# DIE BEIDEN HAUPTSÄTZE DER WERTVERTEILUNGSTHEORIE BEI FUNKTIONEN MEHRERER KOMPLEXER VERÄNDERLICHEN (II)

VON

WILHELM STOLL

*Tübingen*

## III. Kapitel

## Der zweite Hauptsatz[1]

In diesem Kapitel wird der zweite Hauptsatz für meromorphe Flächen bewiesen. Die Theorie, die dazu entwickelt wird, lehnt sich eng an die entsprechende Theorie einer Veränderlichen von H. Weyl, J. Weyl und L. Ahlfors an. Jedoch tritt bei mehreren Veränderlichen ein analytisches Differential $\partial B_{n-1}$ auf, das — von gewissen Einschränkungen abgesehen — beliebig gewählt werden kann, und das bei einer Veränderlichen der Konstanten 1 entspricht, also überhaupt kein eigentliches Analogon hat. Die ganze zu entwickelnde Theorie wird wesentlich von der Wahl des Differentials $\partial B_{n-1}$ abhängen. Erst der zweite Hauptsatz ist weitgehend invariant gegenüber der Wahl des Differentials $\partial B_{n-1}$. Diese weitgehende, aber nicht vollständige Invarianz zeichnet den zweiten Hauptsatz vor allen anderen Sätzen der Theorie der meromorphen Flächen aus und verleiht ihm einen neuen Charakterzug, der bei einer Veränderlichen unbekannt ist.

Die Begriffe und Bezeichnungen aus Kapitel I und II werden ohne neue Erklärung übernommen. Die Numerierung der Definitionen, Sätze und Gleichungen schliesst sich unmittelbar an Kapitel I und II an.

---

[1] Der erste Teil dieser Arbeit, also Kapitel I und II, ist in den Acta Mathematica Bd. 90 Seite 1—115 erschienen.

## § 12. Assoziierte Flächen

Wie in der Einleitung näher begründet wurde, werden die assoziierten Flächen mittels eines Ableitungsoperators definiert, den man durch ein analytisches Differential $\partial B_{n-1}$ erhält. Er werde in Form einer allgemeinen Voraussetzung eingeführt:

VIII. **Ableitung.** *Auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *gebe es ein analytisches alternierendes Differential*

$$(12.1)\qquad \partial B_{n-1} = \partial B_{n-1}(P, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} b_\nu(P, \alpha)\, \partial z_1 \cdots \partial z_{\nu-1} \partial z_{\nu+1} \cdots \partial z_n$$

*der Stufe* $n-1$. *Es werde für das Weitere fest gewählt. Ist die Abbildung* $\alpha$ *der Struktur* $\mathfrak{P}$ *beliebig gewählt, liegt die offene Menge* $M$ *in* $U_\alpha$, *und ist die vielleicht von* $\alpha$ *abhängige Funktion* $f(P, \alpha)$ *auf* $M$ *meromorph, so seien die Ableitungen (bezüglich* $\partial B_{n-1}$*) durch*

$$(12.2)\qquad f' = f'(P, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(P, \alpha) \frac{\partial}{\partial z_\nu} f(\alpha(\mathfrak{z}), \alpha),$$

$$(12.3)\qquad f^{(r)} = \{f^{(r-1)}\}' = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(P, \alpha) \frac{\partial}{\partial z_\nu} f^{(r-1)}(\alpha(\mathfrak{z}), \alpha)$$

*mit* $\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)$ *erklärt. Ist die Polyadenfunktion*

$$(12.4)\qquad \mathfrak{W}^p = \mathfrak{W}^p(P, \alpha) = \sum_{\mu\, p}^{k}{}' w_{\mu_1, \ldots, \mu_p}(P, \alpha)\, [\mathfrak{e}_{\mu_1}, \cdots, \mathfrak{e}_{\mu_p}]$$

*auf* $M$ *meromorph, so sei*

$$(12.5)\qquad \mathfrak{W}^{p(r)} = \mathfrak{W}^{p(r)}(P, \alpha) = \sum_{\mu\, p}^{k}{}' w^{(r)}_{\mu_1, \ldots, \mu_p}(P, \alpha)\, [\mathfrak{e}_{\mu_1}, \cdots, \mathfrak{e}_{\mu_p}].$$

Für diesen Ableitungsbegriff gelten die gewöhnlichen Regeln, so:

$$(12.6)\qquad \{\mathfrak{W}_1^p + \mathfrak{W}_2^p\}^{(r)} = \mathfrak{W}_1^{p(r)} + \mathfrak{W}_2^{p(r)},$$

$$(12.7)\qquad \{f\, \mathfrak{W}^p\}^{(r)} = \sum_{\mu=0}^{r} \binom{r}{\mu} f^{(r-\mu)}\, \mathfrak{W}^{p(\mu)},$$

$$(12.8)\qquad \{\mathfrak{W}^{p(r)}\}^{(s)} = \mathfrak{W}^{p(r+s)},$$

$$(12.9)\qquad [\mathfrak{W}_1^p, \mathfrak{W}_2^q]^{(r)} = \sum_{\mu=0}^{r} \binom{r}{\mu} [\mathfrak{W}^{p(\mu)}, \mathfrak{W}^{q(r-\mu)}],$$

$$(12.10)\qquad \varphi(f_1, \ldots, f_q)' = \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_{f_\nu} \cdot f_\nu'.$$

Hängt die meromorphe Funktion $f$ nicht von der Abbildung $\alpha$ ab, so gilt

$$\partial f \partial B_{n-1} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{z_\nu} b_\nu (P, \alpha) \partial z_1 \cdots \partial z_n = f' \partial z_1 \cdots \partial z_n . \tag{12.11}$$

Dann ist die Ableitung $f'$ eine meromorphe Dichte (der Stufe $n$) auf $M$. Dagegen sind die höheren Ableitungen im allgemeinen keine Dichten mehr.

Die assoziierten Flächen werden nun auf Grund des folgenden Satzes eingeführt.

**Satz 12.1.** Assoziierte Flächen.[2]

**Voraussetzung.** *Auf der komplexen Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *sei eine meromorphe Fläche* $W$ *gegeben. Die Menge* $W^p$ *bestehe genau aus den Polyadenfunktionen* $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$ *der folgenden Art: Die Vektorfunktion* $\mathfrak{w}(P) = \sum_{\mu=1}^{k} w_\mu (P) \mathfrak{e}_\mu$ *sei auf einer offenen Menge* $M$ *eine Darstellung der meromorphen Fläche* $W$. *Die Abbildung* $\alpha \in \mathfrak{P}$ *sei beliebig, jedoch mit der Einschränkung* $M \cap U_\alpha \neq \emptyset$, *gewählt. Dann gelte*

$$\mathfrak{W}^p (P, \alpha) = [\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \cdots, \mathfrak{w}^{(p-1)} (P, \alpha)] \quad \textit{für } P \in M \cap U_\alpha . \tag{12.12}$$

**Behauptung.** *Die Menge* $W^p$ *ist eine meromorphe Fläche der Stufe* $p$.

**Beweis.** Die drei Forderungen von Definition 3.1 sind nachzuprüfen.[3] Die Forderungen 1 und 3 sind mit $U(\mathfrak{W}^p) = M \cap U_\alpha$ offensichtlich erfüllt. Sind $\mathfrak{W}_1^p(P, \alpha_1)$, $\mathfrak{W}_2^p(P, \alpha_2)$ zwei Elemente aus $W^p$, für die $M_{12} = M_1 \cap U_{\alpha_1} \cap M_2 \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$ ist, so gibt es eine auf $M_1 \cap M_2$ meromorphe Funktion $\lambda(P) \not\equiv 0$ mit $\mathfrak{w}_1(P) = \lambda(P) \mathfrak{w}_2(P)$. Die Funktionaldeterminante $\Delta(P) = \dfrac{\partial \alpha_2^{-1} \alpha_1 (\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}}$ mit $\mathfrak{z} = \alpha_1^{-1}(P)$ ist auf $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ analytisch und von Null verschieden. Hält man $\alpha_2$ fest, so ist jede Koordinate des Vektors $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (P, \alpha) \dfrac{\partial}{\partial y_\nu} \mathfrak{w}_2^{(u)} (\alpha(\mathfrak{y}), \alpha_2)$, wobei $\mathfrak{y} = \alpha^{-1}(P)$ ist, eine meromorphe Dichte der Stufe $n$ auf $M_2$. Also gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (P, \alpha_1) \frac{\partial}{\partial y_\nu} \mathfrak{w}_2^{(u)} (\alpha_1(\mathfrak{z}), \alpha_2) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (P, \alpha_2) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\mathfrak{w}_2^{(u)} (\alpha_2(\mathfrak{x}), \alpha_2)) \, \Delta(P) \tag{12.13}$$

für $P \in M_{12}$, wobei $\mathfrak{z} = \alpha_1^{-1}(P)$ und $\mathfrak{x} = \alpha_2^{-1}(P)$ ist. Nun wird behauptet, dass es auf $M_{12}$ meromorphe Funktionen $g_{\mu u}$ gibt, sodass

---

[2] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. I § 6 Seite 33. Dabei bezieht sich eine Bezeichnung wie „W [43]" oder „NEVANLINNA [36]" auf die Literaturangabe am Schluss der Arbeit. Die Zahl „36" ist das Erscheinungsjahr der Arbeit. Die Arbeit „H. WEYL und J. WEYL [43]" wird kurz mit „W [43]" zitiert.

[3] Die Definition 3.1 ist die erste Definition in § 3. Alle Paragraphen mit Nummern $x \leq 11$ befinden sich im Teil I der Arbeit.

$$\mathfrak{w}_1^{(u)} = \mathfrak{w}_2^{(u)} \lambda \Delta^u + \sum_{\mu=0}^{u-1} g_{\mu u}(P)\, \mathfrak{w}_2^{(\mu)} \text{ für } u = 0, 1, \ldots \tag{12.14}$$

auf $M_{12}$ gilt. Für $u=0$ ist die Behauptung richtig. Gilt sie für $u$, so werde sie für $u+1$ bewiesen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{w}_1^{(u+1)} = \mathfrak{w}_2^{(u)} (\lambda \Delta^u)' &+ \sum_{\mu=0}^{u-1} g'_{\mu u}\, \mathfrak{w}_2^{(\mu)} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(P, \alpha_1) \frac{\partial}{\partial z_\nu} \{\mathfrak{w}_2^{(u)}(\alpha_1(\mathfrak{z}), \alpha_2)\} \lambda \Delta^u + \\ &+ \sum_{\mu=0}^{u-1} g_{\mu u} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(P, \alpha_1) \frac{\partial}{\partial z_\nu} \{\mathfrak{w}_2^{(\mu)}(\alpha_1(\mathfrak{z}), \alpha_2)\}.\end{aligned} \tag{12.15}$$

Nach (12.13) ist

$$\mathfrak{w}_1^{(u+1)} = \mathfrak{w}_2^{(u+1)} \lambda \Delta^{u+1} + \sum_{\mu=0}^{u} g_{\mu, u+1}(P)\, \mathfrak{w}_2^{(\mu)} \tag{12.16}$$

mit

$$g_{\mu, u+1} = \begin{cases} g'_{0u} & \text{für } \mu = 0, \\ g'_{\mu u} + g_{\mu-1, u} \Delta & \text{für } \mu = 1, \cdots, u-1, \\ (\lambda \Delta^u)' + g_{u-1, u} \Delta & \text{für } \mu = u. \end{cases} \tag{12.17}$$

Also gilt (12.14) allgemein, woraus

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_1^p(P, \alpha_1) &= [\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_1', \cdots, \mathfrak{w}_1^{(p-1)}(P, \alpha_1)] = \\ &= \lambda^p \Delta^{\frac{1}{2} p(p-1)} [\mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_2', \cdots, \mathfrak{w}_2^{(p-1)}(P, \alpha_2)]\end{aligned} \tag{12.18}$$

für $P \in M_{12}$ folgt. Da $\lambda^p \Delta^{\frac{1}{2} p(p-1)} \not\equiv 0$ und meromorph auf $M_{12}$ ist, ist auch die zweite Forderung erfüllt. Also ist $W^p$ eine meromorphe Fläche der Stufe $p$, w. z. b. w.

Die meromorphen Flächen $W^p$ mit $p > k$ sind alle totaldegeneriert. Es ist $W^1 = W$.

**Definition 12.1.** Assoziierte Flächen.[2]

*Die im Satz* 12.1 *definierte meromorphe Fläche* $W^p$ *der Stufe* $p$ *heisse die* $p$*-te assoziierte Fläche der meromorphen Fläche* $W$. *Für* $p=0$ *sei*

$$\mathfrak{W}^0(P, \alpha) \equiv 1 \tag{12.19}$$

*und* $W^0$ *die konstante meromorphe Fläche, die durch die Konstante* 1 *gegeben wird. Die Darstellungen* $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$, *die durch* (12.12) *bzw.* (12.19) *gegeben werden, heissen eigentliche Darstellungen, und zwar heisse spezielle* $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$ *die zur Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$ *und zur Abbildung* $\alpha$ *gehörige Darstellung von* $W^p$.

Die $p$-te assoziierte Fläche $W^p$ kann man als eine meromorphe Fläche der Stufe 1 in $R^{2\binom{k}{p}}$ auffassen.[4] Daher gelten für sie die in Kapitel I und II aufgestellten Sätze, insbesondere der erste Hauptsatz und die Darstellungen der Charakteristik.

**Satz 12.2.** Der 1. Hauptsatz für assoziierte Flächen.[5]

**Voraussetzung.** *Auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ seien die allgemeinen Voraussetzungen I, II aus § 4, III, IV, V aus § 7 und VIII aus § 12 erfüllt. Die meromorphe Fläche $W$ auf $\mathfrak{M}^{2n}$ habe die $p$-te assoziierte Fläche $W^p$, die nicht totaldegeneriert sei. Ist eine kontravariante Polyade $A^p$ mit $(W^p, A^p) \not\equiv 0$ gegeben, ist $\nu_p(P, A^p)$ die Schnittzahl im Punkt $P$ zu $A^p$ und $\mathfrak{N}(A^p)$ die zugehörige Schnittstellenfläche, so seien als Funktionen der zulässigen Menge $G$ die Anzahlfunktion durch*

$$N_p(G, A^p) = \int_{\mathfrak{N}(A^p)} \nu_p(P, A^p)\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2}, \tag{12.20}$$

*die Schmiegungsfunktionen durch*

$$m_p(\Gamma, A^p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \frac{1}{\|\mathfrak{W}^p, A^p\|} \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}, \tag{12.21}$$

$$m_p(\gamma, A^p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \log \frac{1}{\|\mathfrak{W}^p, A^p\|} \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2} \tag{12.22}$$

*erklärt.*

**Behauptung.** *Das Differential*

$$\partial \omega_2(\mathfrak{W}^p) = \frac{i}{2} |\mathfrak{W}^p|^{-4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} (\mathfrak{W}^p \,|\, \mathfrak{W}^p), & (\mathfrak{W}^p \,|\, \mathfrak{W}^p_{z_\nu}) \\ (\mathfrak{W}^p_{z_\mu} \,|\, \mathfrak{W}^p), & (\mathfrak{W}^p_{z_\mu} \,|\, \mathfrak{W}^p_{z_\nu}) \end{vmatrix} \partial z_\mu\, \partial \bar{z}_\nu \tag{12.23}$$

*ist unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{W}^p$ der assoziierten Fläche $W^p$ auf $\mathfrak{M}^{2n}$, abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von $W^p$, eindeutig erklärt. Bei fester zulässiger Menge $G$ hat für jede kontravariante Polyade $A^p \neq 0$ mit $(W^p, A^p) \not\equiv 0$ die Charakteristik*

$$T_p(G) = T_p(G, g) = N_p(G, A^p) + m_p(\Gamma, A^p) - m_p(\gamma, A^p) \tag{12.24}$$

---

[4] Nach § 1 ist $R_p^{2k}$ der Raum der Polyaden $\mathfrak{X}^p$ der Stufe $p$ und der Dimension $k$ und $R_1^{2\binom{k}{p}}$ der Raum der Vektoren $\mathfrak{x}$ der Dimension $\binom{k}{p}$. Beide Räume sind isomorph. Bei dieser Isomorphie entsprechen sich das innere Produkt, das skalare Produkt und die Sternoperation. Für das äussere Produkt gilt das nicht mehr.

[5] Für $n=1$ siehe W [43] Kap. IV § 3 Seite 173–177.

*der p-ten assoziierten Fläche $W^p$ denselben, von $A^p$ unabhängigen Wert*

$$T_p(G) = \frac{1}{\pi}\int\limits_G \psi(P, G)\,\partial\,\omega_2(\mathfrak{W}^p)\,\partial\,\chi_{2n-2}. \tag{12.25}$$

Der Beweis wurde bereits mit Satz 8.2, Hilfssatz 2 von § 9 und Satz 9.4 erbracht. Nach § 9 bis § 11 gilt ausserdem:

Die Anzahlfunktion erfüllt die Invarianzforderungen 1 bis 6 von § 3, während die Schmiegungsfunktionen und die Charakteristik nur den Invarianzforderungen 1 bis 5 genügen. Führt man eine neue Metrik $(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y})_0$ in $R_1^{2k}$ und die induzierte Metrik $(\mathfrak{X}^p\,|\,\mathfrak{Y}^p)_0$ nach (1.34) in $R_p^{2k}$ ein, bezeichnet man die bezüglich der Metrik $(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y})_0$ gebildeten Ausdrücke mit einem Index $^{(0)}$ und bestimmt man die nur von den Metriken abhängige Konstante $\lambda_p$ nach § 1 d, so folgt:

$$|m_p^{(0)}(\Gamma, A^p) - m_p(\Gamma, A^p)| \leq \log \lambda_p, \tag{12.26}$$

$$|m_p^{(0)}(\gamma, A^p) - m_p(\gamma, A^p)| \leq \log \lambda_p, \tag{12.27}$$

$$|T_p^{(0)}(G) - T_p(G)| \leq 2\log \lambda_p, \tag{12.28}$$

$$N_p^{(0)}(G, A^p) = N_p(G, A^p). \tag{12.29}$$

Ist die assoziierte Fläche $W^p \not\equiv 0$ nichtkonstant, so gilt:

$$0 < T_p(G_1) < T_p(G_2) \quad \text{für} \quad G_1 \subset G_2. \tag{12.30}$$

Ist die assoziierte Fläche $W^p$ nicht totaldegeneriert und ist $G$ eine zulässige Menge, so ist der Quotient[5]

$$0 \leq S_p(P) = \frac{\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \begin{vmatrix} (\mathfrak{W}^p\,|\,\mathfrak{W}^p) & (\mathfrak{W}^p\,|\,\mathfrak{W}^p_{\bar{z}_\nu}) \\ (\mathfrak{W}^p_{z_\mu}\,|\,\mathfrak{W}^p) & (\mathfrak{W}^p_{z_\mu}\,|\,\mathfrak{W}^p_{\bar{z}_\nu}) \end{vmatrix}}{\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\,\psi_{z_\mu}\,\psi_{\bar{z}_\nu}\,|\mathfrak{W}^p|^4} = -2\,\frac{\partial\,\omega_2(\mathfrak{W}^p)\,\partial\,\chi_{2n-2}}{\partial\,\psi\,\partial^\perp\psi\,\partial\,\chi_{2n-2}} \tag{12.31}$$

auf $\bar{H} - E$[6], abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von $W^p$, unabhängig von der gewählten Darstellung $\mathfrak{W}^p(P)$ und der uniformisierenden Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ eindeutig als Funktion des Punktes $P$ erklärt. Das Differential $S_p(P)\,\partial\,\psi\,\partial^\perp\psi\,\partial\,\chi_{2n-2}$ ist über $\bar{H}$–$E$ und das Differential $S_p(P)\,\partial^\perp\psi\,\partial\,\chi_{2n-2}$ über fast alle $\Gamma_r$ integrierbar. Setzt man[5]

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int\limits_g \partial\,\omega_2(\mathfrak{W}^p)\,\partial\,\chi_{2n-2}, \tag{12.32}$$

---

[6] Nach IV ist $H = G - \bar{g}$ der Kondensator der zulässigen Menge $G$ und $E = \{P \,|\, \partial\,\psi(P, G) = 0\} \cap \bar{H}$ seine kritische Menge.

(12.33) $$\varepsilon_p(r) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{G_r \cap E} \partial\, \omega_2(\mathfrak{W}^p)\, \partial\, \chi_{2n-2},$$

(12.34) $$Q_p(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_r} S_p(P)\, \partial^{\perp} \psi\, \partial\, \chi_{2n-2},$$

(12.35) $$A_p(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{G_t} \partial\, \omega_2(\mathfrak{W}^p)\, \partial\, \chi_{2n-2},$$

so gilt die sphärische Darstellung

(12.36) $$T_p(G) = \int\limits_0^{R(G)} A_p(t)\, dt$$

und die Darstellung

(12.37) $$T_p(G) = a_p\, R(G) + \int\limits_0^{R(G)} (R(G) - r)\, Q_p(r)\, dr + \int\limits_0^{R(G)} (R(G) - r)\, d\,\varepsilon_p(r).$$

Ferner ist

(12.38) $$A_p(t) = a_p + \int\limits_0^{t} Q_p(r)\, dr + \varepsilon_p(t).$$

Ist $W^p$ nicht konstant, so sind $a_p$, $Q_p(r)$ und $A_p(t)$ positiv; ist $W^p$ konstant, so sind sie Null. In $0 \le r \le R(G)$ sind $A_p(r)$ monoton und $T_p(G_r)$ monoton, totalstetig und konvex.

Setzt man

(12.39) $$n_p(G, A^p) = \int\limits_{G \cap \mathfrak{N}(A^p)} \nu_p(P, A^p)\, \partial\, \chi_{2n-2},$$

so ist

(12.40) $$N_p(G_r, A^p) = \int\limits_0^{r} n_p(G_t, A^p)\, dt.$$

Werden die allgemeinen Voraussetzungen VI und VII auch noch gemacht, ist $b$ der Eichfaktor der Massbestimmung $\partial\, \chi_{2n-2}$ und ist die $p$-te assoziierte Fläche $W^p$ nicht konstant, so gilt

(12.41) $$m_p(\gamma, A^p) + T_p(G) \ge N_p(G, A^p) \ge R(G)\, b > 0$$

für jede kontravariante Polyade $A^p$ mit $(W^p, A^p) \not\equiv 0$. Hat die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ ausserdem die Gesamtkapazität $\mathfrak{C} = 0$, so strebt

(12.42) $$T_p(G) \to \infty \text{ für } G \to \mathfrak{M}^{2n},$$

und es gilt

$$\varliminf_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} \frac{T_p(G)}{R(G)} \geq b > 0.$$

## § 13. Projektion

Als Beweishilfsmittel werden wie in W [43] die projizierten Flächen eingeführt.

**Satz 13.1.** Projizierte Flächen.[7]

**Voraussetzung.** *Die meromorphe Fläche $W$ auf der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ habe die p-te assoziierte Fläche $W^p$. Eine kovariante Polyade $\mathfrak{A}^h$ sei gegeben. Die Menge $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ bestehe genau aus den Polyadenfunktionen $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P, \alpha)]$ für die $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$ eine eigentliche Darstellung von $W^p$ ist.*

**Behauptung.** 1. *Die Menge $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ ist eine meromorphe Fläche der Stufe $h+p$.*

2. *Ist $\mathfrak{W}^p(P)$ irgendeine Darstellung von $W^p$ auf der offenen Menge $M$, so ist $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]$ eine Darstellung von $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ auf $M$.*

3. *Ist $\tilde{\mathfrak{W}}^{p+h}(P)$ auf der offenen Menge $M$ eine Darstellung von $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]$, so gibt es zu jedem Punkt $P_0 \in M$ eine Umgebung $U(P_0) \subseteq M$ und eine Darstellung $\mathfrak{W}^p(P)$ von $W^p$ auf $U(P_0)$, sodass $\tilde{\mathfrak{W}}^{p+h}(P) = [\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]$ auf $U(P_0)$ gilt.*

**Beweis.** Die Forderungen 1 bis 3 von Definition 3.1 sind offensichtlich erfüllt. Daher gilt die 1. Behauptung; die 2. Behauptung ist offensichtlich ebenfalls richtig. Ist $\tilde{\mathfrak{W}}^{p+h}(P)$ auf der offenen Menge $M$ eine Darstellung von $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ und gehört der Punkt $P_0$ zu $M$, so gibt es auf einer Umgebung $U(P_0) \subseteq M$ von $P_0$ eine Darstellung $\mathfrak{W}_1^p(P)$ von $W^p$. Es ist $\tilde{\mathfrak{W}}^{p+h}(P) = [\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}_1^p(P)]\,\lambda(P)$ auf $U(P_0)$, wobei die Funktion $\lambda(P)$ in jedem Teilgebiet von $U(P_0)$ nicht identisch Null und meromorph ist. Auf $U(P_0)$ ist $\mathfrak{W}^p(P) = \lambda(P)\,\mathfrak{W}_1^p(P)$ eine Darstellung von $W^p$; es gilt $\tilde{\mathfrak{W}}^{p+h}(P) = [\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]$ für $P \in U(P_0)$, w. z. b. w.

**Definition 13.1.** Projizierte Flächen.[7]

*Die im Satz 13.1 definierte meromorphe Fläche $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ heisse die Projektion der assoziierten Fläche $W^p$ entlang der kovarianten Polyade $\mathfrak{A}^h$. Für $h=0$ sei $[\mathfrak{A}^0, W^p] = W^p$, für $p=0$ sei $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ die meromorphe Fläche der Stufe $h$, die durch die konstante Darstellung $\mathfrak{A}^h$ definiert wird. Die Darstellungen, die der Menge $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ angehören, heissen eigentliche Darstellungen.*

---

[7] Für $n=1$ siehe W [43] Kap. II § 7 Seite 109–112.

Da $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ eine meromorphe Fläche ist, gelten für sie die Sätze über meromorphe Flächen, insbesondere der 1. Hauptsatz. Ist $[\mathfrak{A}^h, W^p] \not\equiv 0$, so sei $T_p(G, \mathfrak{A}^h)$ die Charakteristik von $[\mathfrak{A}^h, W^p]$. Unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{W}^p(P)$ von $W^p \not\equiv 0$ ist

$$\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^p(P)\| = \frac{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]|}{|\mathfrak{A}^h|\,|\mathfrak{W}^p(P)|} \tag{13.1}$$

auf $\mathfrak{M}^{2n}$, abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von $W^p$, eindeutig als Funktion des Punktes $P$ erklärt, falls $\mathfrak{A}^h \neq 0$ ist. Ist $[\mathfrak{A}^h, W^p] \not\equiv 0$, so seien[7]

$$\tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log \frac{1}{\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^p(P)\|} \partial^\perp \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2}, \tag{13.2}$$

$$\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \log \frac{1}{\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^p(P)\|} \partial^\perp \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2}. \tag{13.3}$$

Diese Integrale existieren und sind nichtnegativ. Es gilt:

**Satz 13.2.** Die Änderung der Charakteristik bei Projektion.

**Voraussetzung.** *Die meromorphe Fläche $W$ habe die $p$-te assoziierte Fläche $W^p$. Die Projektion $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ von $W^p$ entlang der speziellen, kovarianten Polyade $\mathfrak{A}^h = [\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_h] \neq 0$ sei nicht totaldegeneriert und habe die Charakteristik $T_p(G, \mathfrak{A}^h)$. Die Funktionen $\tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h)$ und $\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h)$ seien nach (13.2) und (13.3) erklärt.*

**Behauptung.** 1. *Ist nach § 3 Satz 3.2 ff. $d_p(P, 0)$ die Vielfachheit der Nullstelle $P$ und $d_p(P, \infty)$ die Vielfachheit der Polstelle $P$ der Darstellung $\mathfrak{W}^p(P)$ von $W^p$, ist $d_p(P, 0, \mathfrak{A}^h)$ die Vielfachheit der Nullstelle $P$ und $d_p(P, \infty, \mathfrak{A}^h)$ die Vielfachheit der Polstelle $P$ der zugehörigen Darstellung $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]$ von $[\mathfrak{A}^p, W^p]$, so ist*

$$\tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^h) = d_p(P, 0, \mathfrak{A}^h) - d_p(P, \infty, \mathfrak{A}^h) - d_p(P, 0) + d_p(P, \infty) \tag{13.4}$$

*nichtnegativ und hängt nicht von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{W}^p(P)$ ab. Es ist $\tilde{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}^h) = \{P \mid \tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^h) > 0\}$ eine abgeschlossene Nullstellenfläche aus $\mathfrak{M}^{2n}$, der man die Vielfachheit $\tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^h)$ zuordnen kann.*

2. *Setzt man*

$$\tilde{N}_p(G, \mathfrak{A}^h) = \int_{\tilde{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}^h)} \tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^h)\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2} \geq 0, \tag{13.5}$$

*so gilt*

$$T_p(G) - T_p(G, \mathfrak{A}^h) = \tilde{N}_p(G, \mathfrak{A}^h) + \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h) - \tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h). \tag{13.6}$$

3. *Setzt man*

$$\Lambda_p(G, \tilde{\mathfrak{A}}^h) = N_p(G, \mathfrak{A}^h) + \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h) = T_p(G) - T_p(G, \mathfrak{A}^h) + \tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h), \tag{13.7}$$

*so gilt*

$$0 \leq \Lambda_{p-1}(G, \mathfrak{A}^h) \leq \Lambda_p(G, \mathfrak{A}^h). \tag{13.8}$$

4. Ist $\{\mathfrak{A}^{h-1}\}$ *ein Teilraum von* $\{\mathfrak{A}^h\}$, *so gilt*

$$\Lambda_p(G, \mathfrak{A}^{h-1}) \leq \Lambda_p(G, \mathfrak{A}^h). \tag{13.9}$$

**Beweis.** 1. Eine Normalbasis $\mathfrak{c}_1, \cdots, \mathfrak{c}_h$ des Raumes $\{\mathfrak{A}^h\}$ wird gewählt und durch $\mathfrak{c}_{h+1}, \cdots, \mathfrak{c}_k$ zu einem Koordinatensystem des Raumes $R_1^{2k}$ ergänzt. Auf der offenen Menge $M$, sei $\mathfrak{W}^p(P)$ eine Darstellung von $W^p$. Ihr ist die Darstellung $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]$ von $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ auf $M$ zugeordnet. Es ist

$$\mathfrak{W}^p(P) = \sum_{\mu|p}^{k}{}' w_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P)[\mathfrak{c}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{c}_{\mu_p}] \qquad \text{für } P \in M, \tag{13.10}$$

$$[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)] = \sum_{h+1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k} w_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P)[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{c}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{c}_{\mu_p}] \text{ für } P \in M. \tag{13.11}$$

Auf der offenen Menge $O \subseteq M$ seien die Funktionen $\Delta_Z(P)$, $\Delta_N(P)$, $\Delta_Z^*(P)$ $\Delta_N^*(P)$ analytisch und mögen die folgenden Eigenschaften haben:

1. Zu jedem festen Wertesatz ganzer Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_p$ mit $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k$, gibt es ein Paar in $O$ analytischer und in jedem Punkt von $O$ teilerfremder Funktionen $f_{\mu_1 \ldots \mu_p}$, $g_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ sodass $w_{\mu_1 \ldots \mu_p} = \dfrac{f_{\mu_1 \ldots \mu_p}}{g_{\mu_1 \ldots \mu_p}}$ in $O$ gilt.

2. Die Funktionen $f_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ mit $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k$ haben in jedem Punkt von $O$ den grössten gemeinsamen Teiler $\Delta_Z(P)$.

3. Die Funktionen $g_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ mit $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k$ haben in jedem Punkt von $O$ den grössten gemeinsamen Teiler $\Delta_N(P)$.

4. Die Funktionen $f_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ mit $h+1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k$ haben in jedem Punkt von $O$ den grössten gemeinsamen Teiler $\Delta_Z^*(P)$.

5. Die Funktionen $g_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ mit $h+1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k$ haben in jedem Punkt von $O$ den grössten gemeinsamen Teiler $\Delta_N^*(P)$.

Es sei

$$D_p(P) = \frac{\Delta_Z^*(P)}{\Delta_N^*(P)} \frac{\Delta_N(P)}{\Delta_Z(P)}. \tag{13.12}$$

Lässt man $\mathfrak{W}^p(P)$ alle möglichen Darstellungen durchlaufen, trifft man dabei alle möglichen Wahlen der offenen Menge $O$ und der Funktionen $\Delta_Z$, $\Delta_N$, $\Delta_Z^*$, $\Delta_N^*$, so erhält man eine Menge $F$ von Ausdrücken $(D_p(P), O)$. Es wird behauptet, dass $F$ eine COUSINsche Verteilung II. Art auf $\mathfrak{M}^{2n}$ ist. Zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ gibt es eine Umgebung $O$ von $P_0$, auf der eine Darstellung $\mathfrak{W}^p(P)$ von $W^p$ existiert, für die sich die Forderungen 1 bis 5 erfüllen lassen, sodass $(D_p(P), O) \in F$ ist. Sind $(D_p^{(1)}(P), O_1)$ und $(D_p^{(2)}(P), O_2)$ zwei Elemente von $F$, so seien $\mathfrak{W}_1(P)$, $\mathfrak{W}_2(P)$ die zugehörigen Darstellungen auf $M_1 \supseteq O_1$ bzw. $M_2 \supseteq O_2$. Die zugehörigen grössten gemeinsamen Teiler seien $\Delta_Z^{(1)}$, $\Delta_N^{(1)}$, $\Delta_Z^{*(1)}$, $\Delta_N^{*(1)}$, $\Delta_Z^{(2)}$, $\Delta_N^{(2)}$, $\Delta_Z^{*(2)}$, $\Delta_N^{*(2)}$. Ist $P_0 \in O_1 \cap O_2$, so gibt es ein Gebiet $U$ mit $P_0 \in U \subseteq O_1 \cap O_2$, auf dem es zwei in jedem Punkt von $U$ teilerfremde analytische Funktionen $f$ und $g$ gibt, sodass $\mathfrak{W}_1(P) = \frac{f}{g}\mathfrak{W}_2(P)$ in $U$ gilt. In $U$ sind daher die Funktionen

$$(13.13) \qquad h_Z = \frac{\Delta_Z^{(1)}}{f\,\Delta_Z^{(2)}}, \quad h_Z^* = \frac{\Delta_Z^{*(1)}}{f\,\Delta_Z^{*(2)}}, \quad h_N = \frac{\Delta_N^{(1)}}{g\,\Delta_N^{(2)}}, \quad h_N^* = \frac{\Delta_N^{*(1)}}{g\,\Delta_N^{*(2)}}$$

regulär und von Null verschieden. Dasselbe gilt also auch von

$$(13.14) \qquad \frac{D_p^{(1)}(P)}{D_p^{(2)}(P)} = \frac{\Delta_Z^{*(1)}\,\Delta_N^{(1)}\,\Delta_Z^{(2)}\,\Delta_N^{*(2)}}{\Delta_N^{*(1)}\,\Delta_Z^{(1)}\,\Delta_N^{(2)}\,\Delta_Z^{*(2)}} = \frac{h_N\,h_Z^*}{h_Z\,h_N^*}.$$

Ist $(D_p(P), O)$ ein Element von $F$, so gibt es zu jedem Punkt $P_0 \in O$ ein Gebiet $U$ mit $P_0 \in U \subseteq O$, in dem es eine reduzierte Darstellung $\tilde{\mathfrak{W}}^p$ von $W^p$ gibt, und auf dem die Forderungen 1 bis 5 für die grössten gemeinsamen Teiler $\tilde{\Delta}_Z = \tilde{\Delta}_N = \tilde{\Delta}_N^* = 1$, $\tilde{\Delta}_Z^*$ erfüllt sind. Dann ist $\tilde{D}_p(P) = \tilde{\Delta}_Z^*$ auf $U$ analytisch. Nach (13.14) ist aber auch

$$(13.15) \qquad D_p(P) = \frac{D_p(P)}{\tilde{D}_p(P)}\tilde{D}_p(P)$$

auf $U$ analytisch. Damit ist bewiesen, dass die Menge $F$ eine COUSINsche Verteilung auf $\mathfrak{M}^{2n}$ ist. Nach Satz 3.2 ist $d_p(P, 0)$ die Vielfachheit der Nullstelle $P$ von $\Delta_Z$ und $d_p(P, \infty)$ die Vielfachheit der Nullstelle $P$ von $\Delta_N$, sowie $d_p(P, 0, \mathfrak{A}^h)$ die Vielfachheit der Nullstelle $P$ von $\Delta_Z^*$ und $d_p(P, \infty, \mathfrak{A}^h)$ die Vielfachheit der Nullstelle $P$ von $\Delta_N^*$. Nach (13.12) ist

$$(13.16) \qquad \tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^h) = d_p(P, 0, \mathfrak{A}^h) - d_p(P, \infty, \mathfrak{A}^h) - d_p(P, 0) + d_p(P, \infty)$$

die Vielfachheit der Nullstelle $P$ der COUSINschen Verteilung $F$. Also ist $\tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^h) \geq 0$ und hängt nicht von der Wahl der Darstellung ab. Die COUSINsche Verteilung $F$ hat die abgeschlossene Nullstellenfläche $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}^h) = \{P \mid \nu_p(P, \mathfrak{A}^h) > 0\}$ mit der Vielfachheit $\tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^h)$. Damit ist die 1. Behauptung bewiesen.

2. Zum Koordinatensystem $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_k$ werde das duale Koordinatensystem $\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_k$ bestimmt. Der kontravariante Polyade

$$A^{p+h} = \sum_{h+1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k} \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_p} [\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_h, \vec{\gamma}_{\mu_1}, \ldots, \vec{\gamma}_{\mu_p}] \tag{13.17}$$

ist die kontravariante Polyade

$$A^p = \sum_{h+1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k} \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_p} [\vec{\gamma}_{\mu_1}, \ldots, \vec{\gamma}_{\mu_p}] \tag{13.18}$$

eineindeutig zugeordnet. Ist $\mathfrak{W}^p(P)$ eine Darstellung von $W^p$ auf der offenen Menge $M$, so gilt wegen

$$\mathfrak{A}^h = |\mathfrak{A}^h| [\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_h] \tag{13.19}$$

gemäss den Gleichungen (13.10), (13.11), (13.17) und (13.18) die Beziehung

$$([\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)], A^{p+h}) = |\mathfrak{A}^h| \sum_{h+1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq k} w_{\mu_1 \ldots \mu_p} \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_p} = |\mathfrak{A}^h| (\mathfrak{W}^p(P), A^p). \tag{13.20}$$

Da eine Koordinate von $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]$ in keinem Teilgebiet von $M$ identisch verschwindet, kann man $A^{p+h}$ so wählen, dass (13.20) mit $(\mathfrak{W}^p(P), A^p) \not\equiv 0$ in jedem Teilgebiet von $M$ gilt. Ist $\nu_p(P, A^p)$ die Schnittzahl in $P$ von $W^p$ zu $A^p$ und $\nu_{p+h}(P, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h)$ die Schnittzahl in $P$ von $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ zu $A^{p+h}$, so folgt aus (13.20) und Satz 3.3 die Gleichung

$$\begin{aligned} &\nu_{p+h}(P, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h) + d_p(P, 0, \mathfrak{A}^h) - d_p(P, \infty, \mathfrak{A}^h) = \\ &\qquad = \nu_p(P, A^p) + d_p(P, 0) - d_p(P, \infty), \end{aligned} \tag{13.21}$$

was mit (13.16) dann

$$\nu_{p+h}(P, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h) = \nu_p(P, A^p) - \tilde{\nu}(P, \mathfrak{A}^h) \tag{13.22}$$

ergibt. Ist $\mathfrak{N}(A^{p+h})$ die Schnittstellenfläche zu $A^{p+h}$ bezüglich $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ und ist $\mathfrak{N}(A^p)$ die Schnittstellenfläche zu $A^p$ bezüglich $W^p$, so ist $\mathfrak{N}(A^p) = \mathfrak{N}(A^{p+h}) \cup \tilde{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}^h)$. Für die zugehörigen Anzahlfunktionen gilt

$$N_{p+h}(G, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h) = N_p(G, A^p) - \tilde{N}_p(G, \mathfrak{A}^h). \tag{13.23}$$

Die Schmiegungsfunktionen zu $A^{p+h}$ von $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ sind

$$\begin{aligned} m_{p+h}(\Gamma, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h) &= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log \frac{|[\mathfrak{W}^p, \mathfrak{A}^h]| \, |A^{p+h}|}{|([\mathfrak{W}^p, \mathfrak{A}^h], A^{p+h})|} \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log \frac{|[\mathfrak{W}^p, \mathfrak{A}^h]| \, |A^p|}{|(\mathfrak{W}^p, A^p)| \, |\mathfrak{A}^h|} \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} = \\ &= m_p(\Gamma, A^p) - \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h), \end{aligned} \tag{13.24}$$

$$m_{p+h}(\gamma, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h) = m_p(\gamma, A^p) - \tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h). \tag{13.25}$$

Nach dem 1. Hauptsatz ist

$$T_p(G, \mathfrak{A}^h) = N_{p+h}(G, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h) + m_{p+h}(\Gamma, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h) - m_{p+h}(\gamma, A^{p+h}, \mathfrak{A}^h), \tag{13.26}$$

$$T_p(G) = N_p(G, A^p) + m_p(\Gamma, A^p) - m_p(\gamma, A^p). \tag{13.27}$$

Mit (13.23) bis (13.25) folgt durch Subtraktion aus (13.26) und (13.27) die Gleichung (13.6), womit die 2. Behauptung bewiesen ist.

3. Aus $[\mathfrak{A}^h, W^p] \not\equiv 0$ folgt $[\mathfrak{A}^h, W^{p-1}] \not\equiv 0$. Ist $\mathfrak{w}(P)$ eine Darstellung der meromorphen Fläche $W$ auf $M$ und ist die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $U_\alpha \cap M = U \neq \emptyset$ beliebig gewählt, so seien $\mathfrak{W}^{p-1}(P, \alpha)$ und $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$ die zugehörigen eigentlichen Darstellungen von $W^{p-1}$ bzw. $W^p$ auf $U$. Nach (1.49) ist

$$\|\mathfrak{W}^p(P, \alpha) : \mathfrak{A}^p\| \leq \|\mathfrak{W}^{p-1}(P, \alpha) : \mathfrak{A}^h\|, \tag{13.28}$$

also

$$0 \leq \tilde{m}_{p-1}(\Gamma, \mathfrak{A}^h) \leq \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h), \tag{13.29}$$

$$0 \leq \tilde{m}_{p-1}(\gamma, \mathfrak{A}^h) \leq \tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h). \tag{13.30}$$

Ist die offene Menge $O \subseteq U$ hinreichend klein gewählt, so kann man zu ihr die Funktionen $\Delta_Z(P)$, $\Delta_N(P)$, $\Delta_Z^*(P)$, $\Delta_N^*(P)$ und $D_p(P)$ gemäss den Forderungen 1 bis 5 zu $\mathfrak{W}^p$ und entsprechend die Funktionen $\tilde{\Delta}_Z(P)$, $\tilde{\Delta}_N(P)$, $\tilde{\Delta}_Z^*(P)$, $\tilde{\Delta}_N^*(P)$ und $D_{p-1}(P)$ zu $\mathfrak{W}^{p-1}$ bestimmen. Es sind

$$\mathfrak{W}_1^{p-1} = \frac{\tilde{\Delta}_N}{\tilde{\Delta}_Z}\mathfrak{W}^{p-1}, \quad \mathfrak{W}_1^p = \frac{\Delta_N}{\Delta_Z}\mathfrak{W}^p, \tag{13.31}$$

$$\mathfrak{W}_1^{p+h-1} = \frac{\tilde{\Delta}_N^*}{\tilde{\Delta}_Z^*}[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}], \quad \mathfrak{W}_1^{p+h} = \frac{\Delta_N^*}{\Delta_Z^*}[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p] \tag{13.32}$$

reduzierte Darstellungen auf $O$. Auf $O$ gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{D_p(P)}{D_{p-1}(P)}\right| &= \frac{|\mathfrak{W}_1^p|}{|\mathfrak{W}^p|}\,\frac{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]|}{|\mathfrak{W}_1^{p+h}|}\,\frac{|\mathfrak{W}^{p-1}|}{|\mathfrak{W}_1^{p-1}|}\,\frac{|\mathfrak{W}_1^{p+h-1}|}{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}]|} = \\ &= \frac{\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^p\|}{\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^{p-1}\|}\cdot\frac{|\mathfrak{W}_1^p|\,|\mathfrak{W}_1^{p+h-1}|}{|\mathfrak{W}_1^{p+h}|\,|\mathfrak{W}_1^{p-1}|}\end{aligned} \tag{13.33}$$

Mit (13.28) folgt

$$\left|\frac{D_p(P)}{D_{p-1}(P)}\right| \leq \frac{|\mathfrak{W}_1^p|\,|\mathfrak{W}_1^{p+h-1}|}{|\mathfrak{W}_1^{p-1}|\,|\mathfrak{W}_1^{p+h}|}. \tag{13.34}$$

Also wird die meromorphe Funktion $\dfrac{D_p(P)}{D_{p-1}(P)}$ auf keiner Nullstellenfläche unendlich, sie ist also analytisch in $O$. Da die offenen Mengen $O$ die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ überdecken, ist

$$\tilde{\nu}_{p-1}(P, \mathfrak{A}^h) \leq \nu_p(P, \mathfrak{A}^h), \tag{13.35}$$

also

$$0 \leq \tilde{N}_{p-1}(G, \mathfrak{A}^h) \leq \tilde{N}_p(G, \mathfrak{A}^h). \tag{13.36}$$

Aus (13.29), (13.36) und (13.7) folgt (13.8). Die 3. Behauptung ist bewiesen.

4. Ist der Raum $\{\mathfrak{A}^{h-1}\}$ im Raum $\{\mathfrak{A}^h\}$ gelegen, so gilt bei geeigneter Wahl der Normalbasis $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_h$ von $\{\mathfrak{A}^h\}$ die Beziehung

$$\mathfrak{A}^{h-1} = |\mathfrak{A}^{h-1}| [\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{h-1}]|, \quad \mathfrak{A}^h = |\mathfrak{A}^h| [\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_h], \tag{13.37}$$

Ist $\mathfrak{W}^p$ eine Darstellung der assoziierten Fläche $W^p$ auf $M$, so gilt

$$\| \mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^p \| \leq \| \mathfrak{A}^{h-1} : \mathfrak{W}^p \|, \tag{13.38}$$

also

$$0 \leq \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^{h-1}) \leq \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h), \tag{13.39}$$

$$0 \leq \tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^{h-1}) \leq \tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h). \tag{13.40}$$

Ist $O$ eine hinreichend kleine, offene Teilmenge von $M$, so kann man zu ihr die Funktionen $\Delta_Z(P)$, $\Delta_N(P)$ zu $\mathfrak{W}^p$, die Funktionen $\Delta_Z^*(P)$, $\Delta_N^*(P)$, $D_p(P)$ zu $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]$ und die Funktionen $\tilde{\Delta}_Z^*(P)$, $\tilde{\Delta}_N^*(P)$, $\tilde{D}_p(P)$ zu $[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]$ bestimmen. Es sind

$$\begin{aligned} &\mathfrak{W}_1^p(P) = \frac{\Delta_N(P)}{\Delta_Z(P)} \mathfrak{W}^p(P), \quad \mathfrak{W}_1^{p+h}(P) = \frac{\Delta_N^*(P)}{\Delta_Z^*(P)} [\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)] \\ &\mathfrak{W}_1^{p+h-1}(P) = \frac{\tilde{\Delta}_N^*(P)}{\tilde{\Delta}_Z^*(P)} [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p(P)] \end{aligned} \tag{13.41}$$

reduzierte Darstellungen auf $O$. Dort gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{D_p(P)}{\tilde{D}_p(P)} \right| &= \frac{|\mathfrak{W}_1^p(P)|}{|\mathfrak{W}^p(P)|} \frac{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P)]|}{|\mathfrak{W}_1^{p+h}(P)|} \frac{|\mathfrak{W}^p(P)|}{|\mathfrak{W}_1^p(P)|} \frac{|\mathfrak{W}_1^{p+h-1}(P)|}{|[\mathfrak{A}^{h-1}\mathfrak{W}^p(P)]|} \\ &= \frac{|\mathfrak{A}^h|}{|\mathfrak{A}^{h-1}|} \frac{\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^p(P)\|}{\|\mathfrak{A}^{h-1} : \mathfrak{W}^p(P)\|} \frac{|\mathfrak{W}_1^{p+h-1}|}{|\mathfrak{W}_1^{p+h}|}. \end{aligned} \tag{13.42}$$

Wegen (13.38) folgt

$$\left| \frac{D_p(P)}{\tilde{D}_p(P)} \right| \leq \frac{|\mathfrak{W}_1^{p+h-1}(P)|}{|\mathfrak{W}_1^{p+h}(P)|}. \tag{13.43}$$

Also wird die meromorphe Funktion $\frac{D_p(P)}{\tilde{D}_p(P)}$ auf keiner Nullstellenfläche unendlich, ist also analytisch in $O$. Da die offenen Mengen $O$ die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ überdecken, ist

$$\tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^{h-1}) \leq \tilde{\nu}_p(P, \mathfrak{A}^h), \tag{13.44}$$

also

$$0 \leq \tilde{N}_p(G, \mathfrak{A}^{h-1}) \leq \tilde{N}_p(G, \mathfrak{A}^h). \tag{13.45}$$

Aus (13.39), (13.45) und (13.7) folgt (13.9), w. z. b. w.

Die Differenz $T_p(G) - T_p(G, \mathfrak{A}^h)$ wächst also, wenn man das unbedeutende „Restglied" $\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h)$ hinzufügt, monoton in $p$ und $h$.

## § 14. Die Funktion $\eta(G)$

**Hilfssatz 1.** *Ist die Funktion $f$ auf der offenen Menge $U$ meromorph, enthält $U$ die kompakte Menge $K$ und ist $G$ eine zulässige Menge, so ist das Differential* $\log|f|\partial^{\perp}\psi\partial\chi_{2n-2}$ *über $\gamma \cap K$ und $\Gamma \cap K$ integrierbar.*

**Beweis.** Nach Satz 5.5 und (5.60) ist $\log|f|\partial^{\perp}\psi\partial\chi_{2n-2}$ über die kompakte Teilmenge $\gamma \cap K$ der $2n-1$ dimensionalen, orientierten Teilmannigfaltigkeit $\gamma$ von $\mathfrak{M}^{2n}$ integrierbar. Zu jedem Punkt $P_0 \in K \cap Rd\,G$ wählt man eine offene Umgebung $V$ von $P_0$ mit $\bar{V} \subset U - \gamma$. Die Funktion $\lambda(P)$ mit $0 \leq \lambda(P) \leq 1$ sei auf $\mathfrak{M}^{2n}$ stetigdifferenzierbar und ausserhalb $V$ identisch Null. Es ist $H = G - \bar{g}$. Die ganzen Zahlen $m < 0$ und $M > 0$ werden beliebig gewählt. Man setzt

$$H_{m,M} = \{P \mid m < \lambda(P)\log|f| < M\} \cap H, \tag{14.1}$$

$$\varphi_{m,M} = \begin{cases} \lambda(P)\log|f| & \text{für } m < \lambda(P)\log|f| < M, \\ m & \text{für } \lambda(P)\log|f| \leq m, \\ M & \text{für } \lambda(P)\log|f| \geq M, \\ 0 & \text{für } P \notin U. \end{cases} \tag{14.2}$$

Die Funktion $\varphi_{m,M}$ ist auf $\mathfrak{M}^{2n}$ stetig und erfüllt dort nach Hilfssatz 1 aus § 6 eine LIPSCHITZ-Bedingung. Wegen

$$\int_{V \cap H_{m,M}} \partial\{\lambda \log|f|\}\partial^{\perp}\psi\partial\chi_{2n-2} = \int_H \partial\varphi_{m,M}\partial^{\perp}\psi\partial\chi_{2n-2} \tag{14.3}$$

ist $\partial\varphi_{m,M}\partial^{\perp}\psi\partial\chi_{2n-2}$ über $H$ integrierbar. Da $\varphi_{m,M}$ auf $\gamma$ identisch Null ist, folgt mit (14.3) aus Satz 6.1 die Gleichung

$$\int_{\Gamma} \varphi_{m,M}\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2} = \int_{V \cap H_{m,H}} \partial \{\lambda \log |f|\}\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}. \tag{14.4}$$

Da $\partial \{\lambda \log |f|\}\, \partial^{\perp} \varphi\, \partial \chi_{2n-2}$ über $V \cap H$ integrierbar ist, folgt

$$\lim_{m \to -\infty} \lim_{M \to \infty} \int_{\Gamma} \varphi_{m,M}\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2} = \int_{V \cap H} \partial \{\lambda \log |f|\}\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}. \tag{14.5}$$

Da $\partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ längs $\Gamma$ eine positive Dichte hat, erhält man aus (14.5) gemäss § 2 (5) 10° die Integrierbarkeit von $\lambda(P) \log |f|\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ über $\Gamma \cap V$. Mittels einer DIEUDONNÉ-Zerlegung von $K \cap Rd\, G$ sieht man, dass das Differential $\log |f|\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ über $\Gamma \cap K$ integrierbar ist, w. z. b. w.

Eine meromorphe Dichte $X$ der Stufe $n$ auf der offenen Menge $M$ ist eine Funktion $X = X(P, \alpha)$ der Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ und des Punktes $P \in M \cap U_\alpha$, die bei fester Abbildung $\alpha(\mathfrak{z})$ auf $M \cap U_\alpha$ meromorph ist, und die sich beim Übergang zur Abbildung $\beta(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{P}$ gemäss

$$X(P, \alpha) = X(P, \beta) \frac{\partial \beta^{-1} \alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}} \quad \text{für } P \in M \cap U_\alpha \cap U_\beta \tag{14.6}$$

mit $\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)$ transformiert. Ist $X$ auf keinem Teilgebiet von $M$ identisch Null, so hat die Vielfachheit $\nu(P_0, 0)$ der Nullstelle $P_0$ von $X(P, \alpha)$ für jede Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ nach (14.6) denselben Wert. Es ist $\mathfrak{N}(0) = \{P \mid \nu(P, 0) > 0\}$ eine in $M$ abgeschlossene Nullstellenfläche. Dasselbe gilt für die Vielfachheit $\nu(P_0, \infty)$ der Polstelle $P_0$ von $X(P, \alpha)$. Es ist $\mathfrak{N}(\infty) = \{P \mid \nu(P, \infty) > 0\}$ eine in $M$ abgeschlossene Nullstellenfläche.

Für den 2. Hauptsatz ist nun die Funktion $\eta(G)$, die im folgenden Satz eingeführt wird, von Bedeutung.

**Satz 14.1.** Die Funktion $\eta(G)$.[8]

**Voraussetzung.** *Die Dichte $X$ der Stufe $n$ sei in keinem Teilgebiet der zulässigen Menge $G$ identisch Null und auf einer $\bar{G}$ umfassenden offenen Menge meromorph. Die Vielfachheit der Nullstelle $P$ von $X$ sei $\nu(P, 0)$ und $\mathfrak{N}(0)$ die zugehörige Nullstellenfläche; die Vielfachheit der Polstelle $P$ von $X$ sei $\nu(P, \infty)$ und $\mathfrak{N}(\infty)$ die zugehörige Polstellenfläche. Es werde $\nu(P) = \nu(P, 0) - \nu(P, \infty)$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(0) \cup \mathfrak{N}(\infty)$ gesetzt. Es sei*

$$N(G, X) = \int_{\mathfrak{N}} \nu(P)\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2}. \tag{14.7}$$

[8] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 5 Seite 186–189.

*Auf $\bar{H}$ werde die Dichte $\Delta$ durch*

$$\Delta = \Delta(P, \alpha, G) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P, \alpha)\, \psi_{z_\mu} \psi_{\bar{z}_\nu} \tag{14.8}$$

*definiert, wobei auf $\gamma \cup \Gamma$ für die Funktionen $\psi_{z_\mu}$ die Randwerte, die man bei Annäherung aus $H$ erhält, zu nehmen sind.*

**Behauptung.** 1. *Durch $\dfrac{\Delta}{|X|}$ wird auf $\bar{H} - \mathfrak{N}$ eine eindeutige Funktion erklärt, die nicht von der Wahl der Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ abhängt, und deren Logarithmus über $\Gamma \cap \gamma$ integrierbar ist.*

2. *Es ist*

$$\eta(G) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \log \frac{\Delta}{|X|^2} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \log \frac{\Delta}{|X|^2} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} + N(G, X) \tag{14.9}$$

*unabhängig von der Wahl der auf $\bar{G}$ meromorphen Dichte $X$.*

**Beweis.** 1. Als Quotient zweier Dichten der Stufe $2n$ ist $\dfrac{\Delta}{|X|^2}$ eine eindeutige Funktion des Punktes $P \in \bar{H} - \mathfrak{N}$ und hängt nicht von der Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ ab. Zu jedem Punkt $P_0 \in R d G$ wählt man eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ und eine offene, beschränkte Umgebung $V$ von $P_0$ mit $\bar{V} \subset U_\alpha$. Nach Hilfssatz 1 ist

$$\log \frac{1}{|X(P, \alpha)|^2} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2}$$

über $\bar{V} \cap \Gamma$ integrierbar. Da $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P, \alpha) X_\mu \bar{X}_\nu$ für jeden Punkt $P \in \bar{V}$ eine positiv definite HERMITEsche Form ist, gilt dort

$$4 c_1 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu|^2 \leq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P, \alpha) X_\mu \bar{X}_\nu \leq 4 c_2 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu|^2 \tag{14.10}$$

mit positiven Konstanten $c_1$ und $c_2$. Setzt man $\frac{1}{2} |\operatorname{grad} \psi| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |\psi_{z_\nu}|^2}$, so ist

$$c_1 |\operatorname{grad} \psi|^2 \leq \Delta(P, \alpha, G) \leq c_2 |\operatorname{grad} \psi|^2 \tag{14.11}$$

für $P \in \bar{H} \cap \bar{V}$. Da das Differential $\partial \psi$ auf $\bar{H}$ stetig ist, ist $\Delta$ auf $\bar{V} \cap \bar{H}$ beschränkt. Mit einer Konstanten $c_3 > 0$ gilt daher

$$|\log \Delta(P, \alpha, G)| \leq c_3 \Delta^{-\frac{1}{4}} \quad \text{für } P \in \bar{V} \cap \bar{H}. \tag{14.12}$$

Es sei $\partial \omega$ das euklidische Oberflächenelement von $\alpha^{-1}(\Gamma \cap V) = \Gamma'$. Längs $\Gamma'$ besteht nach (4.31) die Beziehung

$$\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}\,\psi_{z_\mu}\,\psi_{\bar z_\nu}\frac{\partial\omega}{|\operatorname{grad}\psi|}\,. \tag{14.13}$$

Aus (14.11), (14.12) und (14.13) folgt

$$|\log\Delta|\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}\leq\frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\,\Delta^{\frac{1}{4}}\,\partial\omega\,. \tag{14.14}$$

Da $\Delta$ auf $\overline{V}\cap\overline{H}$ stetig ist, und da $\Gamma'$ ein endliches CARATHÉODORY-Mass hat, ist $\Delta^{\frac{1}{4}}\partial\omega$, also auch $\log\Delta\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ über $\Gamma'$, das heisst über $\Gamma\cap V$ integrierbar. Da endlich viele der offenen Mengen $V$ den Rand von $G$ überdecken, ist $\log\frac{\Delta}{|X|^2}\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ über $\Gamma$ integrierbar. Ebenso zeigt man, dass dieses Differential über $\gamma$ integrierbar ist. Die 1. Behauptung ist bewiesen.

2. Ist $\tilde{X}$ eine zweite Dichte mit den entsprechenden Grössen $\tilde{\nu}(P)$, $\tilde{\mathfrak{N}}$, $N(G,\tilde{X})$, so gilt nach der JENSENschen Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\log\frac{|\tilde{X}|}{|X|}\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\log\frac{|\tilde{X}|}{|X|}\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}=N(G,\tilde{X})-N(G,X). \tag{14.15}$$

Da $\frac{\Delta}{|X|^2}$ und $\frac{\Delta}{|\tilde{X}|^2}$ Funktionen des Punktes $P\in\overline{H}$ sind, gilt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\log\frac{\Delta}{|X|^2}\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\log\frac{\Delta}{|X|^2}\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}+N(G,X)=\\&=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\log\frac{\Delta}{|\tilde{X}|^2}\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\log\frac{\Delta}{|\tilde{X}|^2}\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}+N(G,\tilde{X}).\end{aligned} \tag{14.16}$$

Daher hängt $\eta(G)$ nicht von der Wahl der Dichte $X$ ab, w. z. b. w.

Wäre $\Delta=|Y|^2$ und $Y$ eine meromorphe Dichte, so wäre nach der JENSENschen Formel $\eta(G)=N(G,Y)$ das Mass der Nullstellen von $\Delta$ also der Nullstellen von $\partial\psi$. Nun ist zwar, wenigstens für $n>1$, $\Delta$ nicht Betragsquadrat einer meromorphen Dichte, aber man kann doch auf Grund dieser Analogie $\eta(G)$ noch als ein „Mass" der Nullstellen von $\partial\psi$, das heisst der kritischen Menge $E=\{P\,|\,\partial\psi=0\}\cap\overline{H}$ des Kondensators $H$ ansehen.

## § 15. Die Differenzenformel

Wie bei $n=1$ wird nun eine sogenannte Differenzenformel bewiesen, die für den zweiten Hauptsatz von grundlegender Bedeutung ist. Zunächst werden einige Vorbereitungen getroffen.

**Hilfssatz 1.**[9] *Das äussere Produkt der Polyaden* $\mathfrak{A}^p$, $\mathfrak{B}^q$ *wurde mit* $[\mathfrak{A}^p, \mathfrak{B}^q]$ *bezeichnet. Fasst man* $\mathfrak{A}^p$ *und* $\mathfrak{C}^p$ *aber als Vektoren des Raumes* $R^{2\binom{k}{p}}$ *auf, so werde ihr äusseres Produkt mit* $\{\mathfrak{A}^p, \mathfrak{C}^p\}$ *bezeichnet. Für* $\mu = p-1,\ p,\ p+1$ *sei* $\mathfrak{X}^\mu = [\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{\mu-1}]$ *und* $\mathfrak{Y}^p = [\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{p-2}, \mathfrak{x}_p]$.

*Dann gilt die algebraische Identität*

$$|\mathfrak{X}^{p-1}|\,|\mathfrak{X}^{p+1}| = |\{\mathfrak{X}^p, \mathfrak{Y}^p\}|^2 = \begin{vmatrix} (\mathfrak{X}^p\,|\,\mathfrak{X}^p) & (\mathfrak{X}^p\,|\,\mathfrak{Y}^p) \\ (\mathfrak{Y}^p\,|\,\mathfrak{X}^p) & (\mathfrak{Y}^p\,|\,\mathfrak{Y}^p) \end{vmatrix}. \tag{15.1}$$

**Satz 15.1.** Stationärer Index.[10]

**Voraussetzung.** *Die meromorphe Fläche* $W$ *habe auf der offenen Menge* $M$ *die Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$. *Für* $u = p-1,\ p,\ p+1$ *sei* $\mathfrak{W}^u(P, \alpha)$ *die zu* $\mathfrak{w}(P)$ *und zur Abbildung* $\alpha \in \mathfrak{P}$ *gehörige eigentliche Darstellung der u-ten assoziierten Fläche* $W^u$. *Es sei* $W^{p+1}$ *nicht totaldegeneriert. Die Vielfachheit der Nullstelle* $P$ *der Darstellung* $\mathfrak{W}^u(P, \alpha)$ *sei* $d_u(P, 0)$, *die der Polstelle* $P$ *sei* $d_u(P, \infty)$. *Es sei* $d_u(P) = d_u(P, 0) - d_u(P, \infty)$.

**Behauptung.** *Auf* $\mathfrak{M}^{2n}$ *wird* $v_p(P) - 1$ *durch*

$$v_p(P) - 1 = d_{p-1}(P) - 2\,d_p(P) + d_{p+1}(P) \geq 0 \tag{15.2}$$

*unabhängig von der Wahl der Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$ *von* $W$ *eindeutig und nichtnegativ erklärt. Die Menge* $\mathfrak{B}_p = \{P \mid v_p(P) > 1\}$ *ist eine abgeschlossene Nullstellenfläche aus* $\mathfrak{M}^{2n}$, *der man die Vielfachheit* $v_p(P) - 1$ *zuordnen kann.*

**Beweis.** Die Menge $F$ bestehe aus den Ausdrücken $(f, O)$, die sich so bestimmen:

1. Auf der offenen Menge $O$ gibt es eine Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ von $W$. Für eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ sei $O \subseteq U_\alpha$. Die zugehörige eigentliche Darstellung von $W^u$ auf $O$ sei

$$\mathfrak{W}^u(P, \alpha) = \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_u \leq k} w_{\mu_1 \dots \mu_u}(P, \alpha)\,[\mathfrak{e}_{\mu_1}, \dots, \mathfrak{e}_{\mu_u}]. \tag{15.3}$$

2. Zu jedem Wertesatz ganzer Zahlen $u, \mu_1, \dots, \mu_u$ mit $p-1 \leq u \leq p+1$ und $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_u \leq k$ gibt es zwei Funktionen $f_{\mu_1 \dots \mu_u}$ und $g_{\mu_1 \dots \mu_u}$, die in jedem Punkt von $O$ analytisch und teilerfremd sind, und für die $w_{\mu_1 \dots \mu_u} = \dfrac{f_{\mu_1 \dots \mu_u}}{g_{\mu_1 \dots \mu_u}}$ in $O$ gilt.

3. Für jede feste Zahl $u$ mit $p-1 \leq u \leq p+1$ seien auf $O$ analytische Funktionen $\Delta_Z^u(P)$ und $\Delta_N^u(P)$ gegeben. Es sei $\Delta_Z^u(P)$ grösster gemeinsamer Teiler aller Funktionen $f_{\mu_1 \dots \mu_u}$ mit $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_u \leq k$ und $\Delta_N^u(P)$ grösster gemeinsamer Teiler aller Funktionen $g_{\mu_1 \dots \mu_u}$ mit $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_u \leq k$.

---

[9] Der Hilfssatz ist in W [43] Kap. III § 5 Seite 143–144 bewiesen.
[10] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. I § 7 Seite 41–45.

4. In $O$ ist

$$f(P) = \frac{\Delta_Z^{p-1}(P)\,\{\Delta_N^p(P)\}^2\,\Delta_Z^{p+1}(P)}{\Delta_N^{p-1}(P)\,\{\Delta_Z^p(P)\}^2\,\Delta_N^{p+1}(P)}. \tag{15.4}$$

Nun wird behauptet, dass $F$ eine COUSINsche Verteilung auf $\mathfrak{M}^{2n}$ ist. Für $u = p-1$, $p$, $p+1$ sind

$$\mathfrak{W}_1^u(P) = \frac{\Delta_N^u(P)}{\Delta_Z^u(P)}\mathfrak{W}^u(P, \alpha) \tag{15.5}$$

reduzierte Darstellungen. Nach Hilfssatz 1 und (15.4) gilt

$$\begin{aligned} |f(P)| &= \frac{|\mathfrak{W}^{p-1}|\,|\mathfrak{W}_1^p|^2\,|\mathfrak{W}^{p+1}|}{|\mathfrak{W}_1^{p-1}|\,|\mathfrak{W}^p|^2\,|\mathfrak{W}_1^{p+1}|} = \frac{|\mathfrak{W}_1^p|^2\,|\{\mathfrak{W}^p, \acute{\mathfrak{W}}^p\}|}{|\mathfrak{W}_1^{p-1}|\,|\mathfrak{W}_1^{p+1}|\,|\mathfrak{W}^p|^2} = \\ &= \frac{|\mathfrak{W}_1^p|^2\,|\{\mathfrak{W}_1^p, \acute{\mathfrak{W}}_1^p\}|}{|\mathfrak{W}_1^{p-1}|\,|\mathfrak{W}_1^{p+1}|\,|\mathfrak{W}_1^p|^2} = \frac{|\{\mathfrak{W}_1^p, \acute{\mathfrak{W}}_1^p\}|}{|\mathfrak{W}_1^{p-1}|\,|\mathfrak{W}_1^{p+1}|}. \end{aligned} \tag{15.6}$$

Die in $O$ meromorphe Funktion $f$ wird nach (15.6) auf keinem Flächenelement unendlich, ist also in $O$ analytisch. Ist $(\tilde{f}, \tilde{O})$ ein zweites Element von $F$ mit $O \cap \tilde{O} \neq \emptyset$, so seien $\tilde{\mathfrak{w}}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\mathfrak{W}}^u(P, \tilde{\alpha})$ $\tilde{w}_{\mu_1 \ldots \mu_u}$, $\tilde{f}_{\mu_1 \ldots \mu_u}$, $\tilde{g}_{\mu_1 \ldots \mu_u}$ $\tilde{\Delta}_Z^u$, $\tilde{\Delta}_N^u$ entsprechend zu $(\tilde{f}, \tilde{O})$ gebildet. Es gibt eine Funktion $\lambda(P)$, die in jedem Teilgebiet von $O \cap \tilde{O}$ nicht identisch Null und meromorph ist, sodass

$$\mathfrak{w}(P) = \lambda(P)\,\tilde{\mathfrak{w}}(P) \qquad \text{für } P \in O \cap \tilde{O} \tag{15.7}$$

gilt. Wird $\Phi(P) = \dfrac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}}$ mit $\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)$ für $P \in O \cap \tilde{O}$ gesetzt, so folgt aus (12.18) die Gleichung

$$\mathfrak{W}^u(P, \alpha) = \lambda^u(P)\,\{\Phi(P)\}^{\frac{1}{2}u(u-1)}\,\tilde{\mathfrak{W}}^u(P, \tilde{\alpha}) \qquad \text{für } P \in O \cap \tilde{O}. \tag{15.8}$$

Also sind die Funktionen

$$h_u(P) = \lambda^u(P)\,\frac{\tilde{\Delta}_Z^u(P)\,\Delta_N^u(P)}{\tilde{\Delta}_N^u(P)\,\Delta_Z^u(P)} \neq 0 \tag{15.9}$$

auf $O \cap \tilde{O}$ analytisch und von Null verschieden. In $O \cap \tilde{O}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{f(P)}{\tilde{f}(P)} &= \frac{\Delta_Z^{p-1}\,\{\Delta_N^p\}^2\,\Delta_Z^{p+1}\,\tilde{\Delta}_N^{p-1}\,\{\tilde{\Delta}_Z^p\}^2\,\tilde{\Delta}_N^{p+1}}{\Delta_N^{p-1}\,\{\Delta_Z^p\}^2\,\Delta_N^{p+1}\,\tilde{\Delta}_Z^{p-1}\,\{\tilde{\Delta}_N^p\}^2\,\tilde{\Delta}_Z^{p+1}} = \\ &= \frac{\lambda^{p-1}}{h_{p-1}}\,\frac{h_p^2}{\lambda^{2p}}\,\frac{\lambda^{p+1}}{h_{p+1}} = \\ &= \frac{h_p^2}{h_{p-1}\,h_p} \end{aligned} \tag{15.10}$$

analytisch und nicht Null. Zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ gibt es eine offene Umgebung $O$ von $P_0$, für die sich die Forderungen 1 bis 4 erfüllen lassen; also gibt es ein Element $(f, O)$ von $F$ mit $P_0 \in O$. Damit ist gezeigt, dass $F$ eine COUSINsche Verteilung ist. Nach Satz 3.2 und (15.4) ist

$$v_p(P) - 1 = d_{p-1}(P) - 2\, d_p(P) + d_{p+1}(P) \geq 0 \tag{15.11}$$

die Vielfachheit ihrer Nullstelle $P$ und $\mathfrak{B}_p = \{P \mid v_p(P) > 1\}$ ihre Nullstellenfläche. Daher ist $v_p(P) - 1$ nichtnegativ, unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ von $W$ und der Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ und kann der abgeschlossenen Nullstellenfläche $\mathfrak{B}_p$ als Vielfachheit zugeordnet werden w. z. b. w.

**Definition 15.1.** Stationärer Index.[10]
*Die Bezeichnungen werden wie in Satz 15.1 gewählt. Dann heisse $v_p(P)$ der p-te stationäre Index des Punktes $P$ zur meromorphen Fläche $W$. Es sei $\mathfrak{B}_p$ die p-te stationäre Indexfläche und*

$$V_p(G) = \int_{\mathfrak{B}_p} (v_p(P) - 1)\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2} \tag{15.12}$$

*ihre Anzahlfunktion.*

**Satz 15.2.** Die Funktion $\Omega_p(\Gamma)$.[11]

**Voraussetzung.** *Die meromorphe Fläche $W$ habe auf der offenen Menge $M$ die Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Für $u = p-1,\ p,\ p+1$ sei $\mathfrak{W}^u(P, \alpha)$ die zur Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ und zur Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ gehörige eigentliche Darstellung der u-ten assoziierten Fläche $W^u$. Es sei $W^{p+1}$ nicht totaldegeneriert. Die Dichte $\Delta$ sei durch (14.8) erklärt. Es sei $G$ eine zulässige Menge und $E$ die kritische Menge des Kondensators $H = G - \bar{g}$.*

**Behauptung.** *Abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von $W^p$ ist unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ und der Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ die Funktion*

$$\hat{S}_p = \hat{S}_p(P) = \hat{S}_p(P, G) = 2\, \frac{|\mathfrak{W}^{p-1}(P, \alpha)|^2\, |\mathfrak{W}^{p+1}(P, \alpha)|^2}{|\mathfrak{W}^p(P, \alpha)|^4\, \Delta(P, \alpha, G)} \tag{15.13}$$

*als Funktion des Punktes $P \in \bar{H} - E$ erklärt. Die Integrale*

$$\Omega_p(\Gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \log \hat{S}_p(P, G)\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2}, \tag{15.14}$$

$$\Omega_p(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \log \hat{S}_p(P, G)\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2} \tag{15.15}$$

*existieren.*

[11] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 5 Seite 187 und Kap. III § 1 Seite 123.

**Beweis.** Ist $\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ eine zweite Darstellung von $W$ auf $M$, ist $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{P}$ eine zweite Abbildung, sind $\tilde{\mathfrak{W}}^u(P, \tilde{\alpha})$ die zugehörigen eigentlichen Darstellungen auf $M \cap U_{\tilde{\alpha}}$, ist $N = M \cap U_\alpha \cap \tilde{M} \cap U_{\tilde{\alpha}} \neq \emptyset$ und wird $\Phi(P) = \dfrac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}}$ mit $\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)$ für $P \in N$ gesetzt, so gibt es eine Funktion $\lambda(P)$, die in jedem Teilgebiet von $N$ nicht identisch Null und meromorph ist, sodass in $N$ die Gleichungen (15.7) und (15.8) gelten. Wegen

$$\Delta(P, \alpha, G) = |\Phi(P)|^2 \tilde{\alpha}\, \Delta(P, \,, G) \quad \text{für } P \in N \tag{15.16}$$

folgt aus (15.8) die Gleichheit

$$\hat{S}_p(P) = 2\frac{|\mathfrak{W}^{p-1}(P)|^2 |\mathfrak{W}^{p+1}(P)|^2}{|\mathfrak{W}^p(P)|^4 \Delta(P, \alpha, G)} = 2\frac{|\tilde{\mathfrak{W}}^{p-1}(P)|^2 |\tilde{\mathfrak{W}}^{p+1}(P)|^2}{|\tilde{\mathfrak{W}}^p(P)|^4 \Delta(P, \tilde{\alpha}, G)} \quad \text{für } P \in N. \tag{15.17}$$

Ist $\mathfrak{W}_1^p$ eine in $U$ reduzierte Darstellung von $W^p$, so ist

$$\hat{S}_p(P) = 2\frac{|\{\mathfrak{W}^p, \acute{\mathfrak{W}}^p\}|^2}{|\mathfrak{W}^p|^4 \Delta} = 2\frac{|\{\mathfrak{W}_1^p, \acute{\mathfrak{W}}_1^p\}|^2}{|\mathfrak{W}_1^p|^4 \Delta} \tag{15.18}$$

nach Hilfssatz 1. Gemäss (15.17) und (15.18) ist $\hat{S}_p(P)$ unabhängig von der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ und der Abbildung $\alpha$ auf $\bar{H} - E$ bis auf die Unbestimmtheitsstellen von $W^p$ erklärt.

Da $W^{p+1}$, also auch $W^p$ und $W^{p-1}$, nicht total degeneriert ist, gibt es kontravariante Polyaden $A^{p-1}$, $A^p$, $A^{p+1}$ mit $(A^{p-1}, W^{p-1}) \not\equiv 0$, $(A^p, W^p) \not\equiv 0$ und $(A^{p+1}, W^{p+1}) \not\equiv 0$. Gemäss (15.8) ist

$$X(P, \alpha) = \frac{(A^{p-1}, \mathfrak{W}^{p-1}(P, \alpha))(A^{p+1}, \mathfrak{W}^{p+1}(P, \alpha))}{(A^p, \mathfrak{W}^p(P, \alpha))^2} \not\equiv 0 \tag{15.19}$$

eine meromorphe Dichte der Stufe $n$ auf $\mathfrak{M}^{2n}$. Nach (15.17), (15.19) und (1.45) gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log \hat{S}_p = \tfrac{1}{2}\log 2 + \log \frac{1}{\|\mathfrak{W}^{p-1}, A^{p-1}\|} - 2\log \frac{1}{\|\mathfrak{W}^p, A^p\|} + \\ + \log \frac{1}{\|\mathfrak{W}^{p+1}, A^{p+1}\|} + \tfrac{1}{2}\log \frac{|X|^2}{\Delta} - \log \frac{|A^{p-1}||A^{p+1}|}{|A^p|^2}. \end{aligned} \tag{15.20}$$

Daher existieren nach Satz 14.1 die Integrale $\Omega_p(\Gamma)$ und $\Omega_p(\gamma)$, w. z. b. w.

Diese Integrale haben den Wert

$$\begin{aligned} \Omega_p(\Gamma) = \tfrac{1}{2}\log 2 - \log \frac{|A^{p-1}||A^{p+1}|}{|A^p|^2} + m_{p-1}(\Gamma, A^{p-1}) - 2m_p(\Gamma, A^p) + \\ + m_{p+1}(\Gamma, A^{p+1}) - \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \log \frac{\Delta}{|X|^2} \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2}, \end{aligned} \tag{15.21}$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_p(\gamma) = \tfrac{1}{2}\log 2 - \log \frac{|A^{p-1}||A^{p+1}|}{|A^p|^2} + m_{p-1}(\gamma, A^{p-1}) - 2\,m_p(\gamma, A^p) + \\
+ m_{p+1}(\gamma, A^{p+1}) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma} \log \frac{\Delta}{|X|^2}\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}.
\end{aligned} \tag{15.22}
$$

Ist $d_u(P)$ die Vielfachheit der Nullstelle $P$ weniger der Vielfachheit der Polstelle $P$ der Darstellung $\mathfrak{W}^u(P, \alpha)$, ist $\nu_u(P, A^u)$ die Schnittzahl in $P$ von $W^u$ zu $A^u$ und $v_p(P)$ der *p-te* stationäre Index, so wird nach (15.19) und (15.2) die Vielfachheit der Nullstelle $P$ weniger der Vielfachheit der Polstelle $P$ von $X$ durch

$$
\begin{aligned}
\{\nu_{p-1}(P, A^{p-1}) + d_{p-1}(P)\} - 2\{\nu_p(P, A^p) + d_p(P)\} + \{\nu_{p+1}(P, A^{p+1}) + d_{p+1}(P)\} = \\
= \nu_{p-1}(P, A^{p-1}) - 2\nu_p(P, A^p) + \nu_{p+1}(P, A^{p+1}) + v_p(P) - 1
\end{aligned} \tag{15.23}
$$

gegeben. Aus (15.23), (15.12) und (14.9) folgt

$$
\begin{aligned}
\eta(G) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \log \frac{\Delta}{|X|^2}\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma} \log \frac{\Delta}{|X|^2}\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} + \\
+ N_{p-1}(G, A^{p-1}) - 2N_p(G, A^p) + N_{p+1}(G, A^{p+1}) + V_p(G).
\end{aligned} \tag{15.24}
$$

Die Gleichungen (15.21), (15.22), (15.24) und der 1. Hauptsatz ergeben

$$
V_p(G) + T_{p-1}(G) - 2\,T_p(G) + T_{p+1}(G) = \Omega_p(\Gamma) - \Omega_p(\gamma) + \eta(G). \tag{15.25}
$$

Dies ist die gesuchte Differenzenformel. Es gilt

**Satz 15.3.** Die Differenzenformel.[12]

**Voraussetzung.** *Auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *seien die allgemeinen Voraussetzungen* I, II *aus* § 4, III, IV, V *aus* § 7 *und* VIII *aus* § 12 *erfüllt. Die meromorphe Fläche* $W$ *habe die assoziierten Flächen* $W^{p-1}$, $W^p$ *und* $W^{p+1} \not\equiv 0$, *deren Charakteristiken nach* (12.25) *definiert seien. Die Anzahlfunktion der p-ten stationären Indexfläche sei nach* (15.12) *erklärt. Die Funktionen* $\Omega_p(\Gamma)$ *und* $\Omega_p(\gamma)$ *seien durch* (15.14) *und* (15.15) *gegeben. Die Funktion* $\eta(G)$ *sei nach* (14.9) *eingeführt.*

**Behauptung.** *Für jede zulässige Menge G gilt*

$$
V_p(G) + T_{p-1}(G) - 2\,T_p(G) + T_{p+1}(G) = \Omega_p(\Gamma) - \Omega_p(\gamma) + \eta(G). \tag{15.26}
$$

---

[12] Zu diesem Satz im Falle $n = 1$ und seinem vorhergehenden Beweis vergleiche man W [43] Kap. IV § 5 Seite 184–187 und Kap. III § 1 Seite 123–124.

In W [43] wird die Differenzenformel als 2. Hauptsatz (im Sinne von H. WEYL) bezeichnet. Sie ist aber noch keineswegs mit dem 2. Hauptsatz im Sinne von R. NEVANLINNA identisch, sondern gibt nur einen Teil davon. Zum zweiten Hauptsatz muss noch das „Restglied" $\Omega_p(\Gamma)$ nach oben abgeschätzt werden, was wie in W [43] durch die sogenannte Hauptdefektrelation geschehen wird. Ausserdem hängt die Differenzenformel noch wesentlich vom Richtungsfeld $\partial B_{n-1}$ ab. Diese Abhängigkeit wird im 2. Hauptsatz (im Sinne von R. NEVANLINNA) fast ganz beseitigt werden können. Allerdings muss dazu noch eine weitere Voraussetzung (IX in § 19) gemacht werden, die, wie ausdrücklich vermerkt sei, für die Differenzenformel nocht nicht erforderlich ist.

## § 16. Der Grenzübergang $G \to \mathfrak{M}^{2n}$

In diesem Paragraphen sollen alle Sätze und Definitionen, die sich auf den Grenzübergang $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ beziehen, zusammengestellt werden, auch soweit dies bereits in § 11 geschehen ist. Diese Sätze und Definitionen sind eine wörtliche Übertragung vom Falle einer Veränderlichen auf den Fall mehrerer Veränderlichen. Für die Beweise kann daher auf W [43] verwiesen werden.

**Definition 16.1.** Vollständiges System zulässiger Mengen.[13]
*Eine Menge $\mathfrak{G}$ zulässiger Mengen $G$ heisse vollständig, wenn gilt:*
1. *Mit $G$ gehören auch fast alle Mengen $G_r$ mit $0 < r \leq R(G)$ zu $\mathfrak{G}$.*
2. *Zu jeder kompakten Menge $K$ gibt es eine zulässige Menge $G \in \mathfrak{G}$ mit $K \subseteq G$.*

In § 11 wurde bereits die allgemeine Voraussetzung VII gemacht:

VII. **Ausschöpfung.** *Zu jeder kompakten Menge $K$ der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ gebe es eine zulässige Menge $G \supset K$. Die Menge aller zulässigen Mengen sei $\mathfrak{G}_0$.*

Diese Voraussetzung besagt dasselbe wie

VII'. **Ausschöpfung.** *Die Menge $\mathfrak{G}_0$ aller zulässigen Mengen sei ein vollständiges System zulässiger Mengen.*

Nun werde ein beliebiges vollständiges System $\mathfrak{G}$ gewählt und festgehalten.

**Definition 16.2.** Der Grenzübergang $G \to \mathfrak{M}^{2n}$.[14]
*Es sei $\mathfrak{G}$ ein vollständiges System zulässiger Mengen.*
1. *Die Funktion $f(G)$ sei für alle zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$ erklärt, die die kompakte Menge $K_0$ enthalten. Es sei*

$$a = \lim_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} f(G) \qquad (\text{bezüglich } \mathfrak{G}), \tag{16.1}$$

[13] Siehe W [43] Kap. IV § 7 Seite 200.
[14] Siehe W [43] Kap. IV § 6 Seite 190.

*das heisst, es strebe* $f(G) \to a$ *für* $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ *(bezüglich* $\mathfrak{G}$*), wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine kompakte Menge* $K_\varepsilon \supseteq K_0$ *gibt, sodass* $|f(G) - a| < \varepsilon$ *für alle* $G \in \mathfrak{G}$ *mit* $G \supset K_\varepsilon$ *gilt. Entsprechend erklärt man* $\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} f(G) = \infty$ *und* $\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} f(G) = -\infty$.

2. *Die Funktion* $f(G)$ *sei für alle zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *erklärt, die die kompakte Menge* $K_0$ *enthalten. Es ist*

$$a = \overline{\lim_{G \to \mathfrak{M}^{2n}}} f(G), \tag{16.2}$$

*wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine kompakte Menge* $K_\varepsilon \supseteq K_0$ *gibt, sodass* $f(G) < a + \varepsilon$ *für alle* $G \in \mathfrak{G}$ *mit* $G \supset K_\varepsilon$ *und* $f(G) > a - \varepsilon$ *für ein* $G \in \mathfrak{G}$ *mit* $G \supset K_\varepsilon$ *gilt. Entsprechend erklärt man* $\overline{\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}}} f(G) = \infty$ *und* $\overline{\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}}} f(G) = -\infty$. *Es sei* $\underline{\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}}} f(G) = -\overline{\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}}} \{-f(G)\}$.

3. *Ist die Funktion* $h(G)$ *für alle zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *mit* $G \supset K_0$ *erklärt, so werde mit* $O(h(G))$ *für* $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ *(bezüglich* $\mathfrak{G}$*) jede Funktion* $f(G)$ *bezeichnet, zu der es eine Konstante* $C = C_f$ *und eine kompakte Menge* $K_f \supseteq K_0$ *gibt, sodass* $|f(G)| \leq C|h(G)|$ *für alle zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *mit* $G \supseteq K_f$ *gilt. Haben dabei* $C_f$ *und* $K_f$ *für alle Funktionen* $f$ *einer Menge* $\mathfrak{F}$ *denselben Wert, so gilt* $f(G) = O(h(G))$ *auf* $\mathfrak{F}$ *gleichmässig. Mit* $o(h(G))$ *für* $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ *(bezüglich* $\mathfrak{G}$*) werde jede Funktion* $f(G)$ *bezeichnet, für die gilt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es eine kompakte Menge* $K_\varepsilon(f) \supseteq K_0$, *sodass* $|f(G)| \leq \varepsilon |h(G)|$ *für alle* $G \in \mathfrak{G}$ *mit* $G \supset K_\varepsilon(f)$ *gilt. Hängt dabei* $K_\varepsilon(f)$ *für alle Funktionen* $f$ *der Menge* $\mathfrak{F}$ *nicht von* $f$ *ab, so gilt* $f(G) = o(h(G))$ *auf* $\mathfrak{F}$ *gleichmässig.*

Nach Definition 11.1 und Satz 11.2 ist die *Gesamtkapazität*[14]

$$\mathfrak{C} = \underline{\operatorname{fin}}_{G \in \mathfrak{G}_0} C(G) = \lim_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} C(G) < \infty \qquad \text{(bezüglich } \mathfrak{G}) \tag{16.3}$$

und die *Gesamtspannung*[14]

$$J = \overline{\operatorname{fin}}_{G \in \mathfrak{G}_0} R(G) = \lim_{\substack{G \to \mathfrak{M}^{2n} \\ G \in \mathfrak{G}}} R(G) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{C}} & \text{für } \mathfrak{C} > 0 \\ \infty & \text{für } \mathfrak{C} = 0. \end{cases} \tag{16.4}$$

Beide sind nach ihrer Definition unabhängig von der Wahl des vollständigen Systems $\mathfrak{G}$. Wie in W [43] werden die folgenden Abkürzungen eingeführt.

**Definition 16.3.** Die Bezeichnung $(o)$.[13]

*Die Funktion* $s(G)$ *sei für alle zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *erklärt, die die kompakte Menge* $K_0$ *enthalten. Gilt*

$$s(G) = \begin{cases} O(1) & \text{für } \mathfrak{C} > 0 \\ o(R(G)) & \text{für } \mathfrak{C} = 0 \end{cases} \quad \text{für } G \to \mathfrak{M}^{2n},\ G \in \mathfrak{G}, \tag{16.5}$$

*so sei*

$$s(G) = (o) \qquad (\text{bezüglich } \mathfrak{G}). \tag{16.6}$$

*Entsprechend wird* $s(G) \leq (o)$ *erklärt.*

**Definition 16.4.** Die Bezeichnung $\omega_B(h)$.[15]

*Die Funktionen* $f(G)$ *und* $h(G)$ *seien für alle zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *erklärt. Gilt mit einer Konstanten* $B$ *die Abschätzung*

$$1 + R(G) + \int_0^{R(G)} \{R(G) - r\} e^{f(G_r)} dr \leq B h(G) \tag{16.7}$$

*für alle* $G \in \mathfrak{G}$, *die die kompakte Menge* $K$ *enthalten, so sei*

$$f(G) = \omega_B(h). \tag{16.8}$$

*Es sei* $\omega_1(h) = \omega(h)$.

Hierüber gilt der Satz:

**Satz 16.1.** Abschätzungen.[16]

1. *Ist* $f_2 = \omega_B(h)$, *ist* $f_1(G) \leq f_2(G)$ *für alle* $G \in \mathfrak{G}$ *und ist* $f_1(G_r)$ *in* $0 \leq r \leq R(G)$ *messbar, so gilt* $f_1 = \omega_B(h)$.
2. *Ist die Konstante* $C$ *positiv, ist* $f = \omega_B(h)$, *so gilt* $f + C = \omega_{\tilde{B}}(h)$ *mit* $\tilde{B} = B e^C$.
3. *Sind die Konstanten* $\varrho_\mu$ *mit* $\sum_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu = 1$ *positiv und ist* $f_\mu = \omega_{B_\mu}(h_\mu)$ *so folgt* $\sum_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu f_\mu = \omega\left(\sum_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu B_\mu h_\mu\right)$.

Der Begriff der „meisten" zulässigen Mengen $G$ wird wie in W [43] eingeführt:

**Definition 16.5.** Die „meisten" zulässigen Mengen $G$.[17]

*Die messbare Funktion* $\lambda(r) \geq 0$ *definiere ein* $\lambda$*-Mass, wenn gilt:*

1. *In* $0 \leq r < J$ *ist* $\lambda(r)$ *messbar, wobei* $J$ *die Gesamtspannung ist.*
2. *Das Integral* $\int_0^J \lambda(r)\, dr$ *divergiert.* Das Integral $\int_0^r \lambda(r)\, dr$ existiert für $0 < r < J$.
3. *Für jede Konstante* $\sigma$ *mit* $0 \leq \sigma < 1$ *strebt* $\int_{\sigma r}^{r} \lambda(r)\, dr \to \infty$ *für* $r \to J$.

*Die Funktionen* $f_i(G)$ *seien für alle zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *erklärt, die die kompakte Menge* $K_0$ *umfassen. Für die „meisten" zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *gelten die Ungleichungen* $f_i(G) \leq 0$, *in Zeichen*

$$\| f_i(G) \leq 0 \quad \text{oder auch} \quad \| f_i(G_r) \leq 0, \tag{16.9}$$

[15] Siehe W [43] Kap. IV § 7 Seite 196.
[16] Siehe W [43] Kap. V § 10 Seite 253.
[17] Siehe W [43] Kap. IV § 7 Seite 196—200.

*wenn es eine Zahl $M > 0$ und eine kompakte Menge $K$ gibt, so dass für jede zulässige Menge $G \in \mathfrak{G}$ und jede Menge $G_r \supset K$ die Ungleichungen*

$$f_i(G_r) \leq 0 \tag{16.10}$$

*in $0 < r \leq R(G)$ höchstens mit Ausnahme einer messbaren Menge $\tau = \tau(G)$ gelten, für die $\int_\tau \lambda(r)\, dr \leq M$ ist.*

Der Begriff der „meisten" zulässigen Mengen $G$ hängt also noch von der Wahl des $\lambda$-Masses und des vollständigen Systems $\mathfrak{G}$ ab. Es gilt

**Satz 16.2** Eine Abschätzung.[17]

**Voraussetzung.** *Es sei $f = \omega_B(h)$. Die Zahlen $\varkappa > 1$ und $d$ seien beliebig gewählt.*

**Behauptung.** *Für die „meisten" zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$ gilt*

$$\| f(G_r) \leq \varkappa^2 \log h(G_r) + (1 + \varkappa) \log \lambda(r) + d \tag{16.11}$$

*Die in Definition 16.5 erwähnte Konstante $M$ kann dabei als*

$$M = \frac{2}{\varkappa - 1} e^{\frac{1}{\varkappa + 1}(\varkappa^2 \log B - d)} \tag{16.12}$$

*gewählt werden.*

Gilt $\| f_i(G) \leq 0$ für $i = 1, \ldots, m$ einzeln, so auch gemeinsam. Diese Ungleichungen $\| f_i(G) \leq 0$ erlauben noch eine Aussage über den Grenzübergang $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ zu machen:

**Satz 16.3.** Der Grenzübergang $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ und die „meisten" $G \in \mathfrak{G}$.[17]

**Voraussetzung.** *Für die „meisten" zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$ und $i = 1, \ldots, m$ gelten die Abschätzungen $\| f_i(G) \leq 0$. Es sei $\mathfrak{G}^*$ die Menge aller zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$, für die die Ungleichungen $f_i(G) \leq 0$ gelten.*

**Behauptung.** 1. *Es gibt Zahlen $M$ und $\delta_0$ mit $0 < \delta_0 < 1$, eine kompakte Menge $K_0$ und zu jeder zulässigen Menge $G \in \mathfrak{G}$ mit $G \supset K_0$ wenigstens eine Zahl $r^*$ mit $(1 - \delta_0) R(G) \leq \leq r^* \leq R(G)$, sodass $f_i(G_{r^*}) \leq 0$ ist. Dabei ist $\int_{(1-\delta_0)R(G)}^{R(G)} \lambda(r)\, dr > M$ für $G \supset K_0$.* 2. *Ist $G^{(\nu)} \in \mathfrak{G}$ eine monotone Folge zulässiger Mengen, $G^{(\nu)} \subset G^{(\nu+1)}$ mit $\mathfrak{M}^{2n} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}$, so kann man die obigen Zahlen $r^* = r_\nu^*$ für alle $\nu \geq \nu_0$ sogar so wählen, dass $\bigcup_{\nu=\nu_0}^{\infty} G_{r_\nu^*}^{(\nu)} = \mathfrak{M}^{2n}$ ist, und dass die Folge $r_\nu^*$ wenigstens eine Teilfolge $\tilde{r}_\lambda = r_{\nu_\lambda}^*$ mit $\bar{G}_{\tilde{r}_\lambda} \subset G_{\tilde{r}_{\lambda+1}}$ und mit $\bigcup_{\lambda=0}^{\infty} G_{\tilde{r}_\lambda}^{(\nu_\lambda)} = \mathfrak{M}^{2n}$ enthält.*

Daraus folgt unmittelbar:

**Satz 16.4.** *Gilt $\| f_i(G) \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, die „meisten" zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$ und $i = 1, \ldots, m$, so ist $\overline{\lim_{G \to \mathfrak{M}^{2n}}}\, f_i(G) \leq 0$ (bezüglich $\mathfrak{G}$).*

## § 17. Abschätzung der „kleinen" Glieder

Die „Restglieder" $m_p(\gamma, A^p)$, $\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h)$ und $-\Omega_p(\gamma)$ werden in diesem Paragraphen nach oben abgeschätzt.

**Satz 17.1.** Die Abschätzung von $m_p(\gamma, A^p)$.[18]

**Voraussetzung.** *Die p-te assoziierte Fläche $W^p$ sei nicht speziell degeneriert. Nach Definition* 16.3 *werde die Bezeichnung* $(o)$ *erklärt.*

**Behauptung.** *Die Schmiegungsfunktion $m_p(\gamma, A^p)$ ist für alle speziellen Polyaden $A^p \neq 0$ stetig und für die speziellen Polyaden $A^p \neq 0$ gilt gleichmässig*

$$m_p(\gamma, A^p) = (o). \tag{17.1}$$

**Zusatz.** *In Voraussetzung und Behauptung kann zugleich das Wort „speziell" weggelassen werden.*

**Beweis.** Wendet man Satz 11.3 auf die meromorphe Fläche $W^p$ an, so erhält man gerade den Zusatz. Ist $\mathfrak{B}$ die Menge der speziellen Polyaden $B^p = [\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_p]$ mit $(\vec{\beta}_\mu | \vec{\beta}_\nu) = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu \neq \nu \\ 1 \text{ für } \mu = \nu \end{cases}$, so beweist man fast wörtlich genau so, wie man den Satz 11.3 beweist, dass $m_p(\gamma, B^p)$ auf $\mathfrak{B}$ stetig ist, und dass auf $\mathfrak{B}$ gleichmässig $m_p(\gamma, B^p) = (o)$ gilt. Zu jeder speziellen Polyade $A^p \neq 0$ gibt es Vektoren $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_p$ mit $B^p = [\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_p] \in \mathfrak{B}$, sodass $\{A^p\} = \{B^p\}$ ist. Es gilt $A^p = |A^p| \cdot B^p$. Also ist $\frac{A^p}{|A^p|} \in \mathfrak{B}$. Wegen $m_p\left(\gamma, \frac{A^p}{|A^p|}\right) = m_p(\gamma, A^p)$ folgt die Behauptung, w. z. b. w.

Ganz entsprechend wie Satz 11.3 und Satz 17.1 beweist man:

**Satz 17.2.** Die Abschätzung von $\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h)$.[18]

**Voraussetzung.** *Die Projektion $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ der p-ten assoziierten Fläche $W^p$ sei für jede spezielle Polyade $\mathfrak{A}^h \neq 0$ nicht totaldegeneriert. Nach* (13.3) *werde $\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h) = \tilde{m}_p(\gamma, G, \mathfrak{A}^h)$ definiert.*

**Behauptung.** *Die Funktion $\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h)$ ist für alle speziellen Polyaden $\mathfrak{A}^h \neq 0$ stetig und für diese gilt gleichmässig:*

$$\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h) = \tilde{m}_p(\gamma, G, \mathfrak{A}^h) = (o). \tag{17.2}$$

---

[18] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 7 Seite 191—195.

**Zusatz.** *In Voraussetzung und Behauptung kann zugleich das Wort „speziell" weggelassen werden.*

Da der Beweis ganz analog zum Beweis von Satz 11.3 verläuft, braucht er hier nicht ausgeführt zu werden. Ist übrigens $W^p$ nicht (speziell) degeneriert, so gilt für jede Polyade $\mathfrak{A}_2^{k-p} = [\mathfrak{A}_1^{k-p-h}, \mathfrak{A}^h]$ die Abschätzung

$$\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^p\| \geq \|\mathfrak{A}_2^{k-p} : \mathfrak{W}^p\| = \|{*\mathfrak{A}_2^{k-p}}, \mathfrak{W}^p\|. \tag{17.3}$$

Mit $A^p = *\mathfrak{A}^{k-p}$ gilt also

$$\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h) \leq m_p(\gamma, A^p) \leq (o) \tag{17.4}$$

gleichmässig in $\mathfrak{A}^h$, womit (17.2) bewiesen ist. Zur Abschätzung von $-\Omega_p(\gamma)$ wird noch ein Hilfssatz benötigt.

**Hilfssatz 1.**[18] *Wird die Dichte $\Delta(P, \alpha, G)$ im Kondensator $\bar{H} = \bar{G} - g$ nach* (14.8) *definiert und sind $G_0 \subset G$ zwei zulässige Mengen, so gilt*

$$\log \frac{\Delta(P, \alpha, G)}{\Delta(P, \alpha, G_0)} \leq 2 \log \frac{R(G)}{R(G_0)} \tag{17.5}$$

*für alle Punkte $P \in \gamma$ und alle Abbildungen $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P \in U_\alpha$.*

**Beweis.** Die Ausdrücke, die von $G_0$ abhängen, mögen durch einen angehängten Index ${}^{(0)}$ bezeichnet werden. Die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $\gamma \cap U_\alpha \neq \emptyset$ werde beliebig gewählt. Das euklidische Oberflächenelement von $\gamma' = \alpha^{-1}(U_\alpha \cap \gamma)$ sei $\partial\omega$. Die Potentialfunktionen $\varphi = \varphi(P, G)$ und $\varphi^{(0)} = \varphi(P, G_0)$ seien nach (7.1) und (7.2) gebildet. Wegen $\gamma = \{P \mid \varphi(P, G) = 1\} = \{P \mid \varphi(P, G_0) = 1\}$ gelten nach (4.31) längs $\gamma \cap U_\alpha$ die Gleichungen

$$\partial^\perp \varphi^{(0)} \partial \chi_{2n-2} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} (\varphi_{z_\mu} \varphi_{\bar{z}_\nu}^{(0)} + \varphi_{z_\mu}^{(0)} \varphi_{\bar{z}_\nu}) \frac{\partial\omega}{|\operatorname{grad} \varphi|}, \tag{17.6}$$

$$\partial^\perp \varphi \partial \chi_{2n-2} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} (\varphi_{z_\mu}^{(0)} \varphi_{\bar{z}_\nu} + \varphi_{z_\mu} \varphi_{\bar{z}_\nu}^{(0)}) \frac{\partial\omega}{|\operatorname{grad} \varphi^{(0)}|}, \tag{17.7}$$

$$\partial^\perp \varphi^{(0)} \partial \chi_{2n-2} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \varphi_{z_\mu}^{(0)} \varphi_{\bar{z}_\nu}^{(0)} \frac{\partial\omega}{|\operatorname{grad} \varphi^{(0)}|} = \frac{\Delta^{(0)}}{(R^{(0)})^2} \frac{\partial\omega}{|\operatorname{grad} \varphi^{(0)}|}, \tag{17.8}$$

$$\partial^\perp \varphi \partial \chi_{2n-2} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \varphi_{z_\mu} \varphi_{\bar{z}_\nu} \frac{\partial\omega}{|\operatorname{grad} \varphi|} = \frac{\Delta}{R^2} \frac{\partial\omega}{|\operatorname{grad} \varphi|}. \tag{17.9}$$

Hieraus folgt

$$\frac{|\operatorname{grad} \varphi^{(0)}|}{|\operatorname{grad} \varphi|} = \frac{\Delta^{(0)} |\operatorname{grad} \varphi| R^2}{(R^{(0)})^2 |\operatorname{grad} \varphi^{(0)}| \Delta} \tag{17.10}$$

oder

$$\frac{\Delta}{\Delta^{(0)}} = \frac{R^2}{(R^{(0)})^2} \frac{|\operatorname{grad} \varphi|^2}{|\operatorname{grad} \varphi^{(0)}|^2}. \tag{17.11}$$

Die Differentialgleichung $\partial \partial^{\perp} \xi \partial \chi_{2n-2} = 0$ wird in $G_0 - \bar{g}$ durch $\xi = \varphi - \varphi^{(0)}$ gelöst. Da $\xi(P) = 0$ für $P \in \gamma$ und $\xi(P) = \varphi \geq 0$ für $P \in \Gamma_0$ ist, ist $\xi(P) > 0$ in $H_0 = G_0 - \bar{g}$. Nach Satz 4.5 hat $\partial^{\perp} \xi \partial \chi_{2n-2}$ längs $\gamma$ eine nichtpositive Dichte. Daher ist die positive Dichte von $\partial^{\perp} \varphi \partial \chi_{2n-2}$ nicht grösser als die positive Dichte von $\partial^{\perp} \varphi^{(0)} \partial \chi_{2n-2}$ längs $\gamma$. Aus (17.6) und (17.7) ergibt sich also

$$\frac{|\operatorname{grad} \varphi|}{|\operatorname{grad} \varphi^{(0)}|} \leq 1. \tag{17.12}$$

Aus (17.11) und (17.12) folgt (17.5), w. z. b. w.

**Satz 17.3.** Die Abschätzung der Funktion $-\Omega_p(\gamma)$ nach oben.[18]

**Voraussetzung.** *Die* $(p+1)$*-te assoziierte Fläche* $W^{p+1}$ *von* $W$ *sei nicht totaldegeneriert. Die Funktion* $\Omega_p(\gamma)$ *sei gemäss* (15.15) *erklärt.*

**Behauptung.** *Es gilt*

$$-\Omega_p(\gamma) \leq (o). \tag{17.13}$$

**Beweis.** Die zulässige Menge $G_0 \in \mathfrak{G}$ wird beliebig gewählt. Es sei $G \supset \bar{G}_0$ eine zulässige Menge $G$ aus $\mathfrak{G}$. Aus Hilfssatz 1 und (15.13) folgt

$$\begin{aligned} -\log \hat{S}_p(P, G) &= -\log \hat{S}_p(P, G_0) + \log \frac{\Delta(P, \alpha, G)}{\Delta(P, \alpha, G_0)} \leq \\ &\leq -\log \hat{S}_p(P, G_0) + 2 \log \frac{R(G)}{R(G_0)}. \end{aligned} \tag{17.14}$$

Es werde $\gamma_\omega = \{P \mid -\log \hat{S}_p(P, G) < \omega\} \cap \gamma$ gesetzt. Da das Integral (15.15) existiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\omega = \omega_\varepsilon > 0$, sodass

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\gamma - \gamma_\omega} |\log \hat{S}(P, G_0)| \partial^{\perp} \psi(P, G_0) \partial \chi_{2n-2} \leq \varepsilon \tag{17.15}$$

ist. Da, wie im Beweis von Hilfssatz 1 gezeigt wurde, $\partial^{\perp} \varphi(P, G) \partial \chi_{2n-2}$ längs $\gamma$ eine nichtgrössere Dichte als $\partial^{\perp} \varphi(P, G_0) \partial \chi_{2n-2}$ hat, und $\varphi = \dfrac{\psi}{R}$ ist, folgt

(17.16)
$$\begin{aligned}
-\Omega_p(\gamma) &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma} \log \mathfrak{S}_p(P, G)\, \partial^{\perp}\psi(P, G)\, \partial\chi_{2n-2} \leq \\
&\leq -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma-\gamma_\omega} \log \mathfrak{S}_p(P, G_0)\, \partial^{\perp}\psi(P, G)\, \partial\chi_{2n-2} - \\
&\quad -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma_\omega} \log \mathfrak{S}_p(P, G_0)\, \partial^{\perp}\psi(P, G)\, \partial\chi_{2n-2} + 2\log\frac{R(G)}{R(G_0)} \leq \\
&\leq \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma-\gamma_\omega} |\log \mathfrak{S}_p(P, G_0)|\, \partial^{\perp}\psi(P, G_0)\, \partial\chi_{2n-2} \cdot \frac{R(G)}{R(G_0)} + \\
&\quad + 2\log\frac{R(G)}{R(G_0)} + \omega_\varepsilon \leq \\
&\leq \varepsilon\frac{R(G)}{R(G_0)} + \omega_\varepsilon + 2\log\frac{R(G)}{R(G_0)}\,.
\end{aligned}$$

Ist die Gesamtspannung $J < \infty$, so ist $-\Omega_p(\gamma) \leq \dfrac{J}{R(G_0)} + \omega_1 + 2\log\dfrac{J}{R(G)}$ beschränkt. Ist $J = \infty$, so ist $\overline{\lim\limits_{G\to\mathfrak{M}^{2n}}}\, \dfrac{-\Omega_p(\gamma)}{R(G)} \leq 0$. Also gilt die Abschätzung (17.13), w.z.b.w.

Damit sind die Restglieder abgeschätzt. Sie werden beim Beweis des 2. Hauptsatzes keine Rolle spielen, da die eben bewiesenen Abschätzungen gelten.

## § 18. Mittelwertbildung

Mit diesem Paragraphen beginnt der eigentliche Beweis der Hauptdefektrelation, aus der zusammen mit der Differenzenformel der 2. Hauptsatz folgen wird. Allerdings wird die Hauptdefektrelation sich erst in § 22 ergeben.

**Definition 18.1.** Mittelwertbildung.[19]
*Die messbare Funktion $\sigma(\vec{\mathfrak{a}}) \geq 0$ sei für alle kontravarianten Vektoren $\vec{\mathfrak{a}} \neq 0$ erklärt. Ist $\lambda \neq 0$ komplex, so sei*

(18.1) $$\sigma(\lambda\vec{\mathfrak{a}}) = \sigma(\vec{\mathfrak{a}}) \geq 0.$$

*Die Kugel $|\vec{\mathfrak{a}}| = 1$ habe das euklidische Oberflächenelement $\partial v_{2k-1}(\vec{\mathfrak{a}})$ und den Inhalt $V_{2k-1} = \dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}$. Das Gesamtgewicht $\varsigma$ der Gewichtsfunktion $\sigma(\vec{\mathfrak{a}})$ sei*

---

[19] Siehe W [43] Kap. V § 2 Seite 213.

$$(18.2)\qquad 0<\varsigma=\frac{1}{V_{2k-1}}\int\limits_{|\vec{\alpha}|=1}\sigma(\vec{\alpha})\,\partial v_{2k-1}(\vec{\alpha})<\infty.$$

*Ist die Funktion $f(\vec{\alpha})$ für $|\vec{\alpha}|=1$ erklärt, so sei*

$$(18.3)\qquad \mu(f)=\frac{1}{\varsigma}\frac{1}{V_{2k-1}}\int\limits_{|\vec{\alpha}|=1}f(\vec{\alpha})\,\sigma(\vec{\alpha})\,\partial v_{2k-1}(\vec{\alpha})$$

*ihr Mittelwert, falls dieses Integral existiert.*

Diese Mittelwertbildung soll nun auf den 1. Hauptsatz angewandt werden. Dazu dient zunächst:

**Satz 18.1.** Das Differential $\partial\Omega_2$.

**Voraussetzung.** *Die Vektoren $\mathfrak{w}\neq 0$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ seien beliebig gewählt. Das euklidische Oberflächenelement der Ebene $(\vec{\alpha},\mathfrak{w})=0$ sei $\partial v_{2k-2}(\vec{\alpha})$. Das Integral*

$$(18.4)\qquad I=I(\mathfrak{w},\mathfrak{u},\mathfrak{v})=\frac{1}{\varsigma}\frac{1}{\pi^{k-1}}\int\limits_{(\vec{\alpha},\mathfrak{w})=0}\sigma(\vec{\alpha})\,e^{-|\vec{\alpha}|^2}\frac{(\vec{\alpha},\mathfrak{u})\,\overline{(\vec{\alpha},\mathfrak{v})}}{|\mathfrak{w}|^2}\,\partial v_{2k-2}(\vec{\alpha})$$

*existiere. Die meromorphe Fläche $W$ sei nicht degeneriert. Wenn $\mathfrak{w}(P)$ eine Darstellung der meromorphen Fläche $W$ auf der offenen Menge $M$ ist, so existiere dort das Integral*

$$(18.5)\qquad \partial\Omega_2(\mathfrak{w})=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}I(\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu},\mathfrak{w}_{z_\nu})\,\partial z_\mu\partial\bar{z}_\nu=\frac{i}{2}I(\mathfrak{w},\partial\mathfrak{w},\partial\mathfrak{w})$$

*fast überall.*

**Behauptung.** *Das Differential $\partial\Omega_2(\mathfrak{w})$ ist unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ fast überall auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$, abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von $W$ erklärt.*

**Beweis.** Geht man zu einer anderen Darstellung $\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ auf der offenen Menge $\tilde{M}$ mit $M\cap\tilde{M}\neq\emptyset$ über, so gibt es eine Funktion $\lambda(P)$ die in jedem Teilgebiet von $M\cap\tilde{M}$ meromorph und nicht identisch Null ist, sodass $\mathfrak{w}(P)=\lambda(P)\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ in $M\cap\tilde{M}$ gilt. Fast überall auf $M\cap\tilde{M}$ gilt also

$$(18.6)\qquad \begin{aligned}\partial\Omega_2(\mathfrak{w})&=\frac{1}{\varsigma}\frac{1}{\pi^{k-1}}\int\limits_{(\vec{\alpha},\mathfrak{w})=0}\sigma(\vec{\alpha})\,e^{-|\vec{\alpha}|^2}\frac{(\vec{\alpha}),\partial\mathfrak{w})\,\overline{(\vec{\alpha},\partial\mathfrak{w})}}{|\mathfrak{w}|^2}\,\partial v_{2k-2}(\vec{\alpha})=\\&=\frac{1}{\varsigma}\frac{1}{\pi^{k-1}}\int\limits_{(\vec{\alpha},\tilde{\mathfrak{w}})=0}\sigma(\vec{\alpha})\,e^{-|\vec{\alpha}|^2}\frac{(\vec{\alpha},\lambda\partial\tilde{\mathfrak{w}}+\tilde{\mathfrak{w}}\partial\lambda)\,\overline{(\vec{\alpha},\lambda\partial\tilde{\mathfrak{w}}+\tilde{\mathfrak{w}}\partial\lambda)}}{|\lambda|^2\,|\tilde{\mathfrak{w}}|^2}\,\partial v_{2k-2}=\end{aligned}$$

$$(18.6)\qquad \begin{aligned} &= \frac{1}{\varsigma}\frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{(\vec{\alpha},\, \mathfrak{w})=0} \sigma(\vec{\alpha})\, e^{-|\vec{\alpha}|^2} \frac{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w})\, \overline{(\vec{\alpha}, \partial \tilde{\mathfrak{w}})}}{|\tilde{\mathfrak{w}}|^2} \partial v_{2k-2} = \\ &= \partial \Omega_2(\tilde{\mathfrak{w}}). \end{aligned}$$

Wählt man zu jedem Punkt $P_0$ eine in einer Umgebung von $P_0$ reduzierte Darstellung, so wird $\partial \Omega_2(\mathfrak{w})$ bis auf die Unbestimmtheitsstellen von $W$ fast überall auf $\mathfrak{M}^{2n}$ eindeutig erklärt, w. z. b. w.

Wählt man $\sigma(\vec{\alpha}) \equiv 1$, so ist nach (9.41) das Differential $\partial \Omega_2(\mathfrak{w}(P)) = \partial \omega_2(\mathfrak{w}(P))$. Ähnlich wie in § 9 beweist man den Satz:

**Satz 18.2.** Eine Mittelwertdarstellung der Charakteristik.[20]

**Voraussetzung.** *Die meromorphe Fläche $W$ sei nicht degeneriert. Der Mittelwert $\mu(f)$ sei nach Definition* 18.1 *und das Differential $\partial \Omega_2(\mathfrak{w}(P))$ nach Satz* 18.1 *erklärt.*

**Behauptung.** *Es gilt*

$$(18.7)\qquad T(G) = \frac{1}{\pi} \int\limits_G \psi(P, G)\, \partial \Omega_2(\mathfrak{w}(P))\, \partial \chi_{2n-2} + \mu(m(\Gamma, \vec{\alpha})) - \mu(m(\gamma, \vec{\alpha})).$$

**Beweis.** Im Gebiet $D$ sei eine reduzierte Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ von $W$ gegeben. Das Gebiet $F$ liege mit seinem Rand in $D$ und sei beschränkt. Die auf $\mathfrak{M}^{2n}$ stetige Funktion $\lambda(P)$ mit $0 \le \lambda(P) \le 1$ sei ausserhalb $F$ identisch Null. Dann werde

$$(18.8)\qquad N_1(\vec{\alpha}) = \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \nu(P, \vec{\alpha})\, \psi(P, G)\, \lambda(P)\, \partial \chi_{2n-2}$$

gesetzt. Wegen $N_1(\alpha) \le N(G, \alpha) \le T(G) + m(\gamma, \vec{\alpha})$ und wegen Satz 11.3 existiert das Integral

$$(18.9)\qquad \mu(N_1) = \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} \sigma(\vec{\alpha})\, N_1(\vec{\alpha})\, \partial v_{2k-2}(\vec{\alpha})$$

und hat wegen $N_1(\vec{\alpha}) = N_1(\lambda \vec{\alpha})$ für $\lambda \neq 0$ den Wert

$$(18.10)\qquad \mu(N_1) = \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|<\infty} \sigma(\vec{\alpha})\, N_1(\vec{\alpha})\, e^{-|\vec{\alpha}|^2} \partial v_{2k}(\vec{\alpha}).$$

Nun wird der Beweis genau so weitergeführt, wie der Beweis von Satz 9.4 Gleichung (9.46) bis (9.55), indem man dort $e^{-|\vec{\alpha}|^2}$ durch $\sigma(\vec{\alpha})\, e^{-|\vec{\alpha}|^2}$ ersetzt. Man erhält

[20] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. V § 2 Seite 214—215.

$$\mu(N_1) = \frac{1}{\varsigma}\left(\frac{i}{2}\right)^k \frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_F \int\limits_{|\alpha_k|<\infty} \cdots \tag{18.11}$$
$$\cdots \int\limits_{|\alpha_2|<\infty} \sigma(\vec{\alpha}) e^{-|\vec{\alpha}|^2} \frac{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w}) \overline{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w})}}{|w_1|^2} \partial \alpha_2 \partial \bar{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k \partial \bar{\alpha}_k \lambda \psi \partial \chi_{2n-2}.$$

Mit (9.40) und (18.5) wird

$$\mu(N_1) = \frac{1}{\pi} \int\limits_F \lambda(P) \psi(P, G) \partial \Omega_2(\mathfrak{w}(P)) \partial \chi_{2n-2}. \tag{18.12}$$

Mittels einer DIEUDONNÉ-Zerlegung folgt aus (18.12) und (18.8) sofort

$$\mu(N(G, \vec{\alpha})) = \frac{1}{\pi} \int\limits_F \psi(P, G) \partial \Omega_2(\mathfrak{w}(P)) \partial \chi_{2n-2}. \tag{18.13}$$

Aus (18.13) und dem 1. Hauptsatz folgt (18.7), w. z. b. w.

Ist die Funktion $0 < g(t)(1-t)^{k-2}$ über das Intervall $0 < t < 1$ integrierbar, so gilt nach W [43] Kap. III, § 2 Lemma 2 B die Gleichung

$$\frac{1}{\pi^k} \int\limits_{|\vec{\alpha}|<\infty} g\left(\frac{|\alpha_1|^2}{|\vec{\alpha}|^2}\right) e^{-|\vec{\alpha}|^2} \partial v_{2k}(\vec{\alpha}) = (k-1) \int\limits_0^1 g(t)(1-t)^{k-2} dt. \tag{18.14}$$

Also gilt

$$\frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} g(|\alpha_1|^2) \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}) = (k-1) \int\limits_0^1 g(t)(1-t)^{k-2} dt. \tag{18.15}$$

Der Vektor $\mathfrak{b} \neq 0$ werde beliebig gewählt. Dann gibt es ein normales Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$, in dem $\mathfrak{b} = b_1 \mathfrak{e}_1$ is. Es ist

$$\frac{|\alpha_1|}{|\vec{\alpha}|} = \frac{|(\vec{\alpha}, \mathfrak{b})|}{|\vec{\alpha}||\mathfrak{b}|} = \|\vec{\alpha}, \mathfrak{b}\|. \tag{18.16}$$

Aus (18.14) bis (18.16) folgt

$$\varsigma = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} g(\|\vec{\alpha}, \mathfrak{b}\|^2) \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}) = (k-1) \int\limits_0^1 g(t)(1-t)^{k-2} dt < \infty. \tag{18.17}$$

Daher kann man

$$\sigma(\vec{\alpha}) = g(\|\vec{\alpha}, \mathfrak{b}\|^2) \tag{18.18}$$

wählen. Nun werde das Integral $I(\mathfrak{w}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ für den Fall (18.17) berechnet. Zunächst werden dazu zwei auch sonst oft gebrauchte Transformationen eingeführt. Die Transformation[21]

$$S_{pq}(\alpha, t, \varphi): \quad \alpha_\nu = \sqrt{t_\nu}\, e^{i\varphi_\nu} \qquad \text{für } \nu = p, \ldots, q \tag{18.19}$$

bildet $0 \leq t_\nu < \infty$, $0 \leq \varphi_\nu < 2\pi$ eineindeutig auf $|\alpha_\nu| < \infty$ ab. Es ist

$$\partial v_{2q-2p+2}(\alpha_p, \ldots, \alpha_q) = \left(\frac{i}{2}\right)^{q-p+1} \partial\alpha_p \partial\bar{\alpha}_p \ldots \partial\alpha_q \partial\bar{\alpha}_q = \left(\frac{1}{2}\right)^{q-p+1} \partial t_p \partial\varphi_p \ldots \partial t_q \partial\varphi_q . \tag{18.20}$$

Die zweite Transformation ist[21]

$$\begin{aligned} &\hat{S}_{pq}(t, s, \tau): \quad t_p = \tau(s_{p+1} + \cdots + s_q), \quad t_\nu = (1-\tau)s_\nu \quad \text{für } \nu = p+1, \ldots, q \\ &\hat{S}_{pq}^{-1}(t, s, \tau): \quad \tau = \frac{t_p}{t_p + \cdots + t_q}, \qquad s = t_\nu \frac{t_p + \cdots + t_q}{t_{p+1} + \cdots + t_q} \quad \text{für } \nu = p+1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{18.21}$$

Ihre Funktionaldeterminante ist

$$\frac{\partial(t_p, \ldots, t_q)}{\partial(\tau, s_{p+1}, \ldots, s_q)} = (s_{p+1} + \cdots + s_q)(1-\tau)^{q-p-1}. \tag{18.22}$$

Dabei gilt

$$t_p + \cdots + t_q = s_{p+1} + \cdots + s_q . \tag{18.23}$$

Durch $\hat{S}_{pq}(t, s, \tau)$ wird $0 < \tau < 1$, $0 < s_{p+1} < \infty$, $\ldots$, $0 < s_q < \infty$ eineindeutig auf $0 < t_p < \infty$, $\ldots$, $0 < t_q < \infty$ abgebildet. Nun gilt:

**Satz 18.3.** Eine Integralumformung.[22]

**Voraussetzung.** *Die Funktion* $g(t)(1-t)^{k-2} > 0$ *sei über* $0 < t < 1$ *integrierbar. Der Vektor* $\mathfrak{b} \neq 0$ *sei beliebig gewählt. Die Gewichtsfunktion* $\sigma(\vec{\alpha})$ *werde nach* (18.17) *und das Integral* $I(\mathfrak{w}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ *nach* (18.4) *definiert.*

**Behauptung.** *Für* $k \geq 3$ *gilt*

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{w}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = {} & \frac{k-1}{\varsigma} \int_0^1 (1-\tau)^{k-2} g(\tau \| \mathfrak{w} : \mathfrak{b} \|^2)\, d\tau \frac{([\mathfrak{w}, \mathfrak{u}] | [\mathfrak{w}, \mathfrak{v}])}{|\mathfrak{w}|^4} - \\ & - \frac{k-1}{\varsigma} \int_0^1 (1-\tau)^{k-2} g(\tau \| \mathfrak{w} : \mathfrak{b} \|^2)\, d\tau \frac{([\mathfrak{w}, \mathfrak{u}] | [\mathfrak{w}, \mathfrak{b}])([\mathfrak{w}, \mathfrak{b}] | [\mathfrak{w}, \mathfrak{v}])}{\| \mathfrak{w} : \mathfrak{b} \|^2 \quad |\mathfrak{w}|^6 \quad |\mathfrak{b}|^2} + \\ & + \frac{(k-2)(k-1)}{\varsigma} \int_0^1 \tau(1-\tau)^{k-3} g(\tau \| \mathfrak{w} : \mathfrak{b} \|^2)\, d\tau \frac{([\mathfrak{w}, \mathfrak{u}] | [\mathfrak{w}, \mathfrak{b}])(\mathfrak{w}, \mathfrak{b}] | [\mathfrak{w}, \mathfrak{v}])}{\| \mathfrak{w} : \mathfrak{b} \|^2 \quad |\mathfrak{w}|^6 \quad |\mathfrak{b}|^2} . \end{aligned} \tag{18.24}$$

[21] Siehe W [43] Kap. III § 2 Seite 129—130.

[22] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. V § 5 Seite 224—227.

*Für* $k=2$ *gilt*

(18.25) $$I(\mathfrak{w}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \frac{1}{\varsigma} g(\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2) \frac{([\mathfrak{w}, \mathfrak{u}] \mid [\mathfrak{w}, \mathfrak{b}])}{\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2} \frac{([\mathfrak{b}, \mathfrak{w}] \mid [\mathfrak{w}, \mathfrak{v}])}{|\mathfrak{w}|^6 \quad |\mathfrak{b}|^2}.$$

**Beweis.** In einem geeigneten normalen Koordinatensystem ist

(18.26) $$\mathfrak{w} = w_1 \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{b} = \sum_{\nu=1}^{2} b_\nu \mathfrak{e}_\nu, \quad \mathfrak{u} = \sum_{\nu=1}^{3} u_\nu \mathfrak{e}_\nu, \quad \mathfrak{v} = \sum_{\nu=1}^{4} v_\nu \mathfrak{e}_\nu.$$

Längs $(\vec{\alpha}, \mathfrak{w}) = 0$, also längs $\alpha_1 = 0$ ist

(18.27) $$\begin{aligned}(\vec{\alpha}, \mathfrak{u})\overline{(\vec{\alpha}, \mathfrak{v})} &= u_2 \bar{v}_2 |\alpha_2|^2 + u_3 \bar{v}_3 |\alpha_3|^2 + u_2 \bar{v}_3 \alpha_2 \bar{\alpha}_3 + u_2 \bar{v}_4 \alpha_2 \bar{\alpha}_4 + \\ &+ u_3 \bar{v}_2 \alpha_3 \bar{\alpha}_2 + u_3 \bar{v}_4 \alpha_3 \bar{\alpha}_4,\end{aligned}$$

(18.28) $$\partial v_{2k-2}(\vec{\alpha}) = \left(\frac{i}{2}\right)^{k-2} \partial \alpha_2 \partial \bar{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k \partial \bar{\alpha}_k.$$

Ist $\mu \neq \nu$, so zeigt die Transformation $\alpha'_\varrho = \begin{cases} \alpha_\varrho & \text{für } \varrho \neq \mu \\ -\alpha_\mu & \text{für } \varrho = \mu \end{cases}$, dass

(18.29) $$\int\limits_{(\vec{\alpha}, \mathfrak{w})=0} e^{-|\vec{\alpha}|^2} g\left(\frac{|\alpha_2 b_2|^2}{|\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2} \frac{1}{|\mathfrak{b}|^2}\right) \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu \partial v_{2k-2}(\vec{\alpha}) = 0$$

ist. Mit (18.26) und (18.29) berechnet sich $J(\mathfrak{w}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ gemäss (18.4) zu

(18.30) $$\begin{aligned} I = \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{|w_1|^2} \frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{|\alpha_2|<\infty} \cdots \int\limits_{|\alpha_k|<\infty} \Bigg\{ & e^{-|\alpha_2|^2 - \cdots - |\alpha_k|^2} g\left(\frac{|\alpha_2|^2}{|\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2} \frac{|b_2|^2}{|\mathfrak{b}|^2}\right) \cdot \\ & \cdot (u_2 \bar{v}_2 |\alpha_2|^2 + u_3 \bar{v}_3 |\alpha_3|^2) \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \partial \alpha_2 \partial \bar{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k \partial \bar{\alpha}_k \Bigg\}. \end{aligned}$$

Die Substitution $S_{2k}(\alpha, t, \varphi)$ ergibt

(18.31) $$I = \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{|w_1|^2} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-t_2 - \cdots - t_k} g\left(\frac{t_2}{t_2 + \cdots + t_k} \frac{|b_2|^2}{|\mathfrak{b}|^2}\right) (u_2 \bar{v}_2 t_2 + u_3 \bar{v}_3 t_3) \, d t_2 \ldots d t_k.$$

Für $k \geq 3$ ergibt die Substitution $\hat{S}_{2k}(t, s, \tau)$ die Gleichung

(18.32) $$\begin{aligned} I = & \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{|w_1|^2} \int_0^1 \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty (1-\tau)^{k-3} (s_3 + \cdots + s_k)^2 e^{-s_2 - \cdots - s_k} g\left(\tau \frac{|b_2|^2}{|\mathfrak{b}|^2}\right) \cdot \\ & \cdot \left(u_2 \bar{v}_2 \tau + \frac{(1-\tau) s_3 u_3 \bar{v}_3}{s_3 + \cdots + s_k}\right) d\tau \, d s_2 \ldots d s_k = \\ = & \frac{1}{\varsigma} (k-1((k-2) \int_0^1 \tau (1-\tau)^{k-3} g\left(\tau \frac{|b_2|^2}{|\mathfrak{b}|^2}\right) d\tau \frac{u_2 \bar{v}_2}{|w_1|^2} + \\ & + \frac{1}{\varsigma} (k-1) \int_0^1 (1-\tau)^{k-2} g\left(\tau \frac{|b_2|^2}{|\mathfrak{b}|^2}\right) d\tau \frac{u_3 \bar{v}_3}{|w_1|^2}. \end{aligned}$$

Für $k=2$ wird

$$(18.33)\qquad \begin{aligned} I &= \frac{1}{\varsigma}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\alpha_2|<\infty} e^{-|\alpha_2|^2}\, g\left(\frac{|\alpha_2|^2\,|b_2|^2}{|\alpha_2|^2\,|\mathfrak{b}|^2}\right)\frac{u_2\bar{v}_2}{|w_1|^2}\,|\alpha_2|^2\,\frac{i}{2}\,\partial\alpha_2\,\partial\bar{\alpha}_2 = \\ &= \frac{1}{\varsigma}\, g\left(\frac{|b_2|}{|\mathfrak{b}|^2}\right)\frac{u_2\bar{v}_2}{|w_1|^2}\,. \end{aligned}$$

Gemäss (18.26) ist

$$(18.34)\qquad \begin{cases} \dfrac{|b_2|^2}{|\mathfrak{b}|^2} = \dfrac{w_1 b_2 \bar{w}_1 \bar{b}_2}{w_1\bar{w}_1\,|\mathfrak{b}|^2} = \dfrac{|[\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}]|^2}{|\mathfrak{w}|^2\,|\mathfrak{b}|^2} = \|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2, \\[2ex] u_2 = \dfrac{w_1\bar{w}_1\,(u_1\bar{b}_1+u_2\bar{b}_2)-u_1\bar{w}_1 w_1\bar{b}_1}{w_1\bar{w}_1\bar{b}_2} = \dfrac{\begin{vmatrix}(\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{w}) & (\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{b})\\ (\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{w}) & (\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{b})\end{vmatrix}}{|\mathfrak{w}|^2\,\bar{b}_2} = \dfrac{([\mathfrak{w},\,\mathfrak{u}]\,|\,[\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}])}{|\mathfrak{w}|^2\,\bar{b}_2}, \\[2ex] \bar{v}_2 = \dfrac{w_1\bar{w}_1\,(\bar{v}_1 b_1+\bar{v}_2 b_2)-\bar{v}_1 w_1\bar{w}_1 b_1}{w_1\bar{w}_1 b_2} = \dfrac{\begin{vmatrix}(\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{w}) & (\mathfrak{b}\,|\,\mathfrak{w})\\ (\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{v}) & (\mathfrak{b}\,|\,\mathfrak{v})\end{vmatrix}}{|\mathfrak{w}|^2\, b_2} = \dfrac{([\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}]\,|\,[\mathfrak{w},\,\mathfrak{v}])}{|\mathfrak{w}|^2\, b_2}, \\[2ex] u_2\bar{v}_2 = \dfrac{([\mathfrak{w},\,\mathfrak{u}]\,|\,[\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}])\,([\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}]\,|\,[\mathfrak{w},\,\mathfrak{v}])}{|\mathfrak{w}|^4\,\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2\,|\mathfrak{b}|^2}, \\[2ex] u_3\bar{v}_3 = (\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{v}) - u_1\bar{v}_1 - u_2\bar{v}_2 = (\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{v}) - \dfrac{\bar{w}_1 u_1 w_1 \bar{v}_1}{w_1\bar{w}_1} - u_2\bar{v}_2 \\[2ex] \qquad = \dfrac{([\mathfrak{w},\,\mathfrak{u}]\,|\,[\mathfrak{w},\,\mathfrak{v}])}{|\mathfrak{w}|^2} - \dfrac{([\mathfrak{w},\,\mathfrak{u}]\,|\,[\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}])\,([\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{v}])}{|\mathfrak{w}|^4\,\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2\,|\mathfrak{b}|^2}, \\[2ex] |w_1| = |\mathfrak{w}|. \end{cases}$$

Für $k\geq 3$ erhält man aus den Gleichungen (18.32) und (18.34) die Behauptung (18.24), für $k=2$ erhält man aus (18.33) und (18.34) die Behauptung (18.25), w. z. b. w.

Ist $\mathfrak{w}(P)$ eine Darstellung der meromorphen Fläche $W \neq \emptyset$ auf der offenen Menge $M$ und ist $\mathfrak{b} \neq 0$, so werde dort das Differential[23]

$$(18.35)\qquad \partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2}\,|\mathfrak{w}(P)|^{-6}\,|\mathfrak{b}|^{-2}\,([\mathfrak{w},\,\partial\mathfrak{w}]\,|\,[\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}])\,([\mathfrak{w},\,\mathfrak{b}]\,|\,[\mathfrak{w},\,\partial\mathfrak{w}])$$

definiert. Ist $\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ eine zweite Darstellung auf $\tilde{M}$ mit $M\cap\tilde{M}\neq\emptyset$, so gibt es eine Funktion $\lambda(P)$, die in jedem Teilgebiet von $M\cap\tilde{M}$ meromorph und nicht identisch Null ist, sodass $\mathfrak{w}(P)=\lambda(P)\,\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ auf $M\cap\tilde{M}$ gilt. Wegen $[\mathfrak{w}(P),\ \partial\mathfrak{w}(P)] = \lambda^2(P)\,[\tilde{\mathfrak{w}}(P),\,\partial\tilde{\mathfrak{w}}(P)]$

[23] Für $n=1$ siehe W [43] Kap. V § 5 Seite 229.

ist $\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P)) = \partial\Omega_2^1(\tilde{\mathfrak{w}}(P))$. Daher ist das Differential $\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))$ unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ bis auf die Unbestimmtheitsstellen von $W$ eindeutig erklärt. Dasselbe gilt für das Differential

$$\partial\Omega_2^2(\mathfrak{w}(P)) = \partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2 - \partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P)). \tag{18.36}$$

Wird die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ beliebig gewählt, so haben diese Differentiale die Gestalt

$$\begin{aligned} &\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2} = \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \frac{([\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{b}])([\mathfrak{w},\mathfrak{b}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\nu}])}{|\mathfrak{w}|^6\,|\mathfrak{b}|^2}\,\partial z_1\partial\bar{z}_1 \ldots \partial z_n\partial\bar{z}_n \end{aligned} \tag{18.37}$$

$$\begin{aligned} &\partial\Omega_2^2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2} = \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \frac{|[\mathfrak{w},\mathfrak{b}]|^2([\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\nu}]) - ([\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{b}])([\mathfrak{w},\mathfrak{b}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\nu}])}{|\mathfrak{w}|^6\,|\mathfrak{b}|^2}\,\cdot \\ &\cdot\,\partial z_1\partial\bar{z}_1 \ldots \partial z_n\partial\bar{z}_n. \end{aligned} \tag{18.38}$$

Ist der Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ beliebig gewählt, so gibt es eine geeignete Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$, sodass

$$a_{\mu\nu}(P_0, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für } \mu = \nu \end{cases} \tag{18.39}$$

ist. Für diese spezielle Abbildung $\alpha$ hat die Dichte des Differentials $\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2}$ in $P_0$ den nichtnegativen Wert

$$\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{|([\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{b}])|^2}{|\mathfrak{w}|^6\,|\mathfrak{b}|^2} \geq 0 \text{ mit } \mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P_0) \tag{18.40}$$

und die Dichte des Differentials $\partial\Omega_2^2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2}$ in $P_0$ den nichtnegativen Wert

$$\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{|[\mathfrak{w},\mathfrak{b}]|^2\,|[\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu}]|^2 - |([\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{b}])|^2}{|\mathfrak{w}|^6\,|\mathfrak{b}|^2} \geq 0 \tag{18.41}$$

mit $\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)$. Nach (18.7), (18.5), (18.24), (18.35) und (18.36) erhält man für $k \geq 3$ die Gleichung

$$\begin{aligned} &T(G) + \mu(m(\gamma, \vec{\alpha})) - \mu(m(\Gamma, \vec{\alpha})) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_G \psi(P, G)\frac{1}{\varsigma}(k-1)\int_0^1 (1-\tau)^{k-2} g(\tau\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2)\,\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^{-2}\,d\tau\,\partial\Omega_2^2\,\partial\chi_{2n-2} + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_G \psi(P, G)\frac{1}{\varsigma}(k-1)(k-2)\int_0^1 (1-\tau)^{k-2} g(\tau\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2)\,\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^{-2}\,\tau\,d\tau\,\partial\Omega_2^1\,\partial\chi_{2n-2}, \end{aligned} \tag{18.42}$$

wobei beide Differentiale $\partial\Omega_2^2\partial\chi_{2n-2}$ und $\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w})\partial\chi_{2n-2}$ eine nichtnegative Dichte haben, sodass beide Summanden nichtnegativ sind. Für $k=2$ ergibt sich nach (18.7), (18.5), (18.25) und (18.35) die Gleichung

$$\begin{aligned} &T(G)+\mu(m(\gamma,\vec{\mathfrak{a}}))-\mu(m(\Gamma,\vec{\mathfrak{a}}))= \\ &=\frac{1}{\varsigma}\frac{1}{\pi}\int_G\psi(P,G)\,g(\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2)\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^{-2}\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))\partial\chi_{2n-2}. \end{aligned}\tag{18.43}$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen.

**Satz 18.3.** Mittelwertbildung (Fortsetzung).

**Voraussetzung.** *Die meromorphe Fläche $W$ sei nicht degeneriert. Die Funktion $(1-t)^{k-2}g(t)>0$ sei über $0<t<1$ integrierbar. Der Vektor $\mathfrak{b}\neq 0$ sei beliebig gewählt. Mit der Gewichtsfunktion $\sigma(\vec{\mathfrak{a}})=g(\|\mathfrak{b},\vec{\mathfrak{a}}\|^2)$ werde die Mittelwertbildung $\mu(f)$ und das Gewicht $\varsigma$ nach Definition* 18.1 *erklärt. Das Differential $\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))$ sei durch* (18.35) *definiert.*

**Behauptung.** *Für $k\geq 3$ gilt*

$$\begin{aligned} &0\leq\frac{1}{\pi}\int_G\psi(P,G)(k-1)(k-2)\int_0^1(1-\tau)^{k-3}\frac{g(\tau\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2)}{\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2}\tau\,d\tau\,\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))\partial\chi_{2n-2}\leq \\ &\leq\varsigma T(G)+\varsigma\mu(m(\gamma,\vec{\mathfrak{a}}))-\varsigma\mu(m(\Gamma,\vec{\mathfrak{a}})). \end{aligned}\tag{18.44}$$

Für $k=2$ gilt

$$\begin{aligned} &0\leq\frac{1}{\pi}\int_G\psi(P,G)\frac{g(\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2)}{\|\mathfrak{w}:\mathfrak{b}\|^2}\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))\partial\chi_{2n-2}= \\ &=\varsigma T(G)+\varsigma\mu(m(\gamma,\vec{\mathfrak{a}}))-\varsigma\mu(m(\Gamma,\vec{\mathfrak{a}})). \end{aligned}\tag{18.45}$$

Für $k>2$ gibt der Satz nur eine Abschätzung, die jedoch zum Beweis des 2. Hauptsatzes ausreichen wird. Wie in W [43] wird nun die Funktion $g(t)$ gewählt.

**Satz 18.4.** Die Funktion $J(s)$.[24]

**Voraussetzung.** *Die Funktion $J(s)$ habe die Eigenschaften:*

1°. *Die Funktion $J(s)$ sei in $0<s\leq 1$ stetig, über $0<s\leq 1$ integrierbar und in $0<s<1$ beliebig oft differenzierbar mit in $0<s\leq 1$ stetigen Ableitungen.*

[24] Zum Beweis siehe W [43] Kap. V § 5 Seite 228, 230, 234 und 236.

$2^\circ$. *Für* $0 < s \leq 1$ *gelte* $J(s) \geq 1, \dfrac{dJ}{ds} < 0, \dfrac{d^2 J}{ds^2} > 0, \dfrac{d^3 J}{ds^3} < 0, \ldots$

$3^\circ$. *Für* $0 < s \leq 1$ *sei* $J^*(s) = s \cdot J(s) \leq 1$ *und nehme* $J^*(s)$ *monoton zu.*

$4^\circ$. *Es sei* $J(st) \geq J(s) J(t)$.

*Es werde gesetzt:*

$$g(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{ds^{k-2}} (s^k J(1-s)). \tag{18.46}$$

**Behauptung.** 1. *Die Funktion* $(1-t)^{k-2} g(t)$ *ist über* $0 < t < 1$ *integrierbar. Für* $0 < t < 1$ *ist* $g(t) > 0$. *Mit dieser Funktion* $g(t)$ *werde nach* (18.17) *die Gewichtsfunktion* $\sigma(\vec{\mathfrak{a}})$ *erklärt.*

2. *Für die so erklärte Gewichtsfunktion* $\sigma(\vec{\mathfrak{a}})$ *ist*

$$\varsigma = \int_0^1 s J(1-s)\, ds > 0. \tag{18.47}$$

3. *Für* $k \geq 3$ *gilt*

$$J(s) = (k-1)(k-2) \int_0^1 \tau g(\tau(1-s))(1-\tau)^{k-3} \frac{d\tau}{1-s}. \tag{18.48}$$

4. *Für* $k = 2$ *gilt*

$$J(s) = \frac{g(1-s)}{1-s}. \tag{18.49}$$

5. *Es ist*

$$g(s) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\nu=0}^{k-2} \binom{k-2}{\nu} \frac{k!}{(\nu+2)!} s^{\nu+1} (-1)^\nu J^{(\nu)}(1-s). \tag{18.50}$$

6. *Ist* $0 < \lambda < 1$, *so kann man* $J(s) = s^{-\lambda}$ *wählen. Es ist dann*

$$\varsigma = \frac{1}{(1-\lambda)(2-\lambda)} < \frac{1}{(1-\lambda)}, \quad \varsigma + 1 = \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 3}{(1-\lambda)(2-\lambda)} < \frac{3}{1-\lambda}, \tag{18.51}$$

$$g(s) = k \sum_{\nu=0}^{k-2} \binom{k-2}{\nu} \frac{1}{(\nu+2)!} s^{\nu+1} \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+\nu-1)}{(1-s)^{\lambda+\nu}}. \tag{18.52}$$

Zu jedem kovarianten Vektor $\mathfrak{b}$ gibt es einen und nur einen kontravarianten Vektor $\vec{\beta} = \underline{\tau}\, \mathfrak{b}$[24a], sodass für alle Vektoren $\mathfrak{w}$ die Beziehung

$$(\mathfrak{w}, \vec{\beta}) = (\mathfrak{w} \mid \mathfrak{b}) \tag{18.53}$$

gilt.[23] Die antilineare Abbildung $\underline{\tau}\, \mathfrak{b}$ bildet den Raum $R_1^{2k}$ eineindeutig auf den dualen Raum $R_1^{2k}$ ab. Es ist[23]

---

[24a] $\underline{\tau}\, \mathfrak{b}$ ist eine Abbildung und kein Produkt.

$$\|\mathfrak{w}, \vec{\beta}\|^2 = \frac{|(\mathfrak{w}, \vec{\beta})|^2}{|\mathfrak{w}||\vec{\beta}|^2} = \frac{|(\mathfrak{w}|\mathfrak{b})|^2}{|\mathfrak{w}|^2|\mathfrak{b}|^2} = \frac{|(\mathfrak{w}|\mathfrak{b})|^2 - |\mathfrak{w}|^2|\mathfrak{b}|^2}{|\mathfrak{w}|^2|\mathfrak{b}|^2} + 1 =$$

(18.54)

$$= 1 - \frac{|[\mathfrak{w}, \mathfrak{b}]|^2}{|\mathfrak{w}|^2|\mathfrak{b}|^2} = 1 - \|\mathfrak{w} : \mathfrak{b}\|^2$$

also

(18.55) $$\|\mathfrak{w}, \vec{\beta}\|^2 = 1 - \|\mathfrak{w} : \mathfrak{b}\|^2 \quad \text{für } \vec{\beta} = \tau\,\mathfrak{b}.$$

Nun wird das Differential $\partial\,\Omega_2^1(\mathfrak{w})$ in seiner Abhängigkeit von $\vec{\beta} = \underline{\tau}\,\mathfrak{b}$ berechnet.

**Satz 18.5.** Das Differential $\partial\,\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))$.[23]

**Voraussetzung.** *Auf der offenen Menge $M$ habe die meromorphe Fläche $W \not\equiv 0$ die Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Der Vektor $\vec{\beta} \neq 0$ sei beliebig gewählt. Auf $M$ werde*

(18.56) $$\partial\,\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2}|\mathfrak{w}|^{-4}|\vec{\beta}|^{-2}(\mathfrak{w}(\partial\,\mathfrak{w}, \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\,\partial\,\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{w}(\partial\,\mathfrak{w}, \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\,\partial\,\mathfrak{w})$$

*gesetzt.*

**Behauptung.** *Das Differential $\partial\,\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))$ ist unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ auf der ganzen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$, abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von $W$, eindeutig erklärt. Wird die Abbildung $\underline{\tau}$ durch* (18.53) *erklärt, wird das Differential $\partial\,\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))$ nach* (18.35) *für $\mathfrak{b} = \underline{\tau}^{-1}\vec{\beta}$ erklärt, so gilt*

(18.57) $$\partial\,\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P)) = \partial\,\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P)) + \|\mathfrak{w}, \vec{\beta}\|^2\,\partial\,\omega_2(\mathfrak{w}(P)).$$

*Die Dichte des Differentials $\partial\,\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))\,\partial\,\chi_{2n-2}$ ist nichtnegativ.*

**Beweis.** Nach (18.56) und (18.53) gilt

$$\partial\,\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2}|\mathfrak{w}|^{-4}|\mathfrak{b}|^{-2}(\mathfrak{w}(\partial\,\mathfrak{w}|\mathfrak{b}) - (\mathfrak{w}|\mathfrak{b})\,\partial\,\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{w}(\partial\,\mathfrak{w}|\mathfrak{b}) - (\mathfrak{w}|\mathfrak{b})\,\partial\,\mathfrak{w}) =$$

$$= \frac{i}{2}|\mathfrak{w}|^{-4}|\mathfrak{b}|^{-2}\{|\mathfrak{w}|^2(\partial\,\mathfrak{w}|\mathfrak{b})(\mathfrak{b}|\partial\,\mathfrak{w}) - (\mathfrak{b}|\mathfrak{w})(\partial\,\mathfrak{w}|\mathfrak{b})(\mathfrak{w}|\partial\,\mathfrak{w}) -$$

$$- (\mathfrak{w}|\mathfrak{b})(\partial\,\mathfrak{w}|\mathfrak{w})(\mathfrak{b}|\partial\,\mathfrak{w}) + |(\mathfrak{w}|\mathfrak{b})|^2(\partial\,\mathfrak{w}|\partial\,\mathfrak{w})\} =$$

(18.58) $$= \frac{i}{2}|\mathfrak{w}|^{-6}|\mathfrak{b}|^{-2}\{|\mathfrak{w}|^2(\partial\mathfrak{w}|\mathfrak{b}) - (\partial\mathfrak{w}|\mathfrak{w})(\mathfrak{w}|\mathfrak{b})\}\{|\mathfrak{w}|^2(\mathfrak{b}|\partial\mathfrak{w}) - (\mathfrak{w}|\partial\mathfrak{w})(\mathfrak{b}|\mathfrak{w})\} +$$

$$+ \frac{i}{2}\frac{|(\mathfrak{w}|\mathfrak{b})|^2}{|\mathfrak{w}|^2|\mathfrak{b}|^2}\left\{\frac{(\partial\,\mathfrak{w}|\partial\,\mathfrak{w})}{|\mathfrak{w}|^2} - \frac{(\partial\,\mathfrak{w}|\mathfrak{w})(\mathfrak{w}|\partial\,\mathfrak{w})}{|\mathfrak{w}|^4}\right\} =$$

$$= \frac{i}{2}|\mathfrak{w}|^{-6}|\mathfrak{b}|^{-2}([\mathfrak{w}, \partial\,\mathfrak{w}]\,|\,[\mathfrak{w}, \mathfrak{b}])([\mathfrak{w}, \mathfrak{b}]\,|\,[\mathfrak{w}, \partial\,\mathfrak{w}]) +$$

$$+\frac{i}{2}\frac{|(\mathfrak{w},\vec{\beta})|^2}{|\mathfrak{w}|^2|\vec{\beta}|^2}\frac{([\mathfrak{w},\partial\mathfrak{w}]|[\mathfrak{w},\partial\mathfrak{w}])}{|\mathfrak{w}|^4}=$$

$$(18.58)\qquad =\partial\Omega_2^1(\mathfrak{w}(P))+\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|^2\partial\omega_2(\mathfrak{w}(P)).$$

Daher gilt (18.57), woraus die übrigen Behauptungen folgen, w.z.b.w.

Nun kann man die Funktion $J(s)$ in die Abschätzung (18.44) einführen.

**Satz 18.6.** Eine Abschätzung der Charakteristik nach unten.[25]

**Voraussetzung.** *Die meromorphe Fläche $W$ sei nicht degeneriert. Die Funktion $J(s)$ erfülle die Voraussetzungen von Satz* 18.4. *Die Zahl $\varsigma$ sei durch* (18.47) *definiert. Zu jedem Vektor $\mathfrak{b}\neq 0$ werde mittels* (18.50), (18.18) *und Definition* 18.1 *die Mittelwertbildung $\mu(f)$ erklärt. Durch* (18.53) *werde die antilineare, eineindeutige Abbildung $\underline{\tau}$ gegeben. Der Vektor $\vec{\beta}\neq 0$ werde beliebig gewählt und $\mathfrak{b}=\underline{\tau}^{-1}\vec{\beta}$ gesetzt. Nach Satz* 18.5 *werde das Differential $\partial\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))$ erklärt.*

**Behauptung.** *Für jede zulässige Menge $G$ gilt*

$$(18.59)\qquad \begin{aligned} 0\leq \frac{1}{\pi}\int_G \psi(P,G)\,J(\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|^2)\,\partial\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2}\leq\\ \leq(\varsigma+1)\,T(G)+\varsigma\mu(m(\gamma,\vec{\alpha}))-\varsigma\mu(m(\Gamma,\vec{\alpha})).\end{aligned}$$

**Beweis.** Nach der Bedingung 3° von Satz 18.4 ist $\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|\,J(\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|^2)\leq 1$ Daher erhält man aus (18.44), (18.48), (18.55), (18.57) und (12.25) für $k\geq 3$, aus (18.45), (18.49), (18.55), (18.51) und (12.25) für $k=2$ die Abschätzung

$$\frac{1}{\pi}\int_G \psi(P,G)\,J(\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|^2)\,\partial\Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2}=$$

$$(18.60)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_G\psi(P,G)\{J(\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|^2)\,\partial\Omega_2^1\partial\chi_{2n-2}+\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|^2J(\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|^2)\,\partial\omega_2\,\partial\chi_{2n-2}\}\leq$$

$$\leq(\varsigma+1)\,T(G)+\varsigma\mu(m(\Gamma,\vec{\alpha}))-\varsigma\mu(m(\Gamma,\vec{\alpha})),$$

w.z.b.w.

Ausdrücklich sei darauf aufmerksam gemacht, dass man für jede zulässige Menge $G$ eine andere Funktion $J(s)$ wählen darf; es darf also $J(s)$ von der zulässigen Menge $G$ abhängen.

---

[25] Für $n=1$ siehe W [43] Kap. V § 5 Seite 230.

## § 19. Eine neue Voraussetzung

Bei einer komplexen Veränderlichen ist $\mathfrak{w}' = \frac{d}{dz}\mathfrak{w}$. Daher berechnet sich für $n=1$ das Differential $\partial \Omega_2^3(\mathfrak{w})$ bei beliebiger Wahl der Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ leicht zu[23]

$$\partial \Omega_2^3(\mathfrak{w}(P)) = \frac{|\mathfrak{w}(\mathfrak{w}', \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\, \mathfrak{w}'|^2}{|\mathfrak{w}|^4 |\vec{\beta}|^2} \frac{i}{2} \partial z \partial \bar{z}. \tag{19.1}$$

Diese Umformung ist für den Beweis des 2. Hauptsatzes von wesentlicher Bedeutung. Bei mehreren Veränderlichen ($n \geq 2$) gilt das Analogon zu (19.1) keineswegs. Es ist

$$\begin{aligned} \partial \Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))\, \partial \chi_{2n-2} = \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \frac{(\mathfrak{w}(\mathfrak{w}_{z_\mu}, \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\, \mathfrak{w}_{z_\mu} | \mathfrak{w}(\mathfrak{w}_{z_\nu} | \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\, \mathfrak{w}_{z_\nu})}{|\mathfrak{w}|^4 |\vec{\beta}|^2} \cdot \\ \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial z_1 \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_n \partial \bar{z}_n, \end{aligned} \tag{19.2}$$

während

$$\begin{aligned} |\mathfrak{w}|^{-4} |\vec{\beta}|^{-2} |\mathfrak{w}(\mathfrak{w}', \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\, \mathfrak{w}'|^2 \frac{i}{2} \partial z_1 \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_n \partial \bar{z}_n = \\ = |\mathfrak{w}|^{-4} |\vec{\beta}|^{-2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu (\mathfrak{w}(\mathfrak{w}_{z_\mu}, \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\, \mathfrak{w}_{z_\mu} | \mathfrak{w}(\mathfrak{w}_{z_\nu}, \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\, \mathfrak{w}_{z_\nu}) \cdot \\ \cdot \frac{i}{2} \partial z_1 \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_n \partial \bar{z}_n \end{aligned} \tag{19.3}$$

ist. Verlangt man zwangsweise die Gleichheit für alle Vektoren $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}_{z_\mu}$, $\vec{\beta}$, so ergibt sich, dass für alle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu x_\mu \bar{x}_\nu = \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu. \tag{19.4}$$

Da aber $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$ positiv definit ist, ist das unmöglich.

Nun tritt aber das Differential $\partial \Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))\, \partial \chi_{2n-2}$ nur in der Abschätzung (18.59) auf. Daher reicht es zu verlangen, dass die Dichte des Differentials (19.3) nicht grösser als die Dichte des Differentials (19.2) ist. Das führt statt auf (19.4) nur auf die Ungleichung

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu x_\mu \bar{x}_\nu \leq \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu, \tag{19.5}$$

die widerspruchsfrei ist. Damit ist eine wichtige Voraussetzung des zweiten Hauptsatzes gefunden. Diese Voraussetzung ist die einzige die in der Theorie mehrerer Veränderlichen neu hinzutritt und kein Analogon bei einer Veränderlichen hat. Sie werde in der Form einer allgemeinen Voraussetzung getroffen:

IX. **Abschätzung der Ableitung.** *Zwischen dem Differential*

$$\partial B_{n-1} = \partial B_{n-1}(P, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} b_\nu(P, \alpha)\, \partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_{\nu-1} \partial z_{\nu+1} \ldots \partial z_n,$$

*das in der allgemeinen Voraussetzung* VIII *auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *eingeführt wurde, und der Massbestimmung*

$$\partial \chi_{2n-2} = \partial \chi_{2n-2}(P, \alpha) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{4} \Bigg\{ \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} a_{\mu\nu}(P, \alpha)\, \partial \bar{z}_\mu \partial z_\nu \partial z_1 \partial \bar{z}_1, \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial z_n \partial \bar{z}_n + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}(P, \alpha)\, \partial z_1 \partial \bar{z}_1, \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial z_n \partial \bar{z}_n \Bigg\}$$

*die in der allgemeinen Voraussetzung* II *auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *eingeführt wurde, bestehe die folgende Beziehung: Werden die Abbildung* $\alpha \in \mathfrak{P}$ *und die komplexen Zahlen* $x_1, \ldots, x_n$ *beliebig gewählt, so gelte für jeden Punkt* $P \in U_\alpha$ *die Abschätzung*

$$(19.6) \qquad \left|\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu(P, \alpha)\, x_\mu\right|^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^{n} b_\mu(P, \alpha)\, \bar{b}_\nu(P, \alpha)\, x_\mu \bar{x}_\nu \leq \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P, \alpha)\, x_\mu \bar{x}_\nu .$$

Mit der Voraussetzung IX ist gleichbedeutend:

IX'. **Abschätzung einer Ableitung.** *Zwischen dem Differential* $\partial B_{n-1}$, *das in der allgemeinen Voraussetzung* VIII *auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *eingeführt wurde, und der Massbestimmung* $\partial \chi_{2n-2}$, *die in der allgemeinen Voraussetzung* II *auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *eingeführt wurde, bestehe die folgende Beziehung: Werden der Punkt* $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ *und die in* $P_0$ *analytische Funktion* $f(P)$ *beliebig gewählt, so sei die Dichte des Differentials* $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial f \partial B_{n-1} \overline{\partial f \partial B_{n-1}}$ *in* $P_0$ *nicht grösser als die Dichte des Differentials* $\frac{i}{2} \partial f \overline{\partial f} \partial \chi_{2n-2}$, *das heisst*

$$(19.7) \qquad \frac{i}{2} \partial f \overline{\partial f} \partial \chi_{2n-2} \geq (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial f \partial B_{n-1} \overline{\partial f \partial B_{n-1}} .$$

Sind das Differential $\partial B_{n-1}$ und die Massbestimmung $\partial \chi_{2n-2}$ gegeben, so kann man die Voraussetzung IX immer durch eine andere Massbestimmung $\partial \tilde{\chi}_{2n-2}$ erfüllen, beispielsweise durch

(19.8)
$$\partial \tilde{\chi}_{2n-2} = \partial \chi_{2n-2} + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \partial B_{n-1} \overline{\partial B_{n-1}}.$$

Um nun in der Abschätzung (18.59) das Differential $\partial \Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))$ durch das Differential (19.3) zu ersetzen, werden einige Hilfssätze bewiesen.

**Hilfssatz 1.** *Ist die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ beliebig gewählt und sind $n$ Polyaden $\mathfrak{X}_1^p, \ldots, \mathfrak{X}_n^p$ gegeben, so gilt*

(19.9)
$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu(P,\alpha)\,\bar{b}_\nu(P,\alpha)\,(\mathfrak{X}_\mu^p \,|\, \mathfrak{X}_\nu^p) \leq \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P,\alpha)\,(\mathfrak{X}_\mu^p \,|\, \mathfrak{X}_\nu^p)$$

*für $P \in U_\alpha$.*

**Beweis.** In einem normalen Koordinatensystem ist

(19.10)
$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(\mathfrak{X}_\mu^p \,|\, \mathfrak{X}_\nu^p) &= \sum_{j\,|\,p}^{k}{}' \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, x_{\mu j_1 \ldots j_p}\, \bar{x}_{\nu j_1 \ldots j_p} \geq \\ &\geq \sum_{j\,|\,p}^{k}{}' \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu\, x_{\mu j_1 \ldots j_p}\, \bar{x}_{\nu j_1 \ldots j_p} = \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu\, (\mathfrak{X}_\mu^p \,|\, \mathfrak{X}_\nu^p),\end{aligned}$$

w. z. b. w.

**Hilfssatz 2.** *Ist der Vektor $\vec{\beta} \neq 0$ gegeben, ist $\mathfrak{w}(P)$ eine Darstellung der meromorphen Fläche $W \neq 0$ auf der offenen Menge $M$, so wird, abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von $W$, durch*

(19.11)
$$\frac{|\mathfrak{w}(\mathfrak{w}', \vec{\beta}) - (\mathfrak{w}, \vec{\beta})\,\mathfrak{w}'|^2}{|\mathfrak{w}|^4 |\vec{\beta}|^2}$$

*eine Dichte auf $\mathfrak{M}^{2n}$ eindeutig erklärt.*

**Beweis.** Die Abbildungen $\alpha \in \mathfrak{P}$ und $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{P}$, sowie die Darstellungen $\mathfrak{w}(P)$ auf $M$ und $\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ auf $\tilde{M}$ seien so gewählt, dass $D = M \cap U_\alpha \cap M \cap U_{\tilde{\alpha}}$ nicht leer ist. Es gibt eine meromorphe Funktion $\lambda(P)$, die in keinem Teilgebiet von $D$ identisch Null ist, so dass $\mathfrak{w}(P) = \lambda(P)\,\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ in $D$ gilt. Die Funktionaldeterminante der vermittelnden Abbildung $\tilde{\alpha}^{-1}\alpha$ sei $\Phi(P) = \dfrac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}}$ mit $\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)$ und $P \in U_\alpha \cap U_{\tilde{\alpha}}$. Dann gilt

(19.12)
$$\begin{aligned}&|\mathfrak{w}|^{-4}|\vec{\beta}|^{-2}\,|\mathfrak{w}(P)(\mathfrak{w}'(P,\alpha),\vec{\beta}) - (\mathfrak{w}(P),\vec{\beta})\,\mathfrak{w}'(P,\alpha)|^2 = \\ &= |\lambda\tilde{\mathfrak{w}}|^{-4}|\vec{\beta}|^{-2}\,|\lambda(P)\tilde{\mathfrak{w}}(P)(\lambda(P)\tilde{\mathfrak{w}}'(P,\alpha),\vec{\beta}) + \lambda(P)\tilde{\mathfrak{w}}(P)(\lambda'(P)\tilde{\mathfrak{w}}(P,\alpha),\vec{\beta}) - \\ &\qquad - (\lambda(P)\tilde{\mathfrak{w}}(P),\vec{\beta})\{\lambda(P)\tilde{\mathfrak{w}}'(P,\alpha) + \lambda'(P)\tilde{\mathfrak{w}}(P)\}|^2 = \\ &= |\tilde{\mathfrak{w}}|^{-4}|\vec{\beta}|^{-2}\,|\tilde{\mathfrak{w}}(P)(\tilde{\mathfrak{w}}'(P,\alpha),\vec{\alpha}) - (\tilde{\mathfrak{w}}(P),\beta)\,\vec{\tilde{\mathfrak{w}}}'(P,\alpha)|^2 = \\ &= |\tilde{\mathfrak{w}}|^{-4}|\vec{\beta}|^{-2}\,|\tilde{\mathfrak{w}}(P)(\tilde{\mathfrak{w}}'(P,\tilde{\alpha}),\vec{\alpha}) - (\tilde{\mathfrak{w}}(P),\vec{\beta})\,\tilde{\mathfrak{w}}'(P,\tilde{\alpha})|^2\,\Phi(P)\,\overline{\Phi(P)}.\end{aligned}$$

Daher wird durch (19.11) unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ eine Dichte der Stufe $2n$ auf $\mathfrak{M}^{2n}$ definiert, w. z. b. w.

**Hilfssatz 3.** *Die in Hilfssatz 2 definierte Dichte* (19.11) *ist nicht grösser als die Dichte des Differentials* $\partial \Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))\partial\chi_{2n-2}$, *das in Satz* 18.5 *definiert wurde.*

**Beweis.** Mit Hilfssatz 1 ergibt sich

$$\text{Dichte}\,(\partial \Omega_2^3(\mathfrak{w}(P))\partial\chi_{2n-2}) =$$

$$(19.13)\quad \begin{aligned} &= \frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\frac{(\mathfrak{w}(\mathfrak{w}_{z_\mu},\vec{\beta}) - (\mathfrak{w},\vec{\beta})\mathfrak{w}_{z_\mu} \mid \mathfrak{w}(\mathfrak{w}_{z_\nu},\vec{\beta}) - (\mathfrak{w},\vec{\beta})\mathfrak{w}_{z_\nu})}{|\mathfrak{w}|^4|\vec{\beta}|^2} \geq \\ &\geq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu \frac{(\mathfrak{w}(\mathfrak{w}_{z_\mu},\vec{\beta}) - (\mathfrak{w},\vec{\beta})\mathfrak{w}_{z_\mu} \mid \mathfrak{w}(\mathfrak{w}_{z_\nu},\vec{\beta}) - (\mathfrak{w},\vec{\beta})\mathfrak{w}_{z_\nu})}{|\mathfrak{w}|^4||\vec{\beta}|^2} = \\ &= \frac{|\mathfrak{w}(\mathfrak{w}',\vec{\beta}) - (\mathfrak{w},\vec{\beta})\mathfrak{w}'|^2}{|\mathfrak{w}|^4|\vec{\beta}|^2}, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

**Satz 19.1.** Eine Abschätzung der Charakteristik nach unten.[25]

**Voraussetzung.** *Dieselben Voraussetzungen wie in Satz* 18.6 *werden gemacht. Ausserdem wird* IX *vorausgesetzt.*

**Behauptung.** *Für jede zulässige Menge* $G$ *gilt*[26]

$$(19.14)\quad \begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{\pi}\int_G \psi(P,G)\,J(\|\mathfrak{w},\vec{\beta}\|^2)\frac{|\mathfrak{w}(\mathfrak{w}',\vec{\beta}) - (\mathfrak{w},\vec{\beta})\mathfrak{w}'|^2}{|\mathfrak{w}|^4|\vec{\beta}|^2} \leq \\ \leq (\varsigma+1)\,T(G) + \varsigma\mu(m(\gamma,\vec{\alpha})) - \varsigma\mu(m(\Gamma,\vec{\alpha})). \end{aligned}$$

**Beweis.** Aus Satz 18.6 und Hilfssatz 3 folgt unmittelbar (19.14), w. z. b. w.

Nun soll wieder zu den assoziierten Flächen übergegangen werden.

**Hilfssatz 4.** Eine algebraische Umformung.

**Voraussetzung.** *Die kovarianten Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ *seien beliebig gegeben. Für* $p = 1, \ldots, k$ *sei* $\mathfrak{A}^p = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p]$. *Die kontravarianten Vektoren* $\vec{\zeta}$ *und* $\vec{\zeta}'$ *seien eindeutig durch*

$$(19.15)\quad {}^*\vec{\zeta} = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-1}] = \mathfrak{A}^{k-1}, \quad {}^*\vec{\zeta}' = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-2}, \mathfrak{a}_k] = [\mathfrak{A}^{k-2}, \mathfrak{a}_k]$$

---

[26] Im folgenden Integral wird der Integrand als Dichte nicht als Differential geschrieben. Das Integral ist ja zunächst in dieser Form definiert worden (siehe Kap. I § 2 (5)).

*definiert. Die Sternoperation * werde dabei bezüglich eines beliebigen normalen Koordinatensystems gebildet. Der Vektor* $\mathfrak{b} \neq 0$ *sei beliebig gewählt.*

**Behauptung.** *Dann gelten die Gleichungen:*

$$|\vec{\zeta}| = |\mathfrak{A}^{k-1}|, \qquad |(\vec{\zeta}, \mathfrak{b})| = |[\mathfrak{A}^{k-1}, \mathfrak{b}]|, \tag{19.16}$$

$$\|\vec{\zeta}, \mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{A}^{k-1} : \mathfrak{b}\|, \qquad (\vec{\zeta}, \mathfrak{b}) = \det(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-1}), \tag{19.17}$$

$$*\vec{\zeta}(\vec{\zeta}', \mathfrak{b}) - *\vec{\zeta}'(\vec{\zeta}, \mathfrak{b}) = [\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{k-2}] \det(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k), \tag{19.18}$$

$$|\vec{\zeta}(\vec{\zeta}', \mathfrak{b}) - \vec{\zeta}'(\vec{\zeta}, \mathfrak{b})| = |[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{k-2}]|\,|\mathfrak{A}^k|. \tag{19.19}$$

**Beweis.** Die Gleichungen (19.16) und (19.17) folgen unmittelbar aus § 1, nämlich aus (1.43), (1.28), (1.47) und (1.28) mit (1.10). Aus (19.18) folgt (19.19). Ist $\mathfrak{A}^k \neq 0$, so ist $\mathfrak{b} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \mathfrak{a}_\mu$ und es gilt:

$$\begin{aligned} &*\vec{\zeta}(\vec{\zeta}', \mathfrak{b}) - *\vec{\zeta}'(\vec{\zeta}, \mathfrak{b}) = \\ &= [\mathfrak{A}^{k-2}, \mathfrak{a}_{k-1}] \det(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-2}, \mathfrak{a}_k) + \\ &\quad + [\mathfrak{A}^{k-2}, \mathfrak{a}_k] \det(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-2}, \mathfrak{a}_{k-1}) = \\ &= (-1)^{k-2}[\mathfrak{A}^{k-2}, \lambda_{k-1}\mathfrak{a}_{k-1} + \lambda_k \mathfrak{a}_k] \det(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k) = \\ &= [\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{k-2}] \det(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k). \end{aligned} \tag{19.20}$$

Ist $\mathfrak{A}^k = 0$, so gibt es Vektoren $\mathfrak{a}_\mu^{(\nu)} \to \mathfrak{a}_\mu$ für $\nu \to \infty$ und $\mu = 1, \ldots, k$, wobei $[\mathfrak{a}_1^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{a}_k^{(\nu)}] \neq 0$ ist. Setzt man $\mathfrak{a}_\mu^{(\nu)}$ in (19.20) ein und lässt $\nu \to \infty$ streben, so folgt (19.19), w.z.b.w.

**Satz 19.2.** Die Dichte $F_p(\mathfrak{A}^h)$.[27]

**Voraussetzung.** *Die Polyade* $\mathfrak{A}^h \neq 0$ *und der Vektor* $\mathfrak{b} \neq 0$ *seien gegeben. Die Projektion* $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ *der p-ten assoziierten Fläche* $W^p$ *von* $W$ *sei nicht totaldegeneriert. Es sei* $p \geq 1$. *Wenn auf einer offenen Menge* $M$ *eine Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$ *der meromorphen Fläche* $W$ *gegeben ist, wenn* $\alpha$ *eine Abbildung der Struktur* $\mathfrak{P}$ *mit* $M \cap U_\alpha \neq \emptyset$ *ist, und wenn* $\mathfrak{W}^{p-1}(P, \alpha)$, $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$, $\mathfrak{W}^{p+1}(P, \alpha)$ *die zugehörigen eigentlichen Darstellungen der assoziierten Flächen* $W^{p-1}$, $W^p$, $W^{p+1}$ *auf* $M \cap U_\alpha$ *sind, so werde auf* $M \cap U_\alpha$ *gesetzt:*

$$F_p = F_p(\mathfrak{A}^h) = F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h) = F_p(P, \alpha, \mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h) = \frac{|[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}(P,\alpha)]|^2 \, |[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p+1}(P,\alpha)]|^2}{|\mathfrak{b}|^2 \, |[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P, \alpha)]|^4}. \tag{19.21}$$

[27] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. V § 6 Seite 233.

**Behauptung.** *Auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ ist, abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ und $[\mathfrak{A}^h, W^{p-1}]$, die Dichte $F_p(P, \alpha, \mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h)$ der Stufe $2n$ unabhängig von der gewählten Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ eindeutig erklärt und nichtnegativ.*

**Beweis.** Auf einer offenen Menge $\tilde{M}$ sei eine zweite Darstellung $\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ gegeben. Ausserdem sei eine zweite Abbildung $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{P}$ gegeben. Es sei $D = M \cap U_\alpha \cap M \cap U_{\tilde{\alpha}} \neq \emptyset$. Die zugehörigen eigentlichen Darstellungen von $W^{p-1}$, $W^p$, $W^{p+1}$ seien $\tilde{\mathfrak{W}}^{p-1}$, $\tilde{\mathfrak{W}}^p$, $\tilde{\mathfrak{W}}^{p+1}$. Es gibt eine meromorphe Funktion $\lambda(P)$, die in keinem Teilgebiet von $D$ identisch Null ist, sodass $\mathfrak{w}(P) = \lambda(P)\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ auf $D$ gilt. Die Funktionaldeterminante der vermittelnden Abbildung $\tilde{\alpha}^{-1}\alpha$ sei $\Phi(P) = \dfrac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}}$ mit $\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)$ für $P \in U_\alpha \cap U_{\tilde{\alpha}}$. Nach (12.18) ist

(19.22) $$[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}(P, \alpha)] = \lambda^{p-1} \Phi^{\frac{1}{2}(p-1)(p-2)} [\mathfrak{A}^h, \tilde{\mathfrak{W}}^{p-1}(P, \tilde{\alpha})],$$

(19.23) $$[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P, \alpha)] = \lambda^p \Phi^{\frac{1}{2}p(p-1)} [\mathfrak{A}^h, \tilde{\mathfrak{W}}^p(P, \tilde{\alpha})],$$

(19.24) $$[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p+1}(P, \alpha)] = \lambda^{p+1} \Phi^{\frac{1}{2}p(p+1)} [\mathfrak{A}^h, \tilde{\mathfrak{W}}^{p+1}(P, \tilde{\alpha})].$$

Also wird

(19.25) $$F_p(P, \alpha, \mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h) = \Phi \bar{\Phi} \tilde{F}_p(P, \tilde{\alpha}, \mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h).$$

Daher ist $F_p$ eine Dichte der Stufe $2n$ auf $\mathfrak{M}^{2n}$, die nicht von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ von $W$ abhängt. Ist $\mathfrak{W}_1^{p+h}$ (bzw. $\mathfrak{W}_1^{p+h-1}$) eine reduzierte Darstellung von $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ (bzw. $[\mathfrak{A}^h, W^{p-1}]$) auf der offenen Menge $V$ mit $V \cap M \cap U_\alpha \neq \emptyset$, so gibt es eine meromorphe Funktion $\varrho(P)$ (bzw. $\tilde{\varrho}(P)$), die in keinem Teilgebiet von $V \cap M \cap U_\alpha$ identisch Null ist, sodass $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P, \alpha)] = \varrho(P)\mathfrak{W}_1^{p+h}(P)$ (bzw. $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}(P, \alpha)] = \tilde{\varrho}(P)\mathfrak{W}_1^{p+h-1}(P)$) auf $V \cap M \cap U_\alpha$ gilt. Fasst man $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]$ als Vektor in $R_1^{2\binom{k}{p+h}}$ auf und ist $\{,\}$ das äussere Produkt in $R_1^{2\binom{k}{p+h}}$, so besteht nach (15.1) die Gleichung

(19.26) $$\begin{aligned} F_p &= \frac{|[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}]|^2}{|\mathfrak{b}|^2 |[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}]|^2} \frac{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}]|^2 |[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p+1}]|^2}{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]|^4} = \\ &= \frac{|[\mathfrak{b}, \mathfrak{W}_1^{p+h-1}]|^2}{|\mathfrak{b}|^2 |\mathfrak{W}_1^{p+h-1}|^2} \frac{|\{[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p], [\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]'\}|^2}{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]|^4} = \\ &= \frac{|[\mathfrak{b}, \mathfrak{W}_1^{p+h-1}]|^2}{|\mathfrak{b}|^2 |\mathfrak{W}_1^{p+h-1}|^2} \frac{|\{\mathfrak{W}_1^{p+h}(P), \mathfrak{W}_1'^{p+h}(P)\}|^2}{|\mathfrak{W}_1^{p+h}(P)|^4}. \end{aligned}$$

Daher ist $F_p$ bis auf die Unbestimmtheitsstellen von $[\mathfrak{A}^h, W^{p-1}]$ und $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ erklärt, w. z. b. w.

Nunmehr kann man den Satz 19.1 auch für projizierte Flächen aussprechen.

**Satz 19.3.** Abschätzung von $T_p(G, \mathfrak{A}^h)$ nach unten für $h = k - p - 1$.[28]

**Voraussetzung.** *Die p-te assoziierte Fläche $W^p$ der meromorphen Fläche $W$ sei nicht speziell degeneriert. Es sei $p \geq 1$. Die spezielle Polyade $\mathfrak{A}^h$ mit $h = k - p - 1 \geq 0$ und der Vektor $\mathfrak{b}$ seien mit der Einschränkung $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h] \neq 0$, aber sonst beliebig gewählt. Die Charakteristik der Projektion $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]$ sei $T_p(G, \mathfrak{A}^h)$. Die Dichte $F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h)$ sei nach Satz 19.2 definiert. Es werde IX vorausgesetzt. Die Funktion $J(s)$ erfülle die Voraussetzungen von Satz 18.4. Die Zahl $\varsigma$ sei durch (18.47) definiert. Das Zeichen $(o)$ sei nach Definition 16.3 bezüglich des vollständigen Systems $\mathfrak{G}$ zulässiger Mengen erklärt.*

**Behauptung.** *Für jede zulässige Menge $G \in \mathfrak{G}$ gilt*

$$(19.27) \qquad 0 \leq \frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G) J(\|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h) \leq (\varsigma + 1) T_p(G, \mathfrak{A}^h) + \varsigma \cdot (o),$$

*wobei $(o)$ unabhängig von $J(s)$, $\mathfrak{A}^h$, $\mathfrak{b}$ mit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h] \neq 0$ ist.*

**Beweis.** Da $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{b}] \neq 0$ ist, sind $\mathfrak{A}^h \neq 0$ und $\mathfrak{b} \neq 0$. Also gibt es ein normales Koordinatensystem $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ mit $\mathfrak{A}^h = |\mathfrak{A}^h| [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h]$. Zu diesem normalen Koordinatensystem werde die Sternoperation * gemäss § 1 erklärt. Die Menge $*[\mathfrak{A}^h, W^p]$ bestehe gerade aus den Vektorfunktionen $\vec{\zeta}(P, \alpha)$, zu denen es eine eigentliche Darstellung $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$ von $W^p$ gibt, sodass

$$(19.28) \qquad *\vec{\zeta}(P, \alpha) = [\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P, \alpha)]$$

ist. Die Forderungen 1 bis 3 der Definition 3.1 sind offensichtlich erfüllt. Also ist $Z = *[\mathfrak{A}^h, W^p]$ eine meromorphe Fläche im dualen Raum $*R_1^{2k}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor mit $[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{a}] \neq 0$, so ist nach Voraussetzung $(*[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{a}], W^p) \not\equiv 0$. Dann ist für jede eigentliche Darstellung $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$ von $W^p$ auch

$$(19.29) \qquad |(\vec{\zeta}(P, \alpha), \mathfrak{a})| = |[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P, \alpha)]| = |(*[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^h], \mathfrak{W}^p(P, \alpha))| \not\equiv 0.$$

Also ist $(Z, \mathfrak{a}) \not\equiv 0$. Ist aber $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^h] = 0$, so ist

$$(19.30) \qquad |(\vec{\zeta}(P, \alpha), \mathfrak{a})| = |[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p(P, \alpha)]|.$$

Also ist $(Z, \mathfrak{a}) \equiv 0$. Dann und nur dann ist also $(Z, \mathfrak{a}) \not\equiv 0$, wenn $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^h] \neq 0$ ist. Die meromorphe Fläche $Z$ ist daher degeneriert, aber nicht totaldegeneriert. Ist $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ das duale Koordinatensystem zu $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$, so liegt die meromorphe Fläche $Z$ im linearen Unterraum $L$ von $*R_1^{2k}$, der aus den Vektoren $\vec{\xi} = \sum_{\nu = h+1}^{k} \xi_\nu \vec{\alpha}_\nu$ besteht.

---

[28] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. V § 6 Seite 231—234.

Ist $\vec{\varepsilon}_{h+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ ein Kordinatensystem des Raumes $*R_1^{2k-2h}$, so wird der Raum $*R_1^{2k}$ der Vektoren $\vec{\xi} = \sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu \vec{\alpha}_\nu$ durch

$$\underline{\pi}\,\vec{\xi} = \sum_{\nu=h+1}^{k} \xi_\nu \vec{\varepsilon}_\nu \tag{19.31}$$

linear auf den Raum $*R_1^{2k-2h}$ abgebildet. Auf $L$ hat $\underline{\pi}$ die Umkehrung $\underline{\pi}^{-1}$, die $*R_1^{2k-2h}$ auf $L$ abbildet. Im Raum $*R_1^{2k-2h}$ werde durch $(\vec{\xi}\,|\,\vec{\eta}) = (\underline{\pi}^{-1}\vec{\xi}\,|\,\underline{\pi}^{-1}\vec{\eta})$ eine Metrik eingeführt; im dualen Raum $R_1^{2k-2h}$ werde die duale Metrik eingeführt. Die Vektoren $\varepsilon_{h+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ bilden ein normales Koordinatensystem, dessen duales Koordinatensystem $\mathfrak{e}_{h+1}, \ldots, \mathfrak{e}_k$ wieder normal ist. Der Raum $R_1^{2k}$ der Vektoren $\mathfrak{a} = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \mathfrak{a}_\nu$ wird durch

$$*\underline{\pi}\,\mathfrak{a} = \sum_{\nu=h+1}^{k} a_\nu \mathfrak{e}_\nu \tag{19.32}$$

linear auf den Raum $R_1^{2k-2h}$ abgebildet. Für zwei Vektoren $\mathfrak{a} \in R_1^{2k}$ und $\vec{\zeta} \in L$ gilt

$$(\vec{\zeta}, \mathfrak{a}) = \sum_{\mu=h+1}^{k} \zeta_\mu a_\mu = (\underline{\pi}\vec{\zeta}, *\underline{\pi}\,\mathfrak{a}), \tag{19.33}$$

$$|\vec{\zeta}|^2 = \sum_{\mu=h+1}^{k} \zeta_\mu \bar{\zeta}_\mu = |\pi\vec{\zeta}|^2, \tag{19.34}$$

$$|\mathfrak{a}|^2 = \sum_{\mu=1}^{k} a_\mu \bar{a}_\mu \geq \sum_{\mu=h+1}^{k} a_\mu \bar{a}_\mu = |*\underline{\pi}\,\mathfrak{a}|^2. \tag{19.35}$$

Nach Satz 9.3 bildet die Menge $\underline{\pi} Z$ aller Vektorfunktionen

$$\underline{\pi}\vec{\zeta}(P) = \sum_{\mu=h+1}^{k} \zeta_\nu(P)\vec{\varepsilon}_\nu \in *R_1^{2k-2h}, \tag{19.36}$$

für die $\vec{\zeta}(P) = \sum_{\mu=h+1}^{k} \zeta_\nu(P)\vec{\alpha}_\nu \in L$ eine Darstellung von $Z$ ist, eine meromorphe Fläche, deren Charakteristik $T(G, \underline{\pi} Z)$, deren Anzahlfunktion $N(G, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi} Z)$ und deren Schmiegungsfunktionen $m(\Gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi} Z)$ und $m(\gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi} Z)$ mit $\tilde{\mathfrak{a}} \in R_1^{2k-2h}$ sind. Nach (19.31) ist dann und nur dann $(*\underline{\pi}\,\mathfrak{a}, \underline{\pi} Z) \equiv 0$, wenn $(\mathfrak{a}, Z) \equiv 0$, das heisst, wenn $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^h] = 0$ also $*\underline{\pi}\,\mathfrak{a} = 0$ ist. Daher ist die meromorphe Fläche $\underline{\pi} Z$ nicht degeneriert. Auf sie kann Satz 19.1 angewandt werden.

Die Funktion $J(s)$, die Zahl $\varsigma$ und der Vektor $\mathfrak{b}$ sind in der Voraussetzung gegeben. Wegen $p \geq 1$ ist $k - h = p + 1 \geq 2$. Die antilineare Abbildung $\underline{\tau}$ werde wie in

(18.53) jedoch für den Raum $*R_1^{2k-2h}$ durch die Forderung definiert: Jedem Vektor $\vec{\tilde{\delta}} \in *R_1^{2k-2h}$ werde eindeutig der Vektor $\underline{\tau}\vec{\tilde{\delta}} \in R_1^{2k-2h}$ zugeordnet, sodass $(\vec{\tilde{\alpha}} | \vec{\tilde{\delta}}) = (\vec{\tilde{\alpha}}, \underline{\tau}\vec{\tilde{\delta}})$ für alle Vektoren $\vec{\tilde{\alpha}} \in *R_1^{2k-2h}$ gilt. Es sei $\vec{\tilde{\beta}} = \underline{\tau}^{-1} *\underline{\pi}\mathfrak{b}$. Die Funktion $g(t)$ wird mit $k-h$ statt $k$ gemäss (18.50) und die Gewichtsfunktion $\sigma(\tilde{\mathfrak{a}})$ gemäss (18.18) durch

$$\sigma(\tilde{\mathfrak{a}}) = g(\|\tilde{\mathfrak{a}}, \vec{\tilde{\beta}}\|^2) \quad \text{für } \tilde{\mathfrak{a}} \in R_1^{2k-2h} \tag{19.37}$$

erklärt. Die Mittelwertbildung $\mu(f)$ wird gemäss Definition 18.1 durch

$$\mu(f) = \frac{1}{\varsigma}\frac{1}{V_{2k-2h-1}} \int\limits_{|\tilde{\mathfrak{a}}|=1} f(\tilde{\mathfrak{a}})\,\sigma(\tilde{\mathfrak{a}})\,\partial v_{2k-2h-1}(\tilde{\mathfrak{a}}) \tag{19.38}$$

erklärt. In Übereinstimmung mit den Gleichungen (19.31) bis (19.35) erhält man aus Satz 19.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{1}{\pi}\int\limits_G \psi(P, G)\, J\left(\frac{|(\vec{\zeta}, \mathfrak{b})|^2}{|\vec{\zeta}|^2 |*\underline{\pi}\mathfrak{b}|^2}\right) \frac{|(\vec{\zeta}(\vec{\zeta}', \mathfrak{b}) - (\vec{\zeta}, \mathfrak{b})\vec{\zeta}')|^2}{|\vec{\zeta}|^4 |*\underline{\pi}\mathfrak{b}|^2} \le \\ &\le (\varsigma+1)\, T(G, \underline{\pi}Z) + \varsigma\mu(m(\gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi}Z)) - \varsigma\mu(m(\Gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi}Z)). \end{aligned} \tag{19.39}$$

Da $J^*(s) = sJ(s)$ monoton zunimmt, folgt aus (19.39), (19.35), Hilfssatz 4 und Satz 19.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned} & J\left(\frac{|(\vec{\zeta}, \mathfrak{b})|^2}{|\vec{\zeta}|^2 |*\pi\mathfrak{b}|^2}\right) \frac{|\vec{\zeta}(\vec{\zeta}', \mathfrak{b}) - (\vec{\zeta}, \mathfrak{b})\vec{\zeta}'|^2}{|\vec{\zeta}|^4 |*\pi\mathfrak{b}|^2} = \\ &= J^*\left(\frac{|(\vec{\zeta}, \mathfrak{b})|^2}{|\vec{\zeta}|^2 |*\pi\mathfrak{b}|^2}\right) \frac{|\vec{\zeta}(\vec{\zeta}', \mathfrak{b}) - (\vec{\zeta}, \mathfrak{b})\vec{\zeta}'|^2}{|\vec{\zeta}|^2 |(\vec{\zeta}, \mathfrak{b})|^2} \ge \\ &\ge J^*\left(\frac{|(\vec{\zeta}, \mathfrak{b})|^2}{|\vec{\zeta}|^2 |\mathfrak{b}|^2}\right) \frac{|\vec{\zeta}(\vec{\zeta}', \mathfrak{b}) - (\vec{\zeta}, \mathfrak{b})\vec{\zeta}'|^2}{|\vec{\zeta}|^2 |(\vec{\zeta}, \mathfrak{b})|^2} = \\ &= J\,(\|\vec{\zeta}, \mathfrak{b}\|^2) \frac{|\vec{\zeta}(\vec{\zeta}', \mathfrak{b}) - (\vec{\zeta}, \mathfrak{b})\vec{\zeta}'|^2}{|\vec{\zeta}|^4 |\mathfrak{b}|^2} = \\ &= J\,(\|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) \frac{|[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p-1}]|^2 |[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^{p+1}]|^2}{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]|^4 |\mathfrak{b}|^2} = \\ &= J\,(\|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2)\, F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h). \end{aligned} \tag{19.40}$$

Entsprechend berechnet man

$$\partial\omega_2(\underline{\pi}\vec{\zeta}) = \frac{i}{2}|\vec{\zeta}|^{-4}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\{|\vec{\zeta}|^2(\vec{\zeta}_{z_\mu}|\vec{\zeta}_{z_\nu}) - (\vec{\zeta}_{z_\mu}|\vec{\zeta})(\vec{\zeta}|\vec{\zeta}_{z_\nu})\}\,\partial z_\mu\partial\bar{z}_\nu =$$

$$(19.41)\qquad = \frac{i}{2}|{*\vec{\zeta}}|^{-4}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\{|{*\vec{\zeta}}|^2({*\vec{\zeta}_{z_\mu}}|{*\vec{\zeta}_{z_\nu}}) - ({*\vec{\zeta}_{z_\mu}}|{*\vec{\zeta}})({*\vec{\zeta}}|{*\vec{\zeta}_{z_\nu}})\}\,\partial z_\mu\partial\bar{z}_\nu = \partial\omega_2({*\vec{\zeta}}) = \partial\omega_2([\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]).$$

Daher ist

$$(19.42)\qquad T(G, \underline{\pi} Z) = \frac{1}{\pi}\int_G \psi(P, G)\,\partial\omega_2(\underline{\pi}\vec{\zeta})\,\partial\chi_{2n-2} = \frac{1}{\pi}\int_G \psi(P, G)\,\partial\omega_2([\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p])\,\partial\chi_{2n-2} = T_p(G, \mathfrak{A}^h).$$

Entsprechend berechnet man

$$(19.43)\qquad \begin{aligned} m(\gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi} Z) &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \log\frac{|\vec{\zeta}|\,|\tilde{\mathfrak{a}}|}{|(\vec{\zeta}, {*\underline{\pi}^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}})|}\,\partial^\perp\psi\,\partial\chi_{2n-2} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \log\frac{|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]|\,|\tilde{\mathfrak{a}}|}{|[{*\underline{\pi}^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p]|}\,\partial^\perp\psi\,\partial\chi_{2n-2} = \\ &= \tilde{m}_p(\gamma, [{*\underline{\pi}^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h]) - \tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h) + \log\frac{|\mathfrak{A}^h|\,|\tilde{\mathfrak{a}}|}{|[{*\underline{\pi}^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h]|},\end{aligned}$$

$$(19.44)\qquad m(\Gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \pi Z) = \tilde{m}_p(\Gamma, [{*\underline{\pi}^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h]) - \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h) + \log\frac{|\mathfrak{A}^h|\,|\tilde{\mathfrak{a}}|}{|[{*\pi^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h]|}.$$

Da $[{*\pi^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h] \neq 0$ ist, besteht wegen (13.39) und Satz 17.2 die Abschätzung

$$(19.45)\qquad \begin{aligned} & m(\gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi} Z) - m(\Gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi} Z) \leq \\ & \leq \tilde{m}_p(\gamma, [{*\underline{\pi}^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h]) - \{\tilde{m}_p(\Gamma, {*\pi^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h]) - \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h)\} \leq \\ & \leq \tilde{m}_p(\gamma, [{*\underline{\pi}^{-1}}\tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{A}^h]) \leq (o)\end{aligned}$$

gleichmässig für $\tilde{\mathfrak{a}} \in R_1^{2k-2h}$ und $\mathfrak{A}^h \neq 0$; denn für keine spezielle Polyade $\mathfrak{A}^{h+1} \neq 0$ ist $[\mathfrak{A}^{h+1}, W^p]$ totaldegeneriert. Daher gilt

$$(19.46)\qquad \mu(m(\gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi} Z)) - \mu(m(\Gamma, \tilde{\mathfrak{a}}, \underline{\pi} Z)) \leq (o),$$

wobei $(o)$ unabhängig von $J(s)$, $\mathfrak{A}^h$ und $\mathfrak{b}$ mit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h] \neq 0$ ist. Aus (19.46), (19.42), (19.40) und (19.39) folgt unmittelbar die behauptete Abschätzung (19.27), wobei $(o)$ unabhängig von $J(s)$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{A}^h$ mit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h] \neq 0$ ist, w. z. b. w.

## § 20. Eine zweite Mittelwertbildung

In diesem Paragraphen soll Satz 19.3 auch für den Fall $h < k-p-1$ bewiesen werden. Dazu dient die Mittelwertbildung $\mu(f)$, die jetzt im kovarianten Raum $R_1^{2k}$ mit der Gewichtsfunktion $\sigma = \sigma(\mathfrak{a}) \equiv 1$ gebraucht wird und mit $\mu_0(f)$ bezeichnet werde.[29] Ist also $f(\mathfrak{a})$ über $|\mathfrak{a}| = 1$ integrierbar. so sei

$$\mu_0(f) = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\mathfrak{a}|=1} f(\mathfrak{a})\, \partial v_{2k-1}. \tag{20.1}$$

Gilt für alle Zahlen $\lambda > 0$ die Beziehung $f(\lambda\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a})$, so ist

$$\mu_0(f) = \frac{1}{\pi^k} \int\limits_{|\mathfrak{a}|<\infty} e^{-|\mathfrak{a}|^2} f(\mathfrak{a})\, \partial v_{2k}(\mathfrak{a}). \tag{20.2}$$

Existiert eines der beiden Integrale (20.1) oder (20.2), so existieren beide und haben denselben Wert $\mu_0(f)$. Aus (20.2) folgt, dass für beliebige reelle Zahlen $\psi_1, \dots, \psi_k$ die Gleichung

$$\mu_0(f(a_1, \dots, a_k)) = \mu_0(f(e^{\psi_1 i_1} a_1, \dots, e^{\psi_k i_k} a_k)) \tag{20.3}$$

besteht. Nun müssen noch einige Hilfssätze bewiesen werden.

**Hilfssatz 1.**[30] *Ist* $\mathfrak{X}^p = [\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p] \neq 0$ *und* $p \leq k-1$, *so gilt*

$$\mu_0(\log|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^2) = \log|\mathfrak{X}^p|^2 + \mu_0\left(\log \sum_{\nu=p+1}^{k} |a_\nu|^2\right), \tag{20.4}$$

$$\mu_0\left(\log \sum_{\nu=p+1}^{k} |a_\nu|^2\right) = -\sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{k-\nu}. \tag{20.5}$$

**Beweis.** In einem geeigneten normalen Koordinatensystem ist $\mathfrak{x}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} x_{\mu\nu} \mathfrak{e}_\nu$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_0(\log|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^2) &= \mu_0\left(\log\left\{|x_{11} \cdots x_{pp}|^2 \sum_{\nu=p+1}^{k} |a_\nu|^2\right\}\right) = \\ &= \log|\mathfrak{X}^p|^2 + \mu_0\left(\log \sum_{\nu=p+1}^{k} |a_\nu|^2\right). \end{aligned} \tag{20.6}$$

Die Transformationen $S_{1k}(\mathfrak{a}, t, \varphi)$ von (18.19) und $\hat{S}_{\nu k}(t, s, \tau)$ von (18.21) ergeben

[29] Siehe W [43] Kap. V § 6 Seite 234.
[30] Siehe W [43] Kap. III § 5 Seite 147.

$$\mu_0\left(\log \sum_{\nu=p+1}^{k} |a_\nu|^2\right) = \sum_{\nu=1}^{p} \mu_0\left(\log \frac{|a_{\nu+1}|^2+\cdots+|a_k|^2}{|a_\nu|^2+\cdots+|a_k|^2}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-t_1-\cdots-t_k} \log \frac{t_{\nu+1}+\cdots+t_k}{t_\nu+\cdots+t_k}\, dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-t_\nu-\cdots-t_k} \log \frac{t_{\nu+1}+\cdots+t_k}{t_\nu+\cdots+t_k}\, dt_\nu \cdots dt_k =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \int_0^1 (1-\tau)^{k-\nu-1} \log(1-\tau)\, d\tau \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-s_{\nu+1}-\cdots-s_k}(s_{\nu+1}+\cdots+s_k)\cdot ds_{\nu+1}\cdots ds_k =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} (k-\nu) \int_0^1 (1-\tau)^{k-\nu-1} \log(1-\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \frac{-1}{k-\nu}.$$ w. z. b. w.

**Hilfssatz 2.**[31] *Ist* $\mathfrak{X}^p = [\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_p] \neq 0$ *und* $p < k-1$, *so besteht für jeden Vektor* $\mathfrak{b} \neq 0$ *die Abschätzung*

$$0 \geq \mu_0(\log J^*(\| [\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p] : \mathfrak{b} \|^2)) \geq \log J^*(\| \mathfrak{X}^p : \mathfrak{b} \|^2) - c_p \tag{20.8}$$

*mit*

$$c_p = -\mu_0\left(\log J^*\left(\frac{|a_{p+2}|^2+\cdots+|a_k|^2}{|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2}\right)\right). \tag{20.9}$$

**Beweis.** In einem geeigneten normalen Koordinatensystem ist $\mathfrak{x}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} x_{\mu\nu}\,\mathfrak{e}_\nu$ und $\mathfrak{b} = \sum_{\nu=1}^{p+1} b_\nu \mathfrak{e}_\nu$. Gemäst den Forderungen 3° und 4° von Satz 18.4 gilt

$$0 \geq \mu_0(\log J^*(\| [\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p] : \mathfrak{b} \|^2) =$$

$$= \mu_0\left(\log J^*\left(\frac{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p, \mathfrak{b}]|^2}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|\,|\mathfrak{b}|^2}\right)\right) =$$

$$= \mu_0\left(\log J^*\left(\frac{|x_{11}\cdots x_{pp}\, b_{p+1}|^2 \sum_{\nu=p+2}^{k} |a_\nu|^2}{|x_{11}\cdots x_{pp}|^2\, |\mathfrak{b}|^2 \sum_{\nu=p+1}^{k} |a_\nu|^2}\right)\right) \geq \tag{20.10}$$

[31] Siehe W [43] Kap. V § 6 Seite 234–237.

$$\geq \mu_0\left(\log J^*\left(\frac{|[\mathfrak{X}^p, \mathfrak{b}]|^2}{|\mathfrak{X}^p|^2\,|\mathfrak{b}|^2}\right)\right) + \mu_0\left(\log J^*\left(\frac{\sum\limits_{\nu=p+2}^{k} |a_\nu|^2}{\sum\limits_{\nu=p+1}^{k} |a_\nu|^2}\right)\right) =$$

$$= \log J^*(\|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{b}\|^2) - c_p,$$

w. z. b. w.

**Hilfssatz 3.**[31] *Wird* $J(s) = s^{-\lambda}$ *mit* $0 < \lambda < 1$ *gewählt, so ist*

$$c_p = -\mu_0\left(\log J^*\left(\frac{|a_{p+2}|^2 + \cdots + |a_k|^2}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2}\right)\right) = \frac{1-\lambda}{k-p-1}. \tag{20.11}$$

**Beweis.** Nach Hilfssatz 1 gilt

$$c_p = -(1-\lambda)\mu_0\left(\log \frac{|a_{p+2}|^2 + \cdots + |a_k|^2}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2}\right) = \frac{1-\lambda}{k-p-1}, \tag{20.12}$$

w. z. b. w.

**Hilfssatz 4.** *Sind die Vektoren* $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ *mit* $p \leq k-2$ *gegeben und ist* $\mathfrak{X}^\varrho = [\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_\varrho] \neq 0$ *für* $\varrho = 1, \dots, p$, *so ist*

$$\begin{aligned}
&\mu_0\left(\frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^2}\right) - \\
&-\mu_0\left(\frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]) \cdot ([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]\,|\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^4}\right) = \\
&= \frac{([\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|\mathfrak{X}^p|^2} - \frac{([\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}]\,|\,\mathfrak{X}^p)\,(\mathfrak{X}^p\,|\,[\mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|\mathfrak{X}^p|^4}.
\end{aligned} \tag{20.13}$$

**Beweis.** In einem geeigneten normalen Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \dots \mathfrak{e}_k$ ist

$$\mathfrak{x}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} x_{\mu\nu}\,\mathfrak{e}_\nu, \quad \mathfrak{y} = \sum_{\nu=1}^{p+1} y_\nu\,\mathfrak{e}_\nu, \quad \mathfrak{z} = \sum_{\nu=1}^{p+2} z_\nu\,\mathfrak{e}_\nu. \tag{20.14}$$

Dann wird

$$\begin{aligned}
a &\equiv \mu_0\left(\frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^2}\right) = \\
&= \sum_{\varrho,\sigma=1}^{k} \mu_0\left(\frac{a_\varrho \bar{a}_\sigma}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2}\right) \frac{([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|x_{11} \cdots x_{pp}|^2}.
\end{aligned} \tag{20.15}$$

Gemäss (20.3) besteht für $\varrho \neq \sigma$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\mu_0\left(\frac{a_\varrho \bar{a}_\sigma}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2}\right) &= \mu_0\left(\frac{-a_\varrho \bar{a}_\sigma}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2} = \right) \\
&= -\mu_0\left(\frac{a_\varrho \bar{a}_\sigma}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{20.16}$$

Daher ist

$$a = \sum_{\varrho=1}^{k} \mu_0 \left( \frac{|a_\varrho|^2}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2} \right) \frac{([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|\mathfrak{X}^p|^2}. \tag{20.17}$$

Es werde $\mathfrak{E}^\varrho = [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\varrho]$ gesetzt. Nach (20.14) ist

$$\mathfrak{X}^\varrho = [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\varrho] = x_{11} \ldots x_{\varrho\varrho} [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\varrho] = x_{11} \ldots x_{\varrho\varrho} \mathfrak{E}^\varrho. \tag{20.18}$$

Aus (20.14) und (20.18) folgt

$$([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p]) =$$

$$= \prod_{\sigma=1}^{p-1} x_{\sigma\sigma} \prod_{\tau=1}^{p-2} \bar{x}_{\tau\tau} ([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{E}^{p-1}, y_p \mathfrak{e}_p + y_{p+1} \mathfrak{e}_{p+1}] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{E}^{p-2}, \sum_{\lambda=p-1}^{p+2} z_\lambda \mathfrak{e}_\lambda, x_{p,p-1} \mathfrak{e}_{p-1} + x_{pp} \mathfrak{e}_p])$$

$$(20.19) = \begin{cases} 0 & \text{für } \varrho < p \\ -x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} \bar{x}_{p,p-1} y_{p+1} \bar{z}_{p+1} & \text{für } \varrho = p \\ x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} \{y_p \bar{z}_{p-1} \bar{x}_{pp} - y_p \bar{z}_p \bar{x}_{p,p-1}\} & \text{für } \varrho = p+1 \\ x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} \{y_p \bar{z}_{p-1} \bar{x}_{pp} - y_p \bar{z}_p \bar{x}_{p,p-1} - y_{p+1} \bar{z}_{p+1} \bar{x}_{p,p-1}\} & \text{für } \varrho > p+1. \end{cases}$$

Die Gleichungen (20.17) und (20.19) ergeben

$$\begin{aligned} a = {} & x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} \{y_p \bar{z}_{p-1} \bar{x}_{pp} - y_p \bar{z}_p \bar{x}_{p,p-1}\} |\mathfrak{X}^p|^{-2} - \\ & - \mu_0 \left( \frac{|a_p|^2 + |a_{p+2}|^2 + \cdots + |a_k|^2}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2} \right) x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} \bar{x}_{p,p-1} y_{p+1} \bar{z}_{p+1} |\mathfrak{X}^p|^{-2}. \end{aligned} \tag{20.20}$$

Entsprechend berechnet man den anderen Teil:

$$\begin{aligned} b \equiv {} & \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]) \cdot ([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p] \,|\, [\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^4} \right) = \\ = {} & \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma=1}^{k} \mu_0 \left( \frac{a_\mu \bar{a}_\nu a_\varrho \bar{a}_\sigma}{(|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2)^2} \right) \frac{((\mathfrak{e}_\mu, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{e}_\nu, \mathfrak{X}^p]) ([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^p] \,|\, ([\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|x_{11} \cdots x_{pp}|^4}. \end{aligned} \tag{20.21}$$

In den Fällen

$$\left.\begin{matrix} \mu \neq \nu, & \mu \neq \varrho, & \mu \neq \sigma & \\ \mu \neq \nu, & \mu = \varrho, & \mu \neq \sigma & \\ \mu \neq \nu, & \mu = \varrho, & \mu = \sigma & \\ \mu \neq \nu, & \mu \neq \varrho, & \mu = \sigma, & \nu \neq \varrho \\ \mu = \nu, & \mu \neq \varrho, & \mu \neq \sigma, & \varrho \neq \sigma \\ \mu = \nu, & \mu = \varrho, & \mu \neq \sigma & \\ \mu = \nu, & \mu \neq \varrho, & \mu = \sigma & \end{matrix}\right\} \text{führt die Substitution} \left\{\begin{matrix} a_\mu \to -a_\mu \\ a_\mu \to i\, a_\mu \\ a_\mu \to -a_\mu \\ a_\nu \to -a_\nu \\ a_\varrho \to -a_\varrho \\ a_\mu \to -a_\mu \\ a_\mu \to -a_\mu \end{matrix}\right. \tag{20.22}$$

das Produkt $a_\mu \bar{a}_\nu a_\varrho \bar{a}_\sigma$ in $-a_\mu \bar{a}_\nu a_\varrho \bar{a}_\sigma$ über. Aus (20.3) folgt dann

(20.23) $$\mu_0\left(\frac{a_\mu \bar{a}_\nu a_\varrho \bar{a}_\sigma}{|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2}\right)=0.$$

Die übrigen Fälle sind

(20.24) $$\begin{cases} \mu \neq \nu, & \mu \neq \varrho, \quad \mu=\sigma, \quad \nu=\varrho \\ \mu=\nu, & \mu \neq \varrho, \quad \mu \neq \sigma, \quad \varrho=\sigma \\ \mu=\nu, & \mu=\varrho, \quad \mu=\sigma. \end{cases}$$

Also gilt

(20.25( $$\begin{aligned} b=&\sum_{\varrho,\sigma=1}^{k} \mu_0\left(\frac{|a_\varrho|^2 |a_\sigma|^2}{(|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2)^2}\right) \frac{([\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^p])([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^p] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|\mathfrak{X}^p|^4}+ \\ &+\sum_{\substack{\varrho,\sigma=1\\ \varrho\neq\sigma}}^{k} \mu_0\left(\frac{|a_\varrho|^2 |a_\sigma|^2}{(|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2)^2}\right) \frac{([\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^p])([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^p] \,|\, [\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|\mathfrak{X}^p|^4}. \end{aligned}$$

Es ist

(20.26) $$\begin{aligned} &([\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^p])([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^p] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])= \\ &=\prod_{\alpha=1}^{p-1} x_{\alpha\alpha} \prod_{\beta=1}^{p} |x_{\beta\beta}|^2 \prod_{\gamma=1}^{p-2} \bar{x}_{\gamma\gamma} ([\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{E}^{p-1}, \mathfrak{e}_p y_p+\mathfrak{e}_{p+1} y_{p+1}] \,|\, [\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{E}^p]) \cdot \\ &\cdot ([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{E}^p] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{E}^{p-2}, z_{p-1} \mathfrak{e}_{p-1}+z_p \mathfrak{e}_p+z_{p+1} \mathfrak{e}_{p+1}+z_{p+2} \mathfrak{e}_{p+2}, x_{p,p-1} \mathfrak{e}_{p-1}+x_{pp} \mathfrak{e}_p])= \\ &=\begin{cases} 0 & \text{für } \begin{matrix}\sigma \leq p \text{ oder} \\ \varrho \leq p\end{matrix} \\ x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} |x_{11} \ldots x_{pp}|^2 \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} \{y_p \bar{z}_{p-1} \bar{x}_{pp}-y_p \bar{z}_p x_{p,p-1}\} & \text{für } \begin{matrix}\sigma>p \text{ und} \\ \varrho>p.\end{matrix} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $\sigma \neq \varrho$ gilt

(20.27) $$\begin{aligned} &([\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^p])([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^p] \,|\, [\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])= \\ &=x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} |x_{11} \ldots x_{pp}|^2 \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} ([\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{E}^{p-1}, y_p \mathfrak{e}_p+y_{p+1} \mathfrak{e}_{p+1}] \,|\, [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{E}^p]) \cdot \\ &\cdot ([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{E}^p] \,|\, [\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{E}^{p-2}, z_{p-1} \mathfrak{e}_{p-1}+z_p \mathfrak{e}_p+z_{p+1} \mathfrak{e}_{p+1}+z_{p+2} \mathfrak{e}_{p+2}, x_{p,p-1} \mathfrak{e}_{p-1}+x_{pp} \mathfrak{e}_p])= \\ &=\begin{cases} -x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} |x_{11} \ldots x_{pp}|^2 \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} y_{p+1} \bar{z}_{p+1} \bar{x}_{p,p-1} & \text{für } \sigma=p,\ \varrho=p+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus (20.25), (20.26) und (20.27) folgt

(20.28) $$\begin{aligned} b=&x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} \{y_p \bar{z}_{p-1} \bar{x}_{pp}-y_p \bar{z}_p \bar{x}_{p,p-1}\} |\mathfrak{X}^p|^{-2}- \\ &-\mu_0\left(\frac{|a_p|^2 |a_{p+1}|^2}{(|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2)^2}\right) x_{11} \ldots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \ldots \bar{x}_{p-2,p-2} y_{p+1} \bar{z}_{p+1} \bar{x}_{p,p-1} |\mathfrak{X}^p|^{-2}. \end{aligned}$$

Nun werden die Mittelwerte in den Gleichungen (20.20) und (20.28) berechnet. Die Transformationen $S_{pk}(a, t, \varphi)$ von (18.19) und $\hat{S}_{p+1,k}(t, s, \tau)$ von (18.21) ergeben:

$$\mu_0\left(\frac{|a_p|^2+|a_{p+2}|^2+\cdots+|a_k|^2}{|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2}\right)=$$

$$=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-t_1-\cdots-t_k}\frac{t_p+t_{p+2}+\cdots+t_k}{t_{p+1}+\cdots+t_k}\,dt_1\ldots dt_k=$$

$$=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-t_{p+1}-\cdots-t_k}\frac{t_{p+2}+\cdots+t_k}{t_{p+1}+\cdots+t_k}\,dt_{p+1}\ldots dt_k+$$

$$(20.29)\qquad +\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-t_{p+1}-\cdots-t_k}\frac{1}{t_{p+1}+\cdots+t_k}\,dt_{p+1}\ldots dt_k=$$

$$=\int_0^1(1-\tau)^{k-p-1}\,d\tau\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-s_{p+2}-\cdots-s_k}(s_{p+2}+\cdots+s_k)\,ds_{p+2}\ldots ds_k+$$

$$+\int_0^1(1-\tau)^{k-p-2}\,d\tau\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-s_{p+2}-\cdots-s_k}\,ds_{p+2}\ldots ds_k=\frac{k-p-1}{k-p}+\frac{1}{k-p-1}.$$

Dieselben Transformationen ergeben

$$\mu_0\left(\frac{|a_p|^2\,|a_{p+1}|^2}{(|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2)^2}\right)=$$

$$=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-t_1-\cdots-t_k}\frac{t_p\,t_{p+1}}{(t_{p+1}+\cdots+t_k)^2}\,dt_1\ldots dt_k=$$

$$(20.30)\qquad =\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-t_{p+1}-\cdots-t_k}\frac{t_{p+1}}{(t_{p+1}+\cdots+t_k)^2}\,dt_{p+1}\ldots dt_k=$$

$$=\int_0^1(1-\tau)^{k-p-2}\,\tau\,d\tau\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-s_{p+2}-\cdots-s_k}\,ds_{p+2}\ldots ds_k=\frac{1}{k-p-1}-\frac{1}{k-p},$$

Aus (20.20), (20.28), (20.29) und (20.30), erhält man

$$(20.31)\qquad a-b=-x_{11}\ldots x_{p-1,p-1}\,\bar{x}_{11}\ldots\bar{x}_{p-2,p-2}\,\bar{x}_{p,p-1}\,y_{p+1}\,\bar{z}_{p+1}\,|\mathfrak{X}^p|^{-2}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
&\frac{([\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid [\mathfrak{X}^{p-2}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|\mathfrak{X}^p|^2} - \frac{([\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid \mathfrak{X}^p) \cdot (\mathfrak{X}^p \mid [\mathfrak{X}^p \mid [\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_p])}{|\mathfrak{X}^p|^4} = \\
&= |\mathfrak{X}^p|^{-2} x_{11} \cdots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \cdots \bar{x}_{p-2,p-2} ([\mathfrak{E}^{p-1}, y_p \mathfrak{e}_p + y_{p+1} \mathfrak{e}_{p+1}] \mid [\mathfrak{E}^{p-2}, z_{p-1} \mathfrak{e}_{p-1} + \\
&\quad + \cdots + z_{p+2} \mathfrak{e}_{p+2}, x_{p,p-1} \mathfrak{e}_{p-1} + x_{pp} \mathfrak{e}_p]) - \\
&\quad - |\mathfrak{X}^p|^{-2} x_{11} \cdots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \cdots \bar{x}_{p-2,p-2} ([\mathfrak{E}^{p-1}, y_p \mathfrak{e}_p + \\
&\quad + y_{p+1} \mathfrak{e}_{p+1}] \mid \mathfrak{E}^p) (\mathfrak{E}^p \mid [\mathfrak{E}^{p-2}, z_{p-1} \mathfrak{e}_{p-1} + \cdots + z_{p+2} \mathfrak{e}_{p+2}, x_{p,p-1} \mathfrak{e}_{p-1} + x_{pp} \mathfrak{e}_p]) = \\
&= x_{11} \cdots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \cdots \bar{x}_{p-2,p-2} \{y_p \bar{z}_{p-1} \bar{x}_{pp} - y_p \bar{z}_p \bar{x}_{p,p-1}\} |\mathfrak{X}^p|^{-2} - \\
&\quad - x_{11} \cdots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \cdots \bar{x}_{p-2,p-2} y_{p+1} \bar{z}_{p+1} \bar{x}_{p,p-1} |\mathfrak{X}^p|^{-2} - \\
&\quad - x_{11} \cdots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \cdots \bar{x}_{p-2,p-2} \{y_p \bar{z}_{p-1} \bar{x}_{pp} - y_p \bar{z}_p \bar{x}_{p,p-1}\} |\mathfrak{X}_p|^{-2} = \\
&= - x_{11} \cdots x_{p-1,p-1} \bar{x}_{11} \cdots \bar{x}_{p-2,p-2} y_{p+1} \bar{z}_{p+1} \bar{x}_{p,p-1} |\mathfrak{X}^p|^{-2} = a - b.
\end{aligned} \tag{20.32}$$

Nach der Definition von $a$ und $b$ in (20.15) bzw. (20.25) gibt (20.32) die Gleichung (20.13), w. z. b. w.

**Hilfssatz 5.** *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 gilt:*

$$\begin{aligned}
&\mu_0\left(\frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^2}\right) - \\
&- \mu_0\left(\frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]) ([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^4}\right) = \\
&= \frac{([\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid [\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|\mathfrak{X}^p|^2} - \frac{([\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid \mathfrak{X}^p) (\mathfrak{X}^p \mid [\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|\mathfrak{X}^p|^2}.
\end{aligned} \tag{20.33}$$

**Beweis.** In einem geeigneten normalen Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ gelten die Gleichungen (20.14). Mit (20.16) erhält man

$$\begin{aligned}
a &\equiv \mu_0\left(\frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{X}^p]|^2}\right) = \\
&= \sum_{\varrho, \sigma=1}^{k} \mu_0\left(\frac{a_\varrho \bar{a}_\sigma}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2}\right) \frac{([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid [\mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|x_{11} \cdots x_{pp}|^2} = \\
&= \sum_{\varrho=1}^{k} \mu_0\left(\frac{|a_\varrho|^2}{|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2}\right) \frac{([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|\mathfrak{X}^p|^2}.
\end{aligned} \tag{20.34}$$

Es werde $\mathfrak{E}^\varrho = [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\varrho]$ gesetzt. Nach (20.14) ist

$$\begin{aligned}
&([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \mid [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}]) = \\
&= |x_{11} \cdots x_{p-1,p-1}|^2 ([\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{E}^{p-1}, y_p \mathfrak{e}_p + y_{p+1} \mathfrak{e}_{p+1}] \mid [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{E}^{p-1}, z_p \mathfrak{e}_p + \\
&\qquad\qquad + z_{p+1} \mathfrak{e}_{p+1} + z_{p+2} \mathfrak{e}_{p+2}]) =
\end{aligned}$$

$$(20.35)\qquad =\begin{cases} 0 & \text{für } \varrho<p,\\ |\mathfrak{X}^{p-1}|^2\, y_{p+1}\,\bar{z}_{p+1} & \text{für } \varrho=p,\\ |\mathfrak{X}^{p-1}|^2\, y_p\,\bar{z}_p & \text{für } \varrho=p+1,\\ |\mathfrak{X}^{p-1}|^2\,\{y_p\,\bar{z}_p+y_{p+1}\,\bar{z}_{p+1}\} & \text{für } \varrho>p+1. \end{cases}$$

Aus (20.34), (20.35) und (20.29) folgt

$$(20.36)\qquad \begin{aligned} a &= \mu_0\left(\frac{|a_p|^2+|a_{p+2}|^2+\cdots+|a_k|^2}{|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2}\right)|\mathfrak{X}^{p-1}|^2\,|\mathfrak{X}^p|^{-2}\,y_{p+1}\,\bar{z}_{p+1}+\frac{|\mathfrak{X}^{p-1}|^2\,y_p\,\bar{z}_p}{|\mathfrak{X}^p|^2}=\\ &=\left(\frac{1}{k-p-1}+\frac{k-p-1}{k-p}\right)|\mathfrak{X}^{p-1}|^2\,|\mathfrak{X}^p|^{-2}\,y_{p+1}\,\bar{z}_{p+1}+|\mathfrak{X}^{p-1}|^2\,|\mathfrak{X}^p|^{-2}\,y_p\,\bar{z}_p. \end{aligned}$$

Entsprechend berechnet man den zweiten Teil

$$(20.37)\qquad \begin{aligned} b &\equiv \mu_0\left(\frac{([\mathfrak{a},\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{a},\mathfrak{X}^p])\cdot([\mathfrak{a},\mathfrak{X}^p]\,|\,[\mathfrak{a},\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{z}])}{|[\mathfrak{a},\mathfrak{X}^p]|^4}\right)=\\ &=\sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma=1}^{k}\mu_0\left(\frac{a_\mu\,\bar{a}_\nu\,a_\varrho\,\bar{a}_\sigma}{(|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2)^2}\right)\frac{([\mathfrak{e}_\mu,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{e}_\nu,\mathfrak{X}^p])\,([\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^p]\,|\,[\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{z}])}{|x_{11}\cdots x_{pp}|^4}=\\ &=\sum_{\varrho,\sigma=1}^{k}\mu_0\left(\frac{|a_\sigma|^2\,|a_\varrho|^2}{|(a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2)^2}\right)\frac{([\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^p])\,([\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^p]\,|\,[\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{z}])}{|\mathfrak{X}^p|^4}+\\ &+\sum_{\substack{\varrho,\sigma=1\\ \varrho\neq\sigma}}^{k}\mu_0\left(\frac{|a_\varrho|^2\,|a_\sigma|^2}{(|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_k|^2)^2}\right)\frac{([\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^p])\,([\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^p]\,|\,[\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{z}])}{|\mathfrak{X}^p|^4}. \end{aligned}$$

Es ist

$$(20.38)\qquad \begin{aligned} &([\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^p])\cdot([\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^p]\,|\,[\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{z}])=\\ &=|x_{11}\cdots x_{pp}|^2\,|x_{11}\cdots x_{p-1,p-1}|^2\,([\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{E}^{p-1},y_p\,\mathfrak{e}_p+y_{p+1}\,\mathfrak{e}_{p+1}]\,|\,[\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{E}^p])\cdot\\ &\cdot([\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{E}^p]\,|\,[\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{E}^{p-1},z_p\,\mathfrak{e}_p+z_{p+1}\,\mathfrak{e}_{p+1}+z_{p+2}\,\mathfrak{e}_{p+2}])=\\ &=\begin{cases} 0 & \text{für } \sigma<p+1 \text{ oder } \varrho<p+1,\\ |\mathfrak{X}^p|^2\,|\mathfrak{X}^{p-1}|^2\,y_p\,\bar{z}_p & \text{für } \sigma\geq p+1 \text{ und } \varrho\geq p+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ist $\varrho\neq\sigma$, so gilt

$$\begin{aligned} &([\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{y}]\,|\,[\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^p])\cdot([\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{X}^p]\,|\,[\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{X}^{p-1},\mathfrak{z}])=\\ &=|x_{11}\cdots x_{pp}|^2\,|x_{11}\cdots x_{p-1,p-1}|^2\,([\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{E}^{p-1},y_p\,\mathfrak{e}_p+y_{p+1}\,\mathfrak{e}_{p+1}]\,|\,[\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{E}^p])\cdot\\ &\cdot([\mathfrak{e}_\varrho,\mathfrak{E}^p]\,|\,[\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{E}^{p-1},z_p\,\mathfrak{e}_p+z_{p+1}\,\mathfrak{e}_{p+1}+z_{p+2}\,\mathfrak{e}_{p+2}])=\\ &=\begin{cases} |\mathfrak{X}^p|^2\,|\mathfrak{X}^{p-1}|^2\,y_{p+1}\,\bar{z}_{p+1} & \text{für } \sigma=p,\ \varrho=p+1,\\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus (20.37), (20.38), (20.39) und (20.30) erhält man

$$
\begin{aligned}
b &= |\mathfrak{X}^{p-1}|^2 |\mathfrak{X}^p|^{-2} y_p \bar{z}_p + \mu_0 \left( \frac{|a_p|^2 |a_{p+1}|^2}{(|a_{p+1}|^2 + \cdots + |a_k|^2)^2} \right) |\mathfrak{X}^{p-1}|^2 |\mathfrak{X}^p|^{-2} y_{p+1} \bar{z}_{p+1} = \\
&= |\mathfrak{X}^{p-1}|^2 |\mathfrak{X}^p|^{-2} y_p \bar{z}_p + \left( \frac{1}{k-p-1} - \frac{1}{k-p} \right) |\mathfrak{X}^{p-1}|^2 |\mathfrak{X}^p|^{-2} y_{p+1} \bar{z}_{p+1}.
\end{aligned} \tag{20.40}
$$

Aus (20.36) und (20.40) folgt

$$
a - b = |\mathfrak{X}^{p-1}|^2 |\mathfrak{X}^p|^{-2} y_{p+1} \bar{z}_{p+1}. \tag{20.41}
$$

Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
&\frac{([\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, [\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|\mathfrak{X}^p|^2} - \frac{([\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{y}] \,|\, \mathfrak{X}\ )\ (\mathfrak{X}^p \,|\, [\mathfrak{X}^{p-1}, \mathfrak{z}])}{|\mathfrak{X}^p|^4} = \\
&= |x_{11} \cdots x_{p-1,p-1}|^2 |\mathfrak{X}^p|^{-2} (y_p \bar{z}_p + y_{p+1} \bar{z}_{p+1}) - \\
&\quad - |x_{11} \cdots x_{p-1,p-1}|^2 |\mathfrak{X}^p|^{-2} y_p \bar{z}_p = \\
&= |\mathfrak{X}^{p-1}|^2 |\mathfrak{X}^p|^{-2} y_{p+1} \bar{z}_{p+1} = \\
&= a - b.
\end{aligned} \tag{20.42}
$$

Nach der Definition von $a$ und $b$ in (20.34) bzw. (20.37) gibt (20.42) die Gleichung (20.33), w. z. b. w.

**Hilfssatz 6.** *Die Projektion* $[\mathfrak{A}^{h-1}, W^p]$ *der p-ten assoziierten Fläche* $W^p$ *von* $W$ *entlang der speziellen Polyade* $\mathfrak{A}^{h-1}$ *sei nicht total degeneriert. Es sei* $p + h \leq k$. *Auf der offenen Menge* $M$ *habe die meromorphe Fläche* $W$ *die Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$. *Die zu dieser Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$ *und zur Abbildung* $\alpha \in \mathfrak{P}$ *mit* $M \cap U_\alpha \neq \emptyset$ *gehörige eigentliche Darstellung von* $W^p$ *sei* $\mathfrak{W}^p = \mathfrak{W}^p(P, \alpha)$. *Es sei* $\mathfrak{W}^p_{z_\mu} = \frac{\partial}{\partial z_\mu} \mathfrak{W}^p(\alpha(\mathfrak{z}), \alpha)$ *mit* $\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)$ *und* $P \in M \cap U_\alpha$. *Für jedes paar ganzer Zahlen* $\mu, \nu$ *mit* $1 \leq \mu \leq n$, $1 \leq \nu \leq n$ *besteht auf* $M \cap U_\alpha$ *die Identität*

$$
\begin{aligned}
u_{\mu\nu} &\equiv \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\mu}] \,|\, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\nu}])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2} \right) - \\
&\quad - \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\mu}] \,|\, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p])\, ([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] \,|\, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\nu}])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^4} \right) = \\
&= \frac{([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\mu}] \,|\, [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\nu}])}{|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2} - \\
&\quad - \frac{([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\mu}] \,|\, [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p])\, ([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] \,|\, [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\nu}])}{|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^4}.
\end{aligned}
$$

**Beweis.** Es ist $\mathfrak{W}^p = [\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \dots, \mathfrak{w}^{(p-1)}]$. Also gilt

$$\mathfrak{W}^p_{z_\mu} = \sum_{\varrho=0}^{p-1} [\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \dots, \mathfrak{w}^{(\varrho-1)}, \mathfrak{w}^{(\varrho)}_{z_\mu}, \mathfrak{w}^{(\varrho+1)}, \dots, \mathfrak{w}^{(p-1)}]. \tag{20.44}$$

Die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{h-1}$ werden so gewählt, dass $\mathfrak{A}^{h-1} = [\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{h-1}]$ ist. Ausserdem werde

$$\mathfrak{x}_h = \mathfrak{w}, \quad \mathfrak{x}_{h+1} = \mathfrak{w}', \dots \mathfrak{x}_{h+p-1} = \mathfrak{w}^{(p-1)} \tag{20.45}$$

und $q = p + h - 1$ gesetzt. Mit $\overset{\varrho}{|}$ werde das Fehlen des Gliedes $\mathfrak{x}_\varrho$ angezeigt. Gemäss (20.43) bis (20.45) ist

$$\begin{aligned}
u_{\mu\nu} = {} & \sum_{\substack{\varrho,\sigma=h\\ \varrho\neq\sigma}}^{q} \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{w}^{(\varrho-h)}_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}^{(\sigma-h)}_{z_\nu}, \mathfrak{x}_\varrho])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho]|^2} \right) - \\
& - \sum_{\substack{\varrho,\sigma=h\\ \varrho\neq\sigma}}^{q} \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{w}^{(\varrho-h)}_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho]|^2} \cdot \right. \\
& \left. \cdot \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}^{(\sigma-h)}_{z_\nu}, \mathfrak{x}_\varrho])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho]|^2} \right) + \\
& + \sum_{\varrho=h}^{q} \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}^{(\varrho-h)}_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}^{(\varrho-h)}_{z_\nu}])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho]|^2} \right) - \\
& - \sum_{\varrho=h}^{q} \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}^{(\varrho-h)}_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho]|^2} \cdot \right. \\
& \left. \cdot \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho] \mid [\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}^{(\varrho-h)}_{z_\nu}])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho]|^2} \right).
\end{aligned} \tag{20.46}$$

Die Hilfssätze 4 und 5 ergeben

$$\begin{aligned}
u_{\mu\nu} = {} & \sum_{\substack{\varrho,\sigma=h\\ \varrho\neq\sigma}}^{q} \frac{([\mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{w}^{(\varrho-h)}_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}^{(\sigma-h)}_{z_\nu}, \mathfrak{x}_\varrho])}{|[\mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho]|^2} - \\
& - \sum_{\substack{\varrho,\sigma=1\\ \varrho\neq\sigma}}^{q} \frac{([\mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{w}^{(\varrho-h)}_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho])}{|[\mathfrak{x}_1, \dots \overset{\varrho}{|} \dots \overset{\sigma}{|} \dots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho]|^2}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \frac{([\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots \overset{\sigma}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho] \,|\, [\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots \overset{\sigma}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}_{z_\nu}^{(\sigma-h)}, \mathfrak{x}_\varrho])}{|[\mathfrak{x}_1, \cdots \overset{\varrho}{|} \ldots \overset{\sigma}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\varrho|^2} + \\
(20.47)\quad &+ \sum_{\varrho=h}^{q} \frac{([\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}_{z_\mu}^{(\varrho-h)}] \,|\, [\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}_{z_\nu}^{(\varrho-h)}])}{|[\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho]|^2} - \\
&- \sum_{\varrho=h}^{q} \frac{([\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}_{z_\mu}^{(\varrho-h)}] \,|\, [\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho])([\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho] \,|\, [\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots \mathfrak{x}_q, \mathfrak{w}_{z_\nu}^{(\varrho-h)}])}{|[\mathfrak{x}_1, \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_\varrho|^4} = \\
&= \frac{([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}_{z_\mu}^p] \,|\, [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}_{z_\nu}^p])}{|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2} - \frac{([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}_{z_\mu}^p] \,|\, [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p])([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] \,|\, [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}_{z_\nu}^p])}{|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^4},
\end{aligned}
$$

w. z. b. w.

Mit diesen Hilfssätzen lässt sich nun der Mittelwert der Charakteristik $T_p(G, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}])$ berechnen.

**Satz 20.1.** Mittelwert der Charakteristik $T_p(G, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}])$.[32]

**Voraussetzung.** *Die Projektion* $[\mathfrak{A}^{h-1}, W^p]$ *der p-ten assoziierten Fläche* $W^p$ *von* $W$ *entlang der speziellen Polyade* $\mathfrak{A}^{h-1}$ *sei nicht totaldegeneriert und habe die Charakteristik* $T_p(G, \mathfrak{A}^{h-1})$. *Die Charakteristik der Projektion* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, W^p]$ *sei* $T_p(G, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}])$. *Es sei* $p+h \leq k$.

**Behauptung.** *Für jede zulässige Menge G gilt:*

$$
(20.48)\qquad T_p(G, \mathfrak{A}^{h-1}) = \mu_0(T_p(G, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}]).
$$

**Beweis.** Auf der offenen Menge $M$ habe die meromorphe Fläche $W$ die Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Zu dieser Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ und zur Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $M \cap U_\alpha \neq \emptyset$ gehöre die eigentliche Darstellung $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$. Nach Hilfssatz 6 besteht dann auf $M \cap U_\alpha$ die Identität

$$
\begin{aligned}
&\mu_0(\partial \omega_2([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p])) = \\
&= \frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}_{z_\mu}^p] \,|\, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}_{z_\nu}^p])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2} \right) \partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu - \\
(20.49)\quad &- \frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \mu_0 \left( \frac{([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}_{z_\mu}^p] \,|\, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]) \cdot ([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] \,|\, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}_{z_\nu}^p])}{|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^4} \right) \partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu =
\end{aligned}
$$

---

[32] Für $n=1$ siehe W [43] Kap. III § 5 Seite 147–150.

$$= \frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left\{ \frac{([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\nu}])}{|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]) \cdot ([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] \mid [\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p_{z_\nu}])}{|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^4} \right\} \partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu =$$

$$= \partial \omega_2 ([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]).$$

Daher ist

$$\mu_0 (T_p (G, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}])) = \frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G) \mu_0 (\partial \omega_2 ([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p])) \partial \chi_{2n-2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G) \partial \omega_2 ([\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]) \partial \chi_{2n-2} = \tag{20.50}$$

$$= T_p (G, \mathfrak{A}^{h-1}),$$

w. z. b. w.

Gemäss (20.1) besteht für jede nichtnegative Funktion $f \geq 0$ die Ungleichung

$$\log \mu_0 (f) \geq \mu_0 (\log f) \geq -\infty. \tag{20.51}$$

Diese Abschätzung wird beim Beweis des folgenden Hilfssatzes benutzt.

**Hilfssatz 7.**[33] *Die p-te assoziierte Fläche $W^p$ von $W$ sei nicht speziell degeneriert. Die spezielle Polyade $\mathfrak{A}^{h-1}$ mit $0 \leq h \leq k-p$ und der Vektor $\mathfrak{b}$ werden mit der Einschränkung $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$ gewählt. Auf der offenen Menge $M$ habe die meromorphe Fläche $W$ die Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Zu dieser Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ und zur Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $M \cap U_\alpha \neq \emptyset$ mögen die eigentlichen Darstellungen $\mathfrak{W}^{p-1}(P, \alpha)$, $\mathfrak{W}^p(P, \alpha)$, $\mathfrak{W}^{p+1}(P, \alpha)$ von $W^{p-1}$, bzw. $W^p$, bzw. $W^{p+1}$ gehören. Gemäss (19.21) werde die Dichte $F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}) = F_p(P, \alpha, \mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1})$ gebildet. Ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor mit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$, so werde entsprechend die Dichte $F_p([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}]) = F_p(P, \alpha, \mathfrak{b}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}])$ gebildet. Die Funktionen $J(s)$ und $J^*(s)$ mögen die Bedingungen 1° bis 4° von Satz 18.4 erfüllen. Nach (20.9) werde $c_{h+p-1}$ erklärt. Auf $M \cap U_\alpha$ gilt dann*

$$J(\|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h) \leq e^{c_{h+p+1}} \cdot \mu_0 (J(\|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) F_p(\mathfrak{b}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}])). \tag{20.52}$$

**Beweis.** Es gibt eine spezielle Polyade $\mathfrak{A}^{k-h-p+1}$ mit $[\mathfrak{A}^{k-h-p+1}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$. Auch die duale Polyade $A^p = {}^*[\mathfrak{A}^{k-h-p+1}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$ ist speziell. Also ist

$$|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]| \, |\mathfrak{A}^{k-h-p+1}| \geq |[\mathfrak{A}^{k-h-p+1}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]| = |(A^p, \mathfrak{W}^p)| \not\equiv 0. \tag{20.53}$$

[33] Siehe W [43] Kap. V § 6 Seite 236.

Daher ist $[\mathfrak{A}^{h-1}, W^p]$ nicht totaldegeneriert. Ebenso erkennt man, dass die meromorphen Flächen $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}, W^p]$ und $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}, W^{p-1}]$ für $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$, sowie $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, W^p]$ und $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, W^{p-1}]$ für $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$, sowie $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, W^p]$ für $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$ nicht totaldegeneriert sind. Ist $[\mathfrak{A}^{h-1}, W^{p+1}] \equiv 0$, so ist (20.52) trivial. Ist aber $[\mathfrak{A}^{h-1}, W^{p+1}] \not\equiv 0$, so ergeben die Hilfssätze 1 und 2, sowie die Gleichungen (19.21) und (20.51) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\log \mu_0 (J(\|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) F_p([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}]) \geq \\
&\geq \mu_0 \left(\log \left\{ J^*(\|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) \frac{F_p([\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}])}{\|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2} \right\}\right) = \\
&= \mu_0 (\log J^*(\|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) + \mu_0(\log |[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^{p-1}]|^2) + \\
&+ \mu_0(\log |[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^{p+1}]|^2) - \mu_0[\log |[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2) - \\
\text{(20.54)}\quad &- \mu_0(\log |[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2) \geq \\
&\geq \log J^*(\|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) - c_{p+h-1} + \log |[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^{p-1}]|^2 - \\
&- \sum_{\nu=1}^{p+h-1} \frac{1}{k-\nu} + \log |[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^{p+1}]|^2 - \sum_{\nu=1}^{h+p} \frac{1}{k-\nu} - \log |[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2 + \\
&+ \sum_{\nu=1}^{p+h-1} \frac{1}{k-\nu} - \log |[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]|^2 + \sum_{\nu=1}^{p+h} \frac{1}{k-\nu} = \\
&= \log \{J(\|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) F_p(\mathfrak{A}^{h-1}) e^{-c_{p+h-1}}\},
\end{aligned}$$

w. z. b. w.

**Satz 20.2.** Die Abschätzung von $T_p(G, \mathfrak{A}^h)$ nach unten für $h \leq k-p-1$.[34]

**Voraussetzung.** *Die p-te assoziierte Fläche $W^p$ der meromorphen Fläche W sei nicht speziell degeneriert. Es sei $p \geq 1$. Die spezielle Polyade $\mathfrak{A}^h$ mit $0 \leq h \leq k-p-1$ und der Vektor $\mathfrak{b}$ werden mit der Einschränkung $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h] \neq 0$ aber sonst beliebig gewählt. Die Charakteristik der Projektion $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ sei $T_p(G, \mathfrak{A}^h)$. Die Dichte $F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h)$ sei nach Satz* 19.2 *definiert. Die Funktion $J(s)$ erfülle die Voraussetzungen von Satz* 18.4. *Die Zahl $\varsigma$ sei durch* (18.47), *die Zahlen $c_p$ seien durch* (20.9) *und die Zahlen $\varsigma_\varrho$ durch*

$$\text{(20.55)}\qquad \varsigma_\varrho = (\varsigma+1)\, e^{\sum_{\nu=\varrho}^{k-2} c_\nu} \qquad \textit{für } \varrho = 0, 1, \ldots, k-1$$

*definiert. Die allgemeinen Voraussetzungen* I *bis* IX *werden gemacht. Das Zeichen* (o) *sei nach Definition* 16.3 *bezüglich des vollständigen Systems* $\mathfrak{G}$ *zulässiger Mengen G erklärt.*

---

[34] Für $n=1$ sieheW [43] Kap. V § 6 Seite 237.

**Behauptung.** *Für jede zulässige offene Menge $G \in \mathfrak{G}$ gilt*

$$(20.56) \qquad 0 \leq \frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G) J(\|[\mathfrak{A}^h, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) F_p(\mathfrak{A}^h) \leq \varsigma_{p+h} \{T_p(G, \mathfrak{A}^h) + (o)\},$$

*wobei* $(o)$ *unabhängig von* $J(s)$, $\mathfrak{A}^h$, $\mathfrak{b}$ *mit* $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h] \neq 0$ *ist. Wählt man speziell* $J(s) = s^{-\lambda}$ *mit* $0 < \lambda = \lambda(G) < 1$, *so gilt*

$$(20.57) \qquad \varsigma_q = \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 3}{(1-\lambda)(2-\lambda)} e^{(1-\lambda) \sum\limits_{\nu=q}^{k-2} \frac{1}{k-\nu-1}} < \frac{3}{1-\lambda} e^{k-1}.$$

**Beweis.** Nach Satz 19.3 ist die Behauptung bereits für $h = k - p - 1$ bewiesen. Ist sie schon für ein $h$ mit $0 < h \leq k - p - 1$ bewiesen, so gilt sie auch für $h - 1$, wie jetzt gezeigt wird. Die spezielle Polyade $\mathfrak{A}^{h-1}$ mit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$ werde beliebig gewählt. Dann sind, wie schon im Beweis des Hilfssatzes 7 gezeigt wurde, die meromorphen Flächen $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]$ und $[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]$, so wie $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]$ für $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$ und $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p]$ für $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$ nicht totaldegeneriert. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt also

$$(20.58) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G) J(\|[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) F_p(\mathfrak{b}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}]) \leq \\ &\leq \varsigma_{p+h} \{T_p(G, [\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}]) + (o)\} \end{aligned}$$

für $[\mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$, wobei $(o)$ nicht von $J(s)$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}^{h-1}$ mit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$ abhängt. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ mit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}^{h-1}] = 0$ bilden einen linearen Unterraum der Dimension $h < k$, der aus der Einheitskugel $|\mathfrak{a}| = 1$ eine Nullmenge ausschneidet. Aus (20.58), (20.52) und (20.48) folgt also

$$(20.59) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G) J(\|[\mathfrak{A}^{h-1}, \mathfrak{W}^p] : \mathfrak{b}\|^2) F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}) \leq \\ &\leq \varsigma_{p+h} e^{c_{p+h-1}} \{T_p(G, \mathfrak{A}^{h-1}) + (o)\} = \varsigma_{p+h-1} \{T_p(G, \mathfrak{A}^{h-1}) + (o)\}, \end{aligned}$$

wobei $(o)$ nicht von $J(s)$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{A}^{h-1}$ mit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^{h-1}] \neq 0$ abhängt. Da (20.57) unmittelbar aus (20.55), (18.51) und (20.12) folgt, sind alle Behauptungen richtig, w. z. b. w.

Damit ist Satz 19.3 auch für $h < k - p - 1$ bewiesen. Für $h = 0$ besagt er insbesondere

$$(20.60) \qquad 0 \leq \frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G) J^*(\|\mathfrak{W}^p : \mathfrak{b}\|^2) \frac{\|\mathfrak{W}^{p-1} : \mathfrak{b}\|^2}{\|\mathfrak{W}^p : \mathfrak{b}\|^2} \frac{|\mathfrak{W}^{p-1}|^2 |\mathfrak{W}^{p+1}|^2}{|\mathfrak{W}^p|^4} \leq \varsigma_p \{T_p(G) + (o)\},$$

wobei $(o)$ nicht von $J(s)$ und $\mathfrak{b} \neq 0$ abhängt. Hier tritt bereits die Grösse

$$|\mathfrak{W}^{p-1}|^2 \, |\mathfrak{W}^p|^{-4} \, |\mathfrak{W}^{p+1}|^2$$

auf, deren Logarithmus ebenfalls in $\Omega_p(\Gamma)$ vorkommt.

## § 21. Inzidenz und allgemeine Lage

In der Voraussetzung der Hauptdefektrelation und des zweiten Hauptsatzes werden die Begriffe der Inzidenz und der allgemeinen Lage gebraucht. Für die zugehörigen Definitionen, Sätze und Beweise sei auf W [43] Kap. V § 10 verwiesen. Der Einfachheit halber mögen die dortigen Definitionen und Sätze hier kurz zusammengestellt werden.

1. Ist $\mathfrak{A}^h = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h] \neq 0$, so sei $\{\mathfrak{A}^h\}$ der Raum der Vektoren $\mathfrak{x} = \sum_{\nu=1}^{h} x_\nu \mathfrak{a}_\nu$. Dann und nur dann ist $\{\mathfrak{A}^h\} = \{\mathfrak{B}^h\}$, wenn es eine komplexe Zahl $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \mathfrak{A}^h = \mathfrak{B}^h$ gibt. Im ganzen Paragraphen werde

$$0 \leq i \leq h-1, \qquad 1 \leq p \leq k, \qquad l = h - i \tag{21.1}$$

vorausgesetzt.

2. Der Raum $\{\mathfrak{A}^h\}$ stehe in *i-Inzidenz* mit der Polyade $\mathfrak{X}^p$, wenn für jeden Teilraum $\{\mathfrak{A}^l\} \subseteq \{\mathfrak{A}^h\}$ die Bedingung $[\mathfrak{A}^l, \mathfrak{X}^p] = 0$ erfüllt ist. Im Folgenden wird die Polyade $\mathfrak{X}^p$ speziell angenommen.

3. Der Raum $\{\mathfrak{A}^h\}$ mit $\mathfrak{A}^h = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h]$ steht dann und nur dann in $i$-Inzidenz mit $\mathfrak{X}^p$, wenn $[\mathfrak{a}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_l}, \mathfrak{X}^p] = 0$ für alle $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k$ ist.

4. Ergänzt man die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ zu einem Koordinatensystem $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ von $R_1^{2k}$ und ist $\mathfrak{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} \mathfrak{x}_\nu$ für $\mu = 1, \ldots, h$, so steht der Raum $\{\mathfrak{A}^h\}$ mit $\mathfrak{A}^h = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h] \neq 0$ dann und nur dann in $i$-Inzidenz mit der Polyade $\mathfrak{X}^p = [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p] \neq 0$, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{j_1 \lambda_1} \cdots a_{j_1 \lambda_l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j_l \lambda_1} \cdots a_{j_l \lambda_l} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{für} \begin{cases} p+1 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_l \leq k \\ \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq h \end{cases} \tag{21.2}$$

ist, das heisst, wenn der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,p+1} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{h,p+1} & \cdots & a_{hk} \end{pmatrix} \tag{21.3}$$

kleiner als $l = h - i$ ist, das heisst, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{1\lambda_1} & \cdots & a_{1\lambda_h} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{h\lambda_1} & \cdots & a_{h\lambda_h} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{für} \begin{cases} 1 \leq \lambda_1 \quad < \cdots < \lambda_i \leq k \\ p+1 \leq \lambda_{i+1} < \cdots < \lambda_h \leq k \end{cases} \tag{21.4}$$

ist.

5. Eine Polyade $\mathfrak{A}^h$ kann als Punkt des Raumes $R^{2\binom{k}{h}}$ aufgefasst werden. Ist $\mathfrak{X}^p = [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p] \neq 0$ eine gegebene spezielle Polyade, so sei $X_i^p$ der kleinste lineare Unterraum von $R^{2\binom{k}{h}}$ der alle speziellen Polyaden $\mathfrak{A}^h$ enthält, für die $\{\mathfrak{A}^h\}$ mit $\mathfrak{X}^p$ in $i$-Inzidenz steht. Dann und nur dann steht der Raum $\{\mathfrak{A}^h\}$ mit $\mathfrak{X}^p$ in $i$-Inzidenz, wenn $\mathfrak{A}^h \in X_i^p$ ist. Die (reelle) Dimension des Raumes $X_i^p \subseteq R^{2\binom{k}{h}}$ ist das Doppelte von

$$D_i^p = \sum_{\lambda=0}^{h-i-1} \binom{p}{h-\lambda} \binom{k-p}{\lambda}. \tag{21.5}$$

Für $0 \leq i \leq h-1,\ 1 \leq p \leq k,\ p+h \leq k+1$ ist

$$D_i^{p+i} = \sum_{\lambda=0}^{h-i-1} \binom{p+i}{h-\lambda} \binom{k-p-i}{\lambda} > 0. \tag{21.6}$$

6. Sind $\mathfrak{A}^h = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h] \neq 0$ und $\mathfrak{X}^p \neq 0$, so werde

$$d_i = d_i(\mathfrak{A}^h) = d_i(\mathfrak{A}^h, \mathfrak{X}^p) = \binom{h}{i}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq h} \| [\mathfrak{a}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_l}] : \mathfrak{X}^p \|^2 \tag{21.7}$$

gesetzt. Es ist

$$d_i(\mathfrak{A}^h, \mathfrak{X}^p) \leq \binom{h}{i+1} d_{i+1}(\mathfrak{A}^h, \mathfrak{X}^p). \tag{21.8}$$

Ist $(\mathfrak{a}_\mu \mid \mathfrak{a}_\nu) = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu \neq \nu \\ 1 \text{ für } \mu = \nu, \end{cases}$ ist $\sigma$ eine unitäre, lineare Abbildung mit $\mathfrak{b}_\mu = \sigma \mathfrak{a}_\mu$ und ist $\mathfrak{B}^h = [\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_h]$, so ist

$$d_i(\mathfrak{A}^h, \mathfrak{X}^p) = d_i(\mathfrak{B}^h, \mathfrak{X}^p). \tag{21.9}$$

Dann und nur dann steht der Raum $\{\mathfrak{A}^h\}$ in $i$-Inzidenz mit der Polyade wenn $d_i(\mathfrak{A}^h, \mathfrak{X}^p) = 0$ ist.

7. Der Raum $\{\mathfrak{A}^{k-1}\}$ mit $\vec{\alpha}={}^*\mathfrak{A}^{k-1}$ steht dann und nur dann in $i$-Inzidens mit der Polyade $\mathfrak{X}^{1+i}=[\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_{1+i}[\,\neq 0$, wenn für $\nu=1,\dots,1+i$ das innere Produkt $(\vec{\alpha},\mathfrak{x}_\nu)=0$ ist, das heisst, dann und nur dann, wenn die Ebene $(\vec{\alpha},\mathfrak{x})=0$ die Punkte $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_{1+i}$ enthält, also der Raum $\{\mathfrak{X}^{1+i}\}$ in dieser Ebene $(\vec{\alpha},\mathfrak{x})=0$ liegt

8. Die Räume $\{\mathfrak{A}_1^h\},\dots,\{\mathfrak{A}_q^h\}$ befinden sich dann und nur dann in *allgemeiner Lage bezüglich des Indexes p*, wenn für jede Zahl $i=0,1,\dots,h-1$ und jede spezielle Polyade $\mathfrak{X}^{p+i}\neq 0$ folgende Aussage gilt: Wenn $X_i^{p+i}$ der nach 5. zu $\mathfrak{X}^{p+i}$ gehörige lineare Unterraum von $R_1^{2\binom{k}{p}}$ mit der Dimension $2D_i^{p+i}>0$ ist, so gehören höchstens $D_i^{p+i}$ der Polyaden $\mathfrak{A}_1^h,\dots,\mathfrak{A}_q^h$ zum Raum $X_i^{p+i}$, was nach 5. dann und nur dann der Fall ist, wenn von den Räumen $\{\mathfrak{A}_1^h\},\dots,\{\mathfrak{A}_q^h\}$ höchstens $D_i^{p+i}$ in $i$-Inzidenz mit $\mathfrak{X}^{p+i}$ stehen. Dabei wird

$$0\le i\le h-1,\quad 1\le p\le k,\quad p+h\le k+1,\quad l=h-i \tag{21.10}$$

vorausgesetzt.

9. Dann und nur dann befinden sich die Räume $\{\mathfrak{A}_1^{k-1}\},\dots,\{\mathfrak{A}_q^{k-1}\}$ mit $\vec{\alpha}_\mu={}^*\mathfrak{A}_\mu^{k-1}$ in allgemeiner Lage bezüglich des Indexes $p=1$, wenn eine der folgenden Aussagen gilt:

a) Durch keinen Punkt $\mathfrak{x}\neq 0$ des Raumes $R_1^{2k}$ gehen $k$ der Ebenen $(\vec{\alpha}_\mu,\mathfrak{w})=0$.

b) Deutet man die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{w}=(w_1,\dots,w_k)\neq 0$ als homogene Koordinaten eines Punktes $\hat{\mathfrak{w}}=(w_1:\dots:w_k)$ des projektiven Raumes der Dimension $2k'=2k-2$, so sollen durch keinen Punkt $\hat{\mathfrak{x}}$ mehr als $k'$ der Ebenen $\{\hat{\mathfrak{w}}\,|\,(\vec{\alpha}_\mu,\mathfrak{w})=0\}$ gehen.

c) Jeder Durchschnitt $\{\mathfrak{A}_{\nu_1}^{k-1}\}\cap\dots\cap\{\mathfrak{A}_{\nu_k}^{k-1}\}$ mit $1\le\nu_1<\dots<\nu_k\le q$ besteht nur aus dem Nullpunkt.

d) Über dem Körper der komplexen Zahlen sind je $k$ der Vektoren $\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_q$ linear unabhängig.

10. Ist $\mathfrak{A}^h=[\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_h]\neq 0$, so werden zwei Summationsbefehle eingeführt:

a) Mit $\sum\limits^*_{\{\mathfrak{A}^l\}\subset\{\mathfrak{A}^h\}}$ werde die Summation über alle Polyaden $[\mathfrak{a}_{j_1},\dots,\mathfrak{a}_{j_l}]$ mit $1\le j_1<\dots<j_l\le h$ bezeichnet. Im Falle $l=0$ sei $\mathfrak{A}^0=1$ und $\sum\limits_{\{\mathfrak{A}^0\}\subset\{\mathfrak{A}^h\}} f(\mathfrak{A}^0)=f(\mathfrak{A}^0)$.

b) Mit $\sum^{**}$ werde eine Doppelsumme bezeichnet. Zuerst werde über alle Polyaden $\mathfrak{A}^l=[\mathfrak{a}_{j_1},\dots,\mathfrak{a}_{j_{\sigma-1}},\mathfrak{a}_t,\mathfrak{a}_{j_\sigma},\dots,\mathfrak{a}_{j_{l-1}}]$ mit $1\le j_1<\dots<j_{\sigma-1}<t<j_\sigma<\dots<j_{l-1}\le h$ bei festen Werten $1\le j_1<\dots<j_{l-1}\le h$, dann über alle $1\le j_1<\dots<j_{l-1}\le h$ summiert. Hierbei wird $\mathfrak{A}^{l-1}=[\mathfrak{a}_{j_1},\dots,\mathfrak{a}_{j_{\sigma-1}},\mathfrak{a}_{j_{\sigma+1}},\dots,\mathfrak{a}_{j_h}]$ abgekürzt.

In b) kann man auch zuerst über alle $\mathfrak{A}^{l-1}=[\mathfrak{a}_{j_1},\dots,\mathfrak{a}_{j_{\sigma-1}},\mathfrak{a}_{j_{\sigma+1}},\dots,\mathfrak{a}_{j_l}]$ bei festem Wertesatz $1\le j_1<\dots<j_l\le h$ dann über alle Wertesätze $1\le j_1<\dots<j_l\le h$ summieren, wobei dann $\mathfrak{A}^l=[\mathfrak{a}_{j_1},\dots,\mathfrak{a}_{j_l}]$ abgekürzt wird.

11. Ist die Funktion $X(\mathfrak{A}^l) > 0$ für alle $\mathfrak{A}^l = [\mathfrak{a}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_l}]$ mit $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq h$ und die Funktion $Y(\mathfrak{A}^{l-1}) > 0$ für alle $\mathfrak{A}^{l-1} = [\mathfrak{a}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{l-1}}]$ mit $1 \leq j_1 < \cdots < j_{l-1} \leq h$ erklärt und wird

$$x = \binom{h}{l}^{-1} \sum_{\{\mathfrak{A}^l\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}^{*} X(\mathfrak{A}^l), \qquad y = \binom{h}{l-1}^{-1} \sum_{\{\mathfrak{A}^{l-1}\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}^{*} Y(\mathfrak{A}^{l-1}) \tag{21.11}$$

gesetzt, so gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &\leq \frac{1}{h-l+1} \sum^{**} \frac{X(\mathfrak{A}^l)}{Y(\mathfrak{A}^{l-1})}, \\ \frac{y}{x} &\leq \frac{1}{l} \sum^{**} \frac{Y(\mathfrak{A}^{l-1})}{X(\mathfrak{A}^l)}. \end{aligned} \tag{21.12}$$

Wie bei W [43] ergibt sich

**Satz 21.1.** Eine Abschätzung.[35]

**Voraussetzung.** *Jeder der speziellen Polyaden* $\mathfrak{A}_1^h \neq 0, \ldots, \mathfrak{A}_q^h \neq 0$ *sei ein Gewicht* $g(\mathfrak{A}_\mu^h) \geq 0$ *zugeordnet. Es sei* $1 \leq p \leq k-h$. *Für* $i = 0, 1, \ldots, h-1$ *gebe es Zahlen* $g_i^{p+i} > 0$ *mit der Eigenschaft:*

*„Ist* $\mathfrak{X}^{p+i} \neq 0$ *eine beliebige spezielle Polyade und stehen die Räume* $\{\mathfrak{A}_{\lambda_1}^h\}, \ldots, \{\mathfrak{A}_{\lambda_r}^h\}$ *in i-Inzidenz mit* $\mathfrak{X}^{p+i}$, *so ist* $\sum_{\varrho=1}^{r} g(\mathfrak{A}_{\lambda_\varrho}^h) \leq g_i^{p+i}$.*"*
*Ist* $\{\mathfrak{X}^{p+i+1}\} \supset \{\mathfrak{X}^{p+i}\} \supset \{\mathfrak{X}^{p+i-1}\}$, *so werde*

$$\psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h) = \binom{h}{i}^{-1} \sum_{\{\mathfrak{A}^l\} \subset \{\mathfrak{A}_\mu^h\}}^{*} \frac{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{X}^{p+i}\|^2}{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{X}^{p+i-1}\|^2} \quad \textit{mit } l = h-i, \tag{21.13}$$

$$\psi_{i+1}(\mathfrak{A}_\mu^h) = \binom{h}{i+1}^{-1} \sum_{\{\mathfrak{A}^{l-1}\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}^{*} \frac{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{X}^{p+i-1}\|^2}{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{X}^{p+i}\|} \quad \textit{mit } l = h-i \tag{21.14}$$

*gesetzt. Dabei seien die Zähler und Nenner der Summenglieder nicht Null. Ausserdem seien Zahlen* $f_i(\mathfrak{A}_\mu^h)$ *für* $\mu = 1, \ldots, q$ *mit* $0 < f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) \leq 1$ *gegeben.*

**Behauptung.** *Zu jeder möglichen Wahl von* $\mathfrak{A}_1^h, \ldots, \mathfrak{A}_q^h$, $g(\mathfrak{A}_\mu^h)$, $g_i^{p+i}$ *gibt es eine Konstante c, sodass*

$$\begin{aligned} &\exp\left[\frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \log\left\{f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) \frac{\psi_{i+1}(\mathfrak{A}_\mu^h)}{(\psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h))}\right\}\right] \leq \\ &\leq c\left\{1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) \frac{\psi_{i+1}(\mathfrak{A}_\mu^h)}{\psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h)}\right\} \end{aligned} \tag{21.15}$$

*gilt. Dabei hängt die Konstante c nicht von der Wahl von* $f_i(\mathfrak{A}_\mu^h)$ *und* $\mathfrak{X}^{p+i+1}, \mathfrak{X}^{p+i}, \mathfrak{X}^{p+i-1}$ *ab.*

---

[35] Siehe W [43] Kap. V § 7 Lemma 7 a Seite 238–240 und § 11 Seite 261.

**Zusatz.** *Befinden sich die Räume* $\{\mathfrak{A}_1^h\}, \ldots, \{\mathfrak{A}_q^h\}$ *in allgemeiner Lage und werden die Zahlen* $D_i^{p+i}$ *nach* (21.6) *bestimmt, so kann man* $g_i^{p+i} = D_i^{p+i}$ *als Gewichtsschranken wählen, wenn* $g(\mathfrak{A}_\mu^h) = 1$ *ist.*

## § 22. Die Hauptdefektrelation

In diesem Paragraphen wird die Hauptdefektrelation bewiesen, aus der sich mit der Differenzformel leicht der zweite Hauptsatz ergeben wird. Der Beweis der Hauptdefektrelation erfolgt ähnlich wie bei einer Veränderlichen. Nur der Unterschied der Operationen $'$ und $\partial$ für $n > 1$ bedingt einige Abweichungen.

**Satz 22.1.** Hauptdefektrelation.[36]

**Voraussetzung.** 1. *Jeder der speziellen Polyaden* $\mathfrak{A}_1^h \neq 0, \ldots, \mathfrak{A}_q^h \neq 0$ *sei ein Gewicht* $g(\mathfrak{A}_\mu^h) \geq 0$ *zugeordnet mit* $\sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) > 0$. *Es sei* $1 \leq p \leq k - h$. *Für* $i = 0, 1, \ldots, h-1$ *gebe es Zahlen* $g_i^{p+i} > 0$ *mit der Eigenschaft:*

*„Ist* $\mathfrak{X}^{p+i} \neq 0$ *eine beliebige spezielle Polyade und stehen die Räume* $\{\mathfrak{A}_{\lambda_1}^h\}, \cdots, \{\mathfrak{A}_{\lambda_r}^h\}$ *in i-Inzidenz mit* $\mathfrak{X}^{p+i}$, *so ist* $\sum_{\varrho=1}^{r} g(\mathfrak{A}_{\lambda_\varrho}^h) \leq g_i^{p+i}$.“

2. *Die allgemeinen Voraussetzungen* I, II *aus* § 4, III, IV, V *aus* § 7, VI, VII *aus* § 11, VIII *aus* § 12 *und* IX *aus* § 19 *werden gemacht.*

3. *Auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *sei eine meromorphe Fläche* $W$ *gegeben. Für jeden Index* $u = p, p+1, \ldots, p+h-1$ *sei die u-te assoziierte Fläche* $W^u$ *nicht speziell degeneriert und habe die Charakteristik* $T_u(G)$. *Die Funktionen* $\tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h)$ *und* $\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h)$ *seien gemäss* (13.2) *und* (13.3) *erklärt. Die Funktion* $\Omega_u(\Gamma)$ *werde durch Satz* 15.2 *eingeführt. Ist* $W^{p+h} \equiv 0$, *so sei* $\Omega_u(\Gamma) = -\infty$.

4. *Die Gesamtkapazität* $\mathfrak{C}$ *werde durch* (16.3) *gegeben. Die Charakteristik der meromorphen Fläche* $W$ *sei* $T(G)$. *Ist* $\mathfrak{C} > 0$, *so strebe bezüglich eines gegebenen vollständigen Systems* $\mathfrak{G}$ *zulässiger Mengen*

$$T(G) \to \infty \quad \text{für } G \to \mathfrak{M}^{2n}. \tag{22.1}$$

*Bezüglich des Systems* $\mathfrak{G}_0$ *aller zulässigen Mengen werde wie in Definition* 16.4 *das Zeichen* $\omega(\ )$ *erklärt.*

---

[36] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. V § 10 Seite 259. Zum Beweis siehe § 11 Seite 259–263.

**Behauptung.** *Es gibt Konstante $B_0, \dots, B_{h-1}$ und eine kompakte Menge $K$, sodass für jede zulässige Menge $G \supset K$ die Abschätzung*

$$\sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h)\{\tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) - \tilde{m}_{p-1}(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h)\} + \sum_{i=0}^{h-1} g_i^{p+i}\Omega_{p+i}(\Gamma) = \tag{22.2}$$
$$= \frac{1}{2}(g_0^p + \dots + g_{h-1}^{p+h-1})\,\omega\left(\sum_{i=0}^{h-1} B_i \left\{\frac{T_{p+i}(G) + T(G)}{2}\right\}^2\right)$$

*gilt.*

**Anmerkungen:**

1°. Befinden sich die Räume $\{\mathfrak{A}_1^h\}, \dots, \{\mathfrak{A}_q^h\}$ in allgemeiner Lage bezüglich des Indexes $p$, so kann man $g(\mathfrak{A}_\mu^h) = 1$ und $g_i^{p+i} = D_i^{p+i}$ wählen.

2°. Strebt $T(G) \to \infty$ für $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ bezüglich des vollständigen Systems $\mathfrak{G}$ zulässiger Mengen, so auch bezüglich eines jeden vollständigen Systems $\mathfrak{G}'$ zulässiger Mengen; denn $T(G)$ ist monoton.

3°. Ist die Gesamtkapazität $\mathfrak{C} = 0$ und wird der Eichfaktor $b$ nach VI § 11 bestimmt, so ist

$$\varliminf_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} \frac{T(G)}{R(G)} \geq b > 0, \tag{22.3}$$

denn $W$ ist nicht konstant, da $W^p$ nicht speziell degeneriert ist. Also strebt auch im Fall $\mathfrak{C} = 0$ die Charakteristik $T(G) \to \infty$ für $G \to \mathfrak{M}^{2n}$.

4°. Bei einer Veränderlichen wird in W [43] statt (22.1) vorausgesetzt

$$T_u(G) \to \infty \quad \text{für } G \to \mathfrak{M}^{2n} \quad (\text{bezüglich } \mathfrak{G}) \tag{22.4}$$

für $u = p, p+1, \dots, p+h-1$. Dann lautet das Restglied $\omega(\ )$ in (22.2) anders, nämlich

$$\omega\left(\sum_{i=0}^{h-1} B_i T_{p+i}^2(G)\right) \cdot \tag{22.5}$$

Dasselbe gilt auch bei mehreren Veränderlichen. Jedoch ist die Voraussetzung (22.4) und damit das Restglied (22.5) bei mehreren Veränderlichen ungünstiger; denn beim zweiten Hauptsatz sollen die Voraussetzungen möglichst wenig vom Differential $\partial B_{n-1}$ abhängen. Die Voraussetzung (22.1) hängt nicht von $\partial B_{n-1}$ ab, während die Voraussetzung (22.4) für $n > 1$ und $p + h - 1 > 1$ von $\partial B_{n-1}$ abhängt.

5°. Die Konstanten $B_0, \dots, B_{h-1}$ in (22.2) bzw. (22.5) können so gewählt werden, dass sie nur von den Polyaden $\mathfrak{A}_1^h, \dots, \mathfrak{A}_q^h$ ihren Gewichten $g(\mathfrak{A}_1^h), \dots, g(\mathfrak{A}_q^h)$ und ihren Gewichtsschranken $g_0^p, \dots, g_{h-1}^{p+h-1}$ nicht aber von der meromorphen Fläche $W$ oder ihren assoziierten Flächen $W^{p+i}$ abhängen. Man vergleiche dazu (22.64) weiter unten.

6°. Die kompakte Menge $K$, die in der Behauptung auftritt, kann so gewählt werden, dass sie nur von der Wahl der meromorphen Fläche $W$ und ihrer assoziierten Flächen $W^p, \dots, W^{p+h-1}$, aber nicht von den Polyaden $\mathfrak{A}_1^h, \dots, \mathfrak{A}_q^h$ auch nicht ihren Gewichten $g(\mathfrak{A}_\mu^h)$ und ihren Gewichtsschranken $g_i^{p+i}$ abhängt.

**Beweis.** Ist $W^{p+h} \equiv 0$, so ist $\Omega_{p+h} = -\infty$ und die Behauptung ist richtig. Es sei jetzt $W^{p+h} \not\equiv 0$ vorausgesetzt. Zu jeder Polyade $\mathfrak{A}_\mu^h$ gibt es Vektoren $\mathfrak{a}_1^{(\mu)}, \dots, \mathfrak{a}_h^{(\mu)}$ mit

$$(\mathfrak{a}_\lambda^{(\mu)} \mid \mathfrak{a}_\varrho^{(\mu)}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq \varrho, \\ 1 & \text{für } \lambda = \varrho, \end{cases} \tag{22.6}$$

sodass $\mathfrak{A}_\mu^h = |\mathfrak{A}_\mu^h| [\mathfrak{a}_1^{(\mu)}, \dots, \mathfrak{a}_h^{(\mu)}]$ ist. Setzt man $\mathfrak{B}_\mu^h = [\mathfrak{a}_1^{(\mu)}, \dots, \mathfrak{a}_h^{(\mu)}]$ und $g(\mathfrak{A}_\mu^h) = g(\mathfrak{B}_\mu^h)$, so ist $\{\mathfrak{A}_\mu^h\} = \{\mathfrak{B}_\mu^h\}$ und

$$\tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) = \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{B}_\mu^h), \tag{22.7}$$

$$\tilde{m}_{p-1}(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) = \tilde{m}_{p-1}(\Gamma, \mathfrak{B}_\mu^h). \tag{22.8}$$

Daher kann man o. B. d. A. annehmen, dass $|\mathfrak{A}_\mu^h| = 1$ ist.

Mit $\mathfrak{A}^h = [\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_h]$ werde eine Beliebige der Polyaden $\mathfrak{A}_h^\mu$ bezeichnet. Es ist

$$(\mathfrak{a}_\lambda \mid \mathfrak{a}_\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq \varrho, \\ 1 & \text{für } \lambda = \varrho. \end{cases} \tag{22.9}$$

Es sei $l = h - i$ mit $0 \le i \le h-1$. Nun werden die Polyaden

$$\mathfrak{A}^{l-1} = [\mathfrak{a}_{j_1}, \dots, \mathfrak{a}_{j_{l-1}}] \quad \text{mit} \quad 1 \le j_1 < \dots < j_{l-1} \le h \tag{22.10}$$

$$\mathfrak{A}^l = [\mathfrak{a}_{j_1}, \dots, \mathfrak{a}_{j_{\sigma-1}}, \mathfrak{a}_t, \mathfrak{a}_{j_\sigma}, \dots, \mathfrak{a}_{j_{l-1}}] \quad \text{mit} \quad 1 \le j_1 < \dots < j_{\sigma-1} < t < j_\sigma < \dots < j_{l-1} \le h \tag{22.11}$$

fest gewählt. Man setzt $u = p + i$. Dann ist

$$0 \le l - 1 = h - i - 1 \le k - p - i - 1 = k - u - 1. \tag{22.12}$$

Da $W^u$ nicht speziell degeneriert ist, ist für jede spezielle Polyade $\mathfrak{D}^{l-1}$ die Projektion $[\mathfrak{D}^{l-1}, W^u]$ nicht totaldegeneriert. Sie habe die Charakteristik $T_u(G, \mathfrak{D}^{l-1})$. Aus (13.6), (13.7), (13.8) und Satz 17.2 folgt

$$T_u(G, \mathfrak{D}^{l-1}) \le T_u(G) + \tilde{m}_u(\gamma, \mathfrak{D}^{l-1}) \le T_u(G) + (o) \tag{22.13}$$

wobei $(o)$ gemäss Definition 16.3 bezüglich des vollständigen Systems $\mathfrak{G}_0$ aller zulässigen Mengen definiert ist und nicht von $\mathfrak{D}^{l-1}$ abhängt. Insbesondere gilt (22.13) für $\mathfrak{D}^{l-1} = \mathfrak{A}^{l-1}$. Die Dichte $F_u(\mathfrak{a}_t, \mathfrak{A}^{l-1})$ sei gemäss Satz 19.2 erklärt. Die Funktionen $J(s)$ und $J^*(s) = s \cdot J(s)$ mögen die Voraussetzungen von Satz 18.4 erfüllen. Die Zahl

$\varsigma$ sei durch (18.47), die Zahlen $c_\nu$ seien durch (20.9) und die Zahlen $\varsigma_\varrho$ durch (20.55) definiert. Wie die Tabelle

| Satz 20.2 | $p$ | $W^p$ | $h$ | $\mathfrak{A}^h$ | $\mathfrak{b}$ | $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ | $T_p(G, \mathfrak{A}^h)$ | $F_p(\mathfrak{b}, \mathfrak{A}^h)$ | $J(s)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hier | $u$ | $W^u$ | $l-1$ | $\mathfrak{A}^{l-1}$ | $\mathfrak{a}_t$ | $[\mathfrak{A}^{l-1}, W^u]$ | $T_u(G, \mathfrak{A}^{l-1})$ | $F_u(\mathfrak{a}_t, \mathfrak{A}^{l-1})$ | $J(s)$ |

| Satz 20.2 | $\varsigma$ | $c_\nu$ | $\varsigma_\varrho$ | $p+h$ | $\mathfrak{G}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Hier | $\varsigma$ | $c_\nu$ | $\varsigma_\varrho$ | $u+l-1=p+h-1$ | $\mathfrak{G}_0$ |

zeigt, sind die Voraussetzungen von Satz 20.2 erfüllt. Zusammen mit (22.13) für $\mathfrak{D}^{l-1}=\mathfrak{A}^{l-1}$ ergibt sich:

$$\frac{1}{\pi}\int_G \psi(P, G)\, J(\|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^u] : \mathfrak{a}_t\|^2)\, F_u(\mathfrak{a}_t, \mathfrak{A}^{l-1}) \le \varsigma_{p+h-1}\{T_u(G) + (o)\} \tag{22.14}$$

für jede zulässige Menge $G$, wobei (o) nicht von der Wahl der Funktion $J(s)$ und der Polyade $\mathfrak{A}^l$ abhängt. Aus (22.9) bis (22.11) und (19.21) folgt

$$\begin{aligned} & J(\|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^u] : \mathfrak{a}_t\|^2)\, F_u(\mathfrak{a}_t, \mathfrak{A}^{l-1}) = \\ & = J\left(\frac{|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^u, \mathfrak{a}_t]|^2}{|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^u]|^2\,|\mathfrak{a}_t|^2}\right) \frac{|[\mathfrak{a}_t, \mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^{u-1}]|^2\,|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^{u+1}]|^2}{|\mathfrak{a}_t|^2\,|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^u]|^4} = \\ & = J^*\left(\frac{|[\mathfrak{A}^l, \mathfrak{W}^u]|^2}{|\mathfrak{A}^l|^2\,|\mathfrak{W}^u|^2}\,\frac{|\mathfrak{A}^{l-1}|^2\,|\mathfrak{W}^u|^2}{|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^u]|^2}\right) \frac{|[\mathfrak{A}^l, \mathfrak{W}^{u-1}]|^2\,|\mathfrak{A}^l|^2\,|\mathfrak{W}^u|^2\,|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^{u+1}]|^2}{|\mathfrak{A}^l|^2\,|\mathfrak{W}^{u-1}|^2\,|[\mathfrak{A}^l, \mathfrak{W}^u]|^2\,|\mathfrak{A}^{l-1}|^2\,|\mathfrak{W}^{u+1}|^2}\,\cdot \\ & \cdot \frac{|\mathfrak{A}^{l-1}|^2\,|\mathfrak{W}^u|^2}{|[\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^u]|^2}\,\frac{|\mathfrak{W}^{u-1}|^2\,|\mathfrak{W}^{u+1}|^2}{|\mathfrak{W}^u|^4} = \\ & = J^*\left(\frac{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2}{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^u\|^2}\right) \frac{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{u-1}\|^2}{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2}\,\frac{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^{u+1}\|^2}{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^u\|^2}\,\frac{|\mathfrak{W}^{u-1}|^2\,|\mathfrak{W}^{u+1}|^2}{|\mathfrak{W}^u|^4}. \end{aligned} \tag{22.15}$$

Da $J^*(s)$ monoton mit $s$ zunimmt, ist

$$J^*(\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2) \le J^*\left(\frac{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2}{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^u\|^2}\right). \tag{22.16}$$

Mit $\prod_{\{\mathfrak{A}^l\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}$ werde die Multiplikation über alle $\mathfrak{A}^l = [\mathfrak{a}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_l}]$ mit $1 \le j_1 < \cdots < j_l \le h$ bezeichnet. Wegen $J^*(s) \le 1$ ist

$$0 \leq f_i(\mathfrak{A}^h) = \prod_{\{\mathfrak{A}^l\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}' J^*(\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2) \leq J^*(\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2) \leq 1. \tag{22.17}$$

Ist $E = \{P \mid \partial\psi(P, G) = 0\}$ die kritische Menge des Kondensators $H$, so ist nach Satz 15.2 die Funktion $\hat{S}_u(P)$ auf $\bar{H} - E$ erklärt. Dort gilt

$$\Delta \cdot \hat{S}_u = 2\,\frac{|\mathfrak{W}^{u-1}|^2\,|\mathfrak{W}^{u+1}|^2}{|\mathfrak{W}^u|^4}, \tag{22.18}$$

wobei $\Delta$ die Dichte des Differentials $-\partial\psi\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ ist. Aus (22.14) bis (22.18) folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{H-E} \psi(P, G)\, f_i(\mathfrak{A}^h)\,\frac{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{u-1}\|^2}{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2}\,\frac{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^{u+1}\|^2}{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^u\|^2}\,\hat{S}_u\,\Delta \leq \varsigma_{p+h-1}\{T_u(G) + (o)\}. \tag{22.19}$$

Da die assoziierten Flächen $W^{p-1}, \ldots, W^{p+h-1}$ nicht speziell degeneriert sind, und da die assoziierte Fläche $W^{p+h}$ nicht totaldegeneriert ist, sind die Projektionen $[\mathfrak{A}^l, W^u]$, $[\mathfrak{A}^{l-1}, W^u]$, $[\mathfrak{A}^l, W^{u-1}]$ mit $l = h + p - u$ für $u = p, p+1, \ldots, p+h-1$ und die Projektionen $[\mathfrak{A}^{l-1}, W^{u+1}]$ mit $l = h + p - u$ für $u = p, p+1, \ldots, p+h-2$, sowie die Projektion $[\mathfrak{A}^0, W^{p+h}] = W^{p+h}$ nicht totaldegeneriert. Die Funktionen $\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|$, $\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^u\|$, $\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{u-1}\|$ und $\|\mathfrak{A}^{l-1}, \mathfrak{W}^{u+1}\|$ sind also für $u = p, p+1, \ldots, p+h-1$ unabhängig von der Wahl der Darstellungen $\mathfrak{W}^{u-1}$, $\mathfrak{W}^u$, $\mathfrak{W}^{u+1}$ bis auf die Unbestimmtheitsstellen von $W^{u-1}$, $W^u$, $W^{u+1}$ eindeutig als Funktionen des Punktes $P \in \mathfrak{M}^{2n}$ erklärt und nicht identisch Null. Für jedes $\varepsilon > 0$ werde

$$Y_\varepsilon(\mathfrak{A}^{l-1}) = \frac{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^{u+1}\|^2 + \varepsilon}{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^u\|^2 + \varepsilon} > 0 \tag{22.20}$$

$$X_\varepsilon(\mathfrak{A}^l) = \frac{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2 + \varepsilon}{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{u-1}\|^2 + \varepsilon} > 0 \tag{22.21}$$

$$\psi_i^\varepsilon(\mathfrak{A}^h) = \binom{h}{i}^{-1} \sum_{\{\mathfrak{A}^l\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}^* \frac{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^u\|^2 + \varepsilon}{\|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{u-1}\|^2 + \varepsilon} \quad \text{mit } u = p + i \tag{22.22}$$

$$\psi_{i+1}^\varepsilon(\mathfrak{A}^h) = \binom{h}{i+1}^{-1} \sum_{\{\mathfrak{A}^{l-1}\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}^* \frac{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^{u+1}\|^2 + \varepsilon}{\|\mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^u\|^2 + \varepsilon} \quad \text{mit } u = p + i \tag{22.23}$$

gesetzt. Nach § 20 Nr. 11 ist dann

$$\sum^{**} \frac{Y_\varepsilon(\mathfrak{A}^{l-1})}{X_\varepsilon(\mathfrak{A}^l)} \geq l\,\frac{\psi_{i+1}^\varepsilon(\mathfrak{A}^h)}{\psi_i^\varepsilon(\mathfrak{A}^h)}. \tag{22.24}$$

Lässt man $\varepsilon \to 0$ streben und setzt man

$$\psi_i(\mathfrak{A}^h) = \binom{h}{i}^{-1} \sum_{\{\mathfrak{A}^l\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}^{*} \frac{\| \mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{p+i} \|^2}{\| \mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{p+i-1} \|^2}, \tag{22.25}$$

$$\psi_{i+1}(\mathfrak{A}^h) = \binom{h}{i+1}^{-1} \sum_{\{\mathfrak{A}^{l-1}\} \subset \{\mathfrak{A}^h\}}^{*} \frac{\| \mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^{p+i+1} \|^2}{\| \mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^{p+i} \|^2}, \tag{22.26}$$

so erhält man aus (22.20) bis (22.26) die Abschätzung

$$0 \leq \frac{\psi_{i+1}(\mathfrak{A}^h)}{\psi_i(\mathfrak{A}^h)} \leq \frac{1}{l} \sum^{**} \frac{\| \mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^{u+1} \|^2}{\| \mathfrak{A}^{l-1} : \mathfrak{W}^{u} \|^2} \, \frac{\| \mathfrak{A}^{l} : \mathfrak{W}^{u-1} \|^2}{\| \mathfrak{A}^{l} : \mathfrak{W}^{u} \|^2}. \tag{22.27}$$

Summiert man die Ungleichungen (22.19) gemäss der Vorschrift $\sum^{**}$, so folgt mit (22.27) die Abschätzung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{H-E} \psi(P, G) f_i(\mathfrak{A}^h) \frac{\psi_{i+1}(\mathfrak{A}^h)}{\psi_i(\mathfrak{A}^h)} \hat{S}_{p+i} \Delta \leq \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1} \{T_{p+i}(G) + (o)\} \tag{22.28}$$

für $i = 0, 1, \ldots, h-1$, wobei $(o)$ nicht von der Funktion $J(s)$ und der Polyade $\mathfrak{A}^h$ abhängt. Die Ungleichung (22.28) gilt für $\mathfrak{A}^h = \mathfrak{A}_1^h, \ldots, \mathfrak{A}_q^h$. Setzt man diese Polyaden ein, multipliziert mit $\frac{g(\mathfrak{A}_\mu^h)}{g_i^{p+i}}$ und addiert, so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{H-E} \psi(P, G) \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) \frac{\psi_{i+1}(\mathfrak{A}_\mu^h)}{\psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h)} \hat{S}_{p+i} \Delta \leq \\ &\leq \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1} \{T_{p+i}(G) + (o)\}. \end{aligned} \tag{22.29}$$

Auf der offenen Menge $M \subseteq M^{2u}$ sei eine reduzierte Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ der meromorphen Fläche $W$ gegeben. Die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $M \cap U_\alpha \neq \emptyset$ sei beliebig gewählt. Die zugehörige eigentliche Darstellung von $W^u$ sei $\mathfrak{W}^u(P, \alpha)$. Zwei Polyaden $\mathfrak{X}^{p+i}$, $\mathfrak{Y}^{p+i}$ kann man als Polyaden aus $R_{p+i}^{2k}$ auffassen; ihr äusseres Produkt ist dann $[\mathfrak{X}^{p+i}, \mathfrak{Y}^{p+i}]$. Man kann $\mathfrak{X}^{p+i}$, $\mathfrak{Y}^{p+i}$ aber auch als Vektoren des Raumes $R^{2\binom{k}{p+i}}$ auffassen. Ihr äusseres Produkt werde dann mit $\{\mathfrak{X}^{p+i}, \mathfrak{Y}^{p+i}\}$ bezeichnet. Auf $M \cap U_\alpha$ gilt nach § 15 Hilfssatz 1 und § 19 Hilfssatz 1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\text{Dichte } (\partial \omega_2(\mathfrak{W}^{p+i}) \partial \chi_{2n-2}) = \\ &= \tfrac{1}{4} |\mathfrak{W}^{p+i}|^{-4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \begin{vmatrix} (\mathfrak{W}^{p+i} \mid \mathfrak{W}^{p+i}), & (\mathfrak{W}^{p+i} \mid \mathfrak{W}_{z_\nu}^{p+i}) \\ (\mathfrak{W}_{z_\mu}^{p+i} \mid \mathfrak{W}^{p+i}), & (\mathfrak{W}_{z_\mu}^{p+i} \mid \mathfrak{W}_{z_\nu}^{p+i}) \end{vmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{4} |\mathfrak{W}^{p+i}|^{-4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} (\{\mathfrak{W}^{p+i}, \mathfrak{W}_{z_\mu}^{p+i}\} \mid \{\mathfrak{W}^{p+i}, \mathfrak{W}_{z_\nu}^{p+i}\}) \geq \end{aligned} \tag{22.30}$$

$$\geq |\mathfrak{W}^{p+i}|^{-4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu (\{\mathfrak{W}^{p+i}, \mathfrak{W}^{p+i}_{z_\mu}\} | \{\mathfrak{W}^{p+i}, \mathfrak{W}^{p+i}_{z_\nu}\}) =$$

$$= |\{\mathfrak{W}^{p+i}, \acute{\mathfrak{W}}^{p+i}\}|^2 |\mathfrak{W}^{p+i}|^{-4} =$$

$$= |\mathfrak{W}^{p+i-1}|^2 |\mathfrak{W}^{p+i+1}|^2 |\mathfrak{W}^{p+i}|^{-4}.$$

Auf $H-E$ gilt also

$$\text{Dichte } (\partial \omega_2 (\mathfrak{W}^{p+i}) \partial \chi_{2n-2}) \geq \tfrac{1}{2} \hat{S}_{p+i} \Delta. \tag{22.31}$$

Mittels Gleichung (12.25) erhält man daraus

$$\frac{1}{2\pi} \int_{H-E} \psi(P, G) \hat{S}_{p+i} \Delta \leq T_{p+i}(G). \tag{22.32}$$

Addiert man (22.29) und (22.32), so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{H-E} \psi(P, G) \left\{1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) \frac{\psi_{i+1}(\mathfrak{A}_\mu^h)}{\psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h)}\right\} \hat{S}_{p+i} \Delta \leq \\ &\leq \left\{1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1}\right\} \{T_{p+i}(G) + (o)\}. \end{aligned} \tag{22.33}$$

Aus Satz 21.1 folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{H-E} \psi(P, G) \hat{S}_{p+i} \exp\left[\frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \log \left\{f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) \frac{\psi_{i+1}(\mathfrak{A}_\mu^h)}{\psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h)}\right\}\right] \Delta \leq \\ &\leq c \left\{1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1}\right\} \{T_{p+i}(G) + (o)\}, \end{aligned} \tag{22.34}$$

wobei die Konstante $c$ nicht von der Wahl der zulässigen Menge $G$, nicht von der meromorphen Fläche $W$, nicht von ihren assoziierten Flächen $W^u$ und nicht von der Wahl der Funktion $J(s)$ abhängt. Die Gleichung (22.34) gilt zunächst für den Fall $f_i \not\equiv 0$, $\psi_i \not\equiv 0$, $\psi_{i+1} \not\equiv 0$, was auch immer erfüllt ist, ausgenommen vielleicht, dass $\psi_{p+h} \equiv 0$ ist. Im Fall $\psi_{p+h} \equiv 0$ ist (22.34) trivialerweise richtig.

Schreibt man das Integral in (22.34) wieder als Integral über ein Differential, so ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{H-E} \psi(P, G) \exp\left[\log \hat{S}_{p+i} + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \log \left\{f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) \frac{\psi_{i+1}(\mathfrak{A}_\mu^h)}{\psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h)}\right\}\right] \partial \psi \, \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} \leq \\ &\leq c \left\{1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1}\right\} \{T_{p+i}(G) + (o)\}. \end{aligned} \tag{22.35}$$

Da längs $\Gamma_r$ die Potentialfunktion $\psi(P, G) = R(G) - r = R - r$ ist, folgt aus dem Hilfssatz 1 von § 10 und Gleichung (22.35) die Abschätzung

$$\int_0^R (R-r) \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \exp \left[ \log \hat{S}_{p+i} + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{ \log f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) + \log \psi_{i+1}(\mathfrak{A}_\mu^h) - \right.$$

$$\left. - \log \psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h) \} \right] \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} \, dr \leq \tag{22.36}$$

$$\leq c \left\{ 1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1} \right\} \{ T_{p+i}(G) + (o) \}.$$

Da die assoziierten Flächen $W^{p-1}, \ldots, W^{p+h}$ nicht totaldegeneriert sind, existiert das Integral

$$\Omega_{p+i}(\Gamma_r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_r} \log \hat{S}_{p+i}(P, G_r) \, \partial^\perp \psi(P, G_r) \, \partial \chi_{2n-2} = \tag{22.37}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_r} \log \hat{S}_{p+i}(P, G) \, \partial^\perp \psi(P, G) \, \partial \chi_{2n-2}$$

für fast alle Werte $r$ in $0 \leq r \leq R(G)$, nämlich für jeden Wert $r$, für den $G_r$ eine zulässige Menge ist. Die Funktion $\Omega_{p+i}(\Gamma_r)$ ist messbar in $0 < r \leq R(G)$.

Der Index $\mu$ werde wieder festgehalten. Es ist $\mathfrak{A}_\mu^h = [\mathfrak{a}_1^{(\mu)}, \ldots, \mathfrak{a}_h^{(\mu)}]$, wobei (22.6) gilt. Für $l = h - i$ und $i = 0, 1, \ldots, h-1$ werde

$$\mathfrak{A}_{\mu o}^l = [\mathfrak{a}_1^{(\mu)}, \ldots, \mathfrak{a}_l^{(\mu)}] \tag{22.38}$$

gesetzt. Da die assoziierte Fläche $W^{p+i}$ nicht speziell degeneriert ist, ist die Projektion $[\mathfrak{A}_{\mu o}^l, W^{p+i}]$ nicht totaldegeneriert. Also existiert das Integral

$$\tilde{m}_{p+i}(\Gamma_r, \mathfrak{A}_{\mu o}^l) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_r} \log \frac{1}{\| \mathfrak{A}_{\mu o}^l : \mathfrak{W}^{p+i} \|^2} \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} \tag{22.39}$$

für fast alle Werte $r$ in $0 < r \leq R(G)$, nämlich für jeden Wert $r$, für den $G_r$ eine zulässige Menge ist. Aus (22.25) folgt

$$0 \geq \log \psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h) = -\log \binom{h}{i} + \log \sum_{\{\mathfrak{A}^l\} \subset \{\mathfrak{A}_\mu^h\}} \frac{\| \mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{p+i} \|^2}{\| \mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{p+i-1} \|^2} \geq \tag{22.40}$$

$$-\log \binom{h}{i} + \log \| \mathfrak{A}_{\mu o}^l : \mathfrak{W}^{p+i} \|^2.$$

Daher existiert auch das Integral

(22.41) $$M_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_r} \log \psi_i(\mathfrak{A}_\mu^h)\, \partial^\perp\psi\, \partial\chi_{2n-2}$$

für fast alle Werte $r$ in $0<r\leq R(G)$, nämlich für jeden Wert $r$ in $0<r\leq R(G)$, für den $G_r$ eine zulässige Menge ist. Die Funktion $M_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h)$ ist messbar in $0<r\leq R(G)$. Diese Aussagen gelten wegen

(22.42) $$\psi_h(\mathfrak{A}_\mu^h) = \sum_{\{\mathfrak{A}^0\}\subset\{\mathfrak{A}_\mu^h\}} \frac{\|\mathfrak{A}^0 : \mathfrak{W}^{p+h}\|}{\|\mathfrak{A}^0 : \mathfrak{W}^{p+h-1}\|} = 1$$

auch für $i=h$.

Nun werde

(22.43) $$J(s) = s^{-\lambda} \quad \text{mit } 0<\lambda=\lambda(G)<1$$

gewählt, wobei $\lambda=\lambda(G)$ eine später noch genauer festzulegende Funktion von $G$ ist. Nach (22.17) ist nun

(22.44) $$0 \geq \log f_i(\mathfrak{A}_\mu^h) = \{1-\lambda(G)\} \sum_{\{\mathfrak{A}^l\}\subset\{\mathfrak{A}_\mu^h\}} \log \|\mathfrak{A}^l : \mathfrak{W}^{p+i}\|^2.$$

Da keine Projektion $[\mathfrak{A}^l, \mathfrak{W}^{p+i}]$ für $i=0, 1, \ldots, h$ totaldegeneriert ist, existiert nach (22.44) und (22.39) das Integral

(22.45) $$E_i(r, \mathfrak{A}^h) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} \log f_i(\mathfrak{A}_\mu^h)\, \partial^\perp\psi\, \partial\chi_{2n-2}$$

für fast alle Werte $r$ in $0<r\leq R(G)$, nämlich für jeden Wert $r$, für den $G_r$ eine zulässige Menge ist. Die Funktion $E_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h)$ ist messbar. Übrigens folgt aus (22.39), (22.44) und (22.45) die Beziehung

(22.46) $$E_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h) = \{1-\lambda(G)\} \sum_{\{\mathfrak{A}^l\}\subset\{\mathfrak{A}_\mu^h\}}^{*} \tilde{m}_{p+i}(\Gamma_r, \mathfrak{A}^l).$$

Ist die reelle Funktion $s(P)$ fast überall auf $\Gamma_r$ erklärt, sind die Differentiale $s(P)\,\partial^\perp\psi\,\partial\psi_{2n-2}$ und $e^{s(P)}\partial^\perp\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ über $\Gamma_r$ integrierbar, so gilt

(22.47) $$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} e^{s(P)}\,\partial^\perp\psi\,\partial\chi_{2n-2} \geq e^{\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} s(P)\partial^\perp\psi\,\partial\chi_{2n-2}};$$

denn $e^x$ ist konvex und $\frac{1}{2\pi}\partial^\perp\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ hat längs $\Gamma_r$ eine positive Dichte mit dem Gesamtgewicht $\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r}\partial^\perp\psi\,\partial\chi_{2n-2} = 1$.

Aus (22.36), (22.37), (22.41), (22.46) und (22.47) folgt

$$\tag{22.48} \begin{aligned} \int_0^R (R-r) \exp \Big[ 2\,\Omega_{p+i}(\Gamma_r) + \frac{2}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{ M_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h) - M_{i+1}(r, \mathfrak{A}_\mu^h) - \\ - E_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h) \} \Big] \, dr \le \\ \le c \left\{ 1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1} \right\} \{ T_{p+i}(G) + (o) \}, \end{aligned}$$

wobei $(o)$ von der Wahl der Funktion $\lambda(G)$, den Polyaden $\mathfrak{A}_1^h, \dots, \mathfrak{A}_q^h$ ihren Gewichten $g(\mathfrak{A}_1^h), \dots, g(\mathfrak{A}_q^h)$ und den Gewichtsfunktionen $g_i^{p+i}$ unabhängig ist.

Aus (13.7), (13.40), (12.30) und (22.46) folgt

$$\tag{22.49} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) E_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h) \le \{1 - \lambda(G)\} \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{ T_{p+i}(G) + \tilde{m}_{p+i}(\gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) \}$$

für $0 < r \le R(G)$, wobei $\tilde{m}_{p+i}(\gamma, \mathfrak{A}_\mu^h)$ nicht von $r$ abhängt. Es sei

$$\tag{22.50} \lambda(G) = \frac{\binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{ T_{p+i}(G) + \tilde{m}_{p+i}(\gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) \}}{1 + \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{ T_{p+i}(G) + \tilde{m}_{p+i}(\gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) \}}.$$

Da $W^{p+i}$ für $i = 0, 1, \dots, h-1$ nicht speziell degeneriert ist, ist $T_{p+i}(G) > 0$; daher ist

$$\tag{22.51} 0 < 1 - \lambda(G) = \frac{1}{1 + \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{ T_{p+i}(G) + \tilde{m}_{p+i}(\gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) \}} < 1$$

für $i = 0, 1, \dots, h-1$. Diese Wahl von $\lambda(G)$ ist also möglich und ergibt

$$\tag{22.52} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) E_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h) < 1.$$

Mit (22.52) erhält man aus (22.48) die Abschätzung

$$\tag{22.53} \begin{aligned} \int_0^R (R-r) \exp \Big[ 2\,\Omega_{p+i}(\Gamma_r) + \frac{2}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}^h) \{ M_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h) - M_{i+1}(r, \mathfrak{A}_\mu^h) \} \Big] \, dr \le \\ \le e^2 c \left\{ 1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1} \right\} \{ T_{p+i}(G) + (o) \}. \end{aligned}$$

In dieser Abschätzung hängt nur noch $\varsigma_{p+h-1}$ von $\lambda(G)$ ab. Nach (20.57) ist aber

$$\varsigma_{p+h-1} < \frac{3}{1-\lambda} e^{k-1} \quad \text{mit} \quad \frac{3}{1-\lambda} e^{k-1} > 1. \tag{22.54}$$

Da die $u$-te assozierte Fläche $W^u$ für $u = p, \ldots, p+h-1$ nicht speziell degeneriert ist, ist für jede spezielle Polyade $\mathfrak{D}^h \neq 0$ die Projektion $[\mathfrak{D}^h, W^u]$ nicht totaldegeneriert, falls $h \leq k-u$ ist. Aus Satz 17.2 folgt

$$\bar{m}_{p+i}(\gamma, \mathfrak{D}^h) = (o) \tag{22.55}$$

gleichmässig in $\mathfrak{D}^h \neq 0$ und in $i$ für $i = 0, 1, \ldots, h-1$. Aus (22.54), (22.50) und (22.55) erhält man

$$\begin{aligned} & e^2 c \left\{1 + \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \binom{h}{i} \varsigma_{p+h-1}\right\} \{T_{p+i}(G) + (o)\} \leq \\ & \leq \frac{3}{1-\lambda(G)} e^{k+1} c \left\{1 + \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h)\right\} \{T_{p+i}(G) + (o)\} \leq \\ & 3 e^{k+1} c \left[1 + \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{T_{p+i}(G) + (o)\}\right] \left[1 + \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h)\right] \cdot \\ & \cdot [T_{p+i}(G) + (o)] \leq \\ & \leq 3 c e^{k+1} \left[1 + \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h)\right]^2 [T_{p+i}(G) + (o)]^2 \leq \\ & \leq 3 c e^{k+1} \left[1 + \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h)\right]^2 [T_{p+i}(G) + (o)]^2, \end{aligned} \tag{22.56}$$

wobei die Konstante $c$ nur, der Rest $(o)$ aber nicht von den Polyaden $\mathfrak{A}_\mu^p$, ihren Gewichten $g(\mathfrak{A}_\mu^h)$ und den Gewichtsschranken $g_i^{p+i}$ abhängt. Jedoch kann man die Konstante $c$ für jeden Index $i = 0, \ldots, h-1$ gleich gross wählen.

Für die Abkürzung $(o)$ ist eine Funktion $s(G) \geq 0$ einzusetzen, für die

$$s(G) = (o) = \begin{cases} O(1) & \text{für die Gesamtkapazität } \mathfrak{C} > 0 \\ o(R(G)) & \text{für die Gesamtkapazität } \mathfrak{C} = 0 \end{cases} \tag{22.57}$$

gilt. Die Zeichen $O(1)$ und $o(R)$ beziehen sich auf den Grenzübergang $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ bezüglich irgendeines vollständigen Systems zulässiger Mengen. Es werde das vollständige System $\mathfrak{G}_0$ aller zulässigen Mengen gewählt.

Ist die Gesamtkapazität $\mathfrak{C} > 0$, so gibt es eine Konstante $M$, sodass

$$s(G) \leq M \tag{22.58}$$

für alle zulässigen Mengen $G$ gilt. Da nach Voraussetzung die Charakteristik $T(G) \to \infty$ für $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ strebt, gibt es eine kompakte Menge $K$, sodass

$$s(G) \leq M \leq T(G) \tag{22.59}$$

$$1 + R(G) \leq 1 + \frac{1}{\mathfrak{C}} \leq \tfrac{1}{4} T^2(G) \leq \left(\frac{T_{p+i}(G) + T(G)}{2}\right)^2 \tag{22.60}$$

für alle zulässigen Mengen $G \supset K$ gilt. Die kompakte Menge $K$ erfüllt die Aussage von Anmerkung 6°.

Ist die Gesamtkapazität $\mathfrak{C} = 0$, so werde der Eichfaktor $b$ gemäss VI § 11 bestimmt. Nach (22.57) gibt es eine kompakte Menge $K_0$, sodass

$$s(G) \leq \tfrac{1}{2} b R(G) \tag{22.61}$$

für alle zulässigen Mengen $G \supset K_0$ gilt. Die kompakte Menge $K_0$ erfüllt die Aussage von Anmerkung 6°. Gemäss (22.3) strebt $T(G) \to \infty$ für $G \to \mathfrak{M}^{2n}$. Daher und wegen (22.3) gibt es eine kompakte Menge $K \supseteq K_0$ sodass

$$\begin{cases} s(G) \leq \tfrac{1}{2} b R(G) \leq T(G) \\ 8 \leq T^2(G), \quad \dfrac{16}{b} \leq T(G) \end{cases} \tag{22.62}$$

also

$$1 + R(G) \leq 1 + \frac{2}{b} T(G) \leq \tfrac{1}{4} T^2(G) \leq \left(\frac{T_{p+i}(G) + T(G)}{2}\right)^2 \tag{22.63}$$

für alle zulässigen Mengen $G \supset K$ gilt. Die kompakte Menge $K$ erfüllt die Aussage von Anmerkung 6°. Die Konstanten

$$B_i = 12\, c\, e^{k+1} \left\{1 + \binom{h}{i} \frac{1}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h)\right\}^2 + 1 \tag{22.64}$$

erfüllen die Aussage von Anmerkung 5°. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} 1 + R(G) + \int_0^{R(G)} (R(G) - r) \exp \Bigg[ 2\, \Omega_{p+i}(\Gamma_r) + \frac{2}{g_i^{p+i}} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{M_i(r, \mathfrak{A}_\mu^h) - \\ - M_{i+1}(r, \mathfrak{A}_\mu^h)\} \Bigg] dr \leq \\ \leq B_i \left(\frac{T_{p+i}(G) + T(G)}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{22.65}$$

für $G \supset K$ und $\mathfrak{C} \geq 0$. Setzt man $g_p = \sum_{i=0}^{h-1} g_i^{p+i}$, multipliziert man (22.63) mit $g_i^{p+i}/g_p$ und addiert, so erhält man wegen der Konvexität von $e^x$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&1 + R(G) + \int_0^{R(G)} (R(G) - r) \exp\left[2 \sum_{i=0}^{h-1} \frac{g_i^{p+i}}{g_p} \Omega_{p+i}(\Gamma_r) + \right. \\
&\left. + \frac{2}{g_p} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{M_0(r, \mathfrak{A}_\mu^h) - M_h(r, \mathfrak{A}_\mu^h)\}\right] dr \leq \\
&\leq \frac{1}{g_p} \sum_{i=0}^{h-1} g_i^{p+i} B_i \left(\frac{T_{p+i}(G) + T(G)}{2}\right)^2 \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{h-1} B_i \left(\frac{T_{p+i}(G) + T(G)}{2}\right)^2
\end{aligned}
\tag{22.66}
$$

für alle zulässigen Mengen $G \supset K$. Nach (22.25) und (22.42) sind

$$
\psi_0(\mathfrak{A}^h) = \frac{\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^p\|^2}{\|\mathfrak{A}^h : \mathfrak{W}^{p-1}\|^2}, \qquad \psi_h(\mathfrak{A}^h) = 1. \tag{22.67}
$$

Aus (22.41) ergibt sich damit

$$
M_0(r, \mathfrak{A}_\mu^h) = \tilde{m}_p(\Gamma_r, \mathfrak{A}_\mu^h) - \tilde{m}_{p-1}(\Gamma_r, \mathfrak{A}_\mu^h) \quad \text{und} \quad M_h(r, \mathfrak{A}_\mu^h) = 0. \tag{22.68}
$$

Aus (22.66) und (22.68) folgt für alle zulässigen Mengen $G \supset K$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&1 + R(G) + \int_0^{R(G)} (R(G) - r) \exp\left[\frac{2}{g_p} \sum_{i=0}^{h-1} g_i^{p+i} \Omega_{p+i}(\Gamma_r) + \right. \\
&\left. + \frac{2}{g_p} \sum_{\mu=1}^{q} g(\mathfrak{A}_\mu^h) \{\tilde{m}_p(\Gamma_r, \mathfrak{A}_\mu^h) - \tilde{m}_{p-1}(\Gamma_r, \mathfrak{A}_\mu^h)\}\right] dr \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{h-1} B_i \left(\frac{T_{p+i}(G) + T(G)}{2}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{22.69}
$$

Wegen $g_p = \sum_{i=0}^{h-1} g_i^{p+i}$ ist dies nach Definition 16.4 die behauptete Hauptdefektrelation, wobei die Anmerkungen 5° und 6° erfüllt sind, w. z. b. w.

Die Hauptdefektrelation wird nun für die „meisten" zulässigen Mengen $G$ gemäss § 16 Satz 16.2 ausgewertet. Nach Definition 16.5 wird dabei der Begriff der „meisten" zulässigen Mengen $G$ eingeführt. Dazu muss noch ein geeignetes $\lambda$-Mass gewählt werden. Nach Definition 16.5 ist[37]

[37] Siehe W [43] Kap. IV § 7 Seite 198 und 202.

$$\lambda(r)=\begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq r < \infty, \text{ falls } \mathfrak{C}=0 \text{ ist} \\ \dfrac{1}{(J-r)} & \text{für } 0 \leq r < J, \text{ falls } \mathfrak{C}>0 \text{ ist} \end{cases} \tag{22.70}$$

eine mögliche Wahl. Dies führt zu zwei allgemeinen Voraussetzungen:

**X. Die „meisten" zulässigen Mengen G.** *Auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *werde ein beliebiges vollständiges System* $\mathfrak{G}$ *zulässiger Mengen fest gewählt. (Nach Voraussetzung* VII *ist die Menge* $\mathfrak{G}_0$ *aller zulässiger Mengen ein vollständiges System.) Der Begriff der „meisten" zulässigen Mengen* $G$ *sei nach Definition* 16.5 *bezüglich des beliebigen, aber fest gewählten, vollständigen Systems* $\mathfrak{G}$ *und des in* (22.70) *definierten* $\lambda$*-Masses gebildet.*

**XI. Wachstum der Charakteristik.**[38] *Die meromorphe Fläche* $W$ *auf der komplexen Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *sei nicht konstant. Wenn* $T(G)$ *die Charakteristik von* $W$ *ist, wenn* $\mathfrak{C}$ *die Gesamtkapazität und* $J=\frac{1}{\mathfrak{C}}$ *die Gesamtspannung von* $\mathfrak{M}^{2n}$ *ist, wenn die Funktion* $\eta(G)$ *nach Satz* 14.1 *bestimmt wird, und wenn Voraussetzung* X *gemacht wird, so seien für jedes* $\varepsilon>0$ *und die „meisten" zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *die Abschätzungen*

$$\| \quad \eta(G) \leq \varepsilon T(G), \quad \text{falls } \mathfrak{C}=0 \text{ ist}, \tag{22.71}$$

$$\left.\begin{aligned} &\| \quad \eta(G) \leq \varepsilon T(G) && (22.72) \\ &\| \quad \log \frac{1}{J-R(G)} \leq \varepsilon T(G) && (22.73) \end{aligned}\right\}, \quad \text{falls } \mathfrak{C}>0 \text{ ist},$$

*gültig.*

Wegen (22.73) strebt im Fall $\mathfrak{C}>0$ die Charakteristik

$$T(G) \to \infty \qquad \text{für } G \to \mathfrak{M}^{2n}. \tag{22.74}$$

Da die meromorphe Fläche $W$ nichtkonstant ist, gilt (22.74) auch im Fall $\mathfrak{C}=0$. Die Voraussetzung XI ist aber auch für $p>1$ erfüllt:

**Satz 22.** Voraussetzung XI für assoziierte Flächen.[39]

**Voraussetzung.** *Die allgemeinen Voraussetzungen* I *bis* XI *werden gemacht. Die* $(p+1)$*-te assoziierte Fläche* $W^{p+1}$ *von* $W$ *sei nicht totaldegeneriert. Die* $u$*-te assoziiert Fläche* $W^u$ *von* $W$ *sei für* $u=1,\ldots,p$ *nicht speziell degeneriert.*

---

[38] Siehe W [43] Kap. IV § 7 Seite 201.

[39] Siehe W [43] Kap. IV § 8 Seite 203. Dort wird jedoch noch $\lim\limits_{G\to\mathfrak{M}^{2n}} T_p(G)=\infty$ vorausgesetzt.

**Behauptung.** *Die Voraussetzung* XI *gilt auch für die p-te assoziierte Fläche* $W^p$, *das heisst, für jedes* $\varepsilon > 0$ *und die „meisten" zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *gilt*

(22.75) $$\| \quad \eta(G) \leq \varepsilon T_p(G), \quad \text{falls } \mathfrak{C} = 0 \text{ ist},$$

(22.76) $$\| \quad \eta(G) \leq \varepsilon T_p(G)$$

(22.77) $$\left\| \log \frac{1}{J - R(G)} \leq \varepsilon T_p(G) \right\}, \quad \text{falls } \mathfrak{C} > 0 \text{ ist}.$$

*Insbesondere strebt*

(22.78) $$T_p(G) \to \infty \quad \text{für } G \to \mathfrak{M}^{2n} \qquad (G \in \mathfrak{G}).$$

**Beweis.** Zusätzlich wird behauptet, dass es eine Konstante $c$ gibt, sodass

(22.79) $$\| T(G) \leq c\, T_p(G)$$

für die „meisten" zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$ gilt. Die Behauptung ist für $p = 1$ richtig. Sie sei schon für $p - 1$ bewiesen. Die Hauptdefektrelation werde für den Fall $h = q = 1$ angewandt. Der Vektor $\mathfrak{A}_1^1 = \mathfrak{a} \neq 0$ sei beliebig aber fest gewählt und habe das Gewicht $g(\mathfrak{a}) = 1$. Als zugehörige Gewichtsschranke kann man $g_0^p = 1$ wählen. Da die Voraussetzungen der Hauptdefektrelation erfüllt sind, gilt

(22.80) $$\tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{a}) - \tilde{m}_{p-1}(\Gamma, \mathfrak{a}) + \Omega_p(\Gamma) = \tfrac{1}{2}\, \omega \left( B_0 \frac{(T_p + T)^2}{4} \right).$$

Wegen (13.29) ergibt das

(22.81) $$2\, \Omega_p(\Gamma) = \omega_{B_0}\left(\tfrac{1}{4}(T_p + T)^2\right).$$

Nach Satz 16.2 gilt dann für jede Zahl $\varkappa > 1$ und die „meisten" zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$ die Abschätzung

(22.82) $$\| 2\, \Omega_p(\Gamma) \leq 2 \varkappa^2 \log \frac{T_p(G) + T(G)}{2} + (1 + \varkappa) \log \lambda(r).$$

Setzt man den Wert von $\lambda(r)$ aus (22.70) ein und wählt $\varkappa = 2$, so wird

(22.83) $$\| \Omega_p(\Gamma) \leq 4 \log \{T_p(G) + T(G)\} + 3 \log \frac{1}{J - R(G)}, \quad \text{falls } \mathfrak{C} > 0 \text{ ist}.$$

(22.84) $$\| \Omega_p(\Gamma) \leq 4 \log \{T_p(G) + T(G)\}, \qquad \text{falls } \mathfrak{C} = 0 \text{ ist}.$$

Die Anzahlfunktion der $p$-ten stationären Indexfläche sei $V_p(G)$. Da die $(p+1)$-te assoziierte Fläche nicht totaldegeneriert ist, erhält man mittels der Differenzenformel (Satz 15.3) für alle zulässigen Mengen $G$ die Gleichung

(22.85) $$V_p(G) + T_{p-1}(G) - 2\, T_p(G) + T_{p+1}(G) = \Omega_p(\Gamma) - \Omega_p(\gamma) + \eta(G).$$

Aus (22.85), (22.83) und der Induktionsvoraussetzung, das heisst, aus (22.76) und (22.77) für $p-1$ statt $p$ folgt, falls $\mathfrak{C} > 0$ ist,

$$\begin{Vmatrix} V_p(G) + T_{p-1}(G) - 2\,T_p(G) + T_{p+1}(G) \le \\ \le 4 \log \{T_p(G) + T(G)\} + 4\,\varepsilon\, T_{p-1}(G) - \Omega_p(\gamma). \end{Vmatrix} \tag{22.86}$$

Entsprechend gilt im Fall $\mathfrak{C} = 0$ die Abschätzung

$$\begin{Vmatrix} V_p(G) + T_{p-1}(G) - 2\,T_p(G) + T_{p+1}(G) \le \\ \le 4 \log \{T_p(G) + T(G)\} + T_{p-1}(G) - \Omega_p(\gamma). \end{Vmatrix} \tag{22.87}$$

Nun soll (22.78) bewiesen werden. Im Fall $\mathfrak{C} = 0$ ist (22.78) deshalb richtig, weil die assoziierte Fläche $W^p$ nicht speziell degeneriert, also erst recht nicht konstant ist. Nun sei $\mathfrak{C} > 0$. Nach Satz 17.3 gibt es eine Konstante $M > 0$, sodass

$$-\,\Omega_p(\gamma) \le M \qquad (\mathfrak{C} > 0) \tag{22.88}$$

für alle zulässigen $G$ ist. Aus (22.86) und (22.88) folgt

$$\| \; T_{p-1}(G) \le 2\,T_p(G) + 4 \overset{+}{\log}\, T_p(G) + 4 \overset{+}{\log}\, T(G) + 4\,\varepsilon\, T_{p-1}(G) + M + 4 \log 2. \tag{22.89}$$

Nach Induktionsvoraussetzung, also nach (22.79) für $p-1$ statt $p$, gilt mit einer neuen Konstanten $M_1$ die Abschätzung

$$\| \; T_{p-1}(G) \le 2\,T_p(G) + 4 \overset{+}{\log}\, T_p(G) + 4 \overset{+}{\log}\, T_{p-1}(G) + 4\,\varepsilon\, T_{p-1}(G) + M_1. \tag{22.90}$$

Wegen $\overset{+}{\log}\, x \le \frac{x}{8} + \log 8$ ergibt das für $\varepsilon = \frac{1}{16}$ die Abschätzung

$$\| \; \tfrac{1}{4}\, T_{p-1}(G) \le 3\,T_p(G) + M_1 + 8 \log 8. \tag{22.91}$$

Da nach Induktionsvoraussetzung $T_{p-1}(G) \to \infty$ für $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ strebt, ist auch

$$\varliminf_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} T_p(G) = \infty.$$

Da $T_p(G)$ monoton ist, strebt $T_p(G) \to \infty$ für $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ mit $G \in \mathfrak{G}_0$. Damit ist die Behauptung (22.78) bewiesen. Es gibt eine kompakte Menge $K$, sodass für alle zulässigen Mengen $G \supset K$ die Abschätzung

$$-\,\Omega_p(\gamma) \le M \le T_p(G) \qquad (\mathfrak{C} > 0) \tag{22.92}$$

besteht.

Im Fall $\mathfrak{C} = 0$ bestimmt man den Eichfaktor $b > 0$ nach VI aus § 12. Gemäss Satz 17.3 und Satz 11.4 gibt es eine kompakte Menge $K$, sodass

(22.93)
$$-\Omega_p(\gamma) \leq \frac{b}{2} R(G) \leq T_p(G)$$

für alle zulässigen Mengen $G \supset K$ gilt. Im Fall $\mathfrak{C} > 0$ und im Fall $\mathfrak{C} = 0$ ergibt sich aus (22.86), (22.87), (22.92) und (22.93) die Abschätzung

(22.94)
$$\begin{aligned} \| T_{p-1}(G) &\leq 3\, T_p(G) + 4 \log \{T_p(G) + T(G)\} + 4\,\varepsilon\, T_{p-1}(G) \leq \\ &\leq 7\, T_p(G) + 4 \overset{+}{\log}\, T(G) + 4\,\varepsilon\, T_{p-1}(G) + 4 \log 2. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

(22.95)
$$T(G) \leq c\, T_{p-1}(G).$$

Also wird

(22.96)
$$\begin{aligned} \| T_{p-1}(G) &\leq 7\, T_p(G) + 4 \overset{+}{\log}\, T_{p-1}(G) + 4\,\varepsilon\, T_{p-1}(G) + 4 \log 2c \leq \\ &\leq 7\, T_p(G) + \tfrac{1}{2}\, T_{p-1}(G) + 4\,\varepsilon\, T_{p-1}(G) + 4 \log 16\, c. \end{aligned}$$

Wegen $4 \log 16\, c = o(T_{p-1}(G))$ folgt

(22.97)
$$\| \tfrac{1}{2}\, T_{p-1}(G) \leq 7\, T_p(G) + 5\,\varepsilon\, T_{p-1}(G).$$

Setzt man $\varepsilon = \frac{1}{20}$, so wird

(22.98)
$$T(G) \leq c\, T_{p-1}(G) \leq 28\, c\, T_p(G).$$

Damit ist die Behauptung (22.79) bewiesen. Ausserdem folgt

(22.99)
$$\| \quad \eta(G) \leq \frac{\varepsilon}{28}\, T_{p-1}(G) \leq \varepsilon\, T_p(G) \quad \text{für } \mathfrak{C} \geq 0,$$

(22.100)
$$\| \quad \log \frac{1}{J - R(G)} \leq \frac{\varepsilon}{28}\, T_{p-1}(G) \leq \varepsilon\, T_p(G) \quad \text{für } \mathfrak{C} = 0.$$

Damit ist die Induktion einen Schritt weitergeführt, w. z. b. w.

Die Charakteristiken $T_1, \ldots, T_p$ haben dieselbe Wachstumsordnung, wie der folgende Satz besagt:

**Satz 22.3.** Das Wachstum der Charakteristiken $T_1, \ldots, T_p$.[40]

**Voraussetzung.** *Die allgemeinen Voraussetzungen* I *bis* XI *werden gemacht. Die* $(p+1)$*-te assoziierte Fläche* $W^{p+1}$ *von* $W$ *sei nicht totaldegeneriert. Für* $u = 1, 2, \ldots, p$ *sei die* $u$*-te assoziierte Fläche* $W^u$ *von* $W$ *nicht speziell degeneriert. Die Zahlen* $\varkappa > 1$ *und* $d$ *seien beliebig gewählt.*

[40] Siehe W [43] Kap. IV § 8 Seite 201.

**Behauptung.** 1. *Für die „meisten" zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *gilt*

(22.101) $\quad \| \, V_p(G) + T_{p-1}(G) - 2\, T_p(G) + T_{p+1}(G) \leq \varkappa^2 \log T_p(G) + \eta(G) + (o) + d$

*falls* $\mathfrak{C} = 0$ *ist, und*

(22.102) $\quad \| \, V_p(G) + T_{p-1}(G) - 2\, T_p(G) + T_{p+1}(G) \leq \varkappa^2 \log T_p(G) + (1+\varkappa) \log \dfrac{1}{J - R(G)} + d,$

*falls* $\mathfrak{C} > 0$ *ist.*

2. *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *und die „meisten" zulässigen Mengen* $G$, *gilt*

(22.103) $\quad \| \, V_p + T_{p-1} + T_{p+1} \leq (2+\varepsilon)\, T_p,$

(22.104) $\quad \| \, V_p \leq (2+\varepsilon)\, T_p,$

(22.105) $\quad \| \, T_{p-1} \leq (2+\varepsilon)\, T_p,$

(22.106) $\quad \| \, T_{p+1} \leq (2+\varepsilon)\, T_p,$

(22.107) $\quad \| \, T_p \leq (2+\varepsilon)^{p-1}\, T,$

(22.108) $\quad \| \, T \leq (2+\varepsilon)^{p-1}\, T_p.$

**Beweis.** Nach (22.81) und (22.79) ist

(22.109) $$2\, \Omega_p(\Gamma) = \omega_B(T_p^2) \quad \text{mit } B = B_0 \left(\frac{1+c}{2}\right)^2.$$

Nach Satz 16.2 gilt für jede Zahl $\varkappa > 1$ und $d_0$ die Abschätzung

(22.110) $$\| \, 2\, \Omega_p(\Gamma) \leq 2\, \varkappa^2 \log T_p(G) + (1+\varkappa) \log \lambda(r) + d_0.$$

Nach Satz 17.3 und Satz 11.4 gilt

(22.111) $$\| - \Omega_p(\gamma) \leq (o) = \begin{cases} M < \varepsilon\, T_p(G), & \text{falls } \mathfrak{C} > 0 \text{ ist} \\ \dfrac{\varepsilon\, b}{2} R(G) < \varepsilon\, T_p(G), & \text{falls } \mathfrak{C} = 0 \text{ ist} \end{cases}$$

für die „meisten" zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$. Aus der Differenzenformel (22.85) sowie aus (22.110), (22.111) und (22.70) folgen die behaupteten Abschätzungen (22.101) und (22.102), wenn man im Fall $\mathfrak{C} = 0$ für $d_0$ den Wert $d_0 = d$ und im Fall $\mathfrak{C} > 0$ für $d_0$ den Wert $d_0 = d - M$ wählt.

Wegen $\| \, \varkappa^2 \log T_p(G) \leq \varepsilon\, T_p(G)$, wegen (22.111) und wegen (22.75) bis (22.77) ergeben sich aus (22.101) und (22.102) für $d = 0$ die behaupteten Abschätzungen (22.103) bis (22.108), w. z. b. w.

Sind die Voraussetzungen von Satz 22.3 für den grösstmöglichen Wert von $p$, also für $p=k-1$ erfüllt, so haben die Charakteristiken $T_1, \ldots, T_{k-1}$ dieselbe Wachstumsordnung $T$; denn es gilt

$$\| \frac{1}{(2+\varepsilon)^{k-2}} T(G) \le T_p(G) \le (2+\varepsilon)^{k-2} T(G) \tag{22.112}$$

für jedes $\varepsilon>0$, die „meisten" zulässigen Mengen $G$ und $p=1, \ldots, k-1$.

## § 23. Der zweite Hauptsatz

Nun ist es nicht mehr schwer den 2. Hauptsatz zu beweisen. Zunächst wird noch ein vorbereitender Satz bewiesen, aus dem sich sofort der 2. Hauptsatz für die assoziierten Flächen und als Spezialfall $p=1$ der 2. Hauptsatz für meromorphe Flächen ergibt. Die Beweise verlaufen alle ganz analog zu W [43] Kap. V § 12.

**Satz 23.1.** Eine Defektrelation.[41]

**Voraussetzung.** 1. *Die Zahlen $p$ und $h$ mit $0 \le h \le k-1$ und $1 \le p \le k-h$ seien gegeben. Die Räume $\{\mathfrak{A}_1^h\}, \ldots, \{\mathfrak{A}_q^h\}$ mögen sich im Sinne von* § 21 Nr. 8 *bezüglich der Indizes $1, 2, \ldots, p$ in allgemeiner Lage befinden. Für $i=0, 1, \ldots, h-1$ werde*

$$D_i^{p+i} = \sum_{\lambda=0}^{h-i-1} \binom{p+i}{h-\lambda} \binom{k-p-i}{\lambda} > 0 \tag{23.1}$$

*gesetzt.*

2. *Die allgemeinen Voraussetzungen* I, II *aus* § 4, III, IV, V *aus* § 7, VI, VII *aus* § 11, VIII *aus* § 12, IX *aus* § 19, X *und* XI *aus* § 22 *werden gemacht.*

3. *Für jeden Index $u=1, 2, \ldots, p+h-1$ sei die $u$-te assoziierte Fläche $W^u$ der in* XI *gegebenen meromorphen Fläche $W$ nicht speziell degeneriert und habe die Charakteristik $T_u(G)$. Die Funktionen $\tilde{m}_u(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h)$ seien durch* (13.2) *und die Funktionen $V_u(G)$ durch Definition* 15.1 *erklärt. Die $(p+h)$-te assoziierte Fläche $W^{p+h}$ sei nicht totaldegeneriert und habe die Charakteristik $T_{p+h}(G)$.*

**Behauptung.** *Für jedes $\varepsilon>0$ und die „meisten" zulässigen Mengen $G$ gilt*

$$\begin{aligned} \| \sum_{u=1}^{p} \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{p+i} V_{u+i}(G) + \sum_{\mu=1}^{q} \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) + \sum_{\varrho=1}^{p} \binom{\varrho-1}{\varrho-p} \binom{k-\varrho-1}{h-\varrho-p} T_\varrho(G) \le \\ \le \left\{ \binom{k}{h} + \varepsilon \right\} T_p(G). \end{aligned} \tag{23.2}$$

[41] Für $n=1$ siehe W [43] Kap. V § 12 Seite 264–267.

**Beweis.** Die Zahl $u$ werde in $1 \le u \le p$ fest gewählt. Die Hauptdefektrelation soll für $u$ statt $p$ angewandt werden. Wählt man die Gewichte $g(\mathfrak{A}_\mu^h) = 1$ und die Gewichtsschranken $g_i^{u+i} = D_i^{u+i}$, so ist die Voraussetzung von Satz 22.1 gemäss Anmerkung 1° erfüllt. Also gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^{q} \{\tilde{m}_u(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) - \tilde{m}_{u-1}(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h)\} + \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i}\, \Omega_{u+i}(\Gamma) \le \\
&\le \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i}\, \omega\left( \sum_{i=0}^{h-1} B_i \frac{(T_{u+i}(G) + T(G))^2}{4} \right).
\end{aligned} \tag{23.3}
$$

Nach Satz 16.2, Gleichung (22.70) und (22.73) folgt daraus mit $\varkappa = 2$ und $d = 0$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\| &\sum_{\mu=1}^{q} \{\tilde{m}_u(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) - \tilde{m}_{u-1}(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h)\} + \sum_{i=1}^{h-1} D_i^{u+i}\, \Omega_{u+1}(\Gamma) \le \\
&\le \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i} \left\{ 4 \log \left[ \sum_{i=0}^{h-1} B_i \frac{(T_{u+i}(G) + T(G))^2}{4} \right] + 3\,\varepsilon\, T(G) \right\}.
\end{aligned} \tag{23.4}
$$

Wegen $1 \le u + i + 1 \le p + h$ ist die assoziierte Fläche $W^{u+i+1}$ nicht totaldegeneriert. Aus (23.4) und der Differenzenformel (15.25) für $u + i$ statt $p$ folgt

$$
\begin{aligned}
\| &\sum_{\mu=1}^{q} \{\tilde{m}_u(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) - \tilde{m}_{u-1}(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h)\} + \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i}\, V_{u+i}(G) + \\
&+ \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i} \{T_{u+i-1}(G) - 2\, T_{u+i}(G) + T_{u+i+1}(G) - \eta(G)\} \le \\
&\le \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i} \left\{ 2 \log \left[ \sum_{i=0}^{h-1} B_i (T_{u+i}(G) + T(G)) \right] + 3\,\varepsilon\, T(G) - \Omega_{u+i}(\gamma) \right\}.
\end{aligned} \tag{23.5}
$$

Wegen (22.71), (22.72), (22.107) und (22.111) folgt daraus mit einem neuen, aber beliebigen $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\| &\sum_{\mu=1}^{q} \{\tilde{m}_u(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) - \tilde{m}_{u-1}(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h)\} + \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i}\, V_{u+i}(G) + \\
&+ \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i} \{T_{u+i-1}(G) - 2\, T_{u+i}(G) + T_{u+i+1}(G)\} \le \varepsilon\, T(G).
\end{aligned} \tag{23.6}
$$

Summiert man über $u = 1, \ldots, p$, so ergeben dieselben Umformungen wie in W [43] Kap. V § 12 die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\| &\sum_{\mu=1}^{q} \tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^h) + \sum_{u=1}^{p} \sum_{i=0}^{h-1} D_i^{u+i}\, V_{u+i}(G) + \sum_{\varrho=p}^{p+h} \binom{\varrho - 1}{\varrho - p} \binom{k - \varrho - 1}{h - \varrho + p} T_\varrho(G) \le \\
&\le \binom{k}{h} T_p(G) + p\, \varepsilon\, T(G).
\end{aligned} \tag{23.7}
$$

Mit $\varepsilon=1$ folgt aus (22.108) die Abschätzung $\| T(G) \leq 3^{p-1} T_p(G)$. Ersetzt man also in (23.7) das beliebige $\varepsilon>0$ durch das beliebige $\varepsilon p^{-1} 3^{1-p}$, so erhält man die behauptete Abschätzung (23.2), w. z. b. w.

Ist insbesondere $h=k-p$ und $A_\mu^p = {}^*\mathfrak{A}_\mu^{k-p}$, so ist

$$\sum_{\varrho=p}^{k} \binom{\varrho-1}{\varrho-p}\binom{k-\varrho-1}{k-\varrho} T_\varrho(G)=0, \tag{23.8}$$

$$D_i^{u+i} = \sum_{\lambda=0}^{k-p-i-1} \binom{u+i}{k-p-\lambda}\binom{k-u-i}{\lambda}. \tag{23.9}$$

Wegen $\| \mathfrak{A}_\mu^{k-p} : \mathfrak{W}^p \| = \| A_\mu^p, \mathfrak{W}^p \|$ besteht nach (12.21) und (13.2) die Beziehung

$$\tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}_\mu^{k-p}) = m_p(\Gamma, A_\mu^p). \tag{23.10}$$

Ausserdem ist nach dem 1. Hauptsatz

$$m_p(\Gamma, A_\mu^h) \geq m_p(\Gamma, A_\mu^h) - m_p(\gamma, A_\mu^h) = T_p(G) - N_p(G, A_\mu^h). \tag{23.11}$$

Aus (23.2), (23.9), (23.10) und (23.11) folgt

$$\| \sum_{\mu=1}^{q} m_p(\Gamma, A_\mu^h) + \sum_{u=1}^{p}\sum_{i=0}^{h-1}\sum_{\lambda=0}^{k-p-i-1} \binom{u+i}{k-p-\lambda}\binom{k-u-i}{\lambda} V_{u+i}(G) \leq \left\{\binom{k}{p}+\varepsilon\right\} T_p(G). \tag{23.12}$$

Mit (23.12) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\| \left\{q-\binom{k}{p}-\varepsilon\right\} T_p(G) + \sum_{u=1}^{p}\sum_{i=0}^{k-p-1}\sum_{\lambda=0}^{k-p-i-1} \binom{u+i}{k-p-\lambda}\binom{k-u-i}{\lambda} V_{u+i}(G) \leq \\ &\leq \sum_{\mu=1}^{q} N_p(G, A_\mu^p). \end{aligned} \tag{22.13}$$

Damit ist der 2. Hauptsatz bewiesen:

**Satz 23.3.** Der 2. Hauptsatz für assoziierte Flächen.[42]

**Voraussetzung.** 1. *Die allgemeinen Voraussetzungen* I, II *aus* § 4, III, IV, V *aus* § 7, VI, VII *aus* § 11, VIII *aus* § 12, IX *aus* § 19, X *und* XI *aus* § 22 *werden gemacht.*

2. *Für jeden Index* $u=1,\dots,k$ *sei die* $u$-*te assoziierte Fläche* $W^u$ *der in* XI *gegebenen meromorphen Fläche* $W$ *nicht speziell degeneriert.*

3. *Für jeden Index* $u=1,\dots,k-1$ *werde die Anzahlfunktion* $V_u(G)$ *der* $u$-*ten stationären Indexfläche gemäss Definition* 15.1 *gebildet.*

---

[42] Für $n=1$ siehe W [43] Kap. V § 12 Seite 268.

4. *Die p-te assoziierte Fläche habe die Charakteristik $T_p(G)$, die Schmiegungsfunktion $m_p(\Gamma, A^p)$ und die Anzahlfunktion $N_p(G, A^p)$.*

5. *Die speziellen kontravarianten Polyaden $A_1^p, \ldots, A_q^p$ seien von Null verschieden und haben die dualen kovarianten Bilder $^*A_1^p, \ldots, {}^*A_q^p$. Die Räume $\{^*A_1^p\}, \ldots, \{^*A_q^p\}$ mögen sich in allgemeiner Lage bezüglich der Indizes $1, \ldots, p$ befinden.*

**Behauptung.** *Für jedes $\varepsilon > 0$ und die „meisten" zulässigen $G \in \mathfrak{G}$ gilt*

$$\begin{aligned} \| \sum_{\mu=1}^{q} m_p(\Gamma, A_\mu^p) + \sum_{u=1}^{p} \sum_{i=0}^{k-p-1} \sum_{\lambda=0}^{k-p-i-1} \binom{u+i}{k-p-\lambda} \binom{k-u-i}{\lambda} V_{u+i}(G) \leq \\ \leq \left\{ \binom{k}{p} + \varepsilon \right\} T_p(G), \end{aligned} \tag{23.14}$$

$$\begin{aligned} \| \left( q - \binom{k}{p} - \varepsilon \right) T_p(G) + \sum_{u=1}^{p} \sum_{i=0}^{k-p-1} \sum_{\lambda=0}^{k-p-i-1} \binom{u+i}{k-p-\lambda} \binom{k-u-i}{\lambda} V_{u+i}(G) \leq \\ \leq \sum_{\mu=1}^{q} m_p(\Gamma, A_\mu^p) \leq \left( \binom{k}{p} + \varepsilon \right) T_p(G), \end{aligned} \tag{23.15}$$

$$\| \sum_{\mu=1}^{q} m_p(\Gamma, A_\mu^p) \leq \left( \binom{k}{p} + \varepsilon \right) T_p(G), \tag{23.16}$$

$$\| \left( q - \binom{k}{p} - \varepsilon \right) T_p(G) \leq \sum_{\mu=1}^{q} N_p(G, A_\mu^p). \tag{23.17}$$

Im Spezialfall $p = 1$ wird

$$\sum_{u=1}^{p} \sum_{i=0}^{k-p-1} \sum_{\lambda=0}^{k-p-i-1} \binom{u+i}{k-p-\lambda} \binom{k-u-i}{\lambda} V_{u+i}(G) = \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) V_i(G). \tag{23.18}$$

Woraus sich mit § 21 Nr. 9 der zweite Hauptsatz für meromorphe Flächen ergibt:

**Satz 23.4.** Der 2. Hauptsatz für meromorphe Flächen.[42]

**Voraussetzung.** 1. *Die allgemeinen Voraussetzungen* I, II *aus* § 4, III, IV, V *aus* § 7, VI, VII *aus* § 11, VIII *aus* § 12, IX *aus* § 19, X *und* XI *aus* § 22 *werden gemacht.*

2. *Für jeden Index $p = 1, \ldots, k$ sei die p-te assoziierte Fläche $W^p$ der in* XI *gegebenen meromorphen Fläche $W$ nicht speziell degeneriert.*

3. *Für jeden Index $p = 1, \ldots, k-1$ werde die Anzahlfunktion $V_p(G)$ der p-ten stationären Indexfläche gemäss Definition* 15.1 *gebildet.*

4. *Die meromorphe Fläche $W$ habe die Charakteristik $T(G)$, die Anzahlfunktion $N(G, \vec{\alpha})$ und die Schmiegungsfunktion $m(\Gamma, \vec{\alpha})$.*

5. *Von den kontravarianten Vektoren $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_q$ seien je $k$ linear unabhängig.*

**Behauptung.** *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *und die „meisten" zulässigen* $G \in \mathfrak{G}$ *gilt*

$$\| \sum_{\mu=1}^{q} m(\Gamma, \vec{\alpha}_\mu) + \sum_{p=1}^{k-1} (k-p) V_p(G) \leq (k+\varepsilon) T(G), \tag{23.19}$$

$$\| (q-k-\varepsilon) T(G) + \sum_{p=1}^{k-1} (k-p) V_p(G) \leq \sum_{\mu=1}^{q} N(G, \vec{\alpha}). \tag{23.20}$$

Bei dieser Formulierung des 2. Hauptsatzes ist die Abhängigkeit vom Differential $\partial B_{n-1}$ nicht auf ein Mindestmass herabgedrückt. Dies geschieht jedoch in der folgenden Formulierung, die etwas weniger als Satz 23.4 aussagt.

**Satz 23.5.** Der zweite Hauptsatz. [42]

A. *Voraussetzungen, die nicht vom Differential* $\partial B_{n-1}$ *abhängen:*

1. *Die allgemeinen Voraussetzungen* I, II *aus* § 4, III, IV, V *aus* § 7, VI, VII *aus* § 11, X *und* XI *aus* § 22 *werden gemacht.*

2. *Die meromorphe Fläche* $W$, *die in* XI *gegeben ist, sei nicht degeneriert und habe die Charakteristik* $T(G)$, *die Anzahlfunktion* $N(G, \vec{\alpha})$ *und die Schmiegungsfunktion* $m(\Gamma, \vec{\alpha})$.

3. *Von den* $q$ *kontravarianten Vektoren* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_q$ *seien je* $k$ *linear unabhängig.*

B. *Voraussetzungen, die vom Differential* $\partial B_{n-1}$ *abhängen:*

4. *Die allgemeinen Voraussetzungen* VIII *aus* § 12 *und* IX *aus* § 19 *werden gemacht.*

5. *Für jeden Index* $p = 2, \ldots, k$ *sei die* $p$*-te assoziierte Fläche* $W^p$ *von* $W$ *nicht speziell degeneriert.*

**Behauptung.** *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *und die „meisten" zulässigen offenen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *gilt der zweite Hauptsatz*

$$\| \sum_{\mu=1}^{q} m(\Gamma, \vec{\alpha}_\mu) \leq (k+\varepsilon) T(G), \tag{23.21}$$

$$\| (q-k-\varepsilon) T(G) \leq \sum_{\mu=1}^{q} N(\Gamma, \vec{\alpha}). \tag{23.22}$$

Aus dem 2. Hauptsatz lassen sich die üblichen Schlüsse ziehen, so zum Beispiel: Der Defekt zum kontravarianten Vektor $\vec{\alpha}$ sei

$$\delta(\vec{\alpha}) = \varliminf_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} \frac{m(\Gamma, \vec{\alpha})}{T(G)}. \tag{23.23}$$

Es ist $0 \leq \delta(\vec{\alpha}) \leq 1$. Unter den Voraussetzungen des 2. Hauptsatzes gilt

$$\sum_{\mu=1}^{q} \delta(\vec{\alpha}_\mu) \leq k. \tag{23.24}$$

Die Konstante $k$ lässt sich ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht verbessern.[43] Ist die Schnittzahl $\nu(P, \vec{\mathfrak{a}}) = 0$, das heisst, schneidet die meromorphe Fläche $W$ die Ebene $(\mathfrak{w}, \vec{\mathfrak{a}}) = 0$ nicht, so ist nach dem 1. Hauptsatz wegen $m(\gamma, \vec{\mathfrak{a}}) = (o)$ der Defekt $\delta(\vec{\mathfrak{a}}) = 1$. Sind also die Voraussetzungen des 2. Hauptsatzes für die meromorphe Fläche $W$ und die Vektoren $\vec{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \vec{\mathfrak{a}}_{k+1}$ mit $q = k+1$ erfüllt, so schneidet die meromorphe Fläche $W$ wenigstens eine der Ebenen $(\mathfrak{w}, \vec{\mathfrak{a}}_\mu) = 0$. Dies ist eine Verallgemeinerung des kleinen Picardschen Satzes.[44]

Der zweite Hauptsatz für meromorphe Flächen und die Theorie, die zu seinem Beweis entwickelt wurde, steht in enger, fast überraschend enger Analogie zum zweiten Hauptsatz für meromorphe Kurven, ja zur ganzen Theorie, wie sie in W [43] dargestellt wurde. Trotz dieser formalen Analogie treten gegenüber einer Veränderlichen zwei wesentlich neue, grundsätzliche Gesichtspunkte hinzu. Der erste ist die Massbestimmung $\partial\chi_{2n-2}$, die den Flächeninhalt der Nullstellenflächen misst, und der Man-

[43] Dies zeigt das folgende Beispiel: Es sei $\mathfrak{M}^{2n}$ der euklidische Raum, $\partial\chi_{2n-2} = \partial v_{2n-2}$ seine euklidische Massbestimmung. Das Differential $\partial B_{n-1}$ sei

$$\partial B_{n-1} = \partial z_2 \ldots \partial z_n.$$

Dann ist

$$f' = \frac{\partial}{\partial z_1} f = f_{z_1}$$

die partielle Ableitung nach $z_1$. Im Raum $R_1^{2k}$ wird ein Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ gewählt. Sein duales Koordinatensystem sei $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$. Von den Vektoren $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$, $\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \vec{\varepsilon}_k$ sind je $k$ linear unabhängig. Die meromorphe Fläche, die die einheitliche Darstellung

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{k} e^{z_1^{\nu-1}} \mathfrak{e}_\nu$$

hat, ist nicht degeneriert. Gemäss W [43] Kap. I § 7 Seite 46 sind dann auch die assoziierten Flächen $W^2, \ldots, W^k$ nicht speziell degeneriert. Nach der Übersetzungstabelle im folgenden Paragraphen und Satz 24.1 sind die Voraussetzungen des 2. Hauptsatzes erfüllt. Also gilt

$$\sum_{\nu=1}^{k} \delta(\vec{\varepsilon}_\nu) + \delta(\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \vec{\varepsilon}_k) \leq k.$$

Wegen $(\vec{\varepsilon}_\nu, \mathfrak{w}(\mathfrak{z})) = e^{z_1^{\nu-1}} \neq 0$ ist $\delta(\vec{\varepsilon}_\nu) = 1$, das heisst

$$\sum_{\nu=1}^{k} \delta(\vec{\varepsilon}_\nu) + \delta(\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \vec{\varepsilon}_k) = k$$

mit

$$\delta(\vec{\varepsilon}_\nu) = 1 \qquad \text{für } \nu = 1, \ldots, k$$

und mit

$$\delta(\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \vec{\varepsilon}_k) = 0.$$

[44] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. V § 12 Seite 269.

nigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ den Charakter einer „verallgemeinerten KÄHLERschen Mannigfaltigkeit" verleiht. Während diese Massbestimmung für den 1. Hauptsatz ausreicht, erfordert der 2. Hauptsatz als zweiten neuen Gesichtspunkt das „analytische Richtungsfeld" $\partial B_{n-1}$ nach dem „differenziert" wird. Beide Differentiale können in einem gewissen Ausmass frei gewählt werden, und zwar, was den 1. Hauptsatz und die Differenzenformel — genauer Kapitel I, II und Kapitel III § 12 bis § 18 — betrifft, unabhängig voneinander. Erst der 2. Hauptsatz verlangt eine Beziehung zwischen den beiden Differentialen, die durch Voraussetzung IX gegeben wird. Es ist beachtenswert, dass die Behauptung des 2. Hauptsatzes (Satz 23.5) überhaupt nicht und die Voraussetzung des 2. Hauptsatzes nur wenig vom Differential $\partial B_{n-1}$ abhängt.

Die Beweise verliefen oft sehr ähnlich wie bei einer Veränderlichen (W [43]). Jedoch war es notwendig, sie trotzdem durchzuführen, da man sich beispielsweise davon überzeugen musste, ob die Integralumformungen, die an die Stelle der Summen- und Integralumformungen bei einer Veränderlichen traten und die bei mehreren Veränderlichen oft nicht so leicht zu übersehen waren, erlaubt waren. Ausserdem liessen sich verschiedene Beweise nicht formal übertragen. Auch veranlassten die Differentiale $\partial \chi_{2n-2}$ und $\partial B_{n-1}$ mehrere ganz neue Überlegungen. Aus diesen Gründen schien es mir notwendig zu sein, die Beweise trotz der sich aufdrängenden Analogie zum Fall $n=1$ so ausführlich darzustellen, wie es geschehen ist.

Nun soll untersucht werden, wie sich der 2. Hauptsatz im Fall einer Funktion ausspricht. Auf der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ sei eine meromorphe Funktion $f$ gegeben. Ihr entspricht eineindeutig die meromorphe Fläche $W$, die durch die Darstellung $(1, f)$ gegeben wird, und deren zugehörige Charakteristik die Charakteristik der Funktion $f$ sei:

(23.25) $$T(G) = \frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G) \frac{i}{2} \frac{\partial f \overline{\partial f}}{(1+|f|^2)^2} \partial \chi_{2n-2}.$$

Der komplexen Zahl $a \neq \infty$ entspricht eineindeutig der kontravariante Vektor $(a, -1)$ und der „komplexen Zahl" $a = \infty$ eineindeutig der kontravariante Vektor $(1, 0)$. Den $q$ verschiedenen Zahlen $a_1, \ldots, a_q$, wobei auch $\infty$ zugelassen ist, entsprechen dabei kontravariante Vektoren $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_q$, von denen je zwei linear unabhängig sind.

Die Schmiegungsfunktion zum Vektor $(a, -1)$ bzw. $(1, 0)$ ist die Schmiegungsfunktion der Zahl $a \neq \infty$ bzw. $a = \infty$. Also gilt

(23.26) $$m(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log \frac{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|f|^2}}{|a-f|} \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} \qquad (a \neq \infty)$$

$$m(\Gamma, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \sqrt{1+|f|^2}\, \partial^{\perp}\psi\, \partial \chi_{2n-2} \qquad (a=\infty). \tag{23.27}$$

Zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ gibt es eine offene Umgebung $U(P_0)$ und zwei in jedem Punkt von $U(P_0)$ analytische und teilerfremde Funktionen $g$ und $h$ mit $f = g h^{-1}$ in $U(P_0)$. Für $a \neq \infty$ ist gemäss Kap. I § 2 (6) die Vielfachheit $\nu(P_0, a)$ der $a$-Stelle $P_0$ von $f$ dieselbe wie die Vielfachheit der Nullstelle $P_0$ der Funktion $g - a h$. Da $(h, g)$ aber eine in $P_0$ reduzierte Darstellung von $W$ ist, ist die Schnittzahl zum Vektor $\vec{\alpha} = (a, -1)$ gerade die Zahl $\nu(P_0, a)$. Also gilt

$$\nu(P_0, a) = \nu(P_0, \vec{\alpha}). \tag{23.28}$$

Dies gilt auch für $a = \infty$ und $\vec{\alpha} = (1, 0)$. Ist also $\mathfrak{N}(a) = \{P \mid \nu(P, a) > 0\}$ die $a$-Stellenfläche der Funktion $f$, so ist ihre Anzahlfunktion

$$N(G, a) = \int_{\mathfrak{N}(a)} \nu(P, a)\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2} = N(G, \vec{\alpha}). \tag{23.29}$$

Die allgemeinen Voraussetzungen I bis X hängen nicht vom Begriff der meromorphen Fläche $W$ ab. Die Voraussetzung XI formuliert sich jetzt so:

XI'. **Wachstumsstärke der Charakteristik.** *Die Funktion $f$ sei auf der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ nicht konstant und habe die Charakteristik $T(G)$ gemäss* (23.27). *Wenn $\mathfrak{C}$ die Gesamtkapazität und $J = \frac{1}{\mathfrak{C}}$ die Gesamtspannung von $\mathfrak{M}^{2n}$ ist, wenn die Funktion $\eta(G)$ nach Satz* 14.1 *bestimmt wird, und wenn die Voraussetzung* X *gemacht wird, so seien für jedes $\varepsilon > 0$ und die „meisten" zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$ die Abschätzungen*

$$\| \quad \eta(G) \le \varepsilon\, T(G), \qquad \text{falls } \mathfrak{C} = 0 \text{ ist,} \tag{23.30}$$

$$\left.\begin{aligned} &\| \quad \eta(G) \le \varepsilon\, T(G) &(23.31)\\ &\left\| \log \frac{1}{J - R(G)} \le \varepsilon\, T(G) \right. &(23.32)\end{aligned}\right\}, \qquad \text{falls } \mathfrak{C} > 0 \text{ ist,}$$

*gültig.*

Die Ableitung $f'$ ist die Dichte $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu f_{z_\nu}$ des Differentials $\partial f \partial B_{n-1}$. Die assoziierten Flächen von $W$ haben die eigentlichen, einheitlichen Darstellungen

$$(1, f) \quad \text{für } p = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & f \\ 0 & f' \end{vmatrix} [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2] = f' \cdot [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2] \quad \text{für } p = 2. \tag{23.33}$$

Daraus folgt, dass die meromorphe Fläche $W$ zu $f$ dann und nur dann nicht degeneriert, wenn $f$ nicht konstant ist. Die 2-te assoziierte Fläche $W^2$ ist dann und nur dann nicht speziell degeneriert, wenn $f' \not\equiv 0$ ist, wenn also

$$\partial f \partial B_{n-1} \not\equiv 0 \tag{23.34}$$

ist.

Nun muss noch die Anzahlfunktion $V_1$ der 1. stationären Indexfläche berechnet werden. Zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ gibt es eine offene Umgebung $U(P_0)$ und zwei in jedem Punkt von $U(P_0)$ analytische und teilerfremde Funktionen $g$ und $h$ mit $f = g \cdot h^{-1}$ in $U(P_0)$. Die meromorphe Fläche $W$ hat die Darstellung

$$\mathfrak{w}(P) = (h, g) \tag{23.35}$$

auf $U(P_0)$. Ausserdem kann man $U(P_0)$ so klein wählen, dass es eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $\bar{U}(P_0) \subset U_\alpha$ gibt. Die zugehörige eigentliche Darstellung von $W^2$ auf $U(P_0)$ ist

$$\mathfrak{W}^2(P, \alpha) = \begin{vmatrix} h & g \\ h' & g' \end{vmatrix} [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2] = (h g' - g h') [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2]. \tag{23.36}$$

Die meromorphe Fläche $W^0$ hat die Darstellung

$$\mathfrak{W}^0(P) \equiv 1. \tag{23.37}$$

Der grösste gemeinsame Teiler der Darstellung $\mathfrak{W}^u(P)$ habe in $P$ die Vielfachheit $d_u(P)$ für $u = 1, 2, 3$. Es ist

$$d_0(P) = d_1(P) = 0 \qquad \text{für } P \in U(P_0), \tag{23.38}$$

während $d_2(P)$ die Vielfachheit der Nullstelle der Funktion $hg' - gh'$ in $P$ ist. Es ist

$$v_1(P) - 1 = d_0(P) - 2\, d_1(P) + d_2(P) = d_2(P) \tag{23.39}$$

ebenfalls die Vielfachheit der Nullstelle von $hg' - gh'$. Ist die Funktion $f$ in $P_0$ analytisch, so kann man $h = 1$ und $g = f$ wählen; es ist $v_1(P_0) - 1$ die Vielfachheit der Nullstelle $P_0$ von $f'$, das heisst von $\partial f \partial B_{n-1}$. Hat die Funktion $f$ in $P_0$ einen Pol, so kann man $g = 1$ und $h = 1/f$ wählen; es ist $v_1(P_0) - 1$ die Vielfachheit der Nullstelle $P_0$ von $\left(\frac{1}{f}\right)'$, das heisst, von $\partial \frac{1}{f} \partial B_{n-1}$. Damit ist der folgende Satz im wesentlichen bewiesen.

**Satz 23.6.** Stationärer Index bei Funktionen.

**Voraussetzung.** *Die Funktion $f$ sei auf der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ meromorph und nichtkonstant. Die Menge $\mathfrak{S}$ bestehe aus allen Ausdrücken $(s, M)$ der fol-*

*genden Art: Die Funktion $s = s(P)$ ist auf der offenen Menge $M \subseteq \mathfrak{M}^{2n}$ analytisch. Es gibt zwei Funktionen $g$ und $h$, die auf $M$ analytisch und in jedem Punkt von $M$ teilerfremd sind und für die*

$$s(P) = g'(P)\,h(P) - g(P)\,h'(P) \quad \text{für } P \in M, \tag{23.40}$$

$$f(P) = \frac{g(P)}{h(P)} \quad \text{für } P \in M \tag{23.41}$$

*gilt. Die meromorphe Fläche $W$ sei durch die Darstellung $(1, f)$ gegeben.*

**Behauptung.** 1. *Die Menge $\mathfrak{S}$ ist eine* Cousin*sche Verteilung II. Art auf $\mathfrak{M}^{2n}$.*

2. *Die Nullstellenfläche $\mathfrak{V}_1$ der* Cousin*schen Verteilung $\mathfrak{S}$ ist die 1. stationäre Indexfläche der meromorphen Fläche $W$.*

3. *Die Vielfachheit der Nullstelle $P$ der* Cousin*schen Verteilung sei $v_1(P) - 1$. Dann ist $v_1(P)$ der 1. stationäre Index von $W$.*

4. *Die Anzahlfunktion des 1. stationären Indexes von $W$ ist*

$$V_1(G) = \int_{\mathfrak{V}_1} (v_1(P) - 1)\,\psi(P, G)\,\partial\chi_{2n-2}. \tag{23.42}$$

5. *Ist die Funktion $f$ an der Stelle $P$ analytisch, so ist $v_0(P) - 1$ die Vielfachheit der Nullstelle von $f'$, also von $\partial f \partial B_{n-1}$.*

6. *Hat die Funktion $f$ an der Stelle $P$ einen Pol, so ist $v_1(P) - 1$ die Vielfachheit der Nullstelle von $\left(\frac{1}{f}\right)'$, also von $\partial \frac{1}{f} \partial B_{n-1}$.*

**Beweis.** 1. Sind $(s_1, M_1)$ und $(s_2, M_2)$ zwei Elemente aus $\mathfrak{S}$ mit $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, so gilt $s_\nu = g'_\nu h_\nu - g_\nu h'_\nu$ mit $f = \frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2}$ in $M_1 \cap M_2$. Setzt man $\lambda = \frac{h_1}{h_2}$, so ist $g_1 = \lambda g_2$ und $h_1 = \lambda h_2$. Da in jedem Punkt von $M_1 \cap M_2$ die Funktionen $g_1$, $h_1$, sowie die Funktionen $g_2$, $h_2$ teilerfremd sind, ist $\lambda \neq 0$ und regulär in $M_1 \cap M_2$. Es gilt $s_1 = \lambda^2 (g'_2 h_2 - g_2 h'_2) = \lambda^2 s_2$. Daher ist $\mathfrak{S}$ eine Cousinsche Verteilung II. Art. Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Die übrigen Behauptungen haben sich schon als richtig erwiesen, w. z. b. w.

Es heisse $v_1(P)$ der stationäre Index, $\mathfrak{V}_1$ die stationäre Indexfläche und $V_1(G)$ die Anzahlfunktion der stationären Indexfläche zur Funktion $f$. Dann gilt das Analogon zum zweiten Hauptsatz von R. Nevanlinna:

**Satz 23.7.** Der zweite Hauptsatz für Funktionen.[45]

A. *Voraussetzungen, die nicht vom Differential* $\partial B_{n-1}$ *abhängen.*

1. *Die allgemeinen Voraussetzungen* I, II *aus* § 4, III, IV, V *aus* § 7, VI, VII *aus* § 11, X *aus* § 22 *und* XI′ *aus* § 23 *werden gemacht.*

2. *Die nichtkonstante, meromorphe Funktion* $f$, *die in* XI′ *gegeben wird, habe die Charakteristik* $T(G)$ *gemäss* (23.25), *die Anzahlfunktion* $N(G, a)$ *gemäss* (23.29) *und die Schmiegungsfunktion* $m(\Gamma, a)$ *gemäss* (23.26) *und* (23.27).

3. *Es seien* $q$ *verschiedene komplexe Zahlen* $a_1, \ldots, a_q$ *gegeben, worunter auch die „Zahl“* $\infty$ *sein darf.*

B. *Voraussetzungen, die vom Differential* $\partial B_{n-1}$ *abhängen.*

4. *Das Differential* $\partial B_{n-1}$ *erfülle die allgemeinen Voraussetzungen* VIII *aus* § 12 *und* IX *aus* § 19.

5. *Es sei* $\partial f \partial B_{n-1} \not\equiv 0$.

6. *Die Anzahlfunktion* $V_1(G)$ *der stationären Indexfläche zur Funktion* $f$ *sei nach Satz* 23.6 *definiert.*

**Behauptung.** *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *und die „meisten“ zulässigen Mengen* $G \in \mathfrak{G}$ *gelten die Abschätzungen*

$$\| \sum_{\mu=1}^{q} m(\Gamma, a_\mu) + V_1(G) \leq (2+\varepsilon) T(G), \tag{23.43}$$

$$\| (q-2-\varepsilon) T(G) + V_1(G) \leq \sum_{\mu=1}^{q} N(G, a_\mu). \tag{23.44}$$

*Insbesondere gelten die vom Differential* $\partial B_{n-1}$ *unabhängigen Abschätzungen*

$$\| \sum_{\mu=1}^{q} m(\Gamma, a_\mu) \leq (2+\varepsilon) T(G), \tag{23.45}$$

$$\| (q-2-\varepsilon) T(G) \leq \sum_{\mu=1}^{q} N(G, a_\mu). \tag{23.46}$$

Wieder gilt, was im Anschluss an den 2. Hauptsatz für meromorphe Flächen gesagt wurde. Die Analogie zum 2. Hauptsatz von R. NEVANLINNA für meromorphe Funktionen einer Veränderlichen ist wieder überraschend. Jedoch beachte man, dass die Differentiale $\partial \chi_{2n-2}$ und $\partial B_{n-1}$ auch hier bei einer Veränderlichen kein Analogon haben, während sie bei mehreren Veränderlichen von Bedeutung sind.

---

[45] Für $n=1$ siehe R. NEVANLINNA [36] Kap. IX § 3 Seite 205.

## § 24. Die Verhältnisse im Vektorraum

In diesem Paragraphen soll angegeben werden, wie die wichtigsten Begriffe und Funktionen lauten, wenn man als Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ den Vektorraum $R_1^{2n}$ der Vektoren $\mathfrak{z}=(z_1, \dots, z_n)$ mit euklidischer Massbestimmung wählt. Diese Übertragung geschieht am einfachsten mit einer Tabelle. Da zugleich Seitenzahlen angegeben werden, kann sie als Register dienen. In der Tabelle werden die folgenden Abkürzungen gebraucht:

$\overset{\mu}{\|}$ bedeutet, dass der Faktor $\partial z_\mu \partial \bar{z}_\mu$ fehlt.

(24.1) $$V_{2n-2}(r)=\frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}r^{2n-2}, \qquad V_{2n-2}(1)=V_{2n-2}=W_{2n-2}$$

(24.2) $$V_{2n-1}(r)=\frac{2\pi^n}{(n-1)!}r^{2n-1}, \qquad V_{2n-1}(1)=V_{2n-1}.$$

$\partial v_{2n-1}$ ist das Oberflächenelement der Kugel $|\mathfrak{z}|=r$ bzw. $|\mathfrak{z}|=r_0$;

$\partial \omega_{2n-2}$ ist die projektive Massbestimmung gemäss Kap. I § 2 (7) Gleichung (2.56).

(24.3) $$x(t)=r_0[1-(2n-2)V_{2n-2}(r_0)t]^{-\frac{1}{2n-2}},$$

(24.4) $$\varrho(x, r)=\begin{cases} 0 & \text{für } r \leq x < \infty, \\ \dfrac{1}{2n-2}\left(\dfrac{r^{2n-2}}{x^{2n-2}}-1\right) & \text{für } r_0 \leq x \leq r, \\ \dfrac{1}{2n-2}\left(\dfrac{r^{2n-2}}{r_0^{2n-2}}-1\right) & \text{für } 0 \leq x \leq r_0, \end{cases}$$

(24.5) $$\zeta(x, r)=\begin{cases} 0 & \text{für } r \leq x \leq \infty, \\ \log\dfrac{r}{x} & \text{für } r_0 \leq x \leq r, \\ \log\dfrac{r}{r_0} & \text{für } 0 \leq x \leq r_0. \end{cases}$$

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 1 | Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ | I 41 | $R^{2n} = R_1^{2n} = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)\}$ |
| 2 | Punkt $P$ | — | $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ |
| 3 | uniformisierende Abbildung $\alpha$ | I 21 | $\alpha(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}$ |
| 4 | Massbestimmung $\partial \chi_{2n-2}$ | I 41 | $\partial v_{2n-2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n} \partial z_1 \partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\Vert} \ldots \partial z_n \partial \bar{z}_n$ <br> mit Metrik: $(\mathfrak{u} \mid \mathfrak{v}) = \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu \bar{v}_\mu$ |
| 5 | Kern $g$ | I 76 | $g = \{\mathfrak{z} \mid \lvert\mathfrak{z}\rvert < r_0\}$ mit $r_0 > 0$ |
| 6 | Kernrand $\gamma$ | I 77 | $\gamma = \{\mathfrak{z} \mid \lvert\mathfrak{z}\rvert = r_0\}$ |
| 7 | kompakte Menge $K_g$ | I 106 | $K_g = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = 0\}$ |
| 8 | Eichfaktor $b$ | I 106 | $b = V_{2n-2}(r_0)$ |
| 9 | Vollständiges System $\mathfrak{G}$ zulässiger offener Mengen $G$ | II 78 | Menge $\mathfrak{G}$ aller Kugeln $G = \{\mathfrak{z} \mid \Vert\mathfrak{z}\Vert < r\}$ mit $r > r_0$ |
| 10 | Rand $\Gamma$ | I 77 | $\Gamma = \{\mathfrak{z} \mid \lvert\mathfrak{z}\rvert = r\}$ |
| 11 | Kondensator $H$ | I 77 | $H = \{\mathfrak{z} \mid r_0 < \lvert\mathfrak{z}\rvert < r\}$ |
| 12 | kritische Menge $E$ | I 77 | $E = \emptyset$ |
| 13 | Kapazität $C(G)$ | I 80 | $C(r) = \dfrac{V_{2n-2}(r)}{\varrho(r_0, r)}$ |
| 14 | Gesamtkapazität $\mathfrak{C}$ | I 109 | $\mathfrak{C} = (2n-2)\, V_{2n-2}(r_0)$ |
| 15 | Spannung $R(G)$ | I 80 | $R(r) = \dfrac{\varrho(r_0, r)}{V_{2n-2}(r)}$ |
| 16 | Gesamtspannung $J$ | I 109 | $J = \dfrac{1}{2n-2} \dfrac{1}{V_{2n-2}(r_0)}$ |
| 17 | Potentialfunktion $\varphi(P, G)$ | I 77 | $\varphi(\mathfrak{z}, r) = \dfrac{\varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)}{\varrho(r_0, r)}$ |

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 18 | Potentialfunktion $\psi(P, G)$ | I 80 | $\psi(\mathfrak{z}, r) = \dfrac{\varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)}{V_{2n-2}(r)}$ |
| 19 | Randdifferential $\partial^{\perp}\varphi\,\partial\chi_{2n-2}$ längs $\gamma$ | I 80 | $\partial^{\perp}\varphi\,\partial v_{2n-2} = \dfrac{r^{2n-2}}{r_0^{2n-1}}\,\dfrac{\partial v_{2n-1}}{\varrho(r_0, r)}$ längs $\lvert\mathfrak{z}\rvert = r_0$ |
| 20 | Randdifferential $\partial^{\perp}\varphi\,\partial\chi_{2n-2}$ längs $\Gamma$ | I 80 | $\partial^{\perp}\varphi\,\partial v_{2n-2} = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v_{2n-1}}{\varrho(r_0, r)}$ längs $\lvert\mathfrak{z}\rvert = r$ |
| 21 | Randdifferential $\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ längs $\gamma$ | I 80 | $\partial^{\perp}\psi\,\partial v_{2n-2} = \dfrac{2\pi\,\partial v_{2n-1}}{V_{2n-1}(r_0)}$ längs $\lvert\mathfrak{z}\rvert = r_0$ |
| 22 | Randdifferential $\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ längs $\Gamma$ | I 80 | $\partial^{\perp}\psi\,\partial v_{2n-2} = \dfrac{2\pi\,\partial v_{2n-1}}{V_{2n-1}(r)}$ längs $\lvert\mathfrak{z}\rvert = r$ |
| 23 | Jensensche Formel | I 74 | $\dfrac{1}{V_{2n-1}(r)}\displaystyle\int_{\lvert\mathfrak{z}\rvert=r}\log\lvert f\rvert\,\partial v_{2n-1} - \dfrac{1}{V_{2n-1}(r_0)}\int_{\lvert\mathfrak{z}\rvert=r_0}\log\lvert f\rvert\,\partial v_{2n-1} = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)}\int_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\,\varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\,\partial v_{2n-2}$ |
| 24 | meromorphe Fläche $W$ | I 36 | $W$ |
| 25 | Schnittzahl $\nu(P, \vec{\alpha})$ | I 41 | $\nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha})$ |
| 26 | Schnittstellenfläche $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$ | I 41 | $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$ |
| 27 | Anzahlfunktion $n(G, \vec{\alpha})$ | I 104 | $V_{2n-2}(r)\,n(r, \vec{\alpha})$ mit $n(r, \vec{\alpha}) = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)}\displaystyle\int_{\substack{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})\\ \lvert\mathfrak{z}\rvert\le r}}\nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha})\,\partial v_{2n-2} = \dfrac{1}{W_{2n-2}}\int_{\substack{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})\\ \lvert\mathfrak{z}\rvert\le r}}\nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha})\,\partial\omega_{2n-2} + \nu(0, \vec{\alpha})$ |

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 28 | Anzahlfunktion $N(G, \vec{\alpha})$ | I 82 | $N(r, \vec{\alpha}) = \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha})\varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\partial v_{2n-2}$ $= \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha})\zeta(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\partial\omega_{2n-2} + \nu(0, \vec{\alpha}) \log\frac{r}{r_0}$ $= \int\limits_{r_0}^{r} n(x, \vec{\alpha})\frac{dx}{x}$ |
| 29 | Schmiegungsfunktion $m(\Gamma, \vec{\alpha})$ | I 83 | $m(r, \vec{\alpha}) = \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert = r} \log\frac{1}{\lVert\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\rVert}\,\partial v_{2n-1}$ |
| 30 | Schmiegungsfunktion $m(\gamma, \vec{\alpha})$ | I 83 | $m(r_0, \vec{\alpha}) = \frac{1}{V_{2n-1}(r_0)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert = r_0} \log\frac{1}{\lVert\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\rVert}\,\partial v_{2n-1}$ unabhängig von $r$. |
| 31 | 1. Hauptsatz | I 83 | $T(r) = N(r, \vec{\alpha}) + m(r, \vec{\alpha}) - m(r_0, \vec{\alpha})$ |
| 32 | Betragsdarstellung der Charakteristik $T(G)$ | I 86 | $T(r) = \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert = r} \log\lvert\mathfrak{w}\rvert\,\partial v_{2n-1} - \frac{1}{V_{2n-1}(r_0)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert = r_0} \log\lvert\mathfrak{w}\rvert\,\partial v_{2n-1} - \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int\limits_{\mathfrak{D}} d(\mathfrak{z})\varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\partial v_{2n-2}$ |
| 33 | Mittelwertdarstellung der Charakteristik $T(G)$ | I 87 | $T(r) = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{\lvert\vec{\alpha}\rvert = 1} N(r, \vec{\alpha})\partial v_{2k-1}(\vec{\alpha})$ |
| 34 | Normaldarstellung der Charakteristik $T(G)$ | I 93 | $T(r) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert < r} \varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\partial\omega_2(\mathfrak{w}(\mathfrak{z}))\partial v_{2n-2}$ $= \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert < r} \zeta(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\partial\omega_2(\mathfrak{w}(\mathfrak{z}))\partial\omega_{2n-2} + \nu\log\frac{r}{r_0}$ mit $\nu = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{\lvert\vec{\alpha}\rvert = 1} \nu(0, \vec{\alpha})\partial v_{2k-1}(\vec{\alpha})$ |

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 35 | Die zulässige Menge $G_t$ | I 97 | $G_t = \{\mathfrak{z} \mid \lvert\mathfrak{z}\rvert < x(t)\}$ unabhängig von $r$ |
| 36 | Rand $\Gamma_t$ | I 98 | $\Gamma_t = \{\mathfrak{z} \mid \lvert\mathfrak{z}\rvert = x(t)\}$ unabhängig von $r$ |
| 37 | Die Funktion $S(P)$ | I 101 | $W_{2n-2}^2 \lvert\mathfrak{z}\rvert^{4n-2} 2 \lvert\mathfrak{w}\rvert^{-4} \sum_{\mu=1}^{n} \lvert[\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_{z_\mu}]\rvert^2$ |
| 38 | Faktor $a$ | I 101 | $V_{2n-2}(r_0)\, a$ mit $a = \frac{1}{\pi} \frac{1}{V_{2n-2}(r_0)} \int_{\lvert\mathfrak{z}\rvert < r_0} \partial\omega_2(\mathfrak{w}(\mathfrak{z}))\, \partial v_{2n-2}$ |
| 39 | Die Funktion $\varepsilon(r)$ | I 101 | 0 |
| 40 | Die Funktion $Q(t)$ | I 101 | $x^{4n-2} W_{2n-2}^2 Q(x)$ mit $x = x(t)$ und $Q(x) = \frac{1}{V_{2n-1}(x)} \cdot \int_{\lvert\mathfrak{z}\rvert = x} 2 \lvert\mathfrak{w}\rvert^{-4} \sum_{\mu=1}^{n} \lvert[\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_{z_\mu}]\rvert^2\, \partial v_{2n-1}$ |
| 41 | Die Funktion $A(t)$ | I 101 | $V_{2n-2}(x) A(x)$ mit $x = x(t)$ und $A(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{V_{2n-2}(x)} \int_{\lvert\mathfrak{z}\rvert \leq x} \partial\omega_2(\mathfrak{w}(\mathfrak{z}))\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z})$ |
| 42 | sphärische Darstellung der Charakteristik $T(G)$ | I 102 | $T(r) = \int_{r_0}^{r} A(x) \frac{dx}{x}$ |
| 43 | sphärische Darstellung der Charakteristik $T(G)$ | I 102 | $T(r) = a\, \varrho(r_0, r) \frac{r_0^{2n-2}}{r^{2n-2}} + \int_{r_0}^{r} \varrho(x, r) \frac{x^{2n-1}}{r^{2n-2}} Q(x)\, dx$ |

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 44 | Richtungsfeld $\partial B_{n-1}$ | II 56 | $\partial B_{n-1}=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}b_\nu \partial z_1 \ldots \partial z_{\nu-1}\partial z_{\nu+1}\ldots\partial z_n$ wobei die $b_\nu$ konstant sind und $\sum_{\nu=1}^{n}\lvert b_\nu\rvert^2\leq 1$ ist. |
| 45 | Ableitung $f'$ | II 56 | $f'=f'(\mathfrak{z})=\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu f_{z_\nu}(\mathfrak{z})$ |
| 46 | $p$-*te* assoziierte Fläche $W^p$ | II 58 | $W^p$ |
| 47 | eigentliche Darstellung $\mathfrak{W}^p(P,\alpha)$ von $W^p$ zur Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ von $W$ und zur Abbildung $\alpha(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}$ | II 58 | $\mathfrak{W}^p(\mathfrak{z})=[\mathfrak{w},\mathfrak{w}',\ldots,\mathfrak{w}^{(p-1)}(\mathfrak{z})]$ |
| 48 | Schnittzahl $\nu_p(P,A^p)$ | II 59 | $\nu_p(\mathfrak{z},A^p)$ |
| 49 | Schnittstellenfläche $\mathfrak{N}(A^p)$ | II 59 | $\mathfrak{N}(A^p)$ |
| 50 | Anzahlfunktion $N_p(G,A^p)$ | II 59 | $N_p(r,A^p)=\frac{1}{V_{2n-2}(r)}\cdot \cdot\int\limits_{\mathfrak{N}(A^p)}\nu_p(\mathfrak{z},A^p)\varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert,r)\partial v_{2n-2}$ $=\frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{N}(A^p)}\nu_p(\mathfrak{z},A^p)\zeta(\lvert\mathfrak{z}\rvert,r)\partial\omega_{2n-2}$ $+\nu_p(0,A^p)\log\frac{r}{r_0}$ |
| 51 | Schmiegungsfunktion $m_p(\Gamma,A^p)$ | II 59 | $m_p(r,A^p)=\frac{1}{V_{2n-1}(r)}\int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert=r}\log\frac{1}{\lVert\mathfrak{W}^p,A^p\rVert}\partial v_{2n-1}$ |
| 52 | Schmiegungsfunktion $m_p(\gamma,A^p)$ | II 59 | $m_p(r_0,A^p)=\frac{1}{V_{2n-1}(r_0)}\cdot \cdot\int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert=r_0}\log\frac{1}{\lVert\mathfrak{W}^p,A^p\rVert}\partial v_{2n-1}$ unabhängig von $r$. |
| 53 | 1. Hauptsatz für assoziierte Flächen | II 59 | $T_p(r)=N_p(r,A^p)+m_p(r,A^p)-m_p(r_0,A^p)$ |

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 54 | Normaldarstellung von $T_p(G)$ | II 60 | $T_p(r) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \cdot \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert<r} \varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\, \partial\omega_2(\mathfrak{W}^p(\mathfrak{z}))\, \partial v_{2n-2}$ |
| 55 | Die Funktion $\mathfrak{S}_p^*(P)$ | II 60 | $W_{2n-2}^2 \lvert\mathfrak{z}\rvert^{4n-2} \frac{2}{\lvert\mathfrak{W}^p\rvert^4} \cdot \sum_{\mu=1}^{n} \begin{vmatrix} (\mathfrak{W}^p \mid \mathfrak{W}^p), & (\mathfrak{W}^p \mid \mathfrak{W}^p_{z_\mu}) \\ (\mathfrak{W}^p_{z_\mu} \mid \mathfrak{W}^p), & (\mathfrak{W}^p_{z_\mu} \mid \mathfrak{W}^p_{z_\mu}) \end{vmatrix}$ |
| 56 | Faktor $a_p$ | II 60 | $V_{2n-2}(r_0)\, a_p$ mit $a_p = \frac{1}{\pi} \frac{1}{V_{2n-2}(r_0)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert \leq r_0} \partial\omega_2(\mathfrak{W}^p(\mathfrak{z}))\, \partial v_{2n-2}$ |
| 57 | Die Funktion $\varepsilon_p(t)$ | II 61 | 0 |
| 58 | Die Funktion $Q_p(t)$ | II 61 | $x^{4n-2} W_{2n-2}^2 Q_p(x)$ mit $x = x(t)$ und $Q_p(x) = \frac{1}{V_{2n-1}(x)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert = x} 2 \lvert\mathfrak{W}^p\rvert^{-4} \cdot \sum_{\mu=1}^{n} \begin{vmatrix} (\mathfrak{W}^p \mid \mathfrak{W}^p), & (\mathfrak{W}^p \mid \mathfrak{W}^p_{z_\mu}) \\ (\mathfrak{W}^p_{z_\mu} \mid \mathfrak{W}^p), & (\mathfrak{W}^p_{z_\mu} \mid \mathfrak{W}^p_{z_\mu}) \end{vmatrix} \partial v_{2n-1}$ |
| 59 | Die Funktion $A_p(t)$ | II 61 | $V_{2n-2}(x) A_p(x)$ mit $x = x(t)$ und $A_p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{V_{2n-2}(x)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert \leq x} \partial\omega_2(\mathfrak{W}^p(\mathfrak{z}))\, \partial v_{2n-2}$ |
| 60 | sphärische Darstellung der Charakteristik $T_p(G)$ | II 61 | $T_p(r) = \int\limits_{r_0}^{r} A_p(x) \frac{dx}{x}$ |
| 61 | sphärische Darstellung der Charakteristik $T_p(G)$ | II 61 | $T_p(r) = a_p \varrho(r_0, r) \frac{r_0^{2n-2}}{r^{2n-2}} + \int\limits_{r_0}^{r} \varrho(x, r) \frac{x^{2n-1}}{r^{2n-2}} Q_p(x)\, dx$ |
| 62 | Projektion $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ | II 62 | $[\mathfrak{A}^h, W^p]$ |

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 63 | Die Funktion $\tilde{m}_p(\Gamma, \mathfrak{A}^h)$ | II 63 | $\tilde{m}_p(r, \mathfrak{A}^h) = \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert\le r} \log \frac{1}{\lVert \mathfrak{W}^p : \mathfrak{A}^h \rVert} \partial v_{2n-1}$ |
| 64 | Die Funktion $\tilde{m}_p(\gamma, \mathfrak{A}^h)$ | II 63 | $\tilde{m}_p(r_0, \mathfrak{A}^h) = \frac{1}{V_{2n-1}(r_0)} \cdot$ $\cdot \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert\le r_0} \log \frac{1}{\lVert \mathfrak{W}^p : \mathfrak{A}^h \rVert} \partial v_{2n-1}$ unabhängig von $r$. |
| 65 | Die Funktion $\tilde{N}_p(G, \mathfrak{A}^h)$ | II 63 | $\tilde{N}_p(r, \mathfrak{A}^h) = \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \cdot$ $\cdot \int\limits_{\tilde{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}^h)} \tilde{\nu}_p(\mathfrak{z}, \mathfrak{A}^h)\, \varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\, \partial v_{2n-2}$ $= \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\tilde{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}^h)} \tilde{\nu}_p(\mathfrak{z}, \mathfrak{A}^h)\, \zeta(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\, \partial \omega_{2n-2}$ $+ \tilde{\nu}_p(0, \mathfrak{A}^h) \log \frac{r}{r_0}$ |
| 66 | Charakteristik $T_p(G, \mathfrak{A}^h)$ | II 63 | $T_p(r, \mathfrak{A}^h) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \cdot$ $\cdot \int\limits_{\lvert\mathfrak{z}\rvert< r} \varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r)\, \partial \omega_2([\mathfrak{W}^p, \mathfrak{A}^h])\, \partial v_{2n-2}$ |
| 67 | Die Funktion $\Lambda_p(G, \mathfrak{A}^h)$ | II 64 | $\Lambda_p(r, \mathfrak{A}^h) = T_p(r) - T_p(r, \mathfrak{A}^h) + \tilde{m}_p(r_0, \mathfrak{A}^h)$ $= \tilde{N}_p(r, \mathfrak{A}^h) + \tilde{m}_p(r, \mathfrak{A}^h)$ |
| 68 | Die Funktion $\eta(G)$ | II 70 | $\eta(r) = -(2n-1) \log \frac{r}{r_0} < 0$ |
| 69 | $p$-*te* stationäre Index $v_p(P)$ | II 73 | $v_p(\mathfrak{z})$ |
| 70 | stationäre Indexfläche $\mathfrak{B}_p$ | II 73 | $\mathfrak{B}_p = \{\mathfrak{z} \mid v_p(\mathfrak{z}) > 1\}$ |

11 – 543808. *Acta Mathematica*. 92. Imprimé le 30 décembre 1954.

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 71 | Anzahlfunktion $V_p(G)$ der *p-ten* stationären Indexfläche $\mathfrak{B}_p$ | II 75 | $V_p(r) = \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int_{\mathfrak{B}_p} \{v_p(\mathfrak{z}) - 1\} \varrho(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r) \partial v_{2n-2}$ $= \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{B}_p} \{v_p(\mathfrak{z}) - 1\} \zeta(\lvert\mathfrak{z}\rvert, r) \partial \omega_{2n-2}$ $+ \{v_p(0) - 1\} \log \frac{r}{r_0}$ |
| 72 | Die Funktion $\mathring{S}_p(P, G)$ | II 75 | $W_{2n-2}^2 \lvert\mathfrak{z}\rvert^{4n-2}\, 2 \frac{\lvert\mathfrak{W}^{p-1}\rvert^2 \lvert\mathfrak{W}^{p+1}\rvert^2}{\lvert\mathfrak{W}^p\rvert^4}$ |
| 73 | Die Funktion $\Omega_p(\Gamma)$ | II 75 | $\Omega_p(r) + \log W_{2n-2} + (2n-1) \log r + \frac{1}{2} \log 2$ mit $\Omega_p(r) = \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int_{\lvert\mathfrak{z}\rvert = r} \log \frac{\lvert\mathfrak{W}^{p-1}\rvert \lvert\mathfrak{W}^{p+1}\rvert}{\lvert\mathfrak{W}^p\rvert^2} \partial v_{2n-1}$ |
| 74 | Die Funktion $\Omega_p(\gamma)$ | II 75 | $\Omega_p(r_0) + \log W_{2n-2} + (2n-1) \log r_0 + \frac{1}{2} \log 2$ mit $\Omega_p(r_0) = \frac{1}{V_{2n-1}(r_0)} \int_{\lvert\mathfrak{z}\rvert = r_0} \log \frac{\lvert\mathfrak{W}^{p-1}\rvert \lvert\mathfrak{W}^{p+1}\rvert}{\lvert\mathfrak{W}^p\rvert^2} \partial v_{2n-1}$ unabhängig von $r$. |
| 75 | Differenzenformel | II 77 | $V_p(r) + T_{p-1}(r) - 2T_p(r) + T_{p+1}(r) =$ $= \Omega_p(r) - \Omega_p(r_0)$ |
| 76 | Grenzübergang $G \to \mathfrak{M}^{2n}, G \in \mathfrak{G}$ | II 78 | $r \to \infty$ |
| 77 | Die Ungleichungen $f_i(G) \leq 0$ gelten für die „meisten" zulässigen Mengen $G \in \mathfrak{G}$ | II 80 | Die Ungleichungen $f_i(r) \leq 0$ gelten für alle $r$ mit Ausnahme höchstens einer messbaren Menge $\tau$ mit $\int_\tau \frac{dr}{r} < \infty$ |
| 78 | $\lVert \eta(G) \leq \varepsilon T(G)$ | II 138 | immer erfüllt, da $\eta(G) < 0$. |

| Nr. | allgemeine Mannigfaltigkeit | Seite | euklidischer Raum |
|---|---|---|---|
| 79 | $\Vert \log \dfrac{1}{J - R(G)} \leq \varepsilon T(G)$ | II 138 | $\log r \leq \varepsilon T(r)$ für alle $r > r_0$ mit Ausnahme höchstens einer messbaren Menge $\tau$ mit $\int\limits_{\tau} \frac{dr}{r} < \infty$. |
| 80 | Der 2. Hauptsatz | II 146 | $\sum\limits_{\mu=1}^{q} m(r, \vec{\alpha}_\mu) + \sum\limits_{p=1}^{k-1} (k-p) V_p(r) \leq (k+\varepsilon) T(r)$ $(q-k-\varepsilon) T(r) + \sum\limits_{p=1}^{k-1} (k-p) V_p(r) \leq \sum\limits_{\mu=1}^{q} N(r, \vec{\alpha}_\mu)$ für alle $r > r_0$ höchstens mit Ausnahme einer messbaren Menge $\tau$ mit $\int\limits_{\tau} \frac{dr}{r} < \infty$. |

Die in der Tabelle angegebenen Ergebnisse rechnet man leicht nach. Sie stimmen mit den Sätzen von H. KNESER [38] überein, wenigstens soweit diese den 1. Hauptsatz betreffen, und zwar erhält man die KNESERschen Sätze in der Formulierung, in der ein Teil von ihnen bei STOLL [53] § 1 Gleichung (1.1) bis (1.7) angegeben wurde. Aus der Tabelle folgen auch unmittelbar die Behauptungen (5.16) bis (5.20) von STOLL [53] § 5, die dort noch nicht bewiesen wurden. Allerdings hätten diese Behauptungen auch leicht direkt mit der Methode von H. KNESER [38] bewiesen werden können.[46]

Im euklidischen Raum kann bei euklidischer Massbestimmung als Differential $\partial B_{n-1}$ jedes Differential

$$\partial B_{n-1} = \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} b_\nu \partial z_1 \ldots \partial z_{\nu-1} \partial z_{\nu+1} \ldots \partial z_n \tag{24.6}$$

mit konstanten Koeffizienten $b_\nu$ gewählt werden, für das

$$0 < \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2 \leq 1 \tag{24.7}$$

[46] Es ergibt sich (5.16) von STOLL [53] aus Nr 31 der Tabelle, (5.17) aus Nr 32, da in (5.17) $d(\mathfrak{z}) \geq 0$ ist, und (5.18) sowie (5.20) aus Nr 34. Die eine Darstellung von $A(t)$ in (5.19) folgt aus Nr 41, die andere beweist man mittels

$$A(t) = t\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} n(t, \vec{\alpha}) \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}) = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha}) \partial \omega_{2n-2} \partial v_{2k-1} + \nu$$

ähnlich wie Satz 9.4. Nunmehr können alle Ergebnisse von STOLL [53] benutzt werden.

ist. Eine andere Wahl ist nicht möglich. Die Voraussetzung (22.77) ist gemäss Nr. 78 für den 2. Hauptsatz überflüssig. Die Voraussetzung (22.73), die sich jetzt gemäss Nr. 79 ausspricht, soll näher untersucht werden. Dazu werden noch einige Hilfssätze bewiesen.

**Hilfssatz 1.** *Die Funktion* $\dfrac{T(r)}{\log \frac{r}{r_0}}$ *nimmt für* $r \geq r_0$ *nicht ab.*

**Beweis.** Nach Nr 27 ist $n(t, \vec{\alpha})$ monoton wachsend. Daher ist auch

$$A(t) = t\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} n(t, \vec{\alpha})\, \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha})$$

monoton wachsend. Für $r \geq r_0$ ist

$$\frac{d}{dr}\frac{T(r)}{\log\frac{r}{r_0}} = \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{\log\frac{r}{r_0}}\int\limits_{r_0}^{r} A(x)\frac{dx}{x}\right\} =$$

$$(24.8) \qquad = \frac{1}{\log^2\frac{r}{r_0}}\left\{\log\frac{r}{r_0}\cdot\frac{A(r)}{r} - \frac{1}{r}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{A(x)}{x}dx\right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\log^2\frac{r}{r_0}}\left\{\log\frac{r}{r_0}\cdot\frac{A(r)}{r} - \frac{A(r)}{r}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dx}{x}\right\} = 0$$

w. z. b. w.

**Hilfssatz 2.** *Dann und nur dann ist die Voraussetzung: „Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt* $\log r \leq \varepsilon T(r)$ *abgesehen vielleicht von einer Menge* $\tau$, *für die das Integral* $\int\limits_{\tau}\frac{dr}{r}$ *existiert" erfüllt, wenn*

$$(24.9) \qquad \lim_{r\to\infty}\frac{T(r)}{\log r} = \infty$$

*ist.*

**Beweis.** Aus $\|\log r \leq \varepsilon T(r)$ folgt $\underline{\lim}_{r\to\infty}\dfrac{\log r}{T(r)} = 0$. Mit Hilfssatz 1 ergibt das

$$(24.10) \qquad \infty = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r)}{\log\frac{r}{r_0}} = \lim_{r\to\infty}\frac{T(r)}{\log\frac{r}{r_0}} = \lim_{r\to\infty}\frac{T(r)}{\log r}.$$

Strebt aber $\frac{T(r)}{\log r} \to \infty$, das heisst $\frac{\log r}{T(r)} \to 0$ für $r \to \infty$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r_\varepsilon$, sodass $\log r < \varepsilon T(r)$ für $r > r_\varepsilon$ ist, w. z. b. w.

**Hilfssatz 3.** *Hat die ganze Funktion $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ ein Betragsmaximum $M(r) = \operatorname{Max}_{|\mathfrak{z}| \le r} |\mathfrak{f}(\mathfrak{z})|$ mit* $\log M(r) = O(\log r)$, *so ist $\mathfrak{f}$ ein Polynom.*

**Beweis.** Es sei $\mathfrak{z} = z\mathfrak{a}$ mit $|\mathfrak{a}| = 1$. Die Entwicklung

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{f}_\nu(\mathfrak{a}) z^\nu \tag{24.11}$$

nach homogenen Polynomen $\mathfrak{f}_\nu$ konvergiert für alle $\mathfrak{z}$ mit $|\mathfrak{a}| = 1$ und $|z| < \infty$. Es ist $M(r) \le a r^p + b$, wobei $a$, $b$ und die ganze Zahl $p$ konstant sind. Für $|\mathfrak{z}| \le r$ gilt

$$\left| \sum_{\nu=p+1}^{\infty} \mathfrak{f}_\nu(\mathfrak{a}) z^{\nu-p-1} \right| \le \frac{a}{r} + \frac{b}{r^{p+1}} + \sum_{\nu=0}^{p} |\mathfrak{f}_\nu(\mathfrak{a})| \frac{1}{r^{p+1-\nu}}\,. \tag{24.12}$$

Daher ist $\sum_{\nu=p+1}^{\infty} \mathfrak{f}_\nu(\mathfrak{z}) \equiv 0$, w. z. b. w.

**Hilfssatz 4.** *Die ganze Funktion $\mathfrak{f}$ mit der Charakteristik $T(r)$ ist dann und nur dann ein Polynom, wenn* $T(r) = O(\log r)$ *ist.*

**Beweis.** Ist $\mathfrak{f}$ ein Polynom vom Grad $p$, so besteht nach STOLL [53] Satz 2 die Abschätzung

$$T(r) \le \overset{+}{\log} M(r) + \tfrac{1}{2} \log 2 \le p \overset{+}{\log} r + O(1) = O(\log r). \tag{24.13}$$

Ist $T(r) = O(\log r)$, so folgt aus STOLL [53] Satz 2 die Abschätzung

$$\log M(r) \le 5 \cdot 8^{3n} T(8e \cdot r) + O(1) = O(\log r). \tag{24.14}$$

Nach Hilfssatz 3 ist $\mathfrak{f}$ ein Polynom, w. z. b. w.

**Definition 24.1.** Rationale meromorphe Flächen.
*Eine meromorphe Fläche $W$ im euklidischen Raum $R^{2n}$ heisse dann und nur dann rational, wenn es eine einheitliche Darstellung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ gibt, sodass in einem (also jedem) Koordinatensystem die Koordinaten $w_\nu(\mathfrak{z})$ der Darstellung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{k} w_\nu(\mathfrak{z})\,\mathfrak{e}_\nu$ rationale Funktionen sind.*

Eine meromorphe Fläche $W$ ist offensichtlich dann und nur dann rational, wenn es eine einheitliche analytische Darstellung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ gibt, deren Koordinaten $w_\nu(\mathfrak{z})$ Polynome sind.

**Satz 24.1.** Rationale meromorphe Flächen.

**Voraussetzung.** *Im euklidischen Raum $R^{2n}$ sei bei euklidischer Massbestimmung die mèromorphe Fläche $W$ mit der Charakteristik $T(r)$ gegeben.*

**Behauptung.** 1. *Dann und nur dann ist $W$ rational, wenn*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r)}{\log r} < \infty \tag{24.15}$$

*ist.*

2. *Dann und nur dann ist die Voraussetzung: „Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\log r \leq \varepsilon T(r)$ abgesehen vielleicht von einer Menge $\tau$, für die das Integral $\int\limits_{\tau} \frac{dr}{r}$ existiert“ erfüllt, wenn die meromorphe Fläche $W$ nicht rational ist.*

**Beweis.** Die zweite Behauptung folgt nach Hilfssatz 2 aus der ersten. Ist $W$ rational, so gibt es eine einheitliche Darstellung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \sum\limits_{\nu=1}^{k} w_\nu(\mathfrak{z})\, \mathfrak{e}_\nu$, wobei die Koordinaten $w_\nu(\mathfrak{z})$ Polynome mit der Charakteristik $T^{(\nu)}(r) = O(\log r)$ sind. Ist $d(\mathfrak{z}) \geq 0$ die Vielfachheit der Nullstelle $\mathfrak{z}$ des grössten gemeinsamen Teilers der Polynome $w_\nu(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{d} = \{\mathfrak{z} \mid d(\mathfrak{z}) > 0\}$ die zugehörige Nullstellenfläche, so erhält man mittels der Betragsdarstellung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
T(r) &= \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{|\mathfrak{z}|=r} \log |\mathfrak{w}|\, \partial v_{2n-1} - \frac{1}{V_{2n-1}(r_0)} \int\limits_{|\mathfrak{z}|=r_0} \log |\mathfrak{w}|\, \partial v_{2n-1} - \\
&\quad - \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int\limits_{\mathfrak{d}} d(\mathfrak{z})\, \varrho(|\mathfrak{z}|, r)\, \partial v_{2n-2} \leq \\
&\leq \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{|\mathfrak{z}|=r} \sum_{\nu=1}^{k} \overset{+}{\log} |\mathfrak{w}|\, \partial v_{2n-1} + O(1) \leq \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{|\mathfrak{z}|=r} \log \sqrt{1 + |w_\nu|^2}\, \partial v_{2n-1} + O(1) = \\
&= \sum_{\nu=1}^{k} T^{(\nu)}(r) + O(1) = \\
&= O(\log r).
\end{aligned} \tag{24.16}$$

Also gilt (24.15).

Umgekehrt sei nun $T(r)=O(\log r)$. Zum normalen Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ wird das duale Koordinatensystem $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ bestimmt. Die Vielfachheit der Schnittstelle $\mathfrak{z}$ zu $\vec{\varepsilon}_\mu$ sei $\nu(\mathfrak{z}\,|\,\vec{\varepsilon}_\mu)$ und $\mathfrak{N}(\vec{\varepsilon}_\mu)$ die zugehörige Schnittstellenfläche. Ihre Anzahlfunktionen $n(r, \vec{\varepsilon}_\mu)$ und $N(r, \vec{\varepsilon}_\mu)$ seien wie in der Tabelle bestimmt. Nach dem 1. Hauptsatz ist

$$N(r, \vec{\varepsilon}_\mu) \leq T(r) + m(r_0, \vec{\varepsilon}_\mu) \leq O(\log r). \tag{24.17}$$

Wegen

$$n(r, \vec{\varepsilon}_\mu)\log r \leq \int_r^{r^2} n(x, \vec{\varepsilon}_\mu)\frac{dx}{x} \leq N(r^2, \vec{\varepsilon}_\mu) = O(\log r) \tag{24.18}$$

ist $n(r, \vec{\varepsilon}_\mu)$ beschränkt. Also hat $\mathfrak{N}(\vec{\varepsilon}_\mu)$ den Grenzexponenten Null. Irgendeine einheitliche, reduzierte Darstellung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \sum_{\mu=1}^{k} w_\mu(\mathfrak{z})\,\mathfrak{e}_\mu$ wird gewählt. Im Raum $R_1^{2n}$ wählt man den Ursprung o. B. d. A. so, dass $\prod_{\mu=1}^{k} w_\mu(0) \neq 0$ ist. Nach der Tabelle Nr. 4 ist im Raum $R_1^{2n}$ eine Metrik $(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{y})$ gegeben. Der Radius $r_1 > 0$ werde so klein gewählt, dass $\prod_{\mu=1}^{k} w_\mu(\mathfrak{z}) \neq 0$ für $|\mathfrak{z}| \leq r_1$ ist. Es sei

$$e(x, 0) = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{x^{n-1}\log(1-x)\}. \tag{24.19}$$

Wegen Ord $T(r)=0$ gibt es nach STOLL [53] Satz 7 ganze Funktionen $g_\mu(\mathfrak{y})$, sodass[46]

$$\log w_\mu(\mathfrak{y}) = g_\mu(\mathfrak{y}) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}(\vec{\varepsilon}_\mu)} \nu(\mathfrak{z}, \vec{\varepsilon}_\mu)\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z})}, 0\right)\partial\omega_{2n-2} \tag{24.20}$$

für $|\mathfrak{y}| \leq r_1$ gilt. Dabei ist $g_\mu(\mathfrak{y}) - g_\nu(\mathfrak{y})$ ein Polynom vom Grad Null. Also gibt es eine ganze Funktion $g(\mathfrak{y})$ und Konstante $c_\mu$, sodass

$$g_\mu(\mathfrak{y}) = g(\mathfrak{y}) + c_\mu \tag{24.21}$$

ist. Setzt man

$$v_\mu(\mathfrak{y}) = w_\mu(\mathfrak{y})\,e^{-g(\mathfrak{y})}, \tag{24.22}$$

so ist $\mathfrak{v}(\mathfrak{y}) = \sum_{\mu=1}^{k} v_\mu(\mathfrak{y})\,\mathfrak{e}_\mu$ wieder eine reduzierte, einheitliche Darstellung von $W$ mit

$$\log v_\mu(\mathfrak{y}) = c_\mu + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}(\vec{\varepsilon}_\mu)} \nu(\mathfrak{z}, \vec{\varepsilon}_\mu)\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z})}, 0\right)\partial\omega_{2n-2} \tag{24.23}$$

für $|\mathfrak{y}|<r_1$. Es sei

(24.24) $$M_\mu(r)=\underset{|\mathfrak{y}|\leq r}{\mathrm{Max}}\,|v_\mu(\mathfrak{y}))|.$$

Wegen

(24.25) $$K_\mu(r)=6e\left\{\int_0^r n(t,\vec{\varepsilon}_\mu)\frac{dt}{t}+r\int_r^\infty n(t,\vec{\varepsilon}_\mu)\frac{dt}{t^2}\right\}=O(\log r)$$

erhält man aus STOLL [53] Satz 4 die Abschätzung

(24.26) $$\log M_\mu(r)\leq 8^{3n}[K(4r)+n(4r,\vec{\varepsilon}_\mu)+N(4r,\vec{\varepsilon}_\mu)]+\log|c_\mu|=O(\log r).$$

Nach Hilfssatz 3 ist $v_\mu(\mathfrak{y})$ ein Polynom. Daher hat $W$ die einheitliche, reduzierte Darstellung $\mathfrak{v}(\mathfrak{y})=\sum_{\mu=1}^{k}v_\mu(\mathfrak{y})\mathfrak{e}_\mu$, wobei $v_\mu(\mathfrak{y})$ Polynome sind. Die meromorphe Fläche $W$ ist rational, w.z.b.w.

Zum Schluss soll noch der 2. Hauptsatz für Funktionen im $R^{2n}$ formuliert werden, um zu zeigen wieweit sich dabei die Voraussetzungen reduzieren.

**Satz 24.2.** Der 2. Hauptsatz für Funktionen im Raum $R^{2n}$.[47]

**Voraussetzung.** *Die Funktion $f$ sei im euklidischen Raum $R^{2n}$ meromorph und nicht rational. Bei euklidischer Massbestimmung $\partial v_{2n-2}(\mathfrak{z})$ in $R^{2n}$ habe sie die Charakteristik $T(r)$, die Anzahlfunktion $N(r,a)$ und die Schmiegungsfunktion $m(r,a)$. Es seien $q$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen $a_1,\ldots,a_q$ gegeben, wobei auch die „Zahl" $\infty$ zugelassen sei.*

**Behauptung.** *Für jedes $\varepsilon>0$ gilt*

(24.27) $$\sum_{\mu=1}^{q}m(r,a_\mu)\leq(2+\varepsilon)T(r),$$

(24.28) $$(q-2-\varepsilon)T(r)\leq\sum_{\mu=1}^{q}N(r,a_\mu)$$

*mit Ausnahme höchstens einer Menge $\tau$, für die das Integral $\int_\tau \frac{dr}{r}$ existiert.*

**Beweis.** Da $f$ nicht konstant ist, ist eine partielle Ableitung, etwa $f_{z_1}$, nicht identisch Null. Wählt man

(24.29) $$\partial B_{n-1}=\partial z_2\ldots\partial z_n,$$

so sind die Voraussetzungen von Satz 23.7 erfüllt, w.z.b.w.

[47] Für $n=1$ siehe R. NEVANLINNA 36 Kap. IX § 3 Seite 205.

## Literatur

[41]. L. AHLFORS, The theory of meromorphic curves. *Acta Soc. Sci. Fenn., Nova Ser. A*, 31 (1941).

[34]. H. BEHNKE und P. THULLEN, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd. 3 (1934), 251–371.

[36]. H. KNESER, Ordnung und Nullstellen bei ganzen Funktionen zweier Veränderlicher. *Sonderausgabe a. d. Sitzber. preuss. Akad. Wiss. Physik.-math. Kl.*, 31 (1936), 446–462.

[38]. ——, Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. *Jahrber. Deutsch. Math. Ver.*, 48 (1938), 1–28.

[36]. R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Bd. 46 (1936) (zweite Auflage 1953).

[52]. W. STOLL, Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. *Math. Zeitschr.*, 57 (1952), 116–154.

[53]. ——, Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen. *Math. Zeitschr.*, 57 (1953), 211–237.

[38]. H. WEYL und J. WEYL, Meromorphic curves. *Ann. Math.*, (2), 39 (1938), 516–538.

[41]. J. WEYL, Analytic curves. *Ann. Math.*, (2), 42 (1941), 371–408.

[43] = W [43]. H. WEYL und J. WEYL, Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, University Press, 1943. (*Annals of mathematics studies.*)