ÜBER GEWISSE KLASSEN DOPPELTPERIODISCHER FUNKTIONEN

VON

FRIEDHELM ERWE

in Bonn

§ 1. Einführung

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $\mathfrak{f}(z)$ des komplexen Arguments $z = x + iy$ (x, y reell) lauten:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathfrak{f} = 0.$$

Man kann nun die Frage nach denjenigen in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ bis zur Ordnung $n+1$ stetig differentiierbaren Funktionen $\mathfrak{f}$ stellen, die dem Differentialgleichungssystem

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}\mathfrak{f} = 0$$

genügen. Dabei bedeutet $(\partial/\partial x + i(\partial/\partial y))^{n+1}$ den $(n+1)$-mal angewandten Differentialoperator $\partial/\partial x + i(\partial/\partial y)$, also nicht anderes als den Differentialoperator

$$\sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu} i^{\nu}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1-\nu}\,\partial y^{\nu}}.$$

Sukzessive Integration zeigt sofort, daß die Menge der Lösungen dieses Systems übereinstimmt mit der Menge $\mathfrak{H}^n(\mathfrak{G})$ der Funktionen

$$\mathfrak{f}(z) = f_0(z) + f_1(z)\,\bar{z} + \cdots + f_n(z)\,\bar{z}^n \tag{1}$$

mit in $\mathfrak{G}$ regulären Funktionen $f_0(z)$, $f_1(z)$, ... $f_n(z)$. Abgesehen davon, daß die funktionentheoretischen Eigenschaften dieser Klasse an sich einer Untersuchung wert sein dürften, ergibt sich von diesen Funktionen aus ein bequemer Zugang zu anderen Fragen. Z. B. beherrschen sie auch die Differentialgleichung

10 – 573804. *Acta mathematica*. 97. Imprimé le 14 juin 1957.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{n+1} \mathfrak{g}=0.$$

E. Peschl konnte nämlich zeigen, daß die Menge der reellen Lösungen $\mathfrak{g}$ dieser Differentialgleichung übereinstimmt mit der Menge der Realteile der Funktionen aus $\mathfrak{H}^n(\mathfrak{G})$.

Sei jetzt $\mathfrak{G}$ speziell die ganze Ebene mit Ausnahme von höchstens isolierten Punkten, und werde zusätzlich gefordert, daß auch in diesen Punkten die Koeffizientenfunktionen f_ν aus (1) noch meromorph sind. Die Vereinigungsmenge aller derartigen Funktionenklassen (bei festem n) wollen wir mit $\mathfrak{M}^n$ bezeichnen. Cl. Müller hat die Untersuchung der doppeltperiodischen unter diesen Funktionen angeregt. Er wurde dazu durch die Frage nach den Werten Heckescher Zetafunktionen

$$\zeta(N;\,2;\,s)=\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{\Re(\omega^N)}{|\omega|^{N+s}}\,{}^1, \qquad N \text{ ganze Zahl, } \Re s>2, \tag{2}$$

geführt. Ω ist dabei der von den Zahlen 1, i erzeugte Modul komplexer Zahlen. Die Funktionen

$$\frac{\bar z^n}{z^{n+2}}+\sum_{\omega\in\Omega}{}'\left(\frac{(\bar z-\bar\omega)^n}{(z-\omega)^{n+2}}-\frac{\bar\omega^n}{\omega^{n+2}}\right), \tag{3}$$

die natürlich der Klasse $\mathfrak{M}^n$ angehören und, wie man leicht zeigt, doppeltperiodisch mit Ω als genauem Periodenmodul sind, bieten einen Zugang zu solchen Fragen, wie Cl. Müller für die Fälle $n=1$ und $n=2$ nachwies. Sein Bemühen richtet sich dabei auf die Herleitung einer Differentialgleichung für die Funktionen (3), die dann Aussagen über die Ausdrücke (2) zu machen gestattet. Entsprechende Untersuchungen für beliebiges n enthält diese Arbeit. — Eine Drucklegung der Ergebnisse von Cl. Müller ist noch nicht erfolgt. In einem Vortrag, den er im Rahmen des mathematischen Kolloquiums an der Universität Bonn im Wintersemester 1956/57 gehalten hat, legte er seine Untersuchungen zu diesem Thema dar, und mit seinem freundlichen Einverständnis darf ich unter Bezugnahme auf diesen Vortrag meine eigenen darauf aufbauenden Untersuchungen veröffentlichen. Ich bin Herrn Cl. Müller zu großem Dank verpflichtet und hoffe, hier in der Einleitung und auch später im Text seinen entscheidenden Anteil an der Behandlung der Fragen gebührend hervorgehoben zu haben.

Die Aufklärung der algebraischen Struktur der Menge der doppeltperiodischen unter den Funktionen aus $\mathfrak{M}^n$ eröffnete neue Möglichkeiten auch zur Behandlung der Aus-

---

[1] Der $'$ am Summenzeichen besagt wie üblich, daß bei der Summation $\omega=0$ auszulassen ist.

drücke (2), und die in dieser Richtung verlaufenden Untersuchungen bilden den Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit. Als vielleicht wichtigstes Resultat ergab sich dabei, daß der ζ-Wert $\zeta(4r;\,2;\,2t) = \sum_{\omega\in\Omega}' \frac{\bar{\omega}^{2r-t}}{\omega^{2r+t}}$ für natürliche Zahlen r, t mit $2 \leq t \leq 2r$ ein rationales Vielfaches von ω_1^{2t}/π^{2r-t} ist. Diese Aussage findet sich für den Fall $n = 0$ bei Hurwitz [1] $\left(\omega_1 = 2\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^4}}\right)$.

Die Klasse der Funktionen (1) mit meromorphen (gemeint ist stets: in der ganzen Ebene meromorphen) Koeffizientenfunktionen $f_0, f_1, \ldots f_n$ wollten wir mit $\mathfrak{M}^n$ bezeichnen; $\mathfrak{M}^0$ ist also der Körper der meromorphen Funktionen selbst. Es erweist sich als zweckmäßig, noch $\mathfrak{M}^{-1}$ als die nur aus der Konstanten 0 bestehende Funktionenmenge zu definieren. Die Vereinigung aller $\mathfrak{M}^n$ wird $\mathfrak{M}$ genannt. — Die meromorphen Koeffizientenfunktionen f_ν einer Funktion $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}$ in einer Darstellung (1) sind eindeutig bestimmt. Wir dürfen also etwa $f_\nu = K_\nu\{\mathfrak{f}\}$ schreiben.

Die Menge derjenigen Funktionen aus $\mathfrak{M}^n$, die alle Zahlen eines gegebenen Moduls Ω zu Perioden haben, d. h. deren Periodenmodul Ω umfaßt, werde mit $\mathfrak{E}^n(\Omega)$ bezeichnet, oder kurz mit $\mathfrak{E}^n$, wenn wir uns auf einen Modul Ω festgelegt haben und auf seine immer wiederholte Angabe verzichten können. Selbstverständlich ist $\mathfrak{E}^{n-1}(\Omega) \subseteq \mathfrak{E}^n(\Omega)$. Die Vereinigung aller $\mathfrak{E}^n(\Omega)$ (bei festem Ω) wird $\mathfrak{E}(\Omega)$ genannt oder kurz $\mathfrak{E}$. — Schließlich wollen wir noch die Menge aller als ν-te Koeffizientenfunktion $K_\nu\{\mathfrak{f}\}$ von Funktionen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n(\Omega)$ vorkommenden meromorphen Funktionen mit $\mathfrak{K}_\nu^n(\Omega)$ bezeichnen oder kurz mit $\mathfrak{K}_\nu^n$. Es gilt wieder $\mathfrak{K}_\nu^{n-1} \subseteq \mathfrak{K}_\nu^n$.

$\mathfrak{E}$ ist ein Integritätsbereich mit Einselement. Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, die schon in $\mathfrak{M}$ gilt, da $\mathfrak{M}$ als zum Ring der Polynome über $\mathfrak{M}^0$ in einer Unbestimmten isomorphe Menge Hauptidealring ist, gestattet den Beweis des folgenden Sachverhaltes, der nicht in diese Arbeit aufgenommen wurde und nur am Rande erwähnt sei: *Die Menge derjenigen Funktionen des Quotientenkörpers von $\mathfrak{M}$, die jedes $\omega \in \Omega$ zur Periode haben, ist gerade der Quotientenkörper von $\mathfrak{E}(\Omega)$.*

Zum Schluß dieser Einführung sei ein kurzer Bericht über den Inhalt der folgenden Paragraphen gegeben. § 2 bringt vorbereitend einige später zu benutzende Sätze über die Klasse $\mathfrak{M}$. — § 3 beschäftigt sich allgemein mit den Funktionen aus $\mathfrak{E}^n$ und $\mathfrak{K}_\nu^n$. Die als Periodenmoduln vorkommenden Moduln zweiter Art (Hurwitz-Courant [3]) konnten leicht charakterisiert und die zugehörigen Funktionen beschrieben werden. Von den Moduln erster Art interessierten nicht so sehr diejenigen mit einem erzeugenden Element als vielmehr die mit einem primitiven Erzeugendenpaar ω_1, ω_2 (wir nennen einen solchen Modul auch ein Gitter), die wir stets so numerieren wollen, daß

$$\mathfrak{J}(\bar{\omega}_1 \omega_2) > 0$$

ist, eine Festsetzung, die sich bei gewissen der zu benutzenden Formeln auswirkt. — Ein Differenzengleichungssystem, das die Funktionen aus $\mathfrak{K}_\nu^n$ erfüllen, ist der Anlaß, in § 4 allgemein derartige Systeme zu untersuchen. — § 5 bringt die *verallgemeinerten Weierstraßschen $\wp$-Funktionen*, wie man die von Cl. Müller eingeführten Funktionen (3) wohl nennen könnte, ihre Differentialgleichungen und im Anschluß daran die Untersuchung der Ausdrücke (2). Es konnte hier nicht alles geklärt werden. — In § 6 werden Nutzanwendungen auf die Fälle des quadratischen Gitters und des Sechseckgitters gezogen. — § 7 schließlich behandelt die Frage beschränkter Funktionen aus $\mathfrak{E}^n$, die von E. Peschl angeregt wurde.

§ 2. Einige Sätze über die Funktionen aus $\mathfrak{M}$

Die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

lassen sich auf jede in einer Umgebung eines Punktes z_0 definierte, in z_0 partiell nach x und y differentiierbare komplexe Funktion $\mathfrak{f}(z)$ der reellen Veränderlichen x, y $(z = x + iy)$ in z_0 anwenden. Bei den nötigen Voraussetzungen über Differentiierbarkeit und Stetigkeit der Ableitungen (zwecks Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge) der Funktion $\mathfrak{f}(z)$ läßt sich der durch Iteration in üblicher Weise erklärte Operator $\partial^{k+l}/\partial z^k \partial \bar{z}^l$, den wir, wenn wir auf die Angabe der Variablen z verzichten dürfen, ohne Mißverständnisse hervorzurufen, auch kurz $D^{k,l}$ schreiben wollen, auf $\mathfrak{f}(z)$ anwenden. Für die von uns betrachteten Funktionen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}$ ist dieser Operator in der ganzen Ebene bis auf höchstens isolierte Punkte (Pole der Koeffizientenfunktionen) anwendbar, und zwar für beliebige ganze Zahlen $k, l \geq 0$ (selbstverständlich ist $D^{0,0}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ zu verabreden). Es ist $(f_\nu \in \mathfrak{M}^0)$:

$$D^{1,0}(f_0 + f_1\bar{z} + f_2\bar{z}^2 + \cdots + f_n\bar{z}^n) = f_0' + f_1'\bar{z} + f_2'\bar{z}^2 + \cdots + f_n'\bar{z}^n \in \mathfrak{M},$$
$$D^{0,1}(f_0 + f_1\bar{z} + f_2\bar{z}^2 + \cdots + f_n\bar{z}^n) = f_1 + 2f_2\bar{z} + \cdots + nf_n\bar{z}^{n-1} \in \mathfrak{M}.$$

Aus
$$\mathfrak{f}(z) = f_0 + f_1\bar{z} + \cdots + f_n\bar{z}^n \equiv 0, \quad f_\nu \in \mathfrak{M}^0 \tag{4}$$

folgt
$$D^{0,n}\mathfrak{f}(z) = n!\, f_n \equiv 0,$$

also $f_n \equiv 0$. Durch indirekten Beweis oder durch Induktion erhalten wir also, daß alle f_ν in (4) identisch verschwinden müssen. D. h. das Funktionensystem $1, \bar{z}, \ldots \bar{z}^n$ ist linear unabhängig über $\mathfrak{M}^0$. Nach leichten ergänzenden Überlegungen haben wir damit den

SATZ 1. *$\mathfrak{M}^n$ ist ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum über $\mathfrak{M}^0$ mit $1, \bar{z}, \bar{z}^2, \ldots \bar{z}^n$ als einer Minimalbasis. Ein Funktionensystem*

$$\mathfrak{f}_\mu = \sum_{\nu=0}^{n} f_{\mu\nu} \bar{z}^\nu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n),\ f_{\mu\nu} \in \mathfrak{M}^0,$$

ist genau dann eine Minimalbasis, wenn die Determinante der Matrix $(f_{\mu\nu})$ $(\mu, \nu = 0, 1, \ldots n)$ nicht die Konstante 0 ist, also jedenfalls dann, wenn

$$\mathfrak{f}_\mu \in \mathfrak{M}^\mu,\ \notin \mathfrak{M}^{\mu-1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n)$$

ist, speziell, wenn $\qquad \mathfrak{f}_\mu = \mathfrak{f}_1^\mu \ (\mu = 0, 1, \ldots n), \qquad \mathfrak{f}_1 \in \mathfrak{M}^1,\ \notin \mathfrak{M}^0,$

ist.

In Matrizenschreibweise lautet (1):

$$\mathfrak{f}(z) = (f_0, f_1, f_2, \ldots f_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{z} \\ \bar{z}^2 \\ \vdots \\ \bar{z}^n \end{pmatrix},$$

und wenn wir k-mal partiell nach z differentiieren $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$, so haben wir

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ D^{1,0}\mathfrak{f} \\ D^{2,0}\mathfrak{f} \\ \vdots \\ D^{n,0}\mathfrak{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & \ldots f_n \\ f_0', & f_1', & f_2', & \ldots f_n' \\ f_0'', & f_1'', & f_2'', & \ldots f_n'' \\ \ldots & & & \\ f_0^{(n)}, & f_1^{(n)}, & f_2^{(n)}, & \ldots f_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{z} \\ \bar{z}^2 \\ \vdots \\ \bar{z}^n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Wird (5) k-mal nach $\bar{z}$ differentiiert $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$, und wird der Matrizenoperator

$$\begin{pmatrix} D^{0,0} & D^{0,1} & D^{0,2} & \ldots D^{0,n} \\ D^{1,0} & D^{1,1} & D^{1,2} & \ldots D^{1,n} \\ D^{2,0} & D^{2,1} & D^{2,2} & \ldots D^{2,n} \\ \ldots & & & \\ D^{n,0} & D^{n,1} & D^{n,2} & \ldots D^{n,n} \end{pmatrix} = \Delta_n$$

eingeführt, so haben wir die Matrizengleichung

$$\Delta_n \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & \dots f_n \\ f_0', & f_1', & f_2', & \dots f_n' \\ f_0'', & f_1'', & f_2'', & \dots f_n'' \\ \dots & & & \\ f_0^{(n)}, & f_1^{(n)}, & f_2^{(n)}, & \dots f_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \bar{z} & 1 & & 0 \\ \bar{z}^2 & 2\bar{z} & & \\ \dots & & & \\ \bar{z}^n & n\bar{z}^{n-1} & \dots & n! \end{pmatrix}.$$

Determinantenbildung und Beachtung des Determinantenmultiplikationssatzes führt zum folgenden Satz ($W\{f_0, f_1, \dots f_n\}$ sei die Wronskideterminante von $f_0, f_1, \dots f_n$):

Satz 2. *Wenn* $\mathfrak{f} = f_0 + f_1 \bar{z} + \dots + f_n \bar{z}^n$, $f_\nu \in \mathfrak{M}^0$, *so gilt:*

$$\det \Delta_n \mathfrak{f} = c_n \, W\{f_0, f_1, \dots f_n\} \qquad \left(c_n = \prod_{\nu=0}^{n} (\nu!)\right). \tag{6}$$

Um das Verhalten einer Funktion $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}^n$ in der Umgebung eines Punktes z_0 etwas näher zu studieren, schreiben wir die Reihenentwicklung

$$\mathfrak{f}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=r}^{\infty} a_{\mu\nu} (z - z_0)^\mu (\bar{z} - \bar{z}_0)^\nu \tag{7}$$

(dabei ist r eine von z_0 abhängige ganze Zahl) in der Form

$$\mathfrak{f}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=r}^{\infty} a_{\mu\nu} (z - z_0)^{\mu+\nu} \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}\right)^\nu. \tag{8}$$

Wenn die Menge der in $|z| > 0$ definierten Funktionen

$$\mathfrak{r}(z) = A_0 + A_1 \frac{\bar{z}}{z} + \dots + A_n \frac{\bar{z}^n}{z^n} \tag{9}$$

mit Konstanten $A_0, A_1, \dots A_n$ mit $\mathfrak{R}^n$ bezeichnet wird, so läßt sich (8) in der Form

$$\mathfrak{f}(z) = \sum_{\mu=r}^{\infty} \mathfrak{r}_\mu (z - z_0) \cdot (z - z_0)^\mu, \qquad \mathfrak{r}_\mu \in \mathfrak{R}^n,$$

mit

$$\mathfrak{r}_\mu(z) = \sum_{\nu=0}^{\min(n, \mu-r)} a_{\mu-\nu, \nu} \frac{\bar{z}^\nu}{z^\nu}$$

schreiben. Es kann nun sehr wohl vorkommen, daß $\mathfrak{r}_r \equiv 0$ ist, auch wenn in (7) der Index r größtmöglich gewählt war (d. h. nicht alle $a_{r\nu} = 0$ $(\nu = 0, 1, \dots n)$, was natürlich $\mathfrak{f} \not\equiv 0$ voraussetzt). Der kleinste Index μ, für den $\mathfrak{r}_\mu \not\equiv 0$ ist ($\mathfrak{f} \not\equiv 0$), sei s:

$$\mathfrak{f}(z) = \sum_{\mu=s}^{\infty} \mathfrak{r}_\mu (z - z_0) \cdot (z - z_0)^\mu, \qquad \mathfrak{r}_s \not\equiv 0. \tag{10}$$

s heißt die Ordnung der Funktion $\mathfrak{f}(z)$ im Punkte z_0 und wird mit $\underset{z_0}{\mathfrak{o}}\{\mathfrak{f}(z)\}$ bezeichnet.

In den folgenden Überlegungen wollen wir der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber z_0 zu 0 normieren. Das Ergebnis gilt aber allgemein und wird auch in der allgemeinen Form später als Satz formuliert. Sei jetzt also in einer in 0 punktierten Umgebung des Nullpunktes

$$\mathfrak{f}(z) = \sum_{\mu=s}^{\infty} \mathfrak{r}_\mu(z) \cdot z^\mu, \qquad \mathfrak{r}_\mu \in \mathfrak{R}^n,\ \mathfrak{r}_s \not\equiv 0. \tag{11}$$

Für $s=0$, erst recht also für $s>0$, ergibt sich die Beschränktheit von $\mathfrak{f}(z)$ in einer (punktierten) Umgebung des Nullpunktes. Es ist nämlich für $s=0$

$$|\mathfrak{f}(z)| \leq \sum_{\mu=0}^{n-1} |\mathfrak{r}_\mu(z)|\,|z|^\mu + \left|\sum_{\mu=n}^{\infty} \mathfrak{r}_\mu(z)\, z^\mu\right|. \tag{12}$$

Die Funktion $\sum\limits_{\mu=n}^{\infty} \mathfrak{r}_\mu(z)\, z^\mu$ besitzt bei Entwicklung nach Potenzen von $\bar{z}$ lauter in 0 reguläre (regulär ergänzbare!) Koeffizientenfunktionen, ist also in einer Umgebung von 0 beschränkt. Da ferner in einer punktierten Umgebung von 0, ja, in der ganzen in 0 punktierten Ebene jede der Funktionen (9) aus $\mathfrak{R}^n$ beschränkt ist, nämlich

$$\left|A_0 + A_1 \frac{\bar{z}}{z} + \cdots + A_n \frac{\bar{z}^n}{z^n}\right| \leq |A_0| + |A_1| + \cdots + |A_n|,$$

folgt gemäß (12) sofort die behauptete Beschränktheit von $\mathfrak{f}(z)$. — Jetzt folgt auch leicht, daß $\mathfrak{f}(z) \to \mathfrak{o}$ strebt für $z \to 0$, falls nur in (11) $s>0$ ist, einfach derhalb, weil $\mathfrak{f}(z)$ das Produkt von z und einer Funktion einer Ordnung ≥ 0, also einer in der Nähe von 0 beschränkten Funktion ist.

Jede Funktion aus $\mathfrak{R}^n$ ist auf einer Geraden durch 0 konstant; (9) nimmt auf der Geraden $z = \varepsilon t$ (ε mit $|\varepsilon| = 1$ fest, t beliebig reell) überall die Zahl $A_0 + A_1 \bar{\varepsilon}^2 + \cdots + A_n \bar{\varepsilon}^{2n}$ an. — Sei nun $s<0$. Auf jeder Geraden durch 0, auf der $r_s(z) \neq 0$ (und das sind alle bis auf höchstens n Ausnahmen), gilt: Die Funktion

$$\sum_{\mu=s}^{\infty} \mathfrak{r}_\mu(z)\, z^{\mu-s} = \mathfrak{r}_s(z) + \sum_{\mu=s+1}^{\infty} \mathfrak{r}_\mu(z)\, z^{\mu-s}$$

strebt für $z \to 0$ (Annäherung nur auf der Geraden) gegen einen Grenzwert, nämlich den Wert von $\mathfrak{r}_s(z)$ auf dieser Geraden, und dieser Grenzwert ist $\neq 0$. Deshalb strebt auf jeder solchen Geraden die Funktion

$$\mathfrak{f}(z) = z^s \cdot \sum_{\mu=s}^{\infty} \mathfrak{r}_\mu(z)\, z^{\mu-s}$$

gegen ∞.

Für $s=0$ gilt noch, wie man ähnlich leicht einsieht, daß die Menge der Häufungswerte von $\mathfrak{f}(z)$ beim Grenzübergang $z \to 0$ gleich der Menge der Werte von $\mathfrak{r}_0(z)$ ist, ja, nach Vorangegangenem gilt dies auch für $s>0$, da in diesem Fall $\mathfrak{r}_0 \equiv 0$ zu setzen ist.

SATZ 3. *Eine Funktion* $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}^n$ *ist genau dann in einer (genügend kleinen) Umgebung von* z_0 *beschränkt, wenn* $\underset{z_0}{\mathfrak{o}}\{\mathfrak{f}\} \geq 0$ *ist, sie strebt genau dann gegen* 0 *für* $z \to z_0$, *wenn* $\underset{z_0}{\mathfrak{o}}\{\mathfrak{f}\} > 0$ ist.

§ 3. Allgemeines über periodische Funktionen aus $\mathfrak{M}$

Sei ω eine Periode der Funktionen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \in \mathfrak{M}$. Dann haben $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2$ auch die Periode ω. Ebenso klar ist, daß mit $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}$ auch $D^{1,0}\mathfrak{f}$ und $D^{0,1}\mathfrak{f}$ $(\in \mathfrak{M})$ die Periode ω haben.

SATZ 4. *Wenn* ω *eine Periode von* $\mathfrak{f} = f_0 + f_1 \bar{z} + \cdots + f_n \bar{z}^n$ $(f_\nu \in \mathfrak{M}^0)$ *ist, so gilt:*

$$f_\lambda(z+\omega) - f_\lambda(z) = \sum_{\nu=\lambda+1}^{n} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{\nu}{\lambda} \bar{\omega}^{\nu-\lambda} f_\nu(z) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n) \tag{13}$$

$\left(\textit{dabei ist wie üblich } \sum_{\lambda=n+1}^{n} \cdots = 0 \textit{ zu interpretieren}\right).$

Beweis: Der Beweis braucht nur für $\lambda = 0$ geführt zu werden, denn mit $\mathfrak{f} = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(z)\bar{z}^\nu$ hat auch

$$\frac{1}{\lambda!} D^{0,\lambda}\mathfrak{f} = \sum_{\nu=\lambda}^{n} \binom{\nu}{\lambda} f_\nu(z)\bar{z}^{\nu-\lambda} \tag{14}$$

die Periode ω, und die Formel (13) mit $\lambda = 0$, auf die Funktion (14) statt auf $\mathfrak{f}$ selbst angewandt, liefert die allgemeine Formel (13).

Mit ω ist auch $-\omega$ Periode von $\mathfrak{f}$. Es gilt also für alle z

$$\mathfrak{f}(z-\omega) = \mathfrak{f}(z),$$

d. h.

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(z-\omega)(\bar{z}-\bar{\omega})^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(z)\bar{z}^\nu. \tag{15}$$

Vergleich der von $\bar{z}$ freien Anteile liefert (Anwendung von Satz 1):

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(z-\omega)(-\bar{\omega})^\nu = f_0(z).$$

Wenn jetzt z durch $z+\omega$ ersetzt wird, steht die behauptete Formel da. (Vergleich der Koeffizientenfunktionen von $\bar{z}^{\lambda}$ in (15) liefert übrigens die Formel (13) für beliebiges λ.)

Satz 5. *Seien $w_0, w_1, \dots w_n$ beliebige Perioden von $\mathfrak{f} = f_0 + f_1 \bar{z} + \cdots + f_n \bar{z}^n$ ($f_\nu \in \mathfrak{M}^0$), dann gilt:*

$$\underset{w_\lambda, w_{\lambda+1}, \dots w_n}{\Delta} f_\lambda(z) \equiv 0.^{1} \tag{16}$$

Der Beweis ergibt sich rekursiv unmittelbar aus Satz 4. Für $\lambda = n$ ist (16) eine Aussage von Satz 4. Der Schritt von $\lambda+1$ zu λ $(0 \leq \lambda < n)$ geht so vor sich: (13) besagt für $\omega = w_\lambda$

$$\underset{w_\lambda}{\Delta} f_\lambda(z) = \sum_{\nu=\lambda+1}^{n} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{\nu}{\lambda} \bar{w}_\lambda^{\nu-\lambda} f_\nu(z).$$

Wird hier die Differenz mit den Spannen $w_{\lambda+1}, \dots w_n$ gebildet und die Linearität der Operation der Differenzbildung beachtet, so haben wir

$$\underset{w_\lambda, w_{\lambda+1}, \dots w_n}{\Delta} f_\lambda(z) = \sum_{\nu=\lambda+1}^{n} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{\nu}{\lambda} \bar{w}_\lambda^{\nu-\lambda} \underset{w_{\lambda+1}, \dots w_n}{\Delta} f_\nu(z).$$

Diese Gleichung läßt sofort den rekurrenten Schluß zu: Aus $\underset{w_\nu, \dots w_n}{\Delta} f_\nu = 0$ $(\nu = \lambda+1, \dots n)$, also erst recht $\underset{w_{\lambda+1}, \dots w_n}{\Delta} f_\nu = 0$, folgt $\underset{w_\lambda, \dots w_n}{\Delta} f_\lambda = 0$, w. z. b. w.

In diesen Sätzen war die Moduleigenschaft der Periodenmannigfaltigkeit belanglos. Wir wollen uns jetzt aber den Periodenmoduln zuwenden und zunächst untersuchen, wann ein solcher von der zweiten Art ist.

Satz 6. *Das zu $\mathfrak{M}^n$ gehörige Polynom*

$$\mathfrak{f} = a_0 + a_1(\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z}) + \cdots + a_n (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z})^n, \qquad |\varepsilon| = 1, \tag{17}$$

($a_0, a_1, \dots a_n$ konstante Zahlen) hat genau die Menge aller Zahlen $\omega = \varepsilon t$ (t beliebig reell) zu Perioden, wenn nicht alle $a_1, \dots a_n$ verschwinden, d. h. wenn $\mathfrak{f} \notin \mathfrak{M}^0$ (wenn $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}^0$, also in diesem Fall $\mathfrak{f}$ eine Konstante ist, so ist jede Zahl Periode).

Beweis: Daß jede Zahl εt (t reell) Periode von (17) ist, ist leicht zu verifizieren (es genügt zu prüfen, daß εt Periode von $\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z}$ ist).

---

[1] Wir bedienen uns der in der Differenzenrechnung üblichen Bezeichnung $\underset{a_1, \dots a_k}{\Delta} f(z)$ für die k-te Differenz von $f(z)$ mit den Spannen $a_1, \dots a_k$.

Sei nun $\omega \neq 0$ eine Periode von (17). Dann ist ω auch Periode von

$$-\frac{1}{n} a_{n-1} + \frac{1}{n!} D^{0,\, n-1} \mathfrak{f} = a_n (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z}).$$

Wir haben hier schon $n \geq 1$ angenommen und können weiter o. B. d. A. $a_n \neq 0$ setzen. Dann muß ω auch Periode von $\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z}$ sein, d. h. es muß $\bar{\varepsilon} \omega - \varepsilon \bar{\omega} = 0$ gelten, also $\bar{\varepsilon} \omega$ reell sein, w. z. b. w.

S ATZ 7. *Der Periodenmodul einer Funktion $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}$ ist genau dann von der zweiten Art, wenn $\mathfrak{f}$ ein Polynom von $\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z}$ ist* ($|\varepsilon| = 1$).

Beweis: Wenn $\mathfrak{f}$ ein solches Polynom ist, so ist sein Periodenmodul von der zweiten Art, wie Satz 6 zeigt.

In der anderen Richtung beweisen wir den Satz durch Induktion über den Index n der $\mathfrak{f}$ enthaltenden Funktionenklasse $\mathfrak{M}^n$. Für $n = 0$ ist der Satz klassisch. Sei nun $\mathfrak{f} = f_0 + f_1 \bar{z}$ (f_0, $f_1 \in \mathfrak{M}^0$, $f_1 \not\equiv 0$) mit in 0 sich häufenden Perioden. Zumindest diese Perioden haben auch $D^{0,1} \mathfrak{f} = f_1$, woraus $f_1 = \text{constans}$ folgt, und $D^{1,0} \mathfrak{f} = f_0' + f_1' \bar{z} = f_0'$, woraus $f_0' = \text{constans}$ folgt. Es gilt also, wenn ω eine Periode $\neq 0$ ist,

$$\mathfrak{f} = a_0 + a_1 \bar{\varepsilon} z - a_1^* \varepsilon \bar{z} \qquad \left(\varepsilon = \frac{\omega}{|\omega|}\right)$$

mit geeigneten Konstanten a_0, a_1, a_1^*. $\mathfrak{f}(z + \omega) = \mathfrak{f}(z)$ besagt nun

$$a_1 \bar{\varepsilon} \omega - a_1^* \varepsilon \bar{w} = 0,$$

d. h.

$$a_1^* = a_1.$$

Damit ist die Aussage auch für $n = 1$ bewiesen. — Werde sie nun für den Index $n - 1$ als bewiesen angenommen ($n \geq 2$). Habe $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}^n$, $\notin \mathfrak{M}^{n-1}$ beliebig kleine Perioden. Dann hat diese Perioden auch $D^{0,1} \mathfrak{f} \in \mathfrak{M}^{n-1}$, $\notin \mathfrak{M}^{n-2}$, so daß gemäß Induktionsvoraussetzung etwa

$$D^{0,1} \mathfrak{f} = -\varepsilon \left(a_1 + 2 a_2 (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z}) + \cdots + n a_n (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z})^{n-1}\right) \tag{18}$$

folgt, und zwar mit geeigneten Konstanten a_1, a_2, … a_n ($a_n \neq 0$) und einem geeigneten ε mit $|\varepsilon| = 1$. Also ist

$$\mathfrak{f} = a_0(z) + a_1 (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z}) + a_2 (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z})^2 + \cdots + a_n (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z})^n \tag{19}$$

mit $a_0(z) \in \mathfrak{M}^0$. Wegen $a_n \neq 0$, $n \geq 2$ können wir Satz 6 entnehmen, daß die Perioden von (18), also auch die von $\mathfrak{f}$ selbst, höchstens auf der Geraden $\omega = \varepsilon t$ (t reell) liegen. Jede derartige Periode ist aber auch Periode von

$$a_1(\bar{\varepsilon} z-\varepsilon \bar{z})+a_2(\bar{\varepsilon} z-\varepsilon \bar{z})^2+\cdots+a_n(\bar{\varepsilon} z-\varepsilon \bar{z})^n,$$

also auch von

$$\mathfrak{f}-(a_1(\bar{\varepsilon} z-\varepsilon \bar{z})+a_2(\bar{\varepsilon} z-\varepsilon \bar{z})^2+\cdots+a_n(\bar{\varepsilon} z-\varepsilon \bar{z})^n)=a_0(z),$$

woraus $a_0(z)=$ constans folgt, w. z. b. w.

An Periodenmoduln erster Art treten bekanntlich die mit einem erzeugenden Element und die mit zwei unabhängigen erzeugenden Elementen auf. Nachdem wir somit eine Übersicht über die vorkommenden Periodenmoduln erhalten haben, können wir uns anderen Fragen zuwenden, dabei stets einen Periodenmodul Ω zugrundelegend, auf dessen dauernde Erwähnung aber verzichtet wird. Der zugrunde gelegte Modul Ω mag dabei immer von der ersten Art sein. Zwar bleibt vieles auch für Moduln zweiter Art gültig, aber all das ist von uns bereits erledigt und würde uns nur belasten.

SATZ 8. *$\mathfrak{E}^n$ ist ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathfrak{E}^0$ als Skalarenbereich. Insbesondere gibt es also Funktionen $\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \ldots \mathfrak{f}_n \in \mathfrak{E}_n$ derart, daß zu jedem $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$ eine Darstellung*

$$\mathfrak{f}=u_0 \mathfrak{f}_0+u_1 \mathfrak{f}_1+\cdots+u_n \mathfrak{f}_n \tag{20}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $u_0, u_1, \ldots u_n \in \mathfrak{E}^0$ existiert.

Beweis: Zunächst werde bewiesen, daß es Funktionen $\mathfrak{f}_\nu \in \mathfrak{E}^\nu$ gibt, die nicht zu $\mathfrak{E}^{\nu-1}$ gehören. Wir brauchen das nur für $\nu=1$ zu beweisen, denn mit $\mathfrak{f}_1 \in \mathfrak{E}^1, \notin \mathfrak{E}^0$ ist $\mathfrak{f}_\nu=\mathfrak{f}_1^\nu \in \mathfrak{E}^\nu, \notin \mathfrak{E}^{\nu-1}$.

Wenn Ω von einem einzigen Element erzeugt wird, etwa von εt_0 ($|\varepsilon|=1$, t_0 reell) so ist, wie wir wissen,

$$\mathfrak{f}_1=\bar{\varepsilon} z-\varepsilon \bar{z}$$

eine geeignete solche Funktion. Wenn Ω ein Gitter ist, so ist, wie die Theorie der Weierstraßschen $\wp$-Funktion zeigt, durch die Reihe $\sum\limits_{\omega\in\Omega}' \dfrac{\bar{z}-\bar{\omega}}{(z-\omega)^4}$ in der ganzen Ebene bis auf die Gitterpunkte eine Funktion $\mathfrak{f}_1$ definiert, die zu $\mathfrak{E}^1$, nicht aber zu $\mathfrak{E}^0$ gehört.

Wir beweisen nun durch Induktion, daß zu jedem $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$ eine Darstellung (20) mit $u_\nu \in \mathfrak{E}^0$ existiert, wenn $\mathfrak{f}_\nu \in \mathfrak{E}^\nu, \notin \mathfrak{E}^{\nu-1}$ ($\mathfrak{E}^{-1}$ besteht nach Verabredung nur aus der Konstanten 0). Daß diese Darstellung dann eindeutig ist, wissen wir aus Satz 1.

Für $n=0$ ist die Behauptung trivial, da $\mathfrak{E}^0$ ein Körper ist. Sei sie nun für den Index $n-1$ bewiesen, und sei

$$\mathfrak{f} \;= f_0 + f_1 \bar{z} + \cdots + f_n \bar{z}^n \in \mathfrak{E}^n, \tag{21}$$

$$\mathfrak{f}_n = f_{n0} + f_{n1} \bar{z} + \cdots + f_{nn} \bar{z}^n \in \mathfrak{E}^n, \;\; \notin \mathfrak{E}^{n-1} \tag{22}$$

(f_ν, $f_{n\nu} \in \mathfrak{M}^0$). Da auch $(1/n!)\, D^{0,\,n}\, \mathfrak{f} = f_n \in \mathfrak{E}^n$, also sogar $f_n \in \mathfrak{E}^0$, und ebenso $f_{nn} \in \mathfrak{E}^0$ ist, aber $f_{nn} \not\equiv 0$, so gilt auch:

$$\mathfrak{f} - \frac{f_n}{f_{nn}} \mathfrak{f}_n \in \mathfrak{E}^n,$$

ja, weil in $\mathfrak{f} - (f_n/f_{nn})\, \mathfrak{f}_n$ der Koeffizient von $\bar{z}^n$ verschwindet, gilt schon

$$\mathfrak{f} - \frac{f_n}{f_{nn}} \mathfrak{f}_n \in \mathfrak{E}^{n-1},$$

nach Induktionsvoraussetzung also etwa

$$\mathfrak{f} - \frac{f_n}{f_{nn}} \mathfrak{f}_n = u_0\, \mathfrak{f}_0 + u_1\, \mathfrak{f}_1 + \cdots + u_{n-1}\, \mathfrak{f}_{n-1}$$

mit $u_0, u_1, \ldots u_{n-1} \in \mathfrak{E}^0$ und natürlich auch $u_n = f_n/f_{nn} \in \mathfrak{E}^0$.

In Ergänzung dieses Satzes wollen wir noch die explizite Beziehung zwischen den Funktionen $f_0, f_1, \ldots f_n$ aus (21) und $u_0, u_1, \ldots u_n$ aus (20) herstellen, wenn als Minimalbasis des Vektorraumes $\mathfrak{E}^n$ ein System $1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_1^2, \ldots, \mathfrak{f}_1^n$ mit $\mathfrak{f}_1 \in \mathfrak{E}^1$, $\notin \mathfrak{E}^0$ zugrunde gelegt wird. Dabei können wir sogar o. B. d. A. $\mathfrak{f}_1$ in der Form $\mathfrak{f}_1 = v + \bar{z}\; (v \in \mathfrak{M}^0)$ annehmen.

SATZ 9. *Sei* $\mathfrak{f}_1 = v + \bar{z} \in \mathfrak{E}^1$, *und gelte*

$$\mathfrak{f} = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu\, \bar{z}^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu\, \mathfrak{f}_1^\nu, \qquad f_\nu \in \mathfrak{M}^0, \;\; u_\nu \in \mathfrak{E}^0, \tag{23}$$

so ist

$$f_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} v^{\mu-\nu}\, u_\mu, \tag{24}$$

$$u_\mu = \sum_{\nu=\mu}^{n} (-1)^{\nu-\mu} \binom{\nu}{\mu} v^{\nu-\mu} f_\nu. \tag{25}$$

Beweis: (24) folgt unmittelbar durch Vergleich der Koeffizienten von $\bar{z}^\nu$ in (23), während sich (25) aus (24) unter Beachtung der Formel

$$\sum_{\nu=\mu}^{n} (-1)^{\nu-\mu} \binom{\nu}{\mu} \binom{\lambda}{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \mu \\ 0 & \text{für } \lambda > \mu \end{cases} \tag{26}$$

ergibt.

Wir zeigen nun, daß das System $1, v, v^2, \ldots v^k$ linear unabhängig über $\mathfrak{E}^0$ ist. Für $k=0$ ist das trivial. Sei es nun für einen Index $k-1 \geq 0$ als bewiesen angenommen. Wenn in

$$\sum_{\nu=0}^{k} u_\nu v^\nu \equiv 0$$

$u_k \equiv 0$ ist, so sind wir nach Induktionsvoraussetzung fertig. $u_k \not\equiv 0$ wollen wir nun zum Widerspruch führen.

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{u_\nu}{u_k} v^\nu + v^k \equiv 0.$$

Differentiation liefert:

$$\sum_{\nu=0}^{k-2} \left(\left(\frac{u_\nu}{u_k} \right)' + \frac{u_{\nu+1}}{u_k} (\nu+1)\, v' \right) v^\nu + \left(\left(\frac{u_{k-1}}{u_k} \right)' + k\, v' \right) v^{k-1} \equiv 0.$$

Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt speziell

$$\left(\frac{u_{k-1}}{u_k} \right)' + k\, v' \equiv 0$$

(man beachte nämlich, daß $v' = D^{1,0} \mathfrak{f}_1 \in \mathfrak{E}^0$ ist), d. h.

$$\frac{u_{k-1}}{u_k} + k\, v \equiv c = \text{constans}.$$

Wir wählen nun eine Periode $\omega \neq 0$ aus Ω. Die Funktion $u_{k-1}/u_k - c$ besitzt diese Periode, während gemäß Satz 4

$$v(z+\omega) - v(z) = -\bar{\omega}$$

gilt. Damit sind wir zum Widerspruch gekommen.

Da sich die Menge der Funktionen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$ und die Menge der $(n+1)$-Tupel $(u_0, u_1, \ldots u_n)$ von Funktionen aus $\mathfrak{E}^0$ gemäß (23) umkehrbar eindeutig entsprechen, führen beliebige Funktionen $u_\nu, u_{\nu+1}, \ldots u_n \in \mathfrak{E}^0$ gemäß (24) zu einer Funktion $f_\nu \in \mathfrak{K}_\nu^n$ und existieren umgekehrt zu jedem $f_\nu \in \mathfrak{K}_\nu^n$ Funktionen $u_\nu, u_{\nu+1}, \ldots u_n \in \mathfrak{E}^0$, so daß (24) gilt. Da außerdem die Funktion v zu jeder der Mengen $\mathfrak{K}_\nu^n$ $(\nu < n)$ gehört (es ist nämlich $\frac{1}{\nu+1}(v+\bar{z})^{\nu+1} = \cdots + v\bar{z}^\nu + \frac{1}{\nu+1}\bar{z}^{\nu+1} \in \mathfrak{E}^n$), ist die Menge $\mathfrak{K}_\nu^n$ ein Vektorraum über $\mathfrak{E}^0$ mit $1, v, \ldots v^{n-\nu}$ als einer Basis. Es wurde aber vorher bereits gezeigt, daß das Funktionensystem $1, v, \ldots v^{n-\nu}$ linear unabhängig über $\mathfrak{E}^0$ ist, so daß $n-\nu+1$ die

Dimension des Vektorraumes ist. — Als besonders bemerkenswert heben wir aus diesem Resultat das Bestehen der Gleichung

$$\mathfrak{K}_\nu^n = \mathfrak{K}_0^{n-\nu}$$

hervor. Daß $\mathfrak{K}_\nu^n \subseteq \mathfrak{K}_{\nu-1}^{n-1}$ $(\nu \geq 1)$,

also letzten Endes $\mathfrak{K}_\nu^n \subseteq \mathfrak{K}_0^{n-\nu}$

gilt, folgt unmittelbar aus der Feststellung, daß mit $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$ gilt: $D^{0,1}\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^{n-1}$.

SATZ 10. *$\mathfrak{K}_\nu^n$ ist für $0 \leq \nu \leq n$ ein $(n-\nu+1)$-dimensionaler Vektorraum über $\mathfrak{E}^0$ mit $1, v, \dots v^{n-\nu}$ als einer Minimalbasis* $(v + \bar{z} \in \mathfrak{E}^1)$.[1]

Wir stellen jetzt die Frage nach der Bestimmtheit einer Funktion $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}$ nach Vorgabe ihrer ν-ten Koeffizientenfunktion $K_\nu\{\mathfrak{f}\}$. Sei also f beliebig aus einer Klasse $\mathfrak{K}_\nu^n$ vorgegeben $(0 \leq \nu \leq n)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Funktionen

$$u_\nu, u_{\nu+1}, \dots u_n \in \mathfrak{E}^0,$$

so daß

$$f = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} v^{\mu-\nu} u_\mu \tag{27}$$

gilt. Gemäß (24) sind damit die Funktionen $f = f_\nu, f_{\nu+1}, \dots f_n$ in (23) zu berechnen. Für zwei Funktionen $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}^* \in \mathfrak{E}$ mit der gleichen ν-ten Koeffizientenfunktion gilt also jedenfalls, daß $\mathfrak{f} - \mathfrak{f}^* \in \mathfrak{M}^{\nu-1}$, also $\mathfrak{f} - \mathfrak{f}^* \in \mathfrak{E}^{\nu-1}$ ist. Andererseits ändert eine additive Funktion aus $\mathfrak{E}^{\nu-1}$ die ν-te Koeffizientenfunktion nicht. Wir haben also

SATZ 11. *Die Menge aller Funktionen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$, die die gleiche ν-te Koeffizientenfunktion besitzen, läßt sich durch*

---

[1] Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß die Auszeichnung des Nullpunktes, die bei der Definition der Funktionenmengen $\mathfrak{K}_\nu^n$ vorlag, dadurch nämlich, daß in einem Ansatz

$$\mathfrak{f} = \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu (\bar{z} - \bar{z}_0)^\mu, \qquad g_\mu \in \mathfrak{M}^0,$$

z_0 zu 0 normiert wurde, belanglos ist. Koeffizientenvergleich mit (23) liefert nämlich

$$g_\mu = \sum_{\nu=\mu}^{n} \binom{\nu}{\mu} f_\nu \bar{z}_0^{\nu-\mu},$$

und mit $f_\mu \in \mathfrak{K}_\mu^n$ gilt auch $f_\nu \in \mathfrak{K}_\mu^n$ für $\nu \geq \mu$, also auch $g_\mu \in \mathfrak{K}_\mu^n$.

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^* + \mathfrak{g}$$

charakterisieren, wo $\mathfrak{f}^*$ *eine derartige Funktion aus* $\mathfrak{E}^n$ *ist, und* $\mathfrak{g}$ *alle Funktionen aus* $\mathfrak{E}^{\nu-1}$ *durchläuft.*[1]

SATZ 12. *Jede Funktion* $f \in \mathfrak{K}_0^n$, $\notin \mathfrak{K}_0^{n-1}$ $(n \geq 1)$ *genügt einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit Koeffizientenfunktionen und Störfunktion aus* $\mathfrak{E}^0$, *und zwar von folgender spezieller Form:*

$$W\{f, f_1, \dots f_n\} = \varphi.^2 \tag{28}$$

Beweis: Es gibt eine (nach Satz 11 eindeutig bestimmte) Funktion $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$, die $f = f_0$ zur nullten Koeffizientenfunktion besitzt. Wir wählen $f_1, \dots f_n$ der Reihe nach als die übrigen Koeffizientenfunktionen und weisen für sie die Behauptung nach. Daß $\varphi = W\{f_0, f_1, \dots f_n\} \in \mathfrak{E}^0$, ist aus Satz 2 herauszulesen, da mit $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$ jedenfalls auch $\det \Delta_n \mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$ gilt. Der Beweis zu Satz 2 zeigt aber, wie wir zu beweisen haben, daß die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung (28), nämlich die Funktionen

$$(-1)^\nu \det \begin{pmatrix} f_1, & f_2, & \dots f_n \\ \dots \\ f_1^{(\nu-1)}, & f_2^{(\nu-1)}, & \dots f_n^{(\nu-1)} \\ f_1^{(\nu+1)}, & f_2^{(\nu+1)}, & \dots f_n^{(\nu+1)} \\ \dots \\ f_1^{(n)}, & f_2^{(n)}, & \dots f_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

zu $\mathfrak{E}^0$ gehören. — Es bleibt nur noch einzusehen, daß (28) die Ordnung n hat, d. h. daß

$$W(f_1, f_2, \dots f_n) \not\equiv 0.$$

In geringfügiger Abwandlung hiervon (wie geringfügig die Abwandlung ist, wird einige Zeilen tiefer deutlich) haben wir also zu beweisen:

---

[1] Jetzt ist der folgende Sachverhalt unmittelbar einleuchtend: Wenn gemäß Satz 10

$$K_0\{\mathfrak{f}\} = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu v^\nu$$

gilt, so ist

$$\mathfrak{f} = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu (v + \bar{z})^\nu.$$

[2] Es sei erwähnt, daß sich auf Grund der Determinantenformel

$$W\{f_1, \dots f_n\}\,(W\{f, f_1, \dots f_{n-1}\})' - (W\{f_1, \dots f_n\})'\, W\{f, f_1, \dots f_{n-1}\} = -W\{f_1, \dots f_{n-1}\}\, W\{f, f_1, \dots f_n\},$$

die für $n \geq 2$, bei geeigneter Interpretation auch noch für $n = 1$ gilt, diese Differentialgleichung durch Quadraturen lösen läßt.

Satz 13. *Wenn* $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^n$, $\notin \mathfrak{E}^{n-1}$ *die Darstellung*

$$\mathfrak{f} = f_0 + f_1 \bar{z} + \cdots + f_n \bar{z}^n, \quad f_\nu \in \mathfrak{M}^0,$$

hat (*also* $f_n \not\equiv 0$), *so ist*

$$W\{f_0, f_1, \ldots f_n\} \not\equiv 0.$$

Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Sei sie nun für den Index $n - 1 \geq 0$ als bewiesen angenommen. Wir wollen $W\{f_0, f_1, \ldots f_n\} \equiv 0$ zum Widerspruch führen. Da $D^{0,1}\mathfrak{f} = f_1 + 2 f_2 \bar{z} + \cdots + n f_n \bar{z}^{n-1} \in \mathfrak{E}^{n-1}$, $\notin \mathfrak{E}^{n-2}$ ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$W\{f_1, 2 f_2, \ldots n f_n\} \not\equiv 0,$$

also auch

$$W\{f_1, f_2, \ldots f_n\} \not\equiv 0.$$

Deshalb gibt es bekanntlich eindeutig bestimmte Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$, so daß

$$f_0 \equiv c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n \tag{29}$$

ist (siehe z. B.: Kowalewski [4]). Gleichung (29) schreiben wir für das Argument $z + \omega$ hin ($\omega \neq 0$ aus Ω) und benutzen sofort Satz 4 (statt $f_\nu(z)$ schreiben wir wie bisher einfach f_ν):

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \bar{\omega}^\nu f_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{n} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{\nu}{\lambda} \bar{\omega}^{\nu-\lambda} f_\nu.$$

Schon der Vergleich des Koeffizienten von f_1 mit dem in (29) führt zum Widerspruch:

$$c_1 + \bar{\omega} = c_1.$$

Schließlich sollen noch zwei Sätze Erwähnung finden, die sich auf Periodengitter Ω beziehen, also auf einen Periodenmodul erster Art mit einem primitiven Erzeugendenpaar. Die Beweise kann man durch Induktion führen, ähnlich wie bei Satz 7.

Satz 14. *Nur die Konstanten sind in* $\mathfrak{E}^n$ *elementare Funktionen*[1] (Ω *Periodengitter*).

Satz 15. *Wenn* $\mathfrak{f} = f_0 + f_1 \bar{z} + \cdots + f_n \bar{z}^n \in \mathfrak{E}^n$, *und wenn die* f_ν *ganze Funktionen sind* ($\nu = 0, 1, \ldots n$), *so ist* $\mathfrak{f}$ *eine Konstante* (Ω *Periodengitter*).[2]

---

[1] Gemeint sind Funktionen, die sich durch Hintereinanderschalten von rationalen Funktionen und Exponentialfunktionen ergeben.

[2] Es sei erwähnt, daß bei einem Periodenmodul Ω mit einer Erzeugenden εt_0 ($|\varepsilon| = 1$, t_0 reell) die Menge der die Voraussetzungen des Satzes erfüllenden Funktionen durch

$$\mathfrak{f} = u_0 + u_1 (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z}) + \cdots + u_n (\bar{\varepsilon} z - \varepsilon \bar{z})^n$$

gegen ist, wo $u_0, u_1, \ldots u_n$ (eindeutig bestimmte) ganze Funktionen aus $\mathfrak{E}^0$ sind.

An diesen letzten Satz schließt sich die Frage an, ob es außer den Konstanten noch beschränkte Funktionen aus $\mathfrak{E}$ gibt. Daß $\mathfrak{M}$ solche Funktionen aufweist, zeigen die Funktionen aus $\mathfrak{R}^n$ (siehe § 2); aber auch gewisse unendliche Reihen aus solchen Funktionen haben diese Eigenschaft. Überraschenderweise gibt es nun auch nicht-elementare doppeltperiodische beschränkte Funktionen. § 7 bringt ein Beispiel hierzu, bei dem auf Satz 3 und auf § 6 zurückgegriffen wird.

§ 4. Über ein Differenzengleichungssystem

Im folgenden soll der zugrunde gelegte Periodenmodul Ω stets ein Gitter sein. Unter ω_1, ω_2 wollen wir immer ein primitives Periodenpaar verstehen, und zwar in einer solchen Numerierung, daß

$$\mathfrak{J}(\bar{\omega}_1 \omega_2) > 0$$

ist.

Satz 5 legt die Behandlung des folgenden Systems von Differenzengleichungen nahe:

$$\underset{w_0, w_1, \dots w_n}{\Delta} f(z) = 0 \quad \text{für beliebige} \quad w_0, w_1, \dots w_n \in \Omega. \tag{30}$$

Daneben können wir uns die Behandlung des Systems

$$\underset{w_0, w_1, \dots w_n}{\Delta} f(z) = 0 \quad \text{für beliebige der Werte } \omega_1, \omega_2 \text{ fähige Zahlen } w_0, w_1, \dots w_n \tag{31}$$

zur Aufgabe stellen. Die Menge der meromorphen Lösungen von (30) bzw. (31) werde mit $\mathfrak{E}_n$ bzw. $\mathfrak{E}_n^*$ bezeichnet. Trivialerweise ist

$$\mathfrak{E}_n \subseteq \mathfrak{E}_n^*. \tag{32}$$

Es wird sich zeigen, daß hier das Gleichheitszeichen gilt.

Die Menge der Funktionen

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} u_{\mu\nu} z^{\mu} \zeta^{\nu-\mu}, \; u_{\mu\nu} \in \mathfrak{E}^0, \tag{33}$$

wo $\zeta = \zeta(z)$ die Weierstraßsche ζ-Funktion zu dem Modul Ω bedeutet, werde mit $\mathfrak{Z}_n$ bezeichnet. Der Hauptsatz, den wir anstreben, ist, die Gleichheit von $\mathfrak{Z}_n$ und $\mathfrak{E}_n$ zu beweisen.

Zweckmäßigerweise verabreden wir noch, daß $\mathfrak{E}_{-1} = \mathfrak{E}^*_{-1} = \mathfrak{Z}_{-1}$ die aus der Konstanten 0 allein bestehende Funktionenmenge ist.

Durch Differenzbildung mit der Spanne $\omega \in \Omega$ ergibt sich aus (33), wenn man beachtet, daß diese Differenzbildung eine über $\mathfrak{F}^0$ lineare Operation ist:

$$\Delta_\omega f = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} u_{\mu\nu} \Delta_\omega (z^\mu \zeta^{\nu-\mu}).$$

Üblicherweise wird
$$\Delta_\omega \zeta = \eta \tag{34}$$
gesetzt, und es ergibt sich dann

$$\Delta_\omega (z^\mu \zeta^{\nu-\mu}) = (z+\omega)^\mu (\zeta+\eta)^{\nu-\mu} - z^\mu \zeta^{\nu-\mu}$$
$$= \sum_{\substack{\varrho=0 \\ \tau=\varrho+\sigma<\nu}}^{\mu} \sum_{\sigma=0}^{\nu-\mu} \binom{\mu}{\varrho} \binom{\nu-\mu}{\sigma} \omega^{\mu-\varrho} \eta^{\nu-\mu-\sigma} z^\varrho \zeta^\sigma,$$

also
$$\Delta_\omega f = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\substack{\varrho=0 \\ \tau=\varrho+\sigma<\nu}}^{\mu} \sum_{\sigma=0}^{\nu-\mu} u_{\mu\nu} \binom{\mu}{\varrho} \binom{\nu-\mu}{\sigma} \omega^{\mu-\varrho} \eta^{\nu-\mu-\sigma} z^\varrho \zeta^\sigma$$
$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\tau} \left(\sum_{\nu=\tau+1}^{n} \sum_{\mu=\varrho}^{\varrho+\nu-\tau} u_{\mu\nu} \binom{\mu}{\varrho} \binom{\nu-\mu}{\tau-\varrho} \omega^{\mu-\varrho} \eta^{\nu-\mu-\tau+\varrho} \right) z^\varrho \zeta^{\tau-\varrho} \tag{35}$$

(wenn man die leere Summe $=0$ setzt, so ist der Fall $n=0$ noch mit enthalten). Man erkennt unmittelbar, daß $\Delta_\omega f \in \mathfrak{Z}_{n-1}$ gilt. Ja, dieses Resultat sukzessive anwendend, hat man den

SATZ 16. *Wenn* $f \in \mathfrak{Z}_n$, *so ist* $\Delta_{w_0, w_1 \dots w_m} f \in \mathfrak{Z}_{n-m-1}$ $(w_0, w_1, \dots w_m \in \Omega,\ n \geq 0,\ m \leq n)$.

Speziell für $m=n$ *besagt dies:*
$$\mathfrak{Z}_n \subseteq \mathfrak{C}_n \tag{36}$$

Von der Formel (35) werden wir im Folgenden aber etwas mehr benötigen. Den für $\tau = n-1$ sich ergebenden Term von (35) abspaltend, der übrigens

$$= \sum_{\varrho=0}^{n-1} ((n-\varrho)\, \eta\, u_{\varrho,n} + (\varrho+1)\, \omega\, u_{\varrho+1,n})\, z^\varrho \zeta^{n-1-\varrho}$$

ist, haben wir den

SATZ 17. *Wenn*
$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} u_{\mu\nu} z^\mu \zeta^{\nu-\mu}, \quad u_{\mu\nu} \in \mathfrak{F}^0, \text{ also } f \in \mathfrak{Z}_n,$$
so gilt für $n \geq 1$, $\omega \in \Omega$:
$$\Delta_\omega f - \sum_{\varrho=0}^{n-1} ((n-\varrho)\, \eta\, u_{\varrho,n} + (\varrho+1)\, \omega\, u_{\varrho+1,n})\, z^\varrho \zeta^{n-1-\varrho} \in \mathfrak{Z}_{n-2}. \tag{37}$$

Unter Benutzung dieses Satzes beweisen wir nun die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $z^{\mu}\zeta^{\nu-\mu}$ über $\mathfrak{E}^0$:

SATZ 18. *Das System der Funktionen* $z^{\mu}\zeta^{\nu-\mu}$ $(0\leq\nu\leq n,\ 0\leq\mu\leq\nu)$ *ist über* $\mathfrak{E}^0$ *linear unabhängig.* $\mathfrak{Z}_n$ *ist also ein* $\binom{n+2}{2}$*-dimensionaler Vektorraum über* $\mathfrak{E}^0$.

Beweis durch vollständige Induktion: Für $n=0$ ist die Aussage trivial. Nun der Schluß von $n-1$ auf n: Sei

$$\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu}u_{\mu\nu}z^{\mu}\zeta^{\nu-\mu}\equiv 0,\qquad u_{\mu\nu}\in\mathfrak{E}^0. \tag{38}$$

Nach Satz 17 ist

$$\sum_{\varrho=0}^{n-1}((n-\varrho)\,\eta\,u_{\varrho,n}+(\varrho+1)\,\omega\,u_{\varrho+1,n})\,z^{\varrho}\zeta^{n-1-\varrho}\in\mathfrak{Z}_{n-2},$$

also gemäß Induktionsvoraussetzung speziell

$$(n-\varrho)\,\eta\,u_{\varrho,n}+(\varrho+1)\,\omega\,u_{\varrho+1,n}\equiv 0\qquad(\varrho=0,1,\ldots n-1). \tag{39}$$

Zunächst wird (39) für $\varrho=0$ ausgenutzt, und zwar $\omega=\omega_1$ und $\omega=\omega_2$ setzend. Wenn die zu ω_1 und ω_2 gehörigen η-Werte wie üblich (z. B. in Hurwitz-Courant [3]) mit η_1 und η_2 bezeichnet werden, so gibt dies

$$n\,\eta_1\,u_{0n}+\omega_1\,u_{1n}\equiv 0,$$
$$n\,\eta_2\,u_{0n}+\omega_2\,u_{1n}\equiv 0.$$

Dies homogene Gleichungssystem für u_{0n}, u_{1n} hat die Determinante $n\,(\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1)$, die nach der Legendreschen Relation den Wert $2\pi i n\neq 0$ hat. Also folgt $u_{0n}\equiv 0$, $u_{1n}\equiv 0$, und jetzt ergibt sich mit einem $\omega\neq 0$ aus (39) für $\varrho=1,2,\ldots n-1$ sukzessive

$$u_{2n}=\cdots=u_{nn}\equiv 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind dann aber auch die übrigen $u_{\mu\nu}$ in (38) identisch Null.

SATZ 19. *Wenn für die Funktionen* $h_1,h_2\in\mathfrak{Z}_{n-1}$

$$\underset{\omega_2}{\Delta}h_1=\underset{\omega_1}{\Delta}h_2 \tag{40}$$

gilt, so gibt es eine Funktion $f\in\mathfrak{Z}_n$, *so daß*

$$\left.\begin{aligned}\underset{\omega_1}{\Delta} f &= h_1, \\ \underset{\omega_2}{\Delta} f &= h_2.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$[1]

Der Satz ist für $n=0$ uninteressant. Wir können uns auf $n \geq 1$ beschränken.

Wir beweisen zunächst, daß unter den Voraussetzungen des Satzes eine Funktion $f_1 \in \mathfrak{Z}_n$ existiert, so daß

$$\underset{\omega_1}{\Delta} f_1 - h_1 \in \mathfrak{Z}_{n-2},$$
$$\underset{\omega_2}{\Delta} f_1 - h_2 \in \mathfrak{Z}_{n-2}$$

gilt. Sei

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z^\mu \zeta^{n-1-\mu} + g_1 \\ h_2 &= \sum_{\mu=0}^{n-1} b_\mu z^\mu \zeta^{n-1-\mu} + g_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & a_\mu,\ b_\mu \in \mathfrak{F}^0, \\ & g_1,\ g_2 \in \mathfrak{Z}_{n-2}. \end{aligned}$$

Wie wirkt sich die Bedingung (40) auf die a_μ, b_μ aus? Für $n=1$ stellt sie gar keine Bedingung dar, und für $n \geq 2$ muß nach Satz 17 gelten:

$$\sum_{\varrho=0}^{n-2} ((n-1-\varrho)\,\eta_2\, a_\varrho + (\varrho+1)\,\omega_2\, a_{\varrho+1})\, z^\varrho \zeta^{n-2-\varrho}$$
$$- \sum_{\varrho=0}^{n-2} ((n-1-\varrho)\,\eta_1\, b_\varrho + (\varrho+1)\,\omega_1\, b_{\varrho+1})\, z^\varrho \zeta^{n-2-\varrho} \in \mathfrak{Z}_{n-3}.$$

Nach Satz 18 folgt jetzt

$$(n-1-\varrho)\,\eta_2\, a_\varrho + (\varrho+1)\,\omega_2\, a_{\varrho+1} = (n-1-\varrho)\,\eta_1\, b_\varrho + (\varrho+1)\,\omega_1\, b_{\varrho+1} \quad (\varrho = 0, 1, \ldots n-2). \tag{42}$$

Wir setzen jetzt f_1 in der Form

$$f_1 = \sum_{\mu=0}^{n} u_\mu z^\mu \zeta^{n-\mu} \tag{43}$$

an und suchen die u_μ passend zu bestimmen. Gemäß Satz 17 ist

$$\underset{\omega_j}{\Delta} f_1 - \sum_{\varrho=0}^{n-1} ((n-\varrho)\,\eta_j\, u_\varrho + (\varrho+1)\,\omega_j\, u_{\varrho+1})\, z^\varrho \zeta^{n-1-\varrho} \in \mathfrak{Z}_{n-2} \qquad (j=1, 2),$$

---

[1] Daß die Bedingung (40) notwendig für die Lösbarkeit des Differenzengleichungssystems (41) ist, ist trivial. Der Satz sagt, daß die Bedingung auch hinreichend ist, ja, daß dann sogar eine Lösung in $\mathfrak{Z}_n$ existiert, die dann natürlich bis auf eine additive mit ω_1, ω_2 periodische Funktion eindeutig bestimmt ist.

und es ergeben sich also nach Satz 18 für die u_ϱ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(n-\varrho)\,\eta_1\,u_\varrho+(\varrho+1)\,\omega_1\,u_{\varrho+1}=a_\varrho\\(n-\varrho)\,\eta_2\,u_\varrho+(\varrho+1)\,\omega_2\,u_{\varrho+1}=b_\varrho\end{aligned}\right\}\quad \varrho=0,\,1,\,\ldots\,n-1. \tag{44}$$

Für $n=1$ garantiert die Legendrerelation für beliebige a_0, b_0 die Lösbarkeit von (44) in Funktionen u_0, u_1, die natürlich $\mathfrak{E}^0$ angehören. Für $n\geq 2$ garantiert uns (42) für die Lösbarkeit, wie man etwa folgendermaßen einsehen kann: Das Gleichungssystem (44) ist äquivalent mit dem folgenden (bei Bildung der Inversen der Matrix

$$\begin{pmatrix}(n-\varrho)\,\eta_1, & (\varrho+1)\,\omega_1\\(n-\varrho)\,\eta_2, & (\varrho+1)\,\omega_2\end{pmatrix}$$

Legendresche Relation beachten!):

$$\left.\begin{aligned}2\pi i\,(n-\varrho)\,u_\varrho\quad&=\omega_2\,a_\varrho-\omega_1\,b_\varrho\\2\pi i\,(\varrho+1)\,u_{\varrho+1}&=-\eta_2\,a_\varrho+\eta_1\,b_\varrho\end{aligned}\right\}\ \varrho=0,\,1,\,\ldots\,n-1.$$

Dies Gleichungssystem ist offenbar genau dann lösbar, wenn für $\varrho=0,\,1,\,\ldots\,n-2$ gilt:

$$(\varrho+1)\,(\omega_2\,a_{\varrho+1}-\omega_1\,b_{\varrho+1})=(n-\varrho-1)\,(-\eta_2\,a_\varrho+\eta_1\,b_\varrho).$$

Das aber ist gerade die Bedingung (42).

Wir beweisen jetzt: Für jedes m $(1\leq m\leq n)$ gibt es ein $f_m\in\mathfrak{Z}_n$, so daß

$$\underset{\omega_1}{\Delta} f_m-h_1\in\mathfrak{Z}_{n-1-m},$$

$$\underset{\omega_2}{\Delta} f_m-h_2\in\mathfrak{Z}_{n-1-m}.$$

Für $m=1$ ist der Beweis soeben erbracht worden. Nun der Schluß von $m-1$ auf m $(1\leq m-1\leq n-1)$. Induktionsvoraussetzung ist also, daß eine Funktion $f_{m-1}\in\mathfrak{Z}_n$ existiert, so daß die Funktionen

$$g_1=\underset{\omega_1}{\Delta} f_{m-1}-h_1, \tag{45}$$

$$g_2=\underset{\omega_2}{\Delta} f_{m-1}-h_2 \tag{46}$$

zu $\mathfrak{Z}_{n-m}$ gehören. Offenbar gilt nun aber auch

$$\underset{\omega_2}{\Delta}\,g_1=\underset{\omega_1}{\Delta}\,g_2,$$

und das vorher Bewiesene, für den Index $n-m$ anstelle von $n-1$ angewandt, sichert uns die Existenz einer Funktion $\varphi_m\in\mathfrak{Z}_{n-m+1}$, so daß

$$\underset{\omega_j}{\Delta} \varphi_m - g_j \in \mathfrak{Z}_{n-m-1} \qquad (j = 1, 2),$$

also auch

$$g_j - \underset{\omega_j}{\Delta} \varphi_m \in \mathfrak{Z}_{n-m-1} \qquad (j = 1, 2)$$

ist. Wegen (45), (46) ist also

$$\underset{\omega_j}{\Delta} (f_{m-1} - \varphi_m) - h_j \in \mathfrak{Z}_{n-m-1} \qquad (j = 1, 2),$$

und da ein Element von $\mathfrak{Z}_{n-m-1}$ erst recht $\mathfrak{Z}_n$ angehört, haben wir in $f_m = f_{m-1} - \varphi_m$ eine geeignete Funktion gefunden.

Wenn wir das Resultat speziell für $m = n$ aussprechen, haben wir die Aussage von Satz 19.

Satz 20. *Es ist*

$$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}_n^* = \mathfrak{Z}_n. \tag{47}$$

Beweis: Gemäß (32) und (36) bleibt nur noch

$$\mathfrak{C}_n^* \subseteq \mathfrak{Z}_n$$

zu beweisen. Das ist für $n = 0$ trivial. Schluß von $n-1$ auf $n\ (n \geq 1)$: Sei $g \in \mathfrak{C}_n^*$, gelte also für beliebige der Werte ω_1, ω_2 fähige Zahlen $w_0, w_1, \ldots w_n$:

$$\underset{w_0, w_1, \ldots w_n}{\Delta} g = 0,$$

d. h.

$$\underset{w_1, \ldots w_n}{\Delta} \underset{w_0}{\Delta} g = 0.$$

Es gehören also die Funktionen ($w_0 = \omega_1$, ω_2 gesetzt) $h_1 = \underset{\omega_1}{\Delta} g$ und $h_2 = \underset{\omega_2}{\Delta} g$ zu $\mathfrak{C}_{n-1}^*$, gemäß Induktionsannahme also auch zu $\mathfrak{Z}_{n-1}$. Trivialerweise ist $\underset{\omega_2}{\Delta} h_1 = \underset{\omega_1}{\Delta} h_2$, und Satz 19 sagt die Existenz einer Funktion $f \in \mathfrak{Z}_n$ aus, für die

$$\underset{\omega_j}{\Delta} f = \underset{\omega_j}{\Delta} g \qquad (j = 1, 2)$$

gilt, d. h.

$$\underset{\omega_j}{\Delta} (f - g) = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

Es ist also $f - g \in \mathfrak{E}^0$, also auch $g \in \mathfrak{Z}_n$, w. z. b. w.

Schon aus Dimensionsgründen ist es hiernach klar, daß für $n \geq 1$ die Differenzengleichung (30) nicht charakteristisch ist für die Funktionen f aus $\mathfrak{K}_0^n$. Vielmehr ist $\mathfrak{K}_0^n$ ein $(n+1)$-dimensionaler Unterraum des $\binom{n+2}{2}$-dimensionalen Vektorraumes über $\mathfrak{E}^0$, den die

(30) genügenden Funktionen bilden, und zwar ist es der von $1, v, v^2, \dots, v^n$ aufgespannte Unterraum, wenn $v \in \mathfrak{K}_0^1, \notin \mathfrak{E}^0$. Die einfachste derartige Funktion v dürfte eine Linearkombination $b_1 z + b_2 \zeta$ von z und ζ mit konstanten Zahlen b_1, b_2 sein. Daß solche Konstanten existieren, läßt sich leicht zeigen: Die Forderung $b_1 z + b_2 \zeta + \bar{z} \in \mathfrak{E}^1$ besagt

$$\left.\begin{aligned} b_1 \omega_1 + b_2 \eta_1 &= -\bar{\omega}_1, \\ b_1 \omega_2 + b_2 \eta_2 &= -\bar{\omega}_2, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

und die Legendresche Relation garantiert die (eindeutige) Auflösbarkeit nach b_1, b_2.

§ 5. Verallgemeinerung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion

Cl. Müller hat die Untersuchung der Funktionen

$$\mathfrak{p}_n(z) = (n+1)\left(\frac{\bar{z}^n}{z^{n+2}} + \sum_{\omega \in \Omega}{}' \left(\frac{(\bar{z}-\bar{\omega})^n}{(z-\omega)^{n+2}} - \frac{\bar{\omega}^n}{\omega^{n+2}}\right)\right) \tag{49}$$

angeregt und selbst erste Ergebnisse erzielt. Daß die in (49) auftretende Reihe für $z \notin \Omega$ konvergiert, und zwar absolut und in jedem abgeschlossenen Teilgebiet dieser Punktmenge gleichmäßig konvergiert, ist wie im klassischen Falle leicht einzusehen; es kommt dabei auf die Konvergenz der Reihen $\sum_{\omega \in \Omega}{}' \frac{1}{|\omega|^j}$ für $j \geq 3$ an. Auch die Periodizitätseigenschaft von $\mathfrak{p}_n$ wird ähnlich wie im klassischen Fall bewiesen: Offenbar gehören die Funktionen

$$D^{1,0}\mathfrak{p}_n = -(n+1)(n+2) \sum_{\omega \in \Omega}{}' \frac{(\bar{z}-\bar{\omega})^n}{(z-\omega)^{n+3}}, \tag{50}$$

$$D^{0,1}\mathfrak{p}_n = (n+1)\, n \sum_{\omega \in \Omega}{}' \frac{(\bar{z}-\bar{\omega})^{n-1}}{(z-\omega)^{n+2}} \tag{51}$$

zu $\mathfrak{E}$. Es gilt also jedenfalls

$$\mathfrak{p}_n(z+\omega) - \mathfrak{p}_n(z) \equiv c(\omega) \tag{52}$$

für $\omega \in \Omega$. Wenn man in (49) z durch $-z$ und zugleich in der unendlichen Reihe ω durch $-\omega$ ersetzt, so folgt

$$\mathfrak{p}_n(-z) = \mathfrak{p}_n(z). \tag{53}$$

Wird dies beachtet und in (52) $z = -\frac{1}{2}\omega$ gesetzt, so haben wir $c(\omega) = 0$, also den

SATZ 21. *Es ist* $\mathfrak{p}_n \in \mathfrak{E}^n$.

(50) und (51) zeigen die Gültigkeit des folgendes Satzes:

SATZ 22. *Es ist für* $n \geq 1$

$$D^{0,1}\mathfrak{p}_n + D^{1,0}\mathfrak{p}_{n-1} \equiv 0. \tag{54}$$

Die nullte Koeffizientenfunktion $K_0\{\mathfrak{p}_n\}$ von $\mathfrak{p}_n$ wollen wir mit $\wp_n$ bezeichnen. Nun gilt aber allgemein

$$K_\nu\{\mathfrak{p}_n\} = K_0\left\{\frac{1}{\nu!}D^{0,\nu}\mathfrak{p}_n\right\} \qquad (\nu = 0, 1, \dots n), \tag{55}$$

und da sich aus (54) sofort rekurrent die Formel

$$D^{0,\nu}\mathfrak{p}_n = (-1)^\nu D^{\nu,0}\mathfrak{p}_{n-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \dots n)$$

herleitet, haben wir

$$\begin{aligned} K_\nu\{\mathfrak{p}_n\} &= \frac{(-1)^\nu}{\nu!}K_0\{D^{\nu,0}\mathfrak{p}_{n-\nu}\} \\ &= \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\wp^{(\nu)}_{n-\nu}. \end{aligned} \tag{56}$$

SATZ 23. *Es ist*

$$\mathfrak{p}_n = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\wp^{(\nu)}_{n-\nu}\bar{z}^\nu. \tag{57}$$

Dabei ist

$$\wp_0 = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}'\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \tag{58}$$

die Weierstraßsche $\wp$*-Funktion, während für* $n > 0$ *gilt:*

$$\wp_n = (n+1)\sum_{\omega\in\Omega}{}'\bar{\omega}^n\left(\frac{1}{(\omega-z)^{n+2}} - \frac{1}{\omega^{n+2}}\right). \tag{59}$$

Die noch unbewiesenen Aussagen (58), (59) des Satzes werden unmittelbar aus (49) abgelesen.

$\wp_n$ ist für $n > 0$ im Nullpunkt regulär, verschwindet dort sogar, während in allen anderen Punkten des Gitters Ω und nur an diesen Punkten Pole liegen, und zwar Pole $(n+2)$-ter Ordnung. Da ersichtlich $\wp_n$ eine gerade Funktion ist, können wir die Entwicklung im Nullpunkt so anschreiben:

$$\wp_0 = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}c_{0k}z^{2k}, \tag{60}$$

$$\wp_n = \sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}z^{2k} \qquad (n \geq 1). \tag{61}$$

Aus (58), (59) ist leicht ersichtlich, daß für diese Koeffizienten gilt:

$$c_{nk} = (n+1)\binom{n+1+2k}{n+1}\sum_{\omega\in\Omega}{}'\frac{\bar{\omega}^n}{\omega^{n+2+2k}}. \tag{62}$$

In dieser Rechnung macht sich die Tatsache, daß $\wp_n$ eine gerade Funktion ist, durch

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{\bar{\omega}^n}{\omega^{n+2+\mu}} = 0 \quad \text{für ungerades } \mu \geq 1$$

bemerkbar.

Satz 24. *Die Funktion $\wp_n$ genügt der Differentialgleichung*

$$\wp_n'' = 6 \sum_{\nu=0}^{n} \wp_\nu \wp_{n-\nu} - 10\, c_{n1}.\text{[1]} \tag{63}$$

Beweis: Wir setzen

$$D^{2,0}\mathfrak{p}_n - 6 \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{p}_{n-\nu} = \mathfrak{f}_n, \tag{64}$$

und offenbar ist $\mathfrak{f}_n \in \mathfrak{E}^n$. Wenn wir beachten, daß $\mathfrak{p}_0 \in \mathfrak{E}^0$, also $D^{0,1}\mathfrak{p}_0 \equiv 0$ ist, so haben wir

$$\begin{aligned} D^{0,1}\mathfrak{f}_n &= D^{2,1}\mathfrak{p}_n - 6 \sum_{\nu=0}^{n} (D^{0,1}\mathfrak{p}_\nu)\, \mathfrak{p}_{n-\nu} - 6 \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{p}_\nu D^{0,1}\mathfrak{p}_{n-\nu} \\ &= D^{2,1}\mathfrak{p}_n - 6 \sum_{\nu=1}^{n} (D^{0,1}\mathfrak{p}_\nu)\, \mathfrak{p}_{n-\nu} - 6 \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{p}_\nu D^{0,1}\mathfrak{p}_{n-\nu}. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt noch Satz 22 berücksichtigen, so ergibt sich für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} D^{0,1}\mathfrak{f}_n &= -D^{3,0}\mathfrak{p}_{n-1} + 6 \sum_{\nu=1}^{n} (D^{1,0}\mathfrak{p}_{\nu-1})\, \mathfrak{p}_{n-\nu} + 6 \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{p}_\nu D^{1,0}\mathfrak{p}_{n-\nu-1} \\ &= -D^{3,0}\mathfrak{p}_{n-1} + 6 \sum_{\nu=0}^{n-1} (D^{1,0}\mathfrak{p}_\nu)\, \mathfrak{p}_{n-\nu-1} + 6 \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{p}_\nu D^{1,0}\mathfrak{p}_{n-\nu-1} \\ &= -D^{1,0}\left(D^{2,0}\mathfrak{p}_{n-1} - 6 \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{p}_{n-1-\nu}\right), \end{aligned}$$

also

$$D^{0,1}\mathfrak{f}_n = -D^{1,0}\mathfrak{f}_{n-1} \qquad (n \geq 1). \tag{65}$$

Nun wird gezeigt, daß $\mathfrak{f}_n$ eine Konstante ist. Für $n=0$ ist es aus der Theorie der $\wp$-Funktion bekannt, und zwar ist

$$\mathfrak{f}_0 \equiv -10\, c_{01}.$$

Sei diese Behauptung nun für den Index $n-1$ bewiesen. Dann folgt aus (65), daß $D^{0,1}\mathfrak{f}_n \equiv 0$, also $\mathfrak{f}_n \in \mathfrak{E}^0$ ist. Aus (64) lesen wir jetzt ab:

$$\mathfrak{f}_n = \wp_n'' - 6 \sum_{\nu=0}^{n} \wp_\nu \wp_{n-\nu}. \tag{66}$$

[1] Für $n=1$ handelt es sich bei der zugehörigen homogenen Differentialgleichung um eine Lamésche Differentialgleichung.

Ersichtlich hat die elliptische Funktion (66) höchstens in den Gitterpunkten Pole. Da aber für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \wp''_n &= 2\, c_{n\,1} + \cdots, \\ \wp_0\, \wp_n &= c_{n\,1} + \cdots, \\ \wp_\nu\, \wp_{n-\nu} &= 0 + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1; \\ & \qquad\qquad\qquad \text{für } n = 1 \text{ leere Aussage}) \end{aligned}$$

die Entwicklungen im Nullpunkt sind, liegt im Nullpunkt kein Pol vor. $\mathfrak{f}_n$ ist also überall regulär, also eine Konstante, w. z. b. w. Aus (66) ist für $n \geq 1$ diese Konstante sofort zu $-10\, c_{n\,1}$ ermittelt.

Satz 25. *Die Differentialgleichung* (63) *läßt sich durch Quadraturen lösen, und zwar ist für* $n \geq 1$

$$\wp_n(z) = 6\, \wp_0'(z) \int_0^z \left(\frac{1}{\wp_0'^2(\sigma)} \int_0^\sigma \wp_0'(\tau) \sum_{\nu=1}^{n-1} \wp_\nu(\tau)\, \wp_{n-\nu}(\tau)\, d\tau \right) d\sigma - \\ - 10\, c_{n\,1}\, \wp_0'(z) \int_0^z \frac{\wp_0(\sigma)}{\wp_0'^2(\sigma)}\, d\sigma - 14\, c_{n\,2}\, \wp_0'(z) \int_0^z \frac{1}{\wp_0'^2(\sigma)}\, d\sigma.\text{[1]} \tag{67}$$

Beweis: Durch Multiplikation von (63) mit $\wp_0'$ ergibt sich, wenn man noch

$$12\, \wp_0\, \wp_0' = \wp_0'''$$

beachtet:

$$\wp_0'\, \wp_n'' - \wp_0'''\, \wp_n = 6\, \wp_0' \sum_{\nu=1}^{n-1} \wp_\nu\, \wp_{n-\nu} - 10\, c_{n\,1}\, \wp_0',$$

$$(\wp_0'\, \wp_n' - \wp_0''\, \wp_n + 10_{n\,1}\, \wp_0)' = 6\, \wp_0' \sum_{\nu=1}^{n-1} \wp_\nu\, \wp_{n-\nu}.$$

Da, wie man an Hand der Entwicklungen im Nullpunkt leicht nachprüft, die Funktion $\wp_0'\, \wp_n' - \wp_0''\, \wp_n + 10\, c_{n\,1}\, \wp_0$ im Nullpunkt regulär ist und dort den Wert $-14\, c_{n\,2}$ annimmt, ist

$$\wp_0'\, \wp_n' - \wp_0''\, \wp_n + 10\, c_{n\,1}\, \wp_0 = 6 \int_0^z \wp_0'(\tau) \sum_{\nu=1}^{n-1} \wp_\nu(\tau)\, \wp_{n-\nu}(\tau)\, d\tau - 14\, c_{n\,2},$$

also
$$\left(\frac{\wp_n}{\wp_0'}\right)' + 10\, c_{n\,1} \frac{\wp_0}{\wp_0'^2} + 14\, c_{n\,2} \frac{1}{\wp_0'^2} = \frac{6}{\wp_0'^2} \int_0^z \wp_0'(\tau) \sum_{\nu=1}^{n-1} \wp_\nu(\tau)\, \wp_{n-\nu}(\tau)\, d\tau. \tag{68}$$

---

[1] Die Integrale sind so zu verstehen, daß sie längs eines beliebigen, die Pole der Integranden meidenden Weges zu erstrecken sind.

Wir werden jetzt zeigen, daß die Funktionen $\wp_0/\wp_0'^2$ und $1/\wp_0'^2$ meromorphe Stammfunktionen besitzen. Dann kann in (68) unbestimmt integriert werden, und beim Übergang zum bestimmten Integral darf der Integrationsweg im Nullpunkt beginnen, da im Nullpunkt Regularität aller Integranden vorliegt, wie man sich leicht überlegt. Damit ist der Übergang von (68) zu (67) gewährleistet, wenn man noch beachtet, daß $\wp_n/\wp_0'$ im Nullpunkt verschwindet.

Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß $\wp_0/\wp_0'^2$ und $1/\wp_0'^2$ überall die Residuen 0 haben, und diesbezüglich brauchen wir nur die Gitterpunkte als Polstellen von $\wp_0$ und die Punkte, die halbe Perioden, aber keine Perioden sind, als Nullstellen von $\wp_0'$ zu untersuchen, und zwar nur in einem Periodenparallelogramm. In den Gitterpunkten sind die beiden Funktionen sogar regulär, wie oben bereits festgestellt wurde. Als Nullstellen von $\wp_0'$ in einem Periodenparallelogramm betrachten wir jetzt

$$z_1 = \frac{\omega_1}{2}, \qquad z_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \qquad z_3 = \frac{\omega_2}{2},$$

wo ω_1, ω_2 wie stets ein primitives Periodenpaar ist. $\wp_0$ ist aber bekanntlich eine gerade Funktion von $z - z_j$ $(j = 1, 2, 3)$ — es ist ja $\wp_0(-(z - z_j)) = \wp_0(-z - z_j) = \wp_0(z + z_j)$ —, also ist $\wp_0'$ eine ungerade und $\wp_0'^2$ wieder eine gerade Funktion von $z - z_j$. $\wp_0/\wp_0'^2$ und $1/\wp_0'^2$ sind demnach gerade Funktionen von $z - z_j$, und haben in z_j also jedenfalls das Residuum 0, w. z. b. w.

Aus (67) erkennt man induktiv, daß die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\wp_n$ um den Nullpunkt die Gestalt

$$c_{nk} = P_{nk} + c_{n1} p_{k1} + c_{n2} p_{k2} \tag{69}$$

haben, wo p_{k1} und p_{k2} von n unabhängige Polynome von c_{01}, c_{02} mit rationalen Koeffizienten sind und P_{nk} ein Polynom von $c_{\nu 1}$, $c_{\nu 2}$ $(\nu = 0, 1, \ldots n-1)$ mit rationalen Koeffizienten ist $(n \geq 1)$. Man erkennt aus (67) nicht unmittelbar, daß die Koeffizienten dieser Polynome alle ≥ 0 sind. Aber auch eine solche Aussage läßt sich gewinnen, und zwar aus (63). Die Entwicklungen (60), (61) in (63) einsetzend, ergibt sich nämlich für $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1)\, c_{nk} z^{2k-2} = 6 \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_{\nu\varrho} c_{n-\nu,\sigma} z^{2\varrho} z^{2\sigma} + 12 \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} z^{2k-2} - 10\, c_{n1},$$

und nach Koeffizientenvergleich

$$(2k+3)(k-2)\, c_{nk} = 3 \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\varrho=1}^{k-2} c_{\nu\varrho} c_{n-\nu,\, k-1-\varrho} \qquad (k \geq 3) \tag{70}$$

(im übrigen gilt diese Formel, wie wir nachträglich feststellen, auch noch für $n = 0$). Durch Induktion über n und k schließt man hieraus

SATZ 26. *Der Koeffizient* c_{nk} *der Potenzreihenentwicklung von* $\wp_n$ *um* 0 *ist als Polynom von* $c_{\nu 1}$, $c_{\nu 2}$ $(\nu = 0, 1, \dots n)$ *mit rationalen Koeffizienten* ≥ 0 *darstellbar.*

Es kann nicht unmittelbar geschlossen werden, daß dies Polynom, wie wir es induktiv aus (70) erhalten, mit dem aus (67) erhaltenen Polynom (69) übereinstimmt, obwohl es wahrscheinlich sein dürfte, aber nur für die niedrigsten Fälle rechnerisch nachgeprüft wurde. Der Induktionsschluss kann aber so geführt werden, daß man erkennt, daß auch das aus (70) sich ergebende Polynom linear in c_{n1} und c_{n2} ist, und daß die Faktoren von c_{n1} und c_{n2} von n unabhängige Polynome von c_{01}, c_{02} sind.

Tabelle der c_{nk} *für die niedrigsten Fälle*

k \ n	0	1	2	3
3	$\frac{1}{3} c_{01}^2$	$\frac{2}{3} c_{01} c_{11}$	$\frac{2}{3} c_{01} c_{21} + \frac{1}{3} c_{11}^2$	$\frac{2}{3} c_{01} c_{31} + \frac{2}{3} c_{11} c_{21}$
4	$\frac{3}{11} c_{01} c_{02}$	$\frac{3}{11} c_{02} c_{11} + \frac{3}{11} c_{01} c_{12}$	$\frac{3}{11} c_{02} c_{21} + \frac{3}{11} c_{01} c_{22} +$ $+ \frac{3}{11} c_{11} c_{12}$	$\frac{3}{11} c_{02} c_{31} + \frac{3}{11} c_{01} c_{32} +$ $+ \frac{3}{11} c_{12} c_{21} + \frac{3}{11} c_{11} c_{22}$
5	$\frac{2}{39} c_{01}^3 + \frac{1}{13} c_{02}^2$	$\frac{2}{13} c_{01}^2 c_{11} + \frac{2}{13} c_{02} c_{12}$	$\frac{2}{13} c_{01}^2 c_{21} + \frac{2}{13} c_{02} c_{22}$ $+ \frac{2}{13} c_{01} c_{11}^2 + \frac{1}{13} c_{12}^2$	$\frac{2}{13} c_{01}^2 c_{31} + \frac{2}{13} c_{02} c_{32} +$ $+ \frac{4}{13} c_{01} c_{11} c_{21} +$ $+ \frac{2}{39} c_{11}^3 + \frac{2}{13} c_{12} c_{22}$
6	$\frac{2}{33} c_{01}^2 c_{02}$	$\frac{4}{33} c_{01} c_{02} c_{11} + \frac{2}{33} c_{01}^2 c_{12}$	$\frac{4}{33} c_{01} c_{02} c_{21} + \frac{2}{33} c_{01}^2 c_{22} +$ $+ \frac{4}{33} c_{01} c_{11} c_{12} +$ $+ \frac{2}{33} c_{02} c_{11}^2$	$\frac{4}{33} c_{01} c_{02} c_{31} + \frac{2}{33} c_{01}^2 c_{32} +$ $+ \frac{4}{33} c_{01} c_{12} c_{21} +$ $+ \frac{4}{33} c_{02} c_{11} c_{21} +$ $+ \frac{4}{33} c_{01} c_{11} c_{22} + \frac{2}{33} c_{11}^2 c_{12}$

Es werde jetzt

$$p = -\frac{\wp_1}{\wp_0} \tag{71}$$

gesetzt. Dann ist $p + \bar{z} \in \mathfrak{E}^1$, und gemäß Satz 10 gibt es eindeutig bestimmte elliptische Funktionen $u_{n0}, u_{n1}, \dots u_{nn}$, so daß

$$\wp_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_{n\nu}\, p^\nu \tag{72}$$

gilt. Satz 9 zeigt nun, wenn man noch (56) beachtet, daß diese elliptischen Funktionen sich wie folgt berechnen:

$$u_{n\mu} = (-1)^{\mu} \sum_{\nu=\mu}^{n} \frac{1}{\nu\,!} \binom{\nu}{\mu} \wp^{(\nu)}_{n-\nu}\, p^{\nu-\mu}.$$

Da mit (72) zugleich
$$\mathfrak{p}_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_{n\nu}\,(p+z)^{\nu} \tag{73}$$
gilt (vgl. Anm. 1, S. 159), folgt wegen Satz 22:

$$u_{n\nu} = -\frac{1}{\nu}\, u'_{n-1,\nu-1} - p'\, u_{n-1,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1),$$

$$u_{n\,n} = -\frac{1}{n}\, u'_{n-1,\,n-1} \qquad (n \geq 1),$$

und diese Formeln zeigen, wie sich die $u_{n\nu}$ aus den $u_{n\,0}$ berechnen.

S ATZ 27. *Die Funktionen*
$$u_{n\,0} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu\,!}\, \wp^{(\nu)}_{n-\nu}\, p^{\nu} \tag{74}$$
sind elliptisch (*d.h.* $\in \mathfrak{E}^0$).

Für $n = 0, 1$ ist die Aussage dieses Satzes uninteressant. Aber für $n \geq 2$ gibt sie uns eine Möglichkeit, die Funktionen $\wp_n$ auf p und elliptische Funktionen zurückzuführen. Die Berechnung der $u_{n\,0}$ anhand von (74) geht so vor sich: Wir setzen $m = [\frac{1}{2} n]$; dann hat die elliptische Funktion

$$\wp_0'^{\,2m}\, u_{n\,0} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu\,!}\, \wp^{(\nu)}_{n-\nu}\, \wp_1^{\nu}\, \wp_0'^{\,n-\nu} & \text{für gerades } n, \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu\,!}\, \wp^{(\nu)}_{n-\nu}\, \wp_1^{\nu}\, \wp_0'^{\,n-1-\nu} & \text{für ungerades } n, \end{cases} \tag{75}$$

höchstens in den Gitterpunkten Pole (man beachte, daß bekanntlich $\wp_0^{(n)}/\wp_0'$ für ungerades n ein Polynom von $\wp_0$ ist. (75) ist eine gerade Funktion, deren Laurententwicklung im Nullpunkt mit

$$\wp_0'^{\,2m}\, u_{n\,0} = \frac{2^{2m}}{z^{6m-2}}\,(c_{n\,1} + c_{n\,2}\, z^2 + \cdots)$$

beginnt, wie man sich leicht überlegt. Also gibt es Konstanten $A_{n\varrho}$, so daß

$$\wp_0'^{\,2m}\, u_{n\,0} - \sum_{\varrho=0}^{3m-2} A_{n\varrho}\, \wp_0^{(2\varrho)}$$

im Nullpunkt, also überall regulär ist, also eine Konstante A_n ist. Damit haben wir

$$u_{n\,0} = \frac{1}{\wp_0'^{\,2m}} \left(A_n + \sum_{\varrho=0}^{3m-2} A_{n\varrho}\, \wp_0^{(2\varrho)} \right).$$

A_n und die $A_{n\varrho}$ sind natürlich Polynome der $c_{\nu k}$ $(\nu \leq n)$ mit rationalen Koeffizienten, und zwar von solcher speziellen Gestalt, daß Linearität in den $c_{\nu k}$ mit $2 \leq \nu \leq n$ herrscht. Speziell die c_{nk} sind dabei für $k = 1, 2, \ldots 3m$ beteiligt.

Die Durchrechnung der niedrigsten Fälle ($u_{00} = \wp_0$ und $u_{10} = 0$ sind trivial):

$$\wp_0'^2 u_{20} = 4 c_{21} \wp_0^2 + 4 c_{22} \wp_0 + 4 c_{23} - 16 c_{01} c_{21} + 7 c_{11}^2,$$

$$\wp_0'^2 u_{30} = 4 c_{31} \wp_0^2 + 4 c_{32} \wp_0 + 4 c_{33} - 16 c_{01} c_{31} + 4 c_{11} c_{21}.$$

Jetzt lassen sich $\wp_2$ und $\wp_3$ ausrechnen, und zwar läßt sich das Ergebnis so schreiben:

$$\wp_2 = u_{20} + \tfrac{1}{2} (\wp_0' p^2)', \tag{76}$$

$$\wp_3 = u_{30} - u_{20}' p - \tfrac{1}{6} (\wp_0' p^3)''. \tag{77}$$

Bei diesen Entwicklungen wurde das System $1, p, p^2, \ldots p^n$ als Minimalbasis von $\mathfrak{K}_0^n$ zugrundegelegt; das wurde durch die Beschäftigung mit den verallgemeinerten $\wp$-Funktionen, zu denen im wesentlichen ja auch die Funktion p gehört, nahegelegt. Jenes Basissystem ist aber an sich in keiner Weise vor anderen ausgezeichnet. Vielmehr wird man das am Schlusse des § 4 angegebene Basissystem $1, q, q^2, \ldots q^n$, wo

$$q = b_1 z + b_2 \zeta \tag{78}$$

ist (b_1, b_2 aus (48)), als in gewisser Weise einfacheres bezeichnen können, hat doch q im Periodenparallelogramm nur einen einzigen Pol, während p dort im allgemeinen drei einfache Pole hat.

Nach Satz 10 existieren eindeutig bestimmte Funktionen $v_{n\nu} \in \mathfrak{F}^0$, so daß

$$\wp_n = \sum_{\nu=0}^{n} v_{n\nu} q^\nu$$

gilt, und gemäß Satz 9 ist (man beachte (56))

$$v_{n0} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} q^\nu \wp_{n-\nu}^{(\nu)}.$$

Ein dem Satz 27 analoger Satz ist also

SATZ 28. *Die Funktionen*

$$v_{n0} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \wp_{n-\nu}^{(\nu)} q^\nu \tag{79}$$

sind elliptisch.

Aus der klassischen Theorie ist bekannt, daß bei Vorgabe zweier Zahlen c_{01}, c_{02}, die nur der Bedingung

$$4 \cdot (5\, c_{01})^3 - 27 \cdot (7\, c_{02})^2 \neq 0 \tag{80}$$

genügen, stets ein Gitter Ω existiert, so daß

$$c_{01} = 3 \cdot \sum_{\omega \in \Omega}' \frac{1}{\omega^4}, \qquad c_{02} = 5 \cdot \sum_{\omega \in \Omega}' \frac{1}{\omega^6} \tag{81}$$

gilt, ja, das Gitter Ω ist sogar eindeutig bestimmt. Es sind also die c_{nk} für alle $n > 0$ und für alle $n = 0$, $k \geq 3$ als Funktionen von c_{01}, c_{02} (mit (80) als einziger Einschränkung) aufzufassen. Wie sich die c_{nk} aus den $c_{01}, c_{02}, c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{n1}, c_{n2}$ aufbauen, sagt Satz 26 aus und zeigt genauer Formel (70). Wir werden nun c_{11}, c_{12} auf c_{01}, c_{02} und die klassischen Größen η_1, η_2 zurückführen und anschließend zeigen, wie sich die c_{n1}, c_{n2} aus den $c_{01}, c_{02}, c_{11}, c_{12}$ berechnen. — Damit ist dann diese ganze Frage der Rückführung der c_{nk} auf die c_{01}, c_{02} zu einem gewissen Abschluß gebracht; allerdings wird die Kenntnis der η_1, η_2 als Funktionen von c_{01}, c_{02} dabei vorausgesetzt.

Gemäß Satz 28 ist $v_{10} = \wp_1 + \wp_0' q$ eine elliptische Funktion, und zwar offenbar eine solche, die nur in den Gitterpunkten Pole hat. Da aber

$$\wp_1 + \wp_0' q = -\frac{2 b_2}{z^4} - \frac{2 b_1}{z^2} + \frac{8}{3} c_{01} b_2 + \cdots$$

gilt, ist $\wp_1 + \wp_0' q + b_2 (\tfrac{1}{3} \wp_0'' - \tfrac{2}{3} c_{01}) + 2 b_1 \wp_0$ eine überall reguläre elliptische Funktion, also eine Konstante, und zwar die Konstante $\tfrac{8}{3} c_{01} b_2$. Damit haben wir:

$$-\wp_1 = (2 \wp_0 + z \wp_0')\, b_1 + (\tfrac{1}{3} \wp_0'' - \tfrac{10}{3} c_{01} + \wp_0' \zeta)\, b_2. \tag{82}$$

Vergleich der Koeffizienten von z^2 und z^4 der Potenzreihenentwicklung von (82) um den Nullpunkt ergibt:

$$\left.\begin{aligned} -5\, c_{11} &= 4 \cdot 5\, c_{01} b_1 + 6 \cdot 7\, c_{02} b_2, \\ -7\, c_{12} &= 6 \cdot 7\, c_{02} b_1 + \tfrac{4}{3} (5\, c_{01})^2 b_2, \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

und damit ist die erste der gestellten Aufgaben gelöst, denn aus (48) ergibt sich

$$b_1 = \frac{1}{2 \pi i} (\bar{\omega}_1 \eta_2 - \bar{\omega}_2 \eta_1), \tag{84}$$

$$b_2 = \frac{1}{2 \pi i} (\omega_1 \bar{\omega}_2 - \omega_2 \bar{\omega}_1). \tag{85}$$

Die Auflösung des Gleichungssystems (83) nach b_1, b_2 ist übrigens möglich, da gemäß (80) die Determinante $\neq 0$ ist. Wenn wir zur Abkürzung

$$d = 27 \cdot (7\, c_{02})^2 - 4 \cdot (5\, c_{01})^3 \qquad (\neq 0) \tag{86}$$

setzen, so ist diese Auflösung

$$2\,d\cdot b_1 = 2\cdot(5\,c_{01})^2\cdot 5\,c_{11} - 9\cdot 7\,c_{02}\cdot 7\,c_{12}, \tag{87}$$

$$2\,d\cdot b_2 = -9\cdot 7\,c_{02}\cdot 5\,c_{11} + 6\cdot 5\,c_{01}\cdot 7\,c_{12}. \tag{88}$$

SATZ 29. *c_{11}, c_{12} drücken sich gemäß* (83), (84), (85) *durch die klassischen Größen c_{01}, c_{02}, η_1, η_2 aus. $\wp_1$ ist vermöge* (82) *auf klassische Funktionen zurückgeführt.*

Um uns im Folgenden bequem ausdrücken zu können, wollen wir von einer Größe (Funktion eines Gitters Ω), die sich als bzgl. c_{11}, c_{12} vom Grade n homogenes Polynom von c_{01}, c_{02}, c_{11}, c_{12} mit rationalen Koeffizienten schreiben läßt, sagen, sie habe die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$. Allgemeiner sagen wir von einer Funktion $f(z;\Omega)$ einer komplexen Variablen z und eines Gitters Ω, die als Funktion von z meromorph ist, sie habe die *Eigenschaft* $\mathfrak{P}_n$, wenn alle Koeffizienten der Laurententwicklung um den Nullpunkt die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$ haben.

SATZ 30. *Die Funktion $d^n\wp_n$ hat die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$, d. h. alle Größen $d^n c_{nk}$ haben die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$.*

Der Beweis kann so geführt werden, daß die elliptische Funktion v_{n0} des Satzes 28 durch Bestimmung des Hauptteiles der Laurententwicklung der rechten Seite von (79), zu dem $\wp_n$ (und übrigens auch $\wp_{n-1}$) nichts beiträgt, explizit angegeben wird und dann der Induktionsschluß gemacht wird. — Es erscheint uns aber einfacher und durchsichtiger, etwas anders vorzugehen: Wir multiplizieren (79) mit $\wp_0'$ bzw. $\wp_0\wp_0'$ und brauchen uns dann nur mit den Residuen der entstehenden Funktionen im Nullpunkt zu beschäftigen. $\operatorname*{res}_0\{\wp_0' v_{n0}\}$ und $\operatorname*{res}_0\{\wp_0\wp_0' v_{n0}\}$ sind 0, da $\wp_0' v_{n0}$ und $\wp_0\wp_0' v_{n0}$ elliptische Funktionen sind, die nur in den Gitterpunkten Pole haben, und ersichtlich brauchen wir uns um die Berechnung von v_{n0} also gar nicht zu kümmern. Es gilt demnach:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\operatorname*{res}_0\{\wp_0'\wp_{n-\nu}^{(\nu)}q^\nu\} = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\operatorname*{res}_0\{\wp_0\wp_0'\wp_{n-\nu}^{(\nu)}q^\nu\} = 0.$$

Da aber für $n \geq 1$

$$\wp_0'\wp_n = -\frac{2\,c_{n1}}{z} + \cdots, \tag{89}$$

$$\wp_0\wp_0'\wp_n = -\frac{2\,c_{n1}}{z^3} - \frac{2\,c_{n2}}{z} + \cdots \tag{90}$$

ist, haben wir weiter:

$$2\,c_{n1} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu!}\operatorname*{res}_0\{\wp_0'\wp_{n-\nu}^{(\nu)}q^\nu\}, \tag{91}$$

$$2\,c_{n2} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu!}\operatorname*{res}_0\{\wp_0\wp_0'\wp_{n-\nu}^{(\nu)}q^\nu\}. \tag{92}$$

Nun ist der Induktionsschluß leicht. Induktionsvoraussetzung ist, daß $d^{n-\nu}\wp_{n-\nu}$ für $\nu=1, 2, \ldots n$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_{n-\nu}$ hat, also auch die ν-te Ableitung $d^{n-\nu}\wp_{n-\nu}^{(\nu)}$. Gemäß (87), (88) hat dq die Eigenschaft $\mathfrak{P}_1$, also $(dq)^\nu$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_\nu$. Jeder der Funktionen $d^n\wp_{n-\nu}^{(\nu)}q^\nu = d^{n-\nu}\wp_{n-\nu}^{(\nu)}(dq)^\nu$ kommt hiernach die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$ zu, und die entsprechende Aussage bleibt nach Multiplikation dieser Funktionen mit $\wp_0'$ bzw. $\wp_0\wp_0'$ offenbar gültig. Speziell die Residuen der Funktionen $d^n\wp_0'\wp_{n-\nu}^{(\nu)}q^\nu$ und $d^n\wp_0\wp_0'\wp_{n-\nu}^{(\nu)}q^\nu$ haben also die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$, wegen (91), (92) also auch die $d^n c_{n1}$, $d^n c_{n2}$, und aus (70) erkennt man schließlich induktiv, daß dann alle $d^n c_{nk}$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$ haben, w. z. b. w.

Die Aussage von Satz 30 läßt sich verbessern. Für $n=1$ z. B. hat schon $d^{n-1}\wp_n$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$, und wir werden dies auch für $n=2, 3, 4, 5$ nachweisen, allerdings durch ziemlich mühsame Rechnungen. Mit dem gleichen Beweisprinzip, das uns zu Satz 30 führte, sind wir gescheitert, da es nicht gelang zu zeigen, daß schon

$$d^{n-1}\operatorname*{res}_0\{\wp_0'\wp_0^{(n)}q^n\} \quad \text{und} \quad d^{n-1}\operatorname*{res}_0\{\wp_0\wp_0'\wp_0^{(n)}q^n\}$$

die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$ haben. Für $n=1$ sind diese Rechnungen noch leicht durchzuführen, aber da ist das angestrebte Resultat ja sowieso trivial. Für $n=2$ und erst recht für $n>2$ werden die Rechnungen aber schon so langwierig, daß es uns bequemer schien, anders vorzugehen, wenn es auch dann nicht gerade mühelos geht.

Gemäß Satz 27 ist
$$\wp_2+\wp_1'p+\tfrac{1}{2}\wp_0''p^2\in\mathfrak{E}^0,$$
also auch
$$\wp_0'\wp_2-\wp_1'\wp_1+\tfrac{1}{2}\wp_0'\wp_0''p^2\in\mathfrak{E}^0, \tag{93}$$
$$\wp_0\wp_0'\wp_2-\wp_0\wp_1'\wp_1+\tfrac{1}{2}\wp_0\wp_0'\wp_0''p^2\in\mathfrak{E}^0. \tag{94}$$

(93) und (94) werden über den Rand $\mathfrak{C}$ (positiv orientiert) eines Fundamentalparallelogramms integriert. Dabei gehe dies Fundamentalparallelogramm aus dem von ω_1, ω_2 gebildeten Periodenparallelogramm durch Parallelverschiebung hervor, derart, daß 0, $z_1=\frac{1}{2}\omega_1$, $z_2=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$, $z_3=\frac{1}{2}\omega_2$ in seinem Innern liegen. Da das über $\mathfrak{C}$ erstreckte Integral einer elliptischen Funktion verschwindet, ist also

$$\int_{\mathfrak{C}}\wp_0'\wp_2\,dz-\int_{\mathfrak{C}}\wp_1'\wp_1\,dz+\tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{C}}\wp_0'\wp_0''p^2\,dz=0,$$
$$\int_{\mathfrak{C}}\wp_0\wp_0'\wp_2\,dz-\int_{\mathfrak{C}}\wp_0\wp_1'\wp_1\,dz+\tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{C}}\wp_0\wp_0'\wp_0''p^2\,dz=0.$$

Es gilt jetzt, die in Frage kommenden Residuen zu bestimmen. Die Integranden $\wp_1'\wp_1$ und $\wp_0\wp_1'\wp_1$ sind innerhalb $\mathfrak{C}$ regulär, während $\wp_0'\wp_2$ bzw. $\wp_0\wp_0'\wp_2$ nur im

Nullpunkt einen Pol haben, und zwar mit den Residuen $-2c_{21}$ bzw. $-2c_{22}$. Jetzt bleibt die Behandlung der Integranden $\wp_0'\wp_0''p^2$ und $\wp_0\wp_0'\wp_0''p^2$, die im Nullpunkt regulär sind, aber in z_1, z_2, z_3 und nur dort Pole haben. Wird wie üblich der Wert von $\wp_0$ an der Stelle z_j mit e_j bezeichnet, so ist bekanntlich

$$\wp_0 = e_j + r_j (z - z_j)^2 + \cdots, \tag{95}$$

wo

$$r_j = 3e_j^2 - 5c_{01} \neq 0$$

ist. Da gemäß (68)

$$p' = \frac{10c_{11}\wp_0 + 14c_{12}}{\wp_0'^2},$$

ist

$$p' = \frac{10c_{11}e_j + 14c_{12}}{4r_j^2} \cdot \frac{1}{(z-z_j)^2} + \cdots,$$

$$p = -\frac{10c_{11}e_j + 14c_{12}}{4r_j^2} \cdot \frac{1}{z - z_j} + \cdots. \tag{96}$$

Daher gilt

$$\int_{\mathfrak{C}} \wp_0'\wp_0''p^2\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{5c_{11}e_j + 7c_{12}}{r_j}\right)^2,$$

$$\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\wp_0'\wp_0''p^2\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{3} e_j \left(\frac{5c_{11}e_j + 7c_{12}}{r_j}\right)^2.$$

Es ist also

$$4c_{21} = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{5c_{11}e_j + 7c_{12}}{r_j}\right)^2, \tag{97}$$

$$4c_{22} = \sum_{j=1}^{3} e_j \left(\frac{5c_{11}e_j + 7c_{12}}{r_j}\right)^2. \tag{98}$$

Ganz entsprechend folgt aus

$$\wp_3 + \wp_2'p + \tfrac{1}{2}\wp_1''p^2 + \tfrac{1}{6}\wp_0'''p^3 \in \mathfrak{F}^0,$$

d. h.

$$\wp_3 + \wp_2'p + \tfrac{1}{2}\wp_1''p^2 + 2\wp_0\wp_0'p^3 \in \mathfrak{F}^0,$$

wieder mit $\wp_0'$ bzw. mit $\wp_0\wp_0'$ multiplizierend und dann integrierend:

$$2c_{31}\cdot 2\pi i = \tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0'\wp_1''p^2\,dz + 2\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\wp_0'^2p^3\,dz,$$

$$2c_{32}\cdot 2\pi i = \tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\wp_0'\wp_1''p^2\,dz + 2\int_{\mathfrak{C}} \wp_0^2\wp_0'^2p^3\,dz.$$

Wenn wir noch (63) für $n = 1$ verwenden, so haben wir:

$$2\,c_{31}\cdot 2\pi i = -5\,c_{11}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0'\,p^2\,dz - 4\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\,\wp_0'^2\,p^3\,dz,$$

$$2\,c_{32}\cdot 2\pi i = -5\,c_{11}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\,\wp_0'\,p^2\,dz - 4\int_{\mathfrak{C}} \wp_0^2\,\wp_0'^2\,p^3\,dz,$$

also

$$2\,c_{31} = -\frac{5}{2}\,c_{11}\sum_{j=1}^{3}\frac{(5\,c_{11}\,e_j+7\,c_{12})^2}{r_j^3} + 2\sum_{j=1}^{3} e_j\,\frac{(5\,c_{11}\,e_j+7\,c_{12})^3}{r_j^4}, \tag{99}$$

$$2\,c_{32} = -\frac{5}{2}\,c_{11}\sum_{j=1}^{3} e_j\,\frac{(5\,c_{11}\,e_j+7\,c_{12})^2}{r_j^3} + 2\sum_{j=1}^{3} e_j^2\,\frac{(5\,c_{11}\,e_j+7\,c_{12})^3}{r_j^4}. \tag{100}$$

In den Fällen $n=4$ und $n=5$ erschien es uns zweckmäßiger, etwas anders vorzugehen. Aus den Formeln

$$\int_{\mathfrak{C}} \wp_0'^3\,(\wp_4 + \wp_3'\,p + \tfrac{1}{2}\,\wp_2''\,p^2 + \tfrac{1}{6}\,\wp_1'''\,p^3 + \tfrac{1}{24}\,\wp_0^{(4)}\,p^4)\,dz = 0,$$

$$\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\,\wp_0'^3\,(\wp_4 + \wp_3'\,p + \tfrac{1}{2}\,\wp_2''\,p^2 + \tfrac{1}{6}\,\wp_1'''\,p^3 + \tfrac{1}{24}\,\wp_0^{(4)}\,p^4)\,dz = 0$$

und

$$\int_{\mathfrak{C}} \wp_0'^3\,(\wp_5 + \wp_4'\,p + \tfrac{1}{2}\,\wp_3''\,p^2 + \tfrac{1}{6}\,\wp_2'''\,p^3 + \tfrac{1}{24}\,\wp_1^{(4)}\,p^4 + \tfrac{1}{120}\,\wp_0^{(5)}\,p^5)\,dz = 0,$$

$$\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\,\wp_0'^3\,(\wp_5 + \wp_4'\,p + \tfrac{1}{2}\,\wp_3''\,p^2 + \tfrac{1}{6}\,\wp_2'''\,p^3 + \tfrac{1}{24}\,\wp_1^{(4)}\,p^4 + \tfrac{1}{120}\,\wp_0^{(5)}\,p^5)\,dz = 0$$

ergibt sich entsprechend wie oben:

$$0 = 2\pi i\,(-8\,c_{n4} + 24\,c_{01}\,c_{n2} + 48\,c_{02}\,c_{n1} - 16\,c_{11}\,c_{n-1,2} - 8\,c_{12}\,c_{n-1,1}) + \\ + \begin{cases} \frac{1}{24}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0'^3\,\wp_0^{(4)}\,p^4\,dz & \text{für } n=4, \\ \frac{1}{24}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0'^3\,\wp_1^{(4)}\,p^4\,dz + \frac{1}{120}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0'^3\,\wp_0^{(5)}\,p^5\,dz & \text{für } n=5, \end{cases}$$

$$0 = 2\pi i\,(-8\,c_{n5} + 16\,c_{01}\,c_{n3} + 40\,c_{02}\,c_{n2} + 64\,c_{03}\,c_{n1} - \\ - 24\,c_{11}\,c_{n-1,3} - 16\,c_{12}\,c_{n-1,2} + 4\,c_{13}\,c_{n-1,1} - 2\,c_{11}^2\,c_{n-2,1}) + \\ + \begin{cases} \frac{1}{24}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\,\wp_0'^3\,\wp_0^{(4)}\,p^4\,dz & \text{für } n=4, \\ \frac{1}{24}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\,\wp_0'^3\,\wp_1^{(4)}\,p^4\,dz + \frac{1}{120}\int_{\mathfrak{C}} \wp_0\,\wp_0'^3\,\wp_0^{(5)}\,p^5\,dz & \text{für } n=5. \end{cases}$$

Wenn man beachtet, daß wegen (63)

$$\wp_1^{(4)} = 12\,(30\,\wp_0^2\,\wp_1 - 30\,c_{01}\,\wp_1 - 30\,c_{11}\,\wp_0 - 28\,c_{12})$$

ist, so erhält man aus diesen Gleichungen:

$$8c_{n4}-24c_{01}c_{n2}-48c_{02}c_{n1}+16c_{11}c_{n-1,2}+8c_{12}c_{n-1,1}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{3}e_j\dfrac{(5c_{11}e_j+7c_{12})^4}{r_j^4} & \text{für } n=4,\\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{3}(15(e_j^2-c_{01})(5c_{11}e_j+7c_{12})-r_j(15c_{11}e_j+28c_{12}))\dfrac{(5c_{11}e_j+7c_{12})^4}{r_j^6}+ & \\ \qquad +\dfrac{3}{10}\sum\limits_{j=1}^{3}(2e_j^2+r_j)\dfrac{(5c_{11}e_j+7c_{12})^5}{r_j^6} & \text{für } n=5,\end{cases} \tag{101}$$

$$8c_{n5}-16c_{01}c_{n3}-40c_{02}c_{n2}-64c_{03}c_{n1}+24c_{11}c_{n-1,3}+$$
$$+16c_{12}c_{n-1,2}-4c_{13}c_{n-1,1}+2c_{11}^2c_{n-2,1}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{3}e_j^2\dfrac{(5c_{11}e_j+7c_{12})^4}{r_j^4} & \text{für } n=4,\\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{3}e_j(15(e_j^2-c_{01})(5c_{11}e_j+7c_{12})-r\ (15c_{11}e_j+28c_{12}))\dfrac{(5c_{11}e_j+7c_{12})^4}{r_j^6}+ & \\ \qquad +\dfrac{3}{10}\sum\limits_{j=1}^{3}e_j(2e_j^2+r_j)\dfrac{(5c_{11}e_j+7c_{12})^5}{r_j^6} & \text{für } n=5.\end{cases} \tag{102}$$

Zur Weiterbehandlung der Formeln (97), (98) und (99), (100) und (101), (102) müssen wir uns nun mit den Ausdrücken $\sum\limits_{j=1}^{3}\frac{e_j^\varkappa}{r_j^\lambda}$ beschäftigen. Wir setzen

$$R_{\varkappa\lambda}=\sum_{j=1}^{3}\frac{e_j^\varkappa}{r_j^\lambda} \tag{103}$$

und werden für die $R_{\varkappa\lambda}$ eine Rekursionsformel entwickeln, und zwar gilt es dabei nur zu beachten, daß

$$e_1+e_2+e_3=0,\qquad e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-5c_{01},\qquad e_1e_2e_3=7c_{02},$$

so daß also neben dem trivialen Resultat $R_{00}=3$ sich $R_{10}=0$ ergibt. Für $\varkappa\geq 2$ ist

$$\begin{aligned}R_{\varkappa 0}&=\sum_j e_j^\varkappa\\ &=\sum_j e_j^{\varkappa-1}\cdot\sum_m e_m-\sum_{j\neq m}e_j^{\varkappa-1}e_m\\ &=-\sum_{j\neq m}e_j^{\varkappa-1}e_m\\ &=-\sum_{j<m}e_je_m(e_j^{\varkappa-2}+e_m^{\varkappa-2}).\end{aligned} \tag{104}$$

Es ist also $$R_{20} = 10\, c_{01},$$

und wenn wir für $j \neq m$ die Zahl (j, m) dadurch definieren, daß j, m, (j, m) eine Permutation von 1, 2, 3 sein soll, so haben wir aus (104) weiter (jetzt $\varkappa \geq 3$):

$$R_{\varkappa 0} = -\sum_{j<m} e_j\, e_m\, (e_j^{\varkappa-2} + e_m^{\varkappa-2} + e_{(j,m)}^{\varkappa-2}) + \sum_{j<m} e_j\, e_m\, e_{(j,m)}^{\varkappa-2}$$
$$= 5\, c_{01}\, R_{\varkappa-2,0} + 7\, c_{02}\, R_{\varkappa-3,0}.$$

Für $\varkappa \geq 2$ ist

$$R_{\varkappa 1} = \sum_j \frac{e_j^{\varkappa}}{r_j} = \frac{1}{3} \sum_j \frac{e_j^{\varkappa-2}\,(r_j + 5\, c_{01})}{r_j} = \frac{1}{3}\,(R_{\varkappa-2,0} + 5\, c_{01}\, R_{\varkappa-2,1}),$$

und wir müssen jetzt R_{01} und R_{11} berechnen:

$$r_1\, r_2\, r_3\, R_{01} = \sum_{j<m} r_j\, r_m = 9 \sum_{j<m} e_j^2\, e_m^2 - 15\, c_{01} \sum_{j<m} (e_j^2 + e_m^2) + 3 \cdot (5\, c_{01})^2,$$

und da $$2 \sum_{j<m} e_j^2\, e_m^2 = (\sum_j e_j^2)^2 - \sum_j e_j^4 = R_{20}^2 - R_{40} = 2 \cdot (5\, c_{01})^2,$$

$$\sum_{j<m} (e_j^2 + e_m^2) = 2\, R_{20} = 20\, c_{01},$$

haben wir $$r_1\, r_2\, r_2\, R_{01} = (5\, c_{01})^2 \cdot (9 - 12 + 3) = 0.$$

Ferner ist

$$r_1\, r_2\, r_3\, R_{11} = \sum_{j<m} r_j\, r_m\, e_{(j,m)}$$
$$= \sum_{j<m} (3\, e_j^2 - 5\, c_{01})\,(3\, e_m^2 - 5\, c_{01})\, e_{(j,m)}$$
$$= 9 \sum_{j<m} e_j^2\, e_m^2\, e_{(j,m)} - 15\, c_{01} \sum_{j<m} (e_j^2 + e_m^2)\, e_{(j,m)} + (5\, c_{01})^2 \sum_{j<m} e_{(j,m)}$$
$$= 9 \cdot 7\, c_{02} \cdot (-5\, c_{01}) - 15\, c_{01}\,(R_{20}\, R_{10} - R_{30}) + (5\, c_{01})^2\, R_{10}$$
$$= 0.$$

Für $\lambda \geq 2$ ist

$$R_{\varkappa\lambda} = \sum_j \frac{e_j^{\varkappa}}{r_j^{\lambda}} = \sum_j \frac{e_j^{\varkappa}}{r_j^{\lambda-1}} \cdot \sum_m \frac{1}{r_m} - \sum_{j \neq m} \frac{e_j^{\varkappa}}{r_j^{\lambda-1}\, r_m} = -\sum_{j \neq m} \frac{e_j^{\varkappa}}{r_j^{\lambda-1}\, r_m},$$

$$r_1\, r_2\, r_3\, R_{\varkappa\lambda} = -\sum_{j \neq m} \frac{e_j^{\varkappa}\, r_{(j,m)}}{r_j^{\lambda-2}} = -3 \sum_{j \neq m} \frac{e_j^{\varkappa}\, e_{(j,m)}^2}{r_j^{\lambda-2}} + 10\, c_{01}\, R_{\varkappa,\lambda-2}.$$

Andererseits ist

$$R_{\varkappa+2,\lambda-2} = \sum_j \frac{e_j^{\varkappa}}{r_j^{\lambda-2}} \cdot \sum_m e_m^2 - \sum_{j \neq m} \frac{e_j^{\varkappa}\, e_m^2}{r_j^{\lambda-2}} = R_{\varkappa,\lambda-2}\, R_{20} - \sum_{j \neq m} \frac{e_j^{\varkappa}\, e_{(j,m)}^2}{r_j^{\lambda-2}},$$

also $$r_1 r_2 r_3 R_{\varkappa\lambda} = 3 R_{\varkappa+2,\lambda-2} - 20 c_{01} R_{\varkappa,\lambda-2}.$$

Schließlich berechnen wir noch

$$\begin{aligned} r_1 r_2 r_3 &= (3 e_1^2 - 5 c_{01})(3 e_2^2 - 5 c_{01})(3 e_3^2 - 5 c_{01}) \\ &= 27 e_1^2 e_2^2 e_3^2 - 9 \cdot 5 c_{01} (e_1^2 e_2^2 + e_1^2 e_3^2 + e_2^2 e_3^2) + 3 \cdot (5 c_{01})^2 (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - (5 c_{01})^3 \\ &= 27 \cdot (7 c_{02})^2 - 4 \cdot (5 c_{01})^3 \\ &= d. \end{aligned}$$

Zusammengefaßt lauten die von uns hergeleiteten Rekursionsformeln für die $R_{\varkappa\lambda}$ also:

$$\left.\begin{aligned} &R_{00} = 3, \quad R_{10} = 0, \quad R_{20} = 10 c_{01}, \quad R_{\varkappa 0} = 5 c_{01} R_{\varkappa-2,0} + 7 c_{02} R_{\varkappa-3,0} \quad (\varkappa \geq 3), \\ &R_{01} = 0, \quad R_{11} = 0, \quad R_{\varkappa 1} = \tfrac{1}{3}(R_{\varkappa-2,0} + 5 c_{01} R_{\varkappa-2,1}) \quad (\varkappa \geq 2), \\ &R_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{d}(3 R_{\varkappa+2,\lambda-2} - 20 c_{01} R_{\varkappa,\lambda-2}) \quad (\varkappa \geq 0,\ \lambda \geq 2). \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

Durch Induktion über λ ergibt sich unmittelbar der

Satz 31. *$d^{[\frac{1}{2}\lambda]} R_{\varkappa\lambda}$ ist ein Polynom von c_{01}, c_{02} mit rationalen Koeffizienten.*

Dieser Satz gestattet es nun, aus (97), (98) und (99), (100) abzulesen, daß für $n=2$ und $n=3$ die Größen $d^{n-1} c_{n1}$ und $d^{n-1} c_{n2}$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$, gemäß (70) also alle $d c_{2k}$, $d^2 c_{3k}$ diese Eigenschaft haben. Die Anwendung von Satz 31 auf (101), (102) liefert unter Beachtung der soeben gemachten Feststellung, daß für $n=4$ und $n=5$

$$d^{n-2}(c_{n4} - 3 c_{01} c_{n2} - 6 c_{01} c_{n1}), \tag{106}$$

$$d^{n-2}(c_{n5} - 2 c_{01} c_{n3} - 5 c_{02} c_{n2} - 8 c_{03} c_{n1}) \tag{107}$$

die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$ haben. Wir benutzen jetzt (70) für $k = 3, 4, 5$:

$$(2k+3)(k-2) c_{nk} = 6 \sum_{\varrho=1}^{k-2} c_{0\varrho} c_{n,k-1-\varrho} + 3 \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\varrho=1}^{k-2} c_{\nu\varrho} c_{n-\nu,k-1-\varrho},$$

und zwar zunächst für $n=4$, und nachdem wir bewiesen haben, daß die $d^3 c_{4k}$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_4$ haben, in genau der gleichen Weise für $n=5$. In dieser Weise vorgehend, schließen wir aus

$$c_{n3} = \tfrac{2}{3} c_{01} c_{n1} + \cdots,$$

$$c_{n4} = \tfrac{3}{11}(c_{01} c_{n2} + c_{02} c_{n1}) + \cdots,$$

$$c_{n5} = \tfrac{2}{13}(c_{01}^2 c_{n1} + c_{02} c_{n2}) + \cdots,$$

daß mit (106), (107) auch

$$\left.\begin{aligned} &d^{n-2}(21\,c_{02}\,c_{n\,1}+10\,c_{01}\,c_{n\,2}),\\ &d^{n-2}(50\,c_{01}^2\,c_{n\,1}+63\,c_{02}\,c_{n\,2}) \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$ haben, also auch jede Linearkombination mit rationalen Koeffizienten. Da die Matrix der Koeffizienten von $c_{n\,1}$, $c_{n\,2}$ in (108) (von den Faktoren d^{n-2} abgesehen) gerade die Determinante d hat, haben also $d^{n-1}c_{n\,1}$, $d^{n-1}c_{n\,2}$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$, letzten Endes gemäß (70) alle $d^{n-1}c_{n\,k}$.

Satz 32. *Für $n=2,3,4,5$ haben die $d^{n-1}c_{n\,k}$ $(k=1,2,3,\ldots)$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_n$.*

Die Berechnung ist, wie schon die Formeln (101), (102) zeigen, für $n=4$ und $n=5$ sehr langwierig. Aber für $n=2,3$ lassen sich die bis (97), (98) bzw. (99), (100) gediehenen Rechnungen mittels (105) doch noch leicht zu Ende führen. Es ergibt sich

$$4\,c_{21}=R_{22}\,(5\,c_{11})^2+2\,R_{12}\cdot 5\,c_{11}\cdot 7\,c_{12}+R_{02}\,(7\,c_{12})^2, \tag{109}$$

$$4\,c_{22}=R_{32}\,(5\,c_{11})^2+2\,R_{22}\cdot 5\,c_{11}\cdot 7\,c_{12}+R_{12}\,(7\,c_{12})^2, \tag{110}$$

$$\begin{aligned} 4\,c_{31}=(4\,R_{44}-R_{23})\,(5\,c_{11})^3+(12\,R_{34}-2\,R_{13})\,(5\,c_{11})^2\cdot 7\,c_{12}+\\ +(12\,R_{24}-R_{03})\cdot 5\,c_{11}\cdot(7\,c_{12})^2+4\,R_{14}\,(7\,c_{12})^3, \end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned} 4\,c_{32}=(4\,R_{54}-R_{33})\,(5\,c_{11})^3+(12\,R_{44}-2\,R_{23})\,(5\,c_{11})^2\cdot 7\,c_{12}+\\ +(12\,R_{34}-R_{13})\cdot 5\,c_{11}\cdot(7\,c_{12})^2+4\,R_{24}\,(7\,c_{12})^3, \end{aligned} \tag{112}$$

und hierin sind

$$d\,R_{02}=-6\cdot 5\,c_{01},\quad d\,R_{12}=9\cdot 7\,c_{02},\quad d\,R_{22}=-2\cdot(5\,c_{01})^2,\quad d\,R_{32}=3\cdot 5\,c_{01}\cdot 7\,c_{02}, \tag{113}$$

$$d\,R_{03}=3,\quad d\,R_{13}=0,\quad d\,R_{23}=-5\,c_{01},\quad d\,R_{33}=3\cdot 7\,c_{02}, \tag{114}$$

$$\left.\begin{aligned} &d^2\,R_{14}=-27\cdot 5\,c_{01}\cdot 7\,c_{02},\quad d^2\,R_{24}=2\cdot(5\,c_{01})^3+27\cdot(7\,c_{02})^2,\\ &d^2\,R_{34}=-9\cdot(5\,c_{01})^2\cdot 7\,c_{02},\ d^2\,R_{44}=2\cdot(5\,c_{01})^4,\ d^2\,R_{54}=(-7\cdot(5\,c_{01})^3+27\cdot(7\,c_{02})^2)\cdot 7\,c_{02} \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

§ 6. Anwendung auf die Fälle des quadratischen Gitters und des Sechseckgitters

Im Falle des quadratischen Gitters in dem

$$\omega_2=i\,\omega_1$$

gesetzt werden darf, ist

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{\bar{\omega}^n}{\omega^{n+2k+2}}=\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{\overline{(i\omega)}^n}{(i\,\omega)^{n+2k+2}}=(-1)^{n+k+1}\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{\bar{\omega}^n}{\omega^{n+2k+2}},$$

und also jedenfalls $\qquad c_{nk} = 0 \quad$ für $\quad n+k+1 \not\equiv 0 \pmod 2$.

Aus (87) folgt:
$$b_1 = 0\,[1]$$

und aus (85)
$$b_2 = -\frac{\omega_1 \bar{\omega}_1}{\pi}.$$

(88) ergibt jetzt
$$7\,c_{12} = \frac{2}{3\pi}\,\omega_1\,\bar{\omega}_1\,(5\,c_{01})^2. \tag{116}$$

Wenn wir nun mit Hurwitz [1], [2]
$$5\,c_{01} = 1$$

wählen, dann können wir o. B. d. A. ω_1 positiv reell annehmen, und zwar ist

$$\omega_1 = \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \tau^3}}, \tag{117}$$

wie man sofort aus
$$\wp_0'^2 = 4\,\wp_0^3 - 4\,\wp_0$$

erschließt. $\tau = \sigma^2$ liefert
$$\omega_1 = 2\int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^4}}. \tag{118}$$

Da die c_{0k} alle rational sind, also auch d rational ist, folgt aus Satz 30 in Verbindung mit (116) (man beachte, daß $c_{11} = 0$ ist) die Existenz von rationalen Zahlen α^*_{nk}, so daß
$$c_{nk} = \alpha^*_{nk}\left(\frac{\omega_1\,\bar{\omega}_1}{\pi}\right)^n$$

ist. Ja, mittels (109), (112), (113), (115) läßt sich erschließen, daß c_{21} und c_{32} größer als 0 sind (man beachte, daß $d < 0$, nämlich $d = -4$ ist), und aus (70) folgt nun, daß alle c_{nk} mit $n+k+1 \equiv 0 \pmod 2$ größer als 0 sind für $n = 0, 1, 2, 3$.

---

[1] (84) in Verbindung mit der Legendreschen Relation zeigt jetzt übrigens, daß
$$\eta_1 = -\frac{\pi}{\omega_1}, \qquad \eta_2 = \frac{\pi i}{\omega_1}$$
gilt, und nach bekannten Entwicklungen aus der Theorie der Thetafunktionen ist also
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\pi\nu}{e^{2\pi\nu} - 1} = \frac{\pi - 3}{12}.$$
(Vgl. RAMANUJAN [6], Seite 34.)

Wenn wir beachten, daß c_{nk} bis auf einen positiven rationalen Faktor gleich

$$C_{nk} = \sum_{\omega \in \Omega}' \frac{\bar{\omega}^n}{\omega^{n+2k+2}} = \frac{\bar{\omega}_1^n}{\omega_1^{n+2k+2}} \sum_{m_1, m_2}' \frac{(m_1 - i\,m_2)^n}{(m_1 + i\,m_2)^{n+2k+2}}$$

ist, haben wir also den

Satz 33. *Es ist*

$$\sum_{m_1, m_2}' \frac{(m_1 - i\,m_2)^n}{(m_1 + i\,m_2)^{4r-n}} = \alpha_{nr} \frac{\omega_1^{4r-2n}}{\pi^n}, \qquad 2r \geq n+2,$$

wo α_{nr} *rationale Zahlen sind, die für* $n \leq 3$ *jedenfalls positiv sind.*

Im Falle des Sechseckgitters, in dem

$$\omega_2 = \varepsilon\,\omega_1 \quad \text{mit} \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

gesetzt werden darf, ist

$$\sum_{\omega \in \Omega}' \frac{\bar{\omega}^n}{\omega^{n+2k+2}} = \sum_{\omega \in \Omega}' \frac{(\bar{\varepsilon}\,\bar{\omega})^n}{(\varepsilon\,\omega)^{n+2k+2}} = \bar{\varepsilon}^{2(n+k+1)} \sum_{\omega \in \Omega}' \frac{\bar{\omega}^n}{\omega^{n+2k+2}},$$

und also jedenfalls $\qquad c_{nk} = 0 \quad \text{für} \quad n + k + 1 \not\equiv 0 \pmod 3.$

Analog wie im Falle des quadratischen Gitters erhalten wir jetzt

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\omega_1\,\bar{\omega}_1,^{1}$$

$$5\,c_{11} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\,\omega_1\,\bar{\omega}_1 \cdot 7\,c_{02}. \tag{119}$$

Wir setzen jetzt $\qquad 7\,c_{02} = 1.$

Dann ergibt sich aus $\qquad \wp_0'^2 = 4\,\wp_0^3 - 4$

sofort $\qquad \omega_1 = \int\limits_{e_1}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3 - 1}}.$

---

[1] Hier ist $\qquad \eta_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega_1}, \qquad \eta_2 = \bar{\varepsilon}\,\eta_1,$

und aus der Theorie der Thetafunktionen ergibt sich

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{4\sqrt{3}\,\pi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{(-e^{\sqrt{3}\pi})^\nu - 1}.$$

Aus
$$e_3 = -\bar{\varepsilon}\, e_1,\quad e_1 + e_2 + e_2 = 0,\quad e_1 e_2 e_3 = 1$$
ergibt sich nun aber sofort
$$e_1 = 1.$$
Also ist
$$\omega_1 = \int\limits_1^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3 - 1}}, \tag{120}$$
oder $(\tau = 1/\sigma^2)$:
$$\omega_1 = 2\int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^6}}. \tag{121}$$

Analog wie im Falle des quadratischen Gitters ergibt sich jetzt

SATZ 34. *Es ist* $(\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}))$
$$\sum_{m_1, m_2}{}' \frac{(m_1 + \bar{\varepsilon}\, m_2)^n}{(m_1 + \varepsilon\, m_2)^{6r-n}} = \beta_{nr} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^n \omega_1^{6r-2n}, \qquad 3r \geq n+2,$$
wo β_{nr} *rationale Zahlen sind, die für* $n \leq 3$ *jedenfalls positiv sind.*

§ 7. Beschränkte doppeltperiodische Funktionen

In § 2 haben wir gesehen, daß es außer den Konstanten noch andere in der ganzen Ebene beschränkte Funktionen aus $\mathfrak{M}$ gibt, nämlich die Funktionen aus $\mathfrak{N}^n$. Es gibt aber auch komplizierter gebaute Funktionen dieser Art, z. B. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \frac{\bar{z}-\nu}{z-\nu}$. Wir zeigen nun, daß es auch in $\mathfrak{E}^n$ ausser den Konstanten solche Funktionen gibt. Wenn $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}^1, \notin \mathfrak{E}^0$ eine solche Funktion ist, so auch $\mathfrak{f}^n \in \mathfrak{E}^n, \notin \mathfrak{E}^{n-1}$. — Wir legen dabei ein beliebiges Periodengitter Ω zugrunde.

Für $n=1$ können wir sogleich die allgemeinere Aufgabe lösen, die beschränkten unter den Funktionen aus $\mathfrak{E}^n$ genau zu charakterisieren. Sei
$$\mathfrak{f} = u_0 + u_1 \cdot (q + \bar{z}) \qquad (u_0, u_1 \in \mathfrak{E}^0),$$
$$\mathfrak{f} = u_0 + u_1 \cdot (q + \bar{z}_0) + (z - z_0)\, u_1 \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$$
(q siehe (78)). Notwendig und hinreichend für die Beschränktheit von $\mathfrak{f}$ sind nach Satz 3 und nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz, angewandt auf ein Fundamentalparallelogramm von $\mathfrak{f}$, die Bedingungen
$$\underset{z_0}{\mathfrak{o}} \{u_0 + u_1 \cdot (q + \bar{z}_0)\} \geq 0, \qquad \underset{z_0}{\mathfrak{o}} \{(z - z_0)\, u_1\} \geq 0 \tag{122}$$

(für jedes z_0 des Fundamentalparallelogramms). Notwendig darf also u_1 höchstens Pole erster Ordnung haben. Außer an endlich vielen Stellen $0, a_1, a_2, \dots a_m$ eines Fundamentalparallelogramms (welches den Nullpunkt enthalten möge) ist u_1 regulär. Sei

$$u_1 = \frac{A_0}{z} + C_0 + \cdots,$$

$$u_1 = \frac{A_\mu}{z - a_\mu} + \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \dots m),$$

dann ist

$$A_0 = -\sum_{\mu=1}^{m} A_\mu \tag{123}$$

die einzige Einschränkung, der die Konstanten $A_0, A_1, \dots A_m, C_0$ zunächst unterliegen. Die erste der Bedingungen (122) besagt nun, daß u_0 die Entwicklungen

$$-u_0 = \frac{A_0 b_2}{z^2} + \frac{C_0 b_2}{z} + \cdots,$$

$$-u_0 = \frac{A_\mu (b_1 a_\mu + b_2 \zeta(a_\mu) + \bar{a}_\mu)}{z - a_\mu} + \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

besitzt und ansonsten im Fundamentalparallelogramm regulär ist. Hieraus folgt die zweite und einzige weitere Einschränkung, der die Konstanten $A_0, A_1, \dots A_m, C_0$ unterliegen müssen:

$$C_0 b_2 = -\sum_{\mu=1}^{m} A_\mu (b_1 a_\mu + b_2 \zeta(a_\mu) + \bar{a}_\mu). \tag{124}$$

Das Ergebnis ist also: $a_1, a_2, \dots a_m \neq 0$ dürfen beliebig in einem den Nullpunkt enthaltenden Fundamentalparallelogramm gegeben werden. Ferner dürfen $A_1, A_2, \dots A_m$ beliebig gegeben werden. Gemäß (123) berechnet sich A_0 und gemäß (124) C_0 (man beachte, daß stets $b_2 \neq 0$ ist). Die elliptische Funktion u_1 berechnet sich hieraus jetzt nach obiger Vorschrift eindeutig, die elliptische Funktion u_0 dagegen nur eindeutig bis auf eine additive Konstante. *Die so gefundenen Funktionen* $u_0 + u_1 \cdot (q + \bar{z}) \in \mathfrak{F}^1$ *sind beschränkt in der ganzen Ebene, und umgekehrt läßt sich jede in der ganzen Ebene beschränkte Funktion aus* $\mathfrak{F}^1$ *in dieser Weise gewinnen.*

Bemerkenswert ist, daß man bei einfachperiodischen Funktionen so nicht zum Ziel kommt. Ich sehe da auch noch keine Möglichkeit. Es ist daher immer noch nicht ausgeschlossen, daß eine periodische beschränkte Funktion aus $\mathfrak{M}$ stets doppeltperiodisch ist.

Literatur

[1]. A. HURWITZ, Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen. *Nachr. Akad. zu Göttingen*, Math.-Phys. Kl., 1897.

[2]. ——, Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen. *Math. Ann.*, Band 51, 1899.

[3]. HURWITZ-COURANT, *Funktionentheorie*, 2. Auflage. Berlin, 1925.

[4]. G. KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie*. Berlin, 1942.

[5]. N. E. NÖRLUND, *Differenzenrechnung*. Berlin, 1924.

[6]. S. RAMANUJAN, *Collected Papers*. Cambridge, 1927.