1 - \rho(Q))/3$ et $\rho_2 = (1 + 2\,\rho(Q))/3$, respectivement. Soit $\delta > 0$, tel que $\delta < \rho_1$ et $\rho(Q) + \delta < \rho_2$. Posons $M_\delta = \sup \|R(z)\|_{\mathscr{V}}$ où la borne supérieure est prise pour $|z| > \rho(Q) + \delta$ et $|z - 1| < \delta$. Si $\|P_f(i\theta) - P\|_{\mathscr{V}} < 1/M_\delta$, les cercles I_1 et I_2 sont dans l'ensemble résolvant de $P_f(i\theta)$. Soient alors les projections

$$N_1(i\theta) = (1/2i\pi) \int_{I_1} R_{i\theta}(z)\, dz$$
$$N_2(i\theta) = (1/2i\pi) \int_{I_2} R_{i\theta}(z)\, dz.$$

Pour $\|N_1(i\theta) - \mu\|_{\mathscr{V}} < 1$, l'image E_θ de $N_1(i\theta)$ est de dimension 1 et on a:

$$P_f(i\theta)N_1(i\theta)(g_\theta) = N_1(i\theta)P_f(i\theta)(g_\theta) = \lambda(i\theta)g_\theta$$

où $g_\theta \in \mathscr{V}$ engendre E_θ. On a donc pour tout $n \geq 1$

$$P_f^n(i\theta) = P_f^n(i\theta)N_1(i\theta) + P_f^n(i\theta)N_2(i\theta) = \lambda^n(i\theta)N_1(i\theta) + P_2^n(i\theta)$$

en posant $P_2^n(i\theta) = (\frac{1}{2}i\pi)\int_{I_2} z^n R_{i\theta}(z)\,dz$.

3) Pour $|\theta| <$ a, on a:

$$R_{i\theta}(z) = R(z) + i\theta\, R_{i\theta}^{(1)}(z)$$

d'où

$$\begin{aligned} P_2^n(i\theta)(1) &= (\tfrac{1}{2}i\pi)\int_{I_2} z^n R(z)(1)\,dz + (\theta/2\pi)\int_{I_2} z^n R_{i\theta}^{(1)}(z)(1)\,dz \\ &= (\theta/2\pi)\int_{I_2} z^n R_{i\theta}^{(1)}(z)(1)\,dz \end{aligned}$$

d'où $\| P_2^n(i\theta)(1)\|_{\mathscr{V}} \leq C\,|\theta|\,\rho_2^n$

avec $C = (\frac{1}{2}\pi)\sup_{|z|=\rho_2, |\theta|<a} \| R_{i\theta}^{(1)}(z)\|_{\mathscr{V}}$ □

Pour démontrer un théorème de la limite locale nous avons besoin, pour tout θ réel, de la description du spectre de $P_f(i\theta)$ fournie par le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu:

PROPOSITION 5. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'opérateur $P_f(i\theta)$ n'a qu'un ensemble fini $G(i\theta)$ de valeurs propres de module* 1. *Pour chaque $\xi \in G(i\theta)$, le sous-espace propre correspondant E_ξ est de dimension finie et contenu dans $\mathscr{V}$. L'opérateur $P_f(i\theta)$ s'écrit alors*:

$$P_f^n(i\theta) = \textstyle\sum_{\xi\in G(i\theta)} \xi^n P_\xi(i\theta) + Q^n(i\theta), \qquad n \geq 1$$

où $P_\xi(i\theta)$ est le projecteur sur E_ξ et l'on a:

$$P_\xi(i\theta)P_{\xi'}(i\theta) = 0 \text{ si } \xi \neq \xi', \qquad P_\xi^2(i\theta) = P_\xi(i\theta)$$

$$P_\xi(i\theta)Q(i\theta) = Q(i\theta)P_\xi(i\theta) = 0.$$

Enfin $Q(i\theta)(\mathscr{V}) \subset \mathscr{V}$ et $\rho(Q(i\theta)) < 1$.

PREUVE. Vérifions la condition (c) du Théorème 1.

$$\begin{aligned} \| P_f^{nN}(i\theta)(g)\|_{\mathscr{V}} &= \| P^{nN}(\exp(i\theta S_{nN}f)g)\|_{\mathscr{V}} \\ &\leq (16/\gamma^N)\,\|1/h\|_{\mathscr{V}}\|h\|_{\mathscr{V}}\|\exp i\theta S_{nN}f\|_{\mathscr{V}}\|g\|_{\mathscr{V}} \\ &\quad + 2\|1/h\|_{\mathscr{V}}(K + 2/\delta + 1)\|g\|_{1,\mu} \end{aligned}$$

où $\gamma = \inf_x |(T^n)'(x)|$.

Or

$$\begin{aligned} \|\exp i\theta S_{nN}f\|_{\mathscr{V}} &= v(\exp i\theta S_{nN}f) + 1 \\ &\leq 2|\theta|\,v(S_{nN}f) + 1 \\ &\leq 2|\theta| \textstyle\sum_{k=0}^{nN-1} v(f\circ T^k) + 1 \\ &\leq 2nN\,|\theta|\,v(f) + 1 \end{aligned}$$

et donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 = nN_0$ tel que

$$(16/\gamma^{N_0})\,\|1/h\|_{\mathscr{V}}\|h\|_{\mathscr{V}}(2nN_0|\theta|\,v(f) + 1) < 1$$ □

2. Le théorème de la limite centrale. Considérons la condition (C) suivante:

(C) *Etant donnée $f \in \mathscr{V}$, l'équation fonctionnelle $f = k + \varphi\circ T - \varphi$ n'admet pas de solution $\varphi \in \mathscr{V}$, $k \in \mathbb{R}$.*

THÉORÈME 2. *Soit T une application de I dans I vérifiant* (1), (2), (3) *et telle que le système dynamique* (T, μ) *soit faiblement mélangeant. Si la condition* (C) *est vérifiée, alors on a*:

$$\sigma^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 ((S_n f - n\mu(f))/\sqrt{n})^2 \, d\mu > 0$$

et pour tout $v \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{(S_n f - n\mu(f))/\sigma\sqrt{n} \leq v\}$$

$$= (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{v} \exp(-u^2/2)\, du \quad \text{où} \quad S_n f = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k, \qquad n \geq 1, \qquad S_0 f = 0.$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans une suite de lemmes. D'après le Lemme 1 et la Proposition 4, pour $|\theta| < a$, on a:

$$\int_0^1 \exp(iS_n f)\, d\mu = \int_0^1 P_f^n(i\theta)(1)\, d\mu = \lambda^n(i\theta) \int_0^1 N_1(i\theta)(1)\, d\mu + \int_0^1 P_2^n(i\theta)(1)\, d\mu.$$

Faisons ensuite le développement limité à l'ordre 2 de $\lambda(i\theta)$:

LEMME 2.

$$\lambda'(0) = \mu(f).$$

PREUVE.

$$\int_0^1 \exp((it/n)S_n f)\, d\mu = \int_0^1 P^n(it/n)(1)\, d\mu$$

D'après la Proposition 4, on a pour n suffisamment grand:

$$\int_0^1 \exp((it/n)S_n f)\, d\mu = \lambda^n(it/n) \int_0^1 N_1(it/n)(1)\, d\mu + \int_0^1 P_2^n(it/n)(1)\, d\mu$$

et $|\int_0^1 P_2^n(it/n)(1)\, d\mu| \leq \|P_2^n(it/n)(1)\|_{\mathscr{V}} \leq C(|t|/n)\rho_2^n$. D'autre part, on a:

$$N_1(it/n) = \mu + (it/n)N_1^{(1)} - (t^2/2n^2)N_1^{(2)} + (t^2/n^2)\bar{N}_1(it/n)$$

où $N_1^{(1)}$, $N_2^{(2)}$, $\bar{N}_1(it/n)$ sont des opérateurs bornés de $\mathscr{V}$,

$$\text{avec } \lim_{n\to\infty} \|\bar{N}_1(it/n)\|_{\mathscr{V}} = 0.$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 N_1(it/n)(1)\, d\mu = 1.$$

De même

$$\lambda(it/n) = 1 + (it/n)\lambda'(0) - (t^2/2n^2)\lambda''(0) + (t^2/n^2)\bar{\lambda}(it/n)$$

où $\lim_{n\to\infty}\bar{\lambda}(it/n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty}\lambda^n(it/n) = \exp(it\,\lambda'(0))$. Comme $\lim_{n\to\infty}(1/n)S_n f = \mu(f)$ presque partout, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\exp it\,\lambda'(0) = \exp it\,\mu(f). \qquad \square$$

Sans perdre en généralité et de façon à simplifier les calculs, nous supposons par la suite que $\mu(f) = 0$.

LEMME 3.

$$\lambda''(0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (S_n f/\sqrt{n})^2 \, d\mu.$$

PREUVE. Remarquons que l'on a:

$$\partial^2/\partial t^2 \left\{ \int_0^1 \exp((it/\sqrt{n})S_n f) \, d\mu \right\}_{|\, t=0} = - \int_0^1 (S_n f/\sqrt{n})^2 \, d\mu.$$

Or d'après Proposition 4

$$\int_0^1 \exp((it/\sqrt{n})S_n f) \, d\mu = \lambda^n (it/\sqrt{n}) \int_0^1 N_1 (it/\sqrt{n})(1) \, d\mu + \int_0^1 P_2^n \, (it/\sqrt{n})(1) \, d\mu.$$

On a aussi

$$P_2^n (it/\sqrt{n})(1) = (\tfrac{1}{2} i\pi) \int_{I_2} z^n R_{it/\sqrt{n}}(z)(1) \, dz.$$

Pour n suffisamment grand et $|z| = \rho_2$, on peut développer $R_{it/\sqrt{n}}$ (z):

$$R_{it/\sqrt{n}}(z) = R(z) + (it/\sqrt{n}) R^{(1)}(z) - (t^2/2n) R^{(2)}(z) + (t^2/n) \bar{R}_{it/\sqrt{n}}(z)$$

où $R^{(1)}(z)$, $R^{(2)}(z)$, $\bar{R}_{it/\sqrt{n}}(z)$ sont des opérateurs bornés de $\mathscr{V}$ et $\lim_{n\to\infty} \| \bar{R}_{it/\sqrt{n}}(z) \|_{\mathscr{V}} = 0$.

L'on a donc:

$$P_2^n(it/\sqrt{n})(1) = (t/2\pi\sqrt{n}) \int_{I_2} z^n R^{(1)}(z)(1) \, dz - (t^2/4i\pi n) \int_{I_2} z^n R^{(2)}(z)(1) \, dz$$

$$- (t^2/2i\pi n) \int_{I_2} z^n \bar{R}_{it/\sqrt{n}}(z)(1) \, dz$$

d'où

$$\left(\partial^2/\partial t\right) \left(\int_0^1 P_2^n(it/\sqrt{n})(1) \, d\mu \right)_{|t=0} = (-\tfrac{1}{2} i\pi n) \int_{I_2} z^n R^{(2)}(z)(1) \, dz.$$

A l'aide des développements de $\lambda(it/\sqrt{n})$ et de $N_1(it/\sqrt{n})$ on obtient de même que:

$$\left(\partial^2/\partial t\right) \left(\lambda^n(it/\sqrt{n}) \int_0^1 N_1(it/\sqrt{n})(1) \, d\mu \right)_{|t=0} = -\lambda''(0) - (1/n) N_1^{(2)}(1).$$

La limite de $\int_0^1 (S_n f/\sqrt{n})^2 \, d\mu$ existe donc et vaut $\lambda''(0)$. □

On peut aussi faire une démonstration directe de l'existence de la limite de $\int_0^1 (S_n f/\sqrt{n})^2 \, d\mu$, car $\rho(Q) < 1$. Donnons maintenant une représentation en termes d'opérateurs de la variance.

LEMME 4. *Posons $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (S_n f/\sqrt{n})^2 \, d\mu$. Alors, on a la représentation suivante pour σ^2:*

$$\sigma^2 = \int_0^1 P(g^2) - (Pg)^2 \, d\mu \qquad \text{où } g = (I - P)^{-1} f.$$

PREUVE. Un calcul classique ([16], page 36) montre que l'on a:

$$\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f.f\circ T^{|k|}\, d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 P^{|k|}f.f\, d\mu$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 Q^{|k|}f.f\, d\mu = \int_0^1 (2g - f)f\, d\mu$$

si l'on pose $g = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k f = \sum_{k=0}^{\infty} P^k f = (I - P)^{-1} f$ on a

$$\sigma^2 = \int_0^1 (g + Pg)(g - Pg)\, d\mu = \int_0^1 P(g^2) - (Pg)^2\, d\mu. \qquad \square$$

LEMME 5.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 P_f^n(it/\sqrt{n})(1)\, d\mu = \exp(-t^2\sigma^2/2).$$

PREUVE. Il suffit de reprendre les développements du Lemme 2 avec $\lambda'(0) = 0$ et où it/n est remplacé par $it/\sqrt{n}$. $\square$

LEMME 6. (FORTET ET LEONOV) $\sigma^2 > 0$ *si et seulement si f n'est pas de la forme*:

$$f = \varphi \circ T - \varphi$$

où $\varphi \in \mathscr{V}$.

PREUVE. La constante k du Théorème 2 est égale à $\mu(f)$. Ici on a $k = 0$. D'après le Lemme 4, on a $\sigma^2 = 0$ si et seulement si $Pg^2 = (Pg)^2$ presque partout soit $\phi(g^2h)\phi(h) = (\phi(gh))^2$

$$\Big(\sum_j g^2(\sigma_j x)h(\sigma_j x)\varphi_j(x)\chi_j(x)\Big)\Big(\sum_j h(\sigma_j x)\varphi_j(x)\chi_j(x)\Big)$$
$$= \Big(\sum_j \big(g(\sigma_j x)h^{1/2}(\sigma_j x)\varphi_j^{1/2}(x)\chi_j(x)\big)\big(h^{1/2}(\sigma_j x)\varphi_j^{1/2}(x)\chi_j(x)\big)\Big)^2$$

d'oú $g(\sigma_j x) = u(x)$ presque partout dans J_j et où u est une fonction indépendante de j. En effet, si dans l'inégalité de Cauchy on a l'égalité, les termes sont proportionnels, et donc on a

$$f(x) = g(x) - Pg(x) = g(x) - g(\sigma_j x) \quad \text{pour tout } j.$$

Or, pour j fixé, il existe au moins un $y \in I_j$ tel que $Ty = x$. Comme $g(\sigma_j x)$ est indépendant de j, on peur donc écrire $f(Ty) = g(Ty) - g(y)$ dans $\mathscr{V}$. Mais on a aussi

$$f = (g - f)\circ T - (g - f) = \varphi \circ T - \varphi. \qquad \square$$

Un cas particulièrement important est celui de l'indicatrice d'un borélien A.

PROPOSITION 6. $\sigma^2 > 0$ *si f est l'indicatrice d'un borélien de I, tel que* $0 < \mu(A) < 1$.

PREUVE. Si $\chi_A = \mu(A) + \varphi\circ T - \varphi$ alors on a:

$$\exp(2\pi i\varphi\circ T) = \exp(-2\pi i\mu(A))\exp(2\pi i\varphi).$$

Comme T est faiblement mélangeante, $\exp(-2\pi i\mu(A)) = 1$ et donc $\mu(A) = 0$ ou 1. $\square$

REMARQUE. Soit φ une fonction mesurable, solution de l'équation fonctionnelle:

$$f = \varphi\circ T - \varphi.$$

Alors on a:

$$S_n f = \varphi \circ T^n - \varphi.$$

Soit $c > 0$, alors

$$\mu(|\varphi \circ T^n/\sqrt{n}| > c) = \mu(|\varphi/\sqrt{n} > c)$$

et donc $S_n f/\sqrt{n} = (\varphi \circ T^n - \varphi)/\sqrt{n}$ tend vers 0 en probabilité. Comme $S_n f/\sqrt{n} \to 0$ en probabilité est équivalent à $\sigma^2 = 0$ il existe, d'après le Lemme 6, $\varphi_1 \in \mathscr{V}$ tel que $f = \varphi_1 \circ T - \varphi_1$. La transformation T étant ergodique, $\varphi - \varphi_1$ est constante et il est équivalent de supposer que l'équation fonctionnelle n'a pas de solution mesurable ou de solution dans $\mathscr{V}$.

3. La vitesse dans le théorème de la limite centrale. La méthode précédente permet de préciser la vitesse de convergence. On obtient ainsi la vitesse exacte en $1/\sqrt{n}$. La démonstration repose sur l'inégalité de Essen [10] et un calcul de développement limité plus poussé que précédemment.

THEOREME 3. *Les hypothèses étant celles du Théorème 2, il existe un constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}$, on ait:*

$$|\mu\{(S_n f - n\mu(f))/\sigma\sqrt{n} \le v\} - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{V} \exp(-u^2/2)\, du| \le C/\sqrt{n}.$$

PREUVE. D'après l'inégalité de Esseen, on a pour tout $U > 0$ et $n \ge 1$:

$$\sup_{v\in R}\left| \mu\{S_n f/\sigma\sqrt{n} \le v\} - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{V} \exp(-u^2/2)\, du \right|$$

$$\le K/U + (1/\pi)\int_{-U}^{U} (1/|u|)\left| \int_0^1 \exp[(iu/\sigma\sqrt{n})S_n f]\, d\mu - \exp(-u^2/2)\, du \right|$$

où $K = 24/\pi\sqrt{2\pi}$. Un calcul de développement limité donne un estimation de

$$\left| \int_0^1 \exp((iu/\sigma\sqrt{n})S_n f) - \exp(-u^2/2)\, d\mu \right|.$$

LEMME 7. *Il existe un réel $a > 0$ tel que pour tout $|u| < a\sqrt{n}$ on ait:*

$$\left| \int_0^1 \exp((iu/\sigma\sqrt{n})S_n f) - \exp(-u^2/2)\, d\mu \right|$$

$$\le \exp(-u^2/4)(2A|u|^3/\sigma^3\sqrt{n} + B|u|/\sigma\sqrt{n}) + (C|u|/\sigma\sqrt{n})\rho_2^n$$

où A, B, C sont des constantes positives.

A l'aide de ce lemme et en posant $U = a\sqrt{n}$, on obtient que:

$$\sup_{v\in R}\left| \mu\{S_n f/\sigma\sqrt{n} \le v\} - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{V} \exp(-u^2/2)\, du \right|$$

$$\le K/a\sqrt{n} + (1/\sqrt{n}) \int_{-a\sqrt{n}}^{a\sqrt{n}} \exp(-u^2/4)(2Au^2 + B/\sigma) + C\rho_2^n/\sigma\sqrt{n}\, du$$

d'où le résultat. □

PREUVE DU LEMME 7. Comme

$$\left| \int_0^1 \exp((iu/\sigma\sqrt{n})S_nf) - \exp(-u^2/2)\, d\mu \right| \leq \int_0^1 | P_f^n(iu\sigma/\sqrt{n})(1) - \exp(-u^2/2)|\, d\mu,$$

on estime la dernière intégrale à l'aide d'un développement limité, poussé ici à l'ordre 3. Il suffit pour cela d'utiliser la Proposition 4, en posant $\theta = u/\sigma\sqrt{n}$

$$\begin{aligned} P_f^n(i\theta) &= \lambda^n(i\theta)N_1(i\theta) + P_2^n(i\theta) \\ &= (1 + i\theta\lambda'(0) - (\theta^2/2)\lambda''(0) - (i\theta^3/6)\lambda^{(3)}(0) + \theta^3\bar{\lambda}(i\theta))^n \\ &\quad \cdot (\mu + i\theta N_1^{(1)} - (\theta^2/2)N_1^{(2)} + \theta^2\bar{N}_1(i\theta)) + P_2^n(i\theta) \\ &= \exp(n(-(\theta^2/2)\sigma^2 + iA_1\theta^3 + \theta^3\varepsilon(\theta))(\mu + i\theta N_1^{(1)} - (\theta^2/2)N_1^{(2)} + \theta^2\bar{N}_1(i\theta)) + P_2^n(i\theta) \end{aligned}$$

où A_1 est une constante et $\lim_{\theta\to 0}\varepsilon(\theta) = 0$. On a donc

$$\int_0^1 | P_f^n(iu\sigma/\sqrt{n})(1) - \exp(-u^2/2)|\, d\mu \leq A_n(u) + B_n(u) + (C\,|\,u\,|\,\sigma/\sqrt{n})\rho_2^n$$

où

$$\begin{aligned} A_n(u) &= \exp(-u^2/2)|\,\exp[iA_1u^3/\sigma^3\sqrt{n} + (u^3/\sigma^3\sqrt{n})\varepsilon(u/\sigma\sqrt{n})] - 1\,| \\ B_n(u) &= \exp(-u^2/2)\exp[iA_1u^3/\sigma^3\sqrt{n} + (u^3/\sigma^3\sqrt{n})\varepsilon(u/\sigma\sqrt{n})] \\ &\quad \cdot \int_0^1 (|\,u\,|/\sigma\sqrt{n})|\; iN_1^{(1)}(1) - (u/2\sigma\sqrt{n})N_1^{(2)}(1) - (u/2\sigma\sqrt{n})\bar{N}_1(iu/\sigma\sqrt{n})(1)|\, d\mu. \end{aligned}$$

On peut trouver un réel $a > 0$ tel que pour $|\,u\,| < a\sqrt{n}$, on ait $2Aa/\sigma^3 < 1/4$ où $A = |\,A_1\,|$

$$|\, iAu^3/\sigma^3\sqrt{n} + (u^3/\sigma^3\sqrt{n})\varepsilon(u/\sigma\sqrt{n})| \leq |\,u\,|\,2Au^2/\sigma^3\sqrt{n} \leq u^2/4$$

et

$$\|\, iN_1^{(1)}(1) - (u/2\sigma\sqrt{n})N_1^{(2)}(1) - (u/2\sigma\sqrt{n})\bar{N}_1(iu/\sigma\sqrt{n})(1)\|_{\mathscr{V}} \leq B.$$

On obtient ainsi le résultat à l'aide de l'inégalité

$$|\, e^z - 1\,| \leq |\,z\,|\exp|\,z\,|. \qquad \square$$

4. Un théorème de la limite locale. On se pose la question du comportement asymtotique de $\mu(S_nf \in \Delta)$ où Δ est un intervalle fini. C'est l'étude du spectre de $P_f(i\theta)$ pour chaque valeur de θ, qui va permettre de donner des renseignements sur ce comportement, alors que dans le théorème de la limite centrale, nous avions regardé le spectre au voisinage de $\theta = 0$.

Considérons la condition (C′) suivante:

(C′) *Il n'existe pas une fonction φ mesurable, un réel η, un réel t strictement positif et une fonction $k(x)$ à valeurs entières tels que:*

$$f(x) = \varphi(Tx) - \varphi(x) + \eta + (2\pi/t)k(x).$$

THEOREME 4. *Sous les hypothèses du Théorème 2 et si f vérifie la condition* (C′), *alors uniformément en z et pour tout intervalle fini Δ, on a*:

$$\lim_{n\to\infty}|\,\sigma\sqrt{n}\,\mu(z + S_nf - n\mu(f) \in \Delta) - (1/\sqrt{2\pi})\exp(-z^2/2\sigma^2n)m(\Delta)\,| = 0.$$

PREUVE. Suivons la démonstration donnée par Breiman [6] dans le cadre des variables aléatoires indépendantes. Soit $g \in L_m^1(\mathbb{R})$, $g(x) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(t)\exp(itx)\,dt$ où $\hat{g}$ est une fonction continue à support compact.

$$\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z+S_nf-n\mu(f))\,d\mu$$
$$=(\sigma\sqrt{n}/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itz)\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\int_0^1 P_f^n(it)(1)\,d\mu\,dt.$$

Supposons que le support de $\hat{g}$ soit inclus dans $[-\delta,\delta]$. D'après la Proposition 4, si $\varepsilon>0$ est donné, il existe un réel $\delta(\varepsilon)$, tel que si $\delta(\varepsilon)<a$ et $|t/\sigma\sqrt{n}\;|<\delta(\varepsilon)$ alors, on a:

$$|\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma)\lambda^n(it/\sigma\sqrt{n})|\leq\exp(-t^2/4)$$

et $\|N_1(t/\sigma\sqrt{n})-\mu\|_{\mathscr{V}}<\varepsilon$.

Comme

$$(1/\sqrt{2\pi})\exp(-z^2/2\sigma^2n)\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,dt=(\hat{g}(0)/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\exp(-t^2/2)\,dt,$$

on a

$$2\pi\left(\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z+S_nf-n\mu(f))\,d\mu-(1/\sqrt{2\pi})\exp(-z^2/2\sigma^2n)\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,dt\right)$$
$$=\sigma\sqrt{n}\int_{|t|<\delta(\varepsilon)}\exp(itz)\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\lambda^n(it)\,dt$$
$$-\hat{g}(0)\int_{|t|<\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\exp(-t^2/2)\,dt$$
$$+\sigma\sqrt{n}\int_{|t|<\delta(\varepsilon)}\exp(itz)\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\lambda^n(it)\int_0^1(N_1(it)(1)-\mu(1))\,d\mu\,dt$$
$$+\sigma\sqrt{n}\int_{|t|<\delta(\varepsilon)}\exp(itz)\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\int_0^1 P_2^n(it)(1)\,d\mu\,dt$$
$$+\sigma\sqrt{n}\int_{\delta(\varepsilon)\leq|t|\leq\delta}\exp(itz)\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\int_0^1 P_2^n(it)(1)\,d\mu\,dt$$
$$-\hat{g}(0)\int_{|t|\geq\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\exp(-t^2/2)\,dt$$
$$=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5.$$

$$A_1=\int_{|t|<\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})[\hat{g}(t/\sigma\sqrt{n})\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma)\lambda^n(it/\sigma\sqrt{n})-\hat{g}(0)\exp(-t^2/2)]\,dt$$

d'où à l'aide du théorème de Lebesgue $\lim_{n\to\infty}\sup_z|A_1|=0$.

$$A_2=\int_{|t|<\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\hat{g}(t/\sigma\sqrt{n})\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma)$$
$$\cdot\lambda^n(it/\sigma\sqrt{n})\int_0^1(N_1(it/\sigma\sqrt{n})(1)-\mu(1))\,d\mu\,dt$$

et donc

$$|A_2| \leq \varepsilon \|\hat{g}\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/4)\, dt, \text{ d'où } \lim_{n\to\infty} \sup_z |A_2| = 0.$$

$$|A_3| \leq \sigma\sqrt{n}\,\delta(\varepsilon) C\rho_2^n \|\hat{g}\|_\infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} \sup_n |A_3| = 0.$$

$$|A_5| \leq |\hat{g}(0)| \int_{|t|\geq\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}} \exp(-t^2/2)\, dt \text{ et } \lim_{n\to\infty} \sup_z |A_5| = 0.$$

Pour que A_4 tende vers 0, il faut que pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, l'opérateur $P_f(it)$ n'admette pas de fonction propre g_t de valeur propre ζ_t de module 1, d'après la Proposition 5. Si c'est le cas, on a alors:

$$A_4 = \sigma\sqrt{n} \int_{\delta(\varepsilon)\leq|t|\leq\delta} \exp(itz)\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f)) \int_0^1 Q^n(it)(1)\, d\mu\, dt$$

et

$$|A_4| \leq \sigma\sqrt{n}\,\|\hat{g}\|_\infty \int_{\delta(\varepsilon)\leq|t|\leq\delta} C\rho^n(Q(it))\, dt.$$

Comme $t \to P_f(it) = Q(it)$ est continue, $\rho(Q(it))$ est semi-continue supérieurement et atteint son maximum, qui est strictement inférieur à 1 et $\lim_{n\to\infty} \sup_z |A_4| = 0$. Le Théorème 4 sera donc vérifié si pour $t \neq 0$, l'équation

$$P_f(it)(g_t) = \zeta_t g_t$$

n'a pas de solution dans $\mathscr{V}$, où $|\zeta_t| = 1$, d'où en passant aux modules $P|g_t| \geq |g_t|$ et donc $\mu(P|g_t|) \geq \mu|g_t|$, ce qui implique $P|g_t| = |g_t|$. Or 1 est l'unique fonction laissée invariante par P, donc g_t est une fonction de module 1. Si l'on revient à l'équation $P_f(it)g_t = \zeta_t g_t$, l'on voit que la seule possibilité est alors que

$$\exp(itf(\sigma_j x))g_t(\sigma_j x) = \zeta_t g_t(Tx)$$

soit

$$\exp(itf(x))g_t(x) = \zeta_t g_t(Tx)$$

et en prenant le logarithme

$$itf(x) = \log g_t(Tx) - \log g_t(x) + \log \xi_t + 2\pi i k(x). \qquad \square$$

Il existe donc φ mesurable et $\eta \in \mathbb{R}$, tels que:

$$f(x) = \varphi(Tx) - \varphi(x) + \eta + (2\pi/t)k(x)\,\square.$$

REMARQUE. Dans un voisinage de 0, d'après la démonstration du Théorème 2

$$\zeta_t = \lambda(it) = 1 - \sigma^2 t^2/2 + \varepsilon(it)$$

où $\lim_{t\to 0}\varepsilon(it) = 0$. Ainsi pour t petit, on a $|\zeta_t| < 1$. Le sous-groupe de $\mathbb{R}$ formé des t tels que $P_f(it)g_t = \zeta_t g_t$ qui est fermé, est donc discret.

Il reste à traiter un cas particulièrement intéressant. C'est celui où $f(x)$ prend ses valeurs dans un réseau:

$$f(x) = \eta + (2\pi/t)k(x).$$

Sans perdre en généralité, on peut supposer que $2\pi/t = 1$.

THEOREME 5. *Sous les hypothèses du Théorème 2 et si f est de la forme*:

$$f(x) = \eta + k(x)$$

où k est une fonction à valeurs entières, d'intégrale non-entière et η *un réel alors on a*:

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \sigma\sqrt{n}\, \mu(z + S_n f - n\mu(f) \in \Delta) - (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2\sigma^2 n) \nu(\Delta - z - n(\eta - \mu(f))) \Big| = 0$$

uniformément pour tout z réel et Δ *intervalle fini et où* ν *est la mesure de dénombrement sur* $\mathbb{Z}$.

PREUVE. D'après la démonstration de la Proposition 6, σ^2 est strictement positif car $\mu(k)$ n'est pas entier. Reprenons les calculs du Théorème 3:

$$\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f - n\mu(f))\, d\mu = (\sigma\sqrt{n}/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itz) \hat{g}(t) \exp(-itn\mu(f)) \int_0^1 P_f^n(it)(1)\, d\mu\, dt.$$

Si $f(x) = \eta + k(x)$, alors on a:

$$S_n f = n\eta + S_n k$$

et donc

$$\int_0^1 P_f^n(it)(1)\, d\mu = \exp(itn\eta) \int_0^1 P_k^n(it)(1)\, d\mu.$$

La fonction $t \to \int_0^1 P_k^n(it)(1)\, d\mu$ est périodique de période 2π et l'opérateur a des valeurs propres de module 1 pour les t entiers. En découpant en intervalles de longueur 2π et en changeant de variable, on obtient:

$$\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f - n\mu(f))\, d\mu = (1/2\pi) \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} G(t/\sigma\sqrt{n}) \exp(itz/\sigma\sqrt{n}) \exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma) \int_0^1 P_f^n(it/\sigma\sqrt{n})(1)\, d\mu\, dt \quad \square$$

où

$$G(u) = \textstyle\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi\ell z) \hat{g}(u + 2\pi\ell) \exp[i2\pi\ell n(\eta - \mu(f))]$$

et donc

$$2\pi \Big| \sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f - n\mu(f))\, d\mu - (1/\sqrt{2}\pi) \exp(-z^2/2\sigma^2 n) \int_{-\infty}^{\infty} g(z + n(\eta - \mu(f)) + x)\, d\nu(x) \Big|$$

$$\leq \left| \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} \exp(itz/\sigma\sqrt{n})(G(t/\sigma\sqrt{n})\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma) \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^1 P_f^n(it/\sigma\sqrt{n})(1)\, d\mu - \exp(-t^2/2) \int_{-\infty}^{\infty} g(z + n(\eta - \mu(f)) + x)\nu(dx)\, dt \right|$$

$$+ \left| \int_{|t| \geq \pi\sigma\sqrt{n}} \exp(itz/\sigma\sqrt{n})\exp(-t^2/2)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} g(z + n(\eta - \mu(f)) + x)\nu(dx) \right|$$

$$= A_1 + A_2.$$

Pour le premier terme, il suffit de regarder la limite de:

$$G(t/\sigma\sqrt{n})\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma) \int_0^1 P_f^n(it/\sigma\sqrt{n})(1)\, d\mu$$

quand $n \to \infty$ et d'appliquer le théorème de Lebesgue.

Or $$\lim_{n\to\infty} \exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma) \int_0^1 P_f^n(it/\sigma\sqrt{n})(1)\, d\mu = \exp(-t^2/2).$$

Il suffit donc de calculer $G(0)$, à l'aide de la formule de Poisson:

$$\begin{aligned} G(0) &= \textstyle\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi\ell z)\hat{g}(2\pi\ell)\exp(i2\pi\ell n(\eta - \mu(f))) \\ &= \textstyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} g(z + n(\eta - \mu(f)) + p). \end{aligned}$$

D'après la démonstration du Théorème 3 et comme $G(u)$ tend vers $G(0)$ uniformément en z et que G est bornée indépendamment de z, on déduit que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_z |A_1| = 0.$$

On voit aussi aisément que $\lim_{n\to\infty} \sup_z |A_2| = 0$. □

Remarque. Si $f(x)$ est l'indicatrice d'un intervalle $[a, b]$ de I, on retrouve en particulier le théorème de Moskvin et Postnikov pour la transformation "$(2x)$mod 1":

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma\sqrt{n}\mu(S_n f = p) - (1/\sqrt{2\pi})\exp(-(p - n(b-a))^2/2n\sigma^2)| = 0$$

où $p \in N$. Les théorèmes de ce type se généralise donc à une application de I dans I, vérifiant (1), (2), (3) et faiblement mélangeante, pour l'indicatrice d'un borélien de I.

REFERENCES

[1] Adler, R. L. (1973). *F*-expansions revisited. Springer Lecture Notes **318** 1–5.
[2] Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York.
[3] Boyarsky, A. et Scarowsky, M. (1979). On a class of transformations which have unique absolutely continuous invariant measures. *Trans. Amer. Math. Soc.* **255** 243–262.
[4] Bowen, R. (1977). Bernoulli maps of the interval. *Israel J. Math* **28** 161–168.
[5] Bowen, R. (1979). Invariant measures for Markov maps of the interval. *Comm. Math. Phys.* **69** 1–17.
[6] Breiman, L. (1968). *Probability.* Addison-Wesley, Reading, Mass.
[7] Doeblin, W. (1940). Remarques sur la théorie métrique des fractions continues. *Compositio Math.* **7** 353–371.
[8] Dunford, N. et Schwartz, J. T. (1967). *Linear Operators*, part I. Interscience, New York.

[9] FORTET, R. (1940). Sur une suite également répartie. *Studia Math.* **9** 54–69.
[10] GNEDENKO, B. V. et KOLMOGOROV, A. N. (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.* Addison-Wesley, Reading, Mass.
[11] GORDIN, M. I. (1968). Stochastic processes generated by number-theoretic endomorphisms. *Soviet Math. Dokl.* **9** 1234–1237.
[12] GORDIN, M. I. (1969). The central limit theorem for stationary processes. *Soviet Math. Dokl.* **10** 1174–1176.
[13] GORDIN, M. I. et LIFŠIC, B. A. (1978). The central limit theorem for stationary Markov processes. *Soviet Math. Dokl.* **19** 392–394.
[14] HOFBAUER, F. et KELLER, G. (1982). Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Math. Z.* **180** 119–140.
[15] IONESCU TULCEA, C. T. et MARINESCU, G. (1946). Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues. *Ann. Math.* **47** 140–147.
[16] KAC, M. (1946). On the distribution of sums of the type $\sum f(2^k t)$. *Ann. Math.* **47** 33–49.
[17] KELLER, G. (1978). Piecewise monotonic transformations and exactness. Séminaires de Probabilités de Rennes—Rennes.
[18] KELLER, G. (1980). Un théorème de la limite centrale pour une classe de transformations monotones par morceaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **291** 155–158.
[19] LASOTA, A. et YORKE, J. A. (1973). On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** 481–488.
[20] LE PAGE, E. (1982). Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires, Oberwolfach. *Springer Lectures Notes* **928** 258–303.
[21] LI, T. Y. et YORKE, J. A. (1978). Ergodic transformations from an interval into itself. *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** 183–192.
[22] MOSKVIN, D. A. et POSTNIKOV, A. G. (1978). A local limit theorem for the distribution of fractional parts of an exponential function. *Theor. Probab. Appl.* **23** 521–528.
[23] NAGAEV, S. V. (1957). Some limit theorems for stationary Markov chains. *Theor. Probab. Appl.* **2** 378–406.
[24] NORMAN, F. (1972). *Markov Process and Learning Models.* Academic, New York.
[25] PARRY, W. (1960). On the β-expansions of real numbers. *Acta Math. Acad. Sc. Hungar.* **11** 401–416.
[26] PHILIPP, W. (1970). Some metrical theorems in number theory II. *Duke Math. J.* **38** 447–458.
[27] PHILIPP, W. (1971). Mixing sequences of random variables and probabilistic number theory. *Mem. Amer. Math. Soc. 114.* Published by Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.
[28] PIANIGIANI, G. (1980). First return map and invariant measures. *Israel J. Math.* **35** 32–48.
[29] RENYI, A. (1957). Representation for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sc. Hungar.* **8** 477–493.
[30] WONG, S. (1978). Some metric properties of piecewise monotonic mappings of the unit interval. *Trans. Amer. Math. Soc.* **246** 493–500.
[31] WONG, S. (1979). A central limit theorem for piecewise monotonic mappings of the unit interval. *Ann. Probab.* **7** 500–514.
[32] WONG, S. (1980). Hölder continuous derivatives and ergodic theory. *J. London Math. Soc.* **22** 506–520.

I.R.M.A.R.
UNIVERSITE DE RENNES 1
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX
FRANCE