ÜBER DIE DARSTELLUNG DER GANZEN SPITZENFORMEN ZU DEN IDEALSTUFEN DER HILBERTSCHEN MODULGRUPPE UND DIE ABSCHÄTZUNG IHRER FOURIERKOEFFIZIENTEN

VON

KARL-BERNHARD GUNDLACH

Münster in Westfalen
II. Mathematisches Institut der Universität

Einleitung

Erst kürzlich (Math. Ann. 124 (1951) S. 38) hat Siegel den Wunsch ausgesprochen, man solle die Peterssonsche Methode auf den Fall der Hilbertschen Modulgruppe übertragen. Diese Übertragung wird in der vorliegenden Arbeit durchgeführt. Für die Anregung zu der Arbeit und das Interesse an ihrer Durchführung möchte ich Herrn Professor Dr. Petersson an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Ich will zunächst einiges über die Peterssonsche Methode im Fall einer Variablen sagen. Zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten einer ganzen Modulform hat Hecke das folgende Verfahren angegeben. Man subtrahiere von der Modulform eine passende Linearkombination von Eisensteinreihen so, dass als Rest eine ganze Spitzenform bleibt. Die Fourierkoeffizienten der Linearkombination der Eisensteinreihen sind unendliche Reihen bekannter Bauart, die sich auf endliche Teilersummen zurückführen lassen. Der jeweilige Fourierkoeffizient der ganzen Spitzenform tritt als Restglied hinzu. Die Peterssonsche Methode kann hier zur Abschätzung dieses Restgliedes herangezogen werden. Ihr wesentlicher Vorteil gegenüber der Methode von Hardy und Littlewood liegt darin, dass man nicht wie bei Hardy und Littlewood direkt die Fourierkoeffizienten der vorgelegten Funktionen abzuschätzen sucht, sondern zunächst auf analytischem Wege zeigt, dass die Funktion sich als Linearkombination einer Anzahl wesentlich besser bekannter Funktionen, nämlich von Poincaréschen Reihen, darstellen lässt. Mit Hilfe der Metrisierung beweist man hierzu den Vollständigkeitssatz für Poincarésche

Reihen. Die Poincaréschen Reihen entwickelt man nun in Fourierreihen. Ein gegenüber der für Spitzenformen allgemein leicht erhältlichen Abschätzung der Fourierkoeffizienten erheblich verbessertes Ergebnis erhält man durch die nicht-triviale Abschätzung der auftretenden Kloostermanschen Summen, wobei eine neue Abschätzung von A. Weil eine wesentliche Rolle spielt. (Siehe [14])[1]

Bei der Behandlung der Hilbertschen Modulgruppe zeigt es sich, dass man mit den gleichen Methoden zum Ziel kommt wie im Falle einer Variablen, dass sich also die Peterssonsche Methode direkt übertragen lässt. Die bei einer Übertragung auf den Fall mehrerer Variabler verständlicherweise auftretenden Komplikationen sind hier rein technischer Natur, die Grundzüge des Verfahrens bleiben ungeändert.

Bekanntlich treten die Darstellungsanzahlen ganzer Zahlen durch eine positiv-definite quadratische Form als Fourierkoeffizienten gewisser Modulformen auf. Die Bestimmung der Darstellungsanzahlen ist daher gleichbedeutend mit der Berechnung der Fourierkoeffizienten dieser Modulformen. Ich will gleich für einen algebraischen Zahlkörper skizzieren, was man zu ihrer Bestimmung zu tun hat.

Es sei K ein total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem rationalen Zahlkörper. $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}$ seien n komplexe Variable, die auf den Teilraum $\operatorname{Im}(\tau^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$, beschränkt werden sollen. $\tau^{(k)}$ bezeichnet man als die *k-te Konjugierte* von τ. (Im Sprachgebrauch und in der Bezeichnung schliesse ich mich weitgehend an [5] und [6] an; hier nicht besonders erklärte Bezeichnungen können dort nachgeschlagen werden.) S vor einem Ausdruck bedeutet Bildung der Summe der Konjugierten (*Spurbildung*), N Bildung des Produktes (*Normbildung*). Auf Ideale angewandt bedeutet N die Bildung der *Idealnorm*; für eine Zahl α aus K ist daher (das durch α erzeugte Hauptideal wird durch (α) bezeichnet)

$$N((\alpha)) = |N(\alpha)|.$$

Unter der zum Körper K gehörenden (engeren) *Hilbertschen Modulgruppe* Γ versteht man die Gruppe der quadratischen zweireihigen unimodularen Matrizen, deren Elemente ganze Zahlen des Körpers K sind. Für ganze Ideale $\mathfrak{c}$ aus K definiert man die *Hauptkongruenzuntergruppe* $\Gamma(\mathfrak{c})$ der Hilbertschen Modulgruppe zur *Stufe* $\mathfrak{c}$ als die Untergruppe der Matrizen aus Γ, die zur Einheitsmatrix mod $\mathfrak{c}$ kongruent sind, wobei die Matrizenkongruenz wie üblich elementweise zu verstehen ist.

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[1] Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

sei eine Matrix aus Γ. Man versteht unter $L(\tau)$ oder einfach $L\tau$ die Transformation

$$\tau^{(k)} \to \frac{a^{(k)}\tau^{(k)} + b^{(k)}}{c^{(k)}\tau^{(k)} + d^{(k)}}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

also eine simultane linear gebrochene Transformation in den Variablen $\tau^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. Hierdurch wird der Gruppe Γ (und ebenso $\Gamma(\mathfrak{c})$) eine (diskontinuierliche) Substitutionsgruppe im Raume $\operatorname{Im}(\tau^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$, zugeordnet, die gelegentlich als *inhomogene Modulgruppe* bezeichnet wird. Die Gruppe hat einen Fundamentalbereich, der in einigen Punkten der Form $\tau = \xi =$ Zahl aus K ($\tau = \xi$ bedeutet $\tau^{(k)} = \xi^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$) an den Rand des Bereiches $\operatorname{Im}(\tau^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$, heranreicht. Die Punkte $\tau = \xi$ nennt man Spitzen von $\Gamma(\mathfrak{c})$ (siehe [5]). Der auf dem Rande des Bereiches $\operatorname{Im}(\tau^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$, liegende Punkt $\tau^{(k)} = \infty$, $k = 1, \ldots, n$, ist Fixpunkt einer Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{c})$, der *affinen Gruppe* von $\Gamma(\mathfrak{c})$ im Punkte ∞, die aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda & b^* \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{matrix} \lambda = \text{Einheit aus } K \\ \lambda \equiv 1 \bmod \mathfrak{c} \end{matrix}, \quad b^* \text{ ganz in } K$$

mit gewissen Einschränkungen für die b^* besteht. Die Grössen λ^2 bezeichnet man als *Multiplikatoren* von $\Gamma(\mathfrak{c})$ in der Spitze ∞. Diejenigen Matrizen, in denen $\lambda^2 = 1$ ist, bilden eine Untergruppe von Matrizen der Form

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die hier auftretenden algebraischen Zahlen b bezeichnet man als *Translationen* in der Spitze ∞. Ist ξ eine Zahl aus K, so gibt es eine unimodulare Matrix A mit Elementen aus K so, dass $A(\xi) = \infty$ ist. Die Gruppe $A\,\Gamma(\mathfrak{c})\,A^{-1}$ hat wieder eine Untergruppe mit dem Fixpunkt ∞, die affine Gruppe zum Punkte $A^{-1}\infty$. Durch sie sind die Multiplikatoren sowie die Translationen zur Spitze $\xi = A^{-1}\infty$ definiert. Die zu den Translationen gehörende Untergruppe von $A\,\Gamma(\mathfrak{c})\,A^{-1}$ bezeichnet man als $T(A, \Gamma(\mathfrak{c}))$, sie hängt nicht nur von ξ sondern auch von A ab (A ist nicht eindeutig).

Eine in $\operatorname{Im}(\tau^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$, holomorphe Funktion heisst *ganze Modulform der Dimension* $-r$ zu $\Gamma(\mathfrak{c})$, wenn sie die Funktionalgleichungen

$$f(L\tau) = N(c\tau + d)^r f(\tau) \text{ für } L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ aus } \Gamma(\mathfrak{c})$$

erfüllt.

Die ganzen Modulformen der Dimension $-r$ zu $\Gamma(\mathfrak{c})$ bilden eine lineare Schar endlichen Ranges, die wir mit $\{\Gamma(\mathfrak{c}), -r, 1\}$ bezeichnen (für Formen $\{\Gamma(\mathfrak{c}), -r, v\}$ mit Faktorensystem v siehe [6]). $f(\tau)$ heisst *Spitzenform*, wenn sie verschwindet, wenn man innerhalb des Fundamentalbereiches in die Spitzen hineinläuft.

Eine ganze Modulform ist n-fach periodisch und hat eine Fourierentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{\nu \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}} b(\nu)\, e^{2\pi i S(\nu\tau)}.$$

Man kann zeigen, dass $b(\nu)=0$ ist, falls eine der Konjugierten von ν negativ ist (siehe § 1); es ist also nicht nötig, diese Eigenschaft als Forderung in die Definition aufzunehmen, wie es bisher üblich war, man beachte jedoch, dass dies nur für $n>1$ möglich ist.

Man definiert nun die *verallgemeinerten Thetareihen*

(a) $$\vartheta(\tau, Q, \varrho_j, \mathfrak{a}, \lambda) = \sum_{\substack{\xi_j \equiv \varrho_j \bmod \mathfrak{e}\mathfrak{a} \\ 1 \leq j \leq 2r}} e^{\pi i S(\tau Q(\xi)\lambda^{-1})} \qquad \varrho_j \equiv 0 \bmod \mathfrak{a},\ j=1,\dots,2r.$$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ sind ganze Ideale von K und so gewählt, dass $\mathfrak{e}\mathfrak{a}^2\mathfrak{d}=(\lambda)$ ein Hauptideal mit der total-positiven Erzeugenden λ wird; $\mathfrak{d}$ ist die Differente von K. $Q(u) = Q(u_1, \dots, u_{2r})$ ist eine total-positiv-definite quadratische Form mit ganzen Koeffizienten in K. $\vartheta(\tau)$ ist n-fach periodisch und hat die Fourierentwicklung

(b) $$\vartheta(\tau, Q, \varrho_j, \mathfrak{a}, \lambda) = \sum_{\substack{\nu \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}^2 \\ \nu \geq 0}} a(\nu)\, e^{2\pi i S(\frac{1}{2}\nu\tau\lambda^{-1})}$$

($\nu>0$ heisst ν total-positiv). $a(\nu)$ ist gleich der Anzahl der Darstellungen der total-positiven Zahl ν durch die quadratische Form $Q(\xi)$ unter der Nebenbedingung $\xi_j \equiv \varrho_j \bmod \mathfrak{e}\mathfrak{a}$, $j=1,\dots,2r$. Es stellt sich heraus, dass $\vartheta(\tau)$ eine ganze Modulform aus $\{\Gamma(\mathfrak{c}), -r, 1\}$ für passendes $\mathfrak{c}$ ist. Die Reihen (a) sind von Hecke und in dieser Form zuerst von Kloosterman aufgestellt worden, der auch die Stufe bestimmt hat [4]. Man bestimmt nun zu $\vartheta(\tau)$ eine Linearkombination von Eisensteinreihen so, dass der Rest eine ganze Spitzenform ist. Damit wird

(c) $$a(\nu) = N(\nu)^{r-1}\,\Xi(\nu) + a^*(\nu).$$

Das erste Glied rechts ist der Fourierkoeffizient der Linearkombination der Eisensteinreihen und von Kloosterman bestimmt worden (Genaueres findet man in [3] und [4]). Das Restglied $a^*(\nu)$ ist der Fourierkoeffizient einer ganzen Spitzenform. Hier war bisher nur die triviale Abschätzung [3]

$$a^*(\nu) = O(N(\nu)^{\frac{1}{2}r})$$

bekannt.

Im Falle $n=1$, also bei der gewöhnlichen Modulgruppe, gelingt es nun, unter Benutzung nicht-trivialer Abschätzungen der sogenannten *Kloostermanschen Summen*, mit Hilfe der Peterssonschen Methode (siehe insbesondere [8]) die bessere Abschätzung

$$\text{(d)} \qquad a^*(\nu) = O\left(\nu^{\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}[1-l]}\right), \quad (n=1\,!)$$

zu erhalten. l hängt von der Abschätzung der Kloostermanschen Summen ab. Man erhielt zunächst $l=\frac{3}{4}+\varepsilon$ ([1], [11], [13]), mit einer verbesserten Abschätzung von Salié schliesslich $l=\frac{2}{3}+\varepsilon$ ([12]). Mit einer neuen Abschätzung von A. Weil gelangt man bis auf $l=\frac{1}{2}+\varepsilon$ herunter ([10], [14]). Die Ermittlung einer (d) entsprechenden Abschätzung für $n>1$ ist das Hauptziel dieser Arbeit.

Ich behandle zunächst den Fall, dass $r>2$ ist. Da dann unter den Poincaréschen Reihen eine (endliche) Basis der Schar der ganzen Spitzenformen vertreten ist (nach dem Vollständigkeitssatz [6] Satz 11 Seite 577), kann man sich damit begnügen, die Fourierkoeffizienten dieser Reihen abzuschätzen. Solch eine Poincarésche Reihe zur Spitze $\xi = A^{-1}\infty$ hat nach Maass ([6]) § 2) die Gestalt ($v=1$ gesetzt)

$$\text{(e)} \qquad G_{-r}(\tau, 1, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M \subset V_1(A\Gamma(\mathfrak{c}))} N(m_1\tau + m_2)^{-r} e^{2\pi i S \mu M(\tau)}, \quad M = \begin{pmatrix} * & * \\ m_1 & m_1 \end{pmatrix};$$

$V_1(A\,\Gamma(\mathfrak{c}))$ ist ein volles System von Matrizen mit verschiedenen zweiten Zeilen aus der Klasse $A\Gamma(\mathfrak{c})$, $A^{-1}\infty$ ist Spitze von $\Gamma(\mathfrak{c})$, μ ist eine ganze total-positive Zahl aus K.

Zur Ermittlung der Fourierentwicklung von G_{-r} in der Spitze $B^{-1}\infty$ ist es notwendig, die Matrizen aus der Klasse $A\Gamma(\mathfrak{c})B^{-1}$ bis zu einem gewissen Grade explizit zu bestimmen. Ausserdem benötigt man die Multiplikatoren λ^2 (genauer die λ selbst) und die Translationen. Im § 1 werden diese Bestimmungsstücke der Gruppen $\Gamma(\mathfrak{c})$ ermittelt. Eine wesentliche Erschwerung gegenüber dem Fall $n=1$ liegt natürlich darin begründet, dass die Klassenzahl nicht 1 zu sein braucht, so dass z. B. A und B im allgemeinen nicht ganzzahlig gewählt werden können. Die Multiplikatoren, die im Fall $n=1$ nicht auftreten, können überhaupt nur auf Umwegen bestimmt werden. Zur Festlegung der Elemente der Matrizen aus $A\Gamma(\mathfrak{c})B^{-1}$, die zum Teil durch Kongruenzen erfolgt, ist es notwendig, eine ganze Anzahl von Hilfszahlen passend zu wählen. Die Möglichkeit einer solchen passenden Wahl wird im allgemeinen durch den sogenannten *verschärften Annäherungssatz* der algebraischen Zahlentheorie (Hasse, Zahlentheorie S. 280 [Akademieverlag Berlin 1949]) gewährleistet, der grob gesprochen besagt, dass in einem algebraischen Zahlkörper Annäherungsforderungen nach endlich vielen Primdivisoren immer mit einem für die anderen Primdivisoren ganzen Element des Körpers erfüllt werden können.

Im § 2 werden zunächst die Fourierkoeffizienten der $G_{-r}(\tau)$ bestimmt. Sie haben die Form

$$\text{(f)} \qquad a(\nu) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S \mu b^*} \sum_{m} \frac{W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c}))}{N(m)^r} N \left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}\right\}}}{x^r} \, dx \right].$$

Die genauen Summationsbedingungen für m sind dabei weggelassen. $W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c}))$ sind verallgemeinerte Kloostermansche Summen. Δ ist bis auf das Vorzeichen das Volumen des Periodenparallelotops im Raum $\operatorname{Im}(\tau) = y$; $b^* = b^*(\lambda)$ ist eines der für festes λ in den Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \lambda & b^* \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ auftretenden b^* (welches man nimmt, ist gleichgültig). Wesentlich neu gegenüber dem Fall $n = 1$ ist das Auftreten der Summation über die Multiplikatoren λ mit $\lambda > 0$, d. h. über die total-positiven Einheiten, die $\equiv 1 \bmod \mathfrak{c}$ sind. Man muss bei der Abschätzung der Integrale rechts die λ^2 so herausholen, dass einerseits die Konvergenz der Summe über λ erreicht wird, andererseits das mit λ^2 verbundene m^2 nicht störend in Erscheinung tritt. Hierzu ist es nötig, die einzelnen Integrale des Produktes rechts verschieden abzuschätzen, damit sich nicht infolge $N(\lambda^2) = 1$ die Konjugierten von λ^2 gegeneinander wegheben. Die Integrale entpuppen sich auch hier wieder im wesentlichen als Besselfunktionen, für die jetzt jedoch die triviale Abschätzung nicht mehr ganz ausreicht. Setzt man für W eine Abschätzung der Form

$$\text{(g)} \qquad W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c})) = 0\left(N(\mathfrak{e}_1)^l \, N(\mathfrak{e}_2)^{\frac{4}{5}}\right), \quad (m) = \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2$$

voraus, worin $\mathfrak{e}_1$ der zu 2 teilerfremde Idealfaktor von (m) ist, so erhält man

$$\text{(h)} \qquad a(\nu) = 0\left(N(\nu)^{\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}[1-l] + \varepsilon}\right).$$

Die Summen $W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c}))$ lassen sich nun, wie in § 4 ausgeführt wird, auch bei beliebiger Klassenzahl von K mit den Methoden von Salié [11] behandeln. Unter Hinzunahme eines Ergebnisses von A. Weil [14] gelingt es, die oben angegebene Abschätzung allgemein mit $l = \frac{1}{2} + \varepsilon$ herzuleiten. Diese Abschätzung für W lässt sich, wenigstens für $n = 1$, nicht mehr verbessern, wie Salié gezeigt hat ([12] S. 107).

Um auch den Fall $r = 2$ behandeln zu können, ist es notwendig, die den Poincaréschen Reihen für $r > 2$ entsprechenden Spitzenformen zu konstruieren und für diese Schar den Vollständigkeitssatz zu beweisen, da die gewöhnlichen Poincaréschen Reihen für $r = 2$ nicht mehr konvergieren. Man führt hierzu eine komplexe Hilfsvariable s ein und wendet das *Heckesche Summationsverfahren* an. Die Reihe

$$\text{(j)} \qquad G_{-2}(\tau, s, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M \subset V_1(A\,\Gamma(\mathfrak{c}))} N(m_1 \tau + m_2)^{-2} \,|\, N(m_1 \tau + m_2) \,|^{-s} e^{2\pi i S \mu M(\tau)}$$

ist für $Re(s) > 0$ eine holomorphe Funktion von s und hat als Funktion von τ die Transformationseigenschaft

$$\text{(k)} \qquad G_{-2}(L\tau, s, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) =$$
$$= N(c\tau + d)^2 \,|\, N(c\tau + d) \,|^s \, G_{-2}(\tau, s, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) \text{ für } L \text{ aus } \Gamma(\mathfrak{c}).$$

Die Reihe (j) ist für jede Spitze von $\Gamma(\mathfrak{c})$ nach Transformation der Spitze nach ∞ n-fach periodisch in τ (bzw. in $A\tau$, falls $A^{-1}\infty$ die Spitze ist), lässt sich also in eine Fourierreihe nach τ bzw. nach $A\tau$ entwickeln. Von diesen Reihen weist man nach, dass sie als Funktionen von s in einer vollen Umgebung von $s = 0$ holomorph sind. Der Nachweis gelingt mit Hilfe der Abschätzung der Kloostermanschen Summen. Die Fourierkoeffizienten haben ein ähnliches Aussehen wie (f) und werden nach dem Vorbild von § 2 behandelt. Die Abschätzungen werden jedoch komplizierter, da auch negative ν auftreten, die Koeffizienten für $s \neq 0$ nichtanalytische Funktionen von τ sind und die Integrale sich nicht mehr auf Besselfunktionen zurückführen lassen. (Die hier benötigten Integralabschätzungen sind in § 5 am Schluss der Arbeit gesondert durchgeführt, um den Gedankengang des Verfahrens nicht zu stören.) Diese Reihen liefern also die analytische Fortsetzung der Funktionen $G_{-2}(\tau, s)$ als Funktionen von s, wenn τ in einem endlichen abgeschlossenen Bereich oder in dem zugehörigen „Spitzensektor" liegt. Für $s = 0$ sind sie holomorphe Funktionen der τ. Da die Transformationsformeln (k) infolge der Permanenz der Funktionalgleichung in s auch für $s = 0$ gelten, ist diese analytische Fortsetzung für $s = 0$ eine ganze Modulform, da auch die konstanten Glieder in den Spitzen verschwinden, sogar eine ganze Spitzenform. In den Funktionen

$$G_{-2}(\tau, 0, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu)$$

haben wir somit eine Schar ganzer Spitzenformen aus $\{\Gamma(\mathfrak{c}), -2, 1\}$ erhalten.

Zum Beweis des Vollständigkeitssatzes muss man zunächst das Metrisierungsintegral ausrechnen (Maass [6] § 5). Man setzt das Integral in etwas modifizierter Form für $\mathrm{Re}(s) > 0$ an und rechnet es durch Einsetzen der für $G_{-2}(\tau, s)$ hier gültigen Reihenentwicklung (j) aus. Man zeigt dann, dass das Integral in einer Umgebung von $s = 0$ eine holomorphe Funktion von s ist, so dass der Wert des eigentlichen Metrisierungsintegrales, also der Wert unseres Integrales für $s = 0$, gleich dem Funktionswert der sich für $\mathrm{Re}(s) > 0$ für das Integral ergebenden holomorphen Funktion an der Stelle $s = 0$ ist. Der Rest des Beweises geht wörtlich wie für $r > 2$ vor sich.

Nachdem man den Vollständigkeitssatz hat, genügt es wieder, die Fourierkoeffizienten dieser erzeugenden Funktionen der Schar abzuschätzen, was nach dem Vorbild des § 2 keine Schwierigkeiten mehr bereitet. Es zeigt sich, dass die Abschätzung (h) auch im Fall $r=2$ richtig ist.

§ 1. Die Bestimmungsstücke der Gruppen $\Gamma(\mathfrak{c})$ und die Regularität einer ganzen Modulform in den Spitzen

In diesem § werden die Gruppen $\Gamma(\mathfrak{c})$ näher untersucht, insbesondere werden die Multiplikatoren in den Spitzen bestimmt und die Matrizen der Klasse $A\Gamma(\mathfrak{c})B^{-1}$ näher charakterisiert. Die Ergebnisse lassen sich in zwei Sätzen formulieren:

Satz 1. *ξ sei eine Zahl aus K, die mit Hilfe zweier ganzer Zahlen γ, δ aus K als Quotient $\xi=-\delta/\gamma$ dargestellt werde. $\mathfrak{a}=(\gamma,\delta)$ sei das durch γ, δ definierte ganze Ideal in K. Dann gilt:*

a) *γ, δ lassen sich so auswählen, dass $(\mathfrak{a},\mathfrak{c})=1$ ist.*

b) *Es gibt zwei Zahlen α, β aus K so, dass $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ ist und $(\alpha,\beta)=\mathfrak{a}^{-1}$ ist.*

c) *Ist*

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

so sind in der Spitze $\xi=A^{-1}\infty$ die Multiplikatoren von $\Gamma(\mathfrak{c})$ die Zahlen λ mit

$$\lambda\equiv 1 \bmod \mathfrak{c},\ \lambda = \textit{Einheit aus } K$$

und die Translationen die Zahlen b aus K mit

$$b\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-2}.$$

Satz 2. *ξ sei eine Zahl aus K, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ und damit $\mathfrak{a}$ und A seien nach Satz 1 a) – c) bestimmt. $\xi_1=-\delta_1/\gamma_1$ sei eine weitere, eventuell die gleiche, Spitze. γ_1, δ_1, α_1, β_1 mit $(\gamma_1,\delta_1)=\mathfrak{b}$, $B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$ mögen den Bedingungen a) und b) von Satz 1 genügen. Die Matrizen M aus $A\Gamma(\mathfrak{c})B^{-1}$ seien mit*

$$M=\begin{pmatrix}h & k\\ m & n\end{pmatrix} \tag{1}$$

bezeichnet. Wir setzen

$$((-\gamma\beta_1+\delta\alpha_1),\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1})=\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}.$$

Dann gilt:

a) γ_1, δ_1 *können so gewählt werden, dass* $(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = 1$ *ist.*

b) *In* (1) *durchläuft m die Lösungen von*

$$m \equiv \gamma \delta_1 - \delta \gamma_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \quad m \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}.$$

c) $\mathfrak{c}$ *lässt sich so in ein Produkt* $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2$ *zerlegen, dass*

$$(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) = 1, \quad (\mathfrak{c}_2, m) = 1, \quad \mathfrak{c}_3 \mid \mathfrak{c}_2$$

für alle m gilt, die von Null verschieden sind.

d) *Bei festem m gibt es ein* χ *aus K mit* $(\chi, m) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}$ *so, dass n in* (1) *die Restklassen* $\chi j \bmod (m)\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}^{-2}$ *durchläuft, wobei j alle Lösungen von*

$$j \equiv \delta^* \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}, \quad (j, \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\, m\, \mathfrak{a}^{-1}\, \mathfrak{b}^{-1}) = 1, \quad j \equiv 0 \bmod (1)$$

mod $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}$ *genau einmal durchläuft.*

Weiter ist

$$h_1 \equiv \bar{j}\,\varphi + \alpha^* \varkappa \bmod (m)\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-2}$$

mit

$$(\varphi\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}, \; m\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}) = 1$$

φ, α^*, $\varkappa$ *hängen von m, aber nicht von n ab.* $\bar{j}$ *ist durch*

$$j\,\bar{j} \equiv 1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}$$

bestimmt.

Durchläuft $\mathfrak{x}$ die Primideale von K, so ist der Index von $\Gamma\,(\mathfrak{c})$ in Γ nach [2] S. 250.

$$(2) \qquad (\Gamma : \Gamma\,(\mathfrak{c})) = N\,(\mathfrak{c})^3 \prod_{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{c}} (1 - N\,(\mathfrak{x})^{-2}),$$

also jedenfalls endlich. Es handelt sich um den Index der homogenen Gruppe; der Index der inhomogenen Gruppe in der inhomogenen Modulgruppe ist kleiner, falls $-I$ in $\Gamma(\mathfrak{c})$ liegt, und zwar dann $\frac{1}{2}\;(\Gamma : \Gamma\,(\mathfrak{c}))$.

Zur Bestimmung der weiteren uns interessierenden Grössen von $\Gamma(\mathfrak{c})$ benötigen wir den

Hilfssatz 1. γ, δ *und* γ_1, δ_1 *seien zwei Paare ganzer Zahlen aus K, die das gleiche Ideal definieren, es sei also*

$$(3) \qquad (\gamma, \delta) = (\gamma_1, \delta_1) = \mathfrak{a} \quad \gamma, \delta, \gamma_1, \delta_1 \text{ ganz in } K.$$

Unter der Voraussetzung (3) *gibt es dann und nur dann eine Substitution L aus* $\Gamma(\mathfrak{c})$ *so, dass*

(4) $$\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \delta_1\end{pmatrix}, \quad L \text{ aus } \Gamma(\mathfrak{c})$$

wenn

(5) $$\gamma \equiv \gamma_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \delta \equiv \delta_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}$$

ist.

Es handelt sich hierbei um den bei Kloosterman ([3] S. 169) ohne Beweis angegebenen Hilfssatz 2. Setzt man (3) und (4) voraus, so folgt (5) trivialerweise. Zum Beweise des Satzes müssen wir also nur noch unter der Voraussetzung, dass (3) und (5) erfüllt sind, eine Matrix L so konstruieren, dass auch (4) erfüllt wird. Bezeichnen wir die Klassenzahl von K mit h, so ist $\mathfrak{a}^h$ Hauptideal und kann als $\mathfrak{a}^h = (\nu^h)$ dargestellt werden mit $(\nu) = \mathfrak{a}$ in einem Erweiterungskörper $K_{\mathfrak{a}}$ von K mit ν^h in K. Unter diesen Umständen lässt sich ν^h bekanntlich in der Form

(6) $$\nu^h = \chi\gamma + \mu\delta \quad \text{und} \quad \nu^h = \chi_1\gamma_1 + \mu_1\delta_1$$
$$\chi, \chi_1, \mu, \mu_1 \text{ ganz in } K$$

so darstellen, dass χ, χ_1, μ, μ_1 durch ν^{h-1} teilbar sind. Wir bilden nun die Matrizen

$$R = \begin{pmatrix}\gamma/\nu & -\mu/\nu^{h-1}\\ \delta/\nu & -\chi/\nu^{h-1}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R_1 = \begin{pmatrix}\gamma_1/\nu & -\mu_1/\nu^{h-1}\\ \delta_1/\nu & -\chi_1/\nu^{h-1}\end{pmatrix}.$$

Wegen (6) sind die Koeffizienten von R und R_1 ganze Zahlen aus $K_{\mathfrak{a}}$, ausserdem ist offenbar $|R| = |R_1| = 1$ und $L = R_1 R^{-1} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ a, b, c, d ganz in K, d.h. L aus Γ. Wegen (5) ist

$$R \equiv R_1 \bmod \mathfrak{c} \text{ in } K_{\mathfrak{a}},$$[2]

also

$$L = R_1 R^{-1} \equiv I \bmod \mathfrak{c} \text{ in } K_{\mathfrak{a}}.$$

Da aber $\mathfrak{c}$ ein Ideal aus K ist und die Glieder der Kongruenz ebenfalls in K liegen, gilt die Kongruenz bereits in K; das bedeutet

$$L \text{ liegt in } \Gamma(\mathfrak{c}).$$

Weiter ist

$$\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\nu\\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \delta_1\end{pmatrix} = R_1\begin{pmatrix}\nu\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \delta_1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} \quad \text{q.e.d.}$$

Da die Anzahl der inäquivalenten Spitzen von Γ endlich ist und der Index von $\Gamma(\mathfrak{c})$ in Γ ebenfalls endlich ist, enthält auch ein volles Vertretersystem $\mathfrak{K}$ mod $\Gamma(\mathfrak{c})$ inäquivalenter rationaler Punkte $-\delta/\gamma$ nur endlich viele Punkte. Man kann daher

[2] Bei passender Wahl von χ_1, μ_1.

annehmen, dass die Zahlenpaare γ, δ mit $-\delta/\gamma$ aus $\mathfrak{K}$, für die die Ideale (γ, δ) in der gleichen Idealklasse liegen, auch das gleiche Ideal definieren. Berücksichtigt man, dass $(\gamma, \delta) = (\varepsilon\gamma, \varepsilon\delta)$ ist, wenn ε eine Einheit ist, und dass $-\delta/\gamma = -\varepsilon\delta/\varepsilon\gamma$ der gleiche Punkt ist, so erhält man mit Hilfe von Hilfssatz 1 durch eine einfache Abzählung als Anzahl der inäquivalenten Spitzen von $\Gamma(\mathfrak{c})$ die Zahl

$$h\,\frac{N(\mathfrak{c})^2}{w(\mathfrak{c})}\prod_{\mathfrak{x}|\mathfrak{c}}(1 - N(\mathfrak{x})^{-2}), \tag{7}$$

$w(\mathfrak{c})$ ist hier die Anzahl der mod $\mathfrak{c}$ inäquivalenten Einheiten von K. (Die Zahl wurde zuerst von Kloosterman [3] S. 170 angegeben.) Dass diese Punkte wirklich Spitzen im Sinne der Definition von Maass sind, dass also insbesondere hinreichend viele unabhängige Multiplikatoren existieren, ergibt sich durch Bestimmung der zugehörigen affinen Gruppen.

$-\delta/\gamma$ sei eine Spitze, $(\gamma, \delta) = \mathfrak{a}$. γ, δ können so gewählt werden, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = 1$ ist. Es gibt dann Zahlen α, β aus K so, dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad\text{und}\quad (\alpha, \beta) = \mathfrak{a}^{-1} \tag{8}$$

ist. Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \quad\text{also}\quad A^{-1} = \begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Damit ist

$$A\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty, \quad A^{-1}\infty = -\frac{\delta}{\gamma}.$$

Um die Spitze $-\dfrac{\delta}{\gamma}$ von $\Gamma(\mathfrak{c})$ zu behandeln, müssen wir uns mit der Spitze ∞ von $A\,\Gamma(\mathfrak{c})\,A^{-1}$ befassen. Die Gruppe der Translationen sei

$$T(A, \Gamma(\mathfrak{c})) = \{\pm U^b\}, \quad \left[U^b = \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad D_\lambda = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\right]$$

b durchläuft dabei den Modul der Translationen. Zur Bestimmung dieses Moduls betrachtet man

$$A^{-1}\,T(A, \Gamma(\mathfrak{c}))\,A = \left\{\pm\begin{pmatrix}1+\gamma\delta b & \delta^2 b\\ -\gamma^2 b & 1-\gamma\delta b\end{pmatrix}\right\}.$$

Notwendig dafür, dass diese Matrizen in $\Gamma(\mathfrak{c})$ liegen, ist

$$\delta^2 b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}, \quad -\gamma^2 b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c},$$

also, da $(\delta^2, \gamma^2) = \mathfrak{a}^2$ ist,

$$b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-2}.$$

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir

$$A^{-1}T(A, \Gamma(\mathfrak{c}))A \equiv \{\pm I\} \bmod \mathfrak{c}$$

und damit schliesslich

(10) $$T(A, \Gamma(\mathfrak{c})) = \{U^b\}, \quad b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-2}, \quad 2 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}$$

bzw.

(11) $$T(A, \Gamma(\mathfrak{c})) = \{\pm U^b\}, \quad b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-2}, \quad 2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}.$$

Zur Bestimmung der Multiplikatoren verwenden wir die Nebenklasse

(12) $$A\Gamma(\mathfrak{c}) = \left\{\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}\right\}$$

m_1, m_2 durchlaufen offenbar genau die Zahlenpaare, für die

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}, \quad L \text{ aus } \Gamma(\mathfrak{c}) \text{ und daher } (m_1, m_2) = \mathfrak{a}$$

ist. Nach Hilfssatz 1 können wir also feststellen: m_1, m_2 durchlaufen genau die Lösungspaare von

(13) $$m_1 \equiv \gamma, \ m_2 \equiv \delta \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}, \quad (m_1, m_2) = \mathfrak{a}, \quad m_1, m_2 \text{ ganz in } K.$$

Als Multiplikatoren kommen nur Einheiten aus K in Betracht. Zwei Matrizen aus $A\Gamma(\mathfrak{c})$, deren zweite Zeilen sich nur um einen Faktor λ unterscheiden, unterscheiden sich offenbar nur um eine Matrix $U^{b*}D_\lambda$ aus $A\Gamma(\mathfrak{c})A^{-1}$ als Linksfaktor. Um alle Multiplikatoren zu bestimmen, genügt es daher, die Einheiten zu bestimmen, um die sich zweite Zeilen von $A\Gamma(\mathfrak{c})$ unterscheiden können. Nun ist

$$\begin{matrix} \lambda\gamma \equiv \gamma \\ \lambda\delta \equiv \delta \end{matrix} \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a} \longleftrightarrow \begin{matrix} (\lambda-1)\gamma \equiv 0 \\ (\lambda-1)\delta \equiv 0 \end{matrix} \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a} \longleftrightarrow \lambda \equiv 1 \bmod \mathfrak{c}.$$

Die Multiplikatoren sind also die Einheiten, die kongruent 1 mod $\mathfrak{c}$ sind; damit ist auch festgestellt, dass es $n-1$ unabhängige Multiplikatoren gibt, dass also $-\dfrac{\delta}{\gamma}$ eine Spitze im Sinne der Definition von Maass ist.

$-\dfrac{\delta_1}{\gamma_1}$ sei nun eine weitere (eventuell die gleiche) Spitze, $(\gamma_1, \delta_1) = \mathfrak{b}$, γ_1, δ_1 können so gewählt werden, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = 1$ ist. Wir setzen

(14) $$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_1 & -\beta_1 \\ -\gamma_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

und denken uns α_1 und β_1 so bestimmt, dass

(14 a) $$(\alpha_1, \beta_1) = \mathfrak{b}^{-1}, \quad |B| = 1$$

wird. Es ist

$$B\left(-\frac{\delta_1}{\gamma_1}\right) = \infty, \quad B^{-1}(\infty) = -\frac{\delta_1}{\gamma_1}.$$

Wir wollen jetzt die Matrizen

(15) $$\begin{pmatrix} h_1 & k \\ m & n \end{pmatrix} \text{ aus } A\,\Gamma(\mathfrak{c})\,B^{-1}$$

bestimmen, jedenfalls soweit, wie wir es für unsere Zwecke benötigen. Diese Matrizen haben die Gestalt

(16) $$\begin{pmatrix} h_1 & k \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} k_1\delta_1 - k_2\gamma_1 & -k_1\beta_1 + k_2\alpha_1 \\ m_1\delta_1 - m_2\gamma_1 & -m_1\beta_1 + m_2\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Wie wir wissen, durchlaufen m_1, m_2 genau die Lösungspaare von (13). Man rechnet leicht nach, dass m, n die Lösungspaare von

(17) $$\begin{aligned} m &\equiv \gamma\delta_1 - \delta\gamma_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \\ n &\equiv -\gamma\beta_1 + \delta\alpha_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \end{aligned} \quad (m\,\mathfrak{b}^{-1},\ n\,\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$

durchlaufen. Überdies stellt man fest, dass h_1 und k den Kongruenzen

(18) $$h_1 \equiv \alpha\delta_1 - \delta\alpha_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, \quad k \equiv -\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$$

genügen.

Wir setzen nun

(19) $$(-\gamma\beta_1 + \delta\alpha_1,\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}) = \mathfrak{c}_3\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}.$$

Es ist natürlich

$$(\mathfrak{c}_3, m) = 1.$$

Wir zerlegen $\mathfrak{c}$ so in zwei teilerfremde Faktoren $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, dass

(20) $$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, \quad (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) = 1 \text{ und } (\mathfrak{c}_2, m) = 1, \quad \mathfrak{c}_3 \mid \mathfrak{c}_2$$

gilt. Wir wählen zwei Zahlen η und χ aus mit

(21) $$\eta \equiv 0 \bmod (m)\,\mathfrak{c} \text{ und } (\chi) = \mathfrak{c}_3\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{g}, \quad (\eta, \mathfrak{g}) = 1.$$

Dann ist

$$(\eta, \chi) = \mathfrak{c}_3\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}$$

und

(21 a) $$n = j\chi + j_1\eta \equiv j\chi \bmod (m)\,\mathfrak{c}, \quad -\gamma\beta_1 + \delta\alpha_1 \equiv \delta^*\chi \bmod (m)\,\mathfrak{c}.$$

Aus
$$n \equiv -\gamma\beta_1 + \delta\alpha_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}$$
schliessen wir
$$j\chi \equiv \delta^*\chi \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \text{ und } j \equiv \delta^* \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}$$
und umgekehrt. Aus
$$(m\,\mathfrak{b}^{-1},\ n\,\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$
schliessen wir
$$(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\,m\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1},\ j) = 1, \text{ da } (\delta^*,\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}) = 1 \text{ ist,}$$

und umgekehrt. n liege in einer festen Restklasse mod $\mathfrak{c}\,(m)\,\mathfrak{b}^{-2}$. Dann liegt j in einer festen Restklasse mod $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}$ und umgekehrt. Durchläuft n also ein volles Restsystem mod $\mathfrak{c}\,(m)\,\mathfrak{b}^{-2}$ unter den Nebenbedingungen

(22) $$n \equiv -\gamma\beta_1 + \delta\alpha_1 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}, \quad (n\,\mathfrak{b},\ m\,\mathfrak{b}^{-1}) = \mathfrak{a},$$

so durchläuft j ein volles Restsystem mod $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}$ unter den Nebenbedingungen

(22 a) $$j \equiv \delta^* \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1} \quad \text{und} \quad (j,\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}) = 1.$$

Zur Bestimmung von h_1 wählen wir zwei Zahlen $\varkappa$ und ψ so aus, dass

(23) $$(\varkappa) = \mathfrak{c}_1\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{g}_2, \quad (\psi) = \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{g}_1$$
$$(\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{c}\,m) = (\mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{c}\,m) = 1$$

ist. h_1 stellt sich dar als

(24) $$h_1 = h\psi + h_2\varkappa$$
$$h_1 \equiv h\psi \bmod \mathfrak{c}_1\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}, \quad h_1 \equiv h_2\varkappa \bmod \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}.$$

Wir wissen nun, dass
$$n\,h_1 = 1 + m\,k \equiv 1 + m\,(-\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1) \bmod \mathfrak{c}_1\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}$$
ist (vergleiche (18), $\mathfrak{c}_2$ benötigen wir hier nicht und haben es daher weggelassen). Nach (21 a) und (24) erhalten wir
$$j\,h\,\chi\,\psi \equiv 1 + m\,(-\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1) \bmod \mathfrak{c}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}.$$
(21) und (23) liefern
$$(\chi\,\psi) = \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}_1, \quad \text{also} \quad (\chi\,\psi,\ \mathfrak{c}_1\,m\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}) = 1.$$
Es existiert somit eine ganze Zahl $\overline{(\chi\,\psi)}$, die so bestimmt sei, dass

$$\overline{(\chi\,\psi)}\,(\chi\,\psi) \equiv 1 \mod \mathfrak{c}_1\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1} \text{ ist.}$$

Damit wird

$$j\,h \equiv \overline{(\chi\,\psi)}\,(1 + m\,\{-\alpha\,\beta_1 + \beta\,\alpha_1\}) \mod \mathfrak{c}_1\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}.$$

Da $(j,\, \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\,m\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}) = 1$ ist, ist endlich

$$h \equiv \bar{j}\,\overline{(\chi\,\psi)}\,(1 + m\,\{-\alpha\,\beta_1 + \beta\,\alpha_1\}) \mod \mathfrak{c}_1\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}. \tag{25}$$

Hierbei sei

$$j\,\bar{j} \equiv 1 \mod \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1}.$$

Durch (25) ist $h\,\psi$ mod $\mathfrak{c}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-2}$ festgelegt. Nach (18) und (24) ist

$$h_1 \equiv h_2\,\varkappa,\;\; h_1 \equiv \alpha\,\delta_1 - \delta\,\alpha_1 \equiv \alpha^*\,\varkappa \mod \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b},$$

also

$$h_2\,\varkappa \equiv \alpha^*\,\varkappa \mod \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b},$$

oder, da h_2 und α^* ganze Zahlen sind und $\varkappa \equiv 0 \mod \mathfrak{c}_1\,(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}$ ist, sicher

$$h_2\,\varkappa \equiv \alpha^*\,\varkappa \mod \mathfrak{c}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-2},$$

womit auch $h_2\,\varkappa$ und damit h_1 mod $\mathfrak{c}\,(m)\,\mathfrak{a}^{-2}$ festgelegt ist. Fasst man diese Ergebnisse zusammen, so erhält man die Sätze 1 und 2.

Der Beweis, dass eine in $\operatorname{Im}(\tau^{(k)}) > 0$ holomorphe Funktion $f(\tau)$, die die Transformationsrelationen einer automorphen Form zu einer hyperabelschen Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$ erfüllt, bereits der Regularitätsforderung in den Spitzen genügt, verläuft wie folgt: Die Spitze sei o. B. d. A. ∞. Die Fourierkoeffizienten sind nach Maass

$$a\,(\mu + \varkappa) = \frac{1}{\Delta} \int_P \cdots \int f(\tau)\, e^{-2\pi i\, S(\mu+\varkappa)\tau}\, d\,x^{(1)} \ldots d\,x^{(n)}$$

P ist ein Periodenparallelotop im Raum $\operatorname{Im}(\tau) = y$. $|\Delta|$ ist das Volumen von P. y ist willkürlich wählbar. Nun gilt offenbar

$$|\,a\,(\mu + \varkappa)\,| \leq \underset{\operatorname{Im}(\tau) = y}{\text{Maximum}}\; |\,f(\tau)\,|\; e^{2\pi\, S(\mu+\varkappa)\, y}.$$

Das Maximum von $|\,f(\tau)\,|$ für $\operatorname{Im}(\tau) = y$ ist natürlich gleich dem Maximum in einem der Periodenparallelotope. λ^2 sei nun ein Multiplikator von $\mathfrak{G}$ in ∞. Wählt man $y = \lambda^{2\,m} y_0$, so ergibt sich

$$|\,a\,(\mu + \varkappa)\,| \leq \underset{\operatorname{Im}(\tau) = \lambda^{2\,m} y_0}{\text{Maximum}}\; |\,f(\tau)\,|\; e^{2\pi\, S(\mu+\varkappa)\, \lambda^{2\,m} y_0}.$$

Nun ist aber

$$|\,f(\tau)\,| = |\,f(\lambda^{-2\,m}\,\tau + \beta^{**})\,|,\;\; \beta^{**} \text{ reell},$$

also

$$\operatorname*{Maximum}_{\operatorname{Im}(\tau)=\lambda^{2m} y_0} |f(\tau)| = \operatorname*{Maximum}_{\operatorname{Im}(\tau)=\lambda^{2m} y_0} |f(\lambda^{-2m}\tau)| = \operatorname*{Maximum}_{\operatorname{Im}(\tau)=y_0} |f(\tau)|$$

und damit schliesslich

$$|a(\mu+\varkappa)| \leq \operatorname*{Maximum}_{\operatorname{Im}(\tau)=y_0} |f(\tau)|\, e^{2\pi S(\mu+\varkappa)\lambda^{2m} y_0}.$$

Ist nun eine Komponente von $\mu+\varkappa$, etwa $\mu^{(1)}+\varkappa^{(1)}<0$, so kann man λ^2 so wählen, dass $\lambda^{(1)2m}>1$, $\lambda^{(j)2m}<1$, $j=2,\ldots,n$, ist. Für $m>m_0(\varepsilon)$ bedeutet dies

$$|a(\mu+\varkappa)| < \varepsilon.$$

$a(\mu+\varkappa)$ ist daher nur dann von Null verschieden, wenn alle Komponenten von $\mu+\varkappa \geq 0$ sind, das ist aber die Regularität in ∞. Dieser Beweis beruht auf dem Auftreten der Multiplikatoren und gilt daher nur für $n>1$. Für $n=1$ ist die Behauptung überdies sogar sicher falsch.

§ 2. Die Fourierkoeffizienten der ganzen Spitzenformen der Schar $\{\Gamma(\mathfrak{c}), -r, 1\}$ für ganzes $r>2$

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des Satzes 3 für $r>2$.

Satz 3. *$f(\tau)$ sei eine ganze Spitzenform aus der Schar $\{\Gamma(\mathfrak{c}),\ -r,\ v=1\}$. Ist $B^{-1}\infty = -\frac{\delta_1}{\gamma_1}$ eine Spitze von $\Gamma(\mathfrak{c})$, so gilt für die Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $f(\tau)$ in $-\frac{\delta_1}{\gamma_1}$ die Abschätzung*

$$|a^*(\nu)| = O\left(N(\nu)^{(\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}+\varepsilon)}\right)$$

für $r=2,\ldots$.

Um die Fourierkoeffizienten der ganzen Spitzenformen der Schar abzuschätzen, genügt es, wegen des Vollständigkeitssatzes für Poincarésche Reihen ([6] S. 577 Satz 11), die Fourierkoeffizienten der Poincaréschen Reihen

$$G_{-r}(\tau, 1, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) \quad \text{für } \mu>0$$

abzuschätzen.

Wir betrachten nur den Fall, dass r eine ganze Zahl ist. A sei wie in Satz 1 bestimmt. $V(A\,\Gamma(\mathfrak{c}))$ sei ein volles System von Matrizen aus $A\,\Gamma(\mathfrak{c})$ mit nicht assoziierten zweiten Zeilen. Nach Maass ([6] § 2) ist dann

$$(26)\qquad G_{-r}(\tau, 1, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M_1 \subset V(A\Gamma(\mathfrak{c}))} N(m_1\tau+m_2)^{-r} \sum_{\lambda \succ 0} e^{2\pi i S\mu(\lambda^2 M(\tau)+b^*)},\ M_1 = \begin{pmatrix} * & * \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Die auftretenden λ sind in jedem Falle genau die total-positiven Einheiten aus K, die kongruent 1 mod $\mathfrak{c}$ sind (b^* ist in der Einleitung erklärt).

$B^{-1}\infty$ (B wie in Satz 2 gewählt) sei eine Spitze von $\Gamma(\mathfrak{c})$. Um die Fourierentwicklung von G_{-r} in $B^{-1}\infty$ zu erhalten, müssen wir die Entwicklung von

$$G_{-r}(B^{-1}\tau, 1, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M_1 \subset V(A\Gamma(\mathfrak{c}))} N(m_1 B^{-1}\tau + m_2)^{-r} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S\mu(\lambda^2 M_1 B^{-1}(\tau) + b^*)}$$

im Punkt ∞ berechnen. Nun ist, wie man nachrechnet, in der Bezeichnung von Satz 2

$$G_{-r}(B^{-1}\tau, 1, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) = N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)^r \sum_{M \subset V(A\Gamma(\mathfrak{c})B^{-1})} N(m\tau + n)^{-r} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S\mu(\lambda^2 M(\tau) + b^*)}.$$

Von dieser Reihe trennen wir den Teil ab, für den $m = 0$ ist. Dieser Teil ist

$$N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)^r \sum_{\substack{M \subset V(A\Gamma(\mathfrak{c})B^{-1}) \\ m = 0}} N(n)^{-r} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S\mu\left(\lambda^2 \frac{h_1\tau + k}{n} + b^*\right)}. \tag{27}$$

Da es in $V(A\Gamma(\mathfrak{c})B^{-1})$ nur eine feste von K und $\mathfrak{c}$ abhängige Anzahl von Matrizen M mit $m = 0$ gibt, wenn $m = 0$ überhaupt vorkommt, so ist dies bereits eine Fourierreihe, deren Koeffizienten durch eine nur von K und $\mathfrak{c}$ abhängige Schranke beschränkt sind. Es genügt daher für unsere Zwecke, die Fourierkoeffizienten $a(\nu)$ des Restes abzuschätzen. Für $m \neq 0$ ist

$$M(\tau) = \frac{h_1}{m} - \frac{1}{m(m\tau + n)}, \quad M = \begin{pmatrix} h_1 & k \\ m & n \end{pmatrix} \text{ aus } V(A\Gamma(\mathfrak{c})B^{-1}).$$

Die Nichtassoziiertheit von $M = \{m, n\}$ erreichen wir dadurch, dass wir nur nichtassoziierte m zulassen, was wir durch $(m)_{\mathfrak{c}}$ andeuten wollen. Wir können jetzt Satz 2 anwenden und die Summationsbedingungen hinschreiben; die Summe mit $m \neq 0$ wird dann

$$N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)^r \sum_{\nu} a(\nu) e^{2\pi i S\nu\tau} = \tag{28}$$

$$= N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)^r \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S\mu b^*} \sum_{m \subset \mathfrak{H}} N(m)^{-r} \sum_{j \subset \mathfrak{C}(m)} e^{2\pi i S\mu\lambda^2 \frac{h_1}{m}} \sum_{b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}} \frac{e^{-2\pi i S \frac{\mu\lambda^2}{m^2\left(\tau + \frac{1}{m}\chi j + b\right)}}}{N\left(\tau + \frac{1}{m}\chi j + b\right)^r}.$$

Die Fourierkoeffizienten $a(\nu)$ berechnet man nach bekannten Verfahren (Lipschitzformel) (man führe eine Basis von $\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}$ ein) und erhält ($y = \mathrm{Im}(\tau)$)

$$a(\nu) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S\mu b^*} \sum_{m \subset \mathfrak{H}} \frac{W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c}))}{N(m)^r} N\left[\int_{iy+\infty}^{iy-\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x + \frac{\lambda^2\mu}{m^2 x}\right\}}}{x^r} dx\right]. \tag{29}$$

Hierin bedeutet

$$\mathfrak{H} \text{ die Summ.-Bed. } \begin{array}{l} m \equiv \gamma\,\delta_1 - \delta\,\gamma_1 \mod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \\ m \equiv 0 \mod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \\ m \neq 0 \quad (m)_{\mathfrak{c}} \end{array} \qquad \mathfrak{C}(m) \;\; \begin{array}{l} j \equiv \delta^* \mod \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1} \\ (j, \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}\, m\, \mathfrak{a}^{-1}\, \mathfrak{b}^{-1}) = 1 \\ j \mod \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_3^{-1}(m)\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}^{-1} \end{array}$$

und

$$W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c})) = \sum_{j \subset \mathfrak{C}(m)} e^{2\pi i S\left\{\frac{\nu\chi}{m} j + \frac{\lambda^2 \mu \varphi}{m} \bar{j}\right\}} e^{2\pi i S \frac{\lambda^2 \mu}{m} \alpha^* \varkappa}. \tag{30}$$

Die in (29) auftretenden ν sind die total-positiven Zahlen des Ideals $\mathfrak{c}^{-1}\,\mathfrak{b}^2\,\mathfrak{d}^{-1}$. Δ ist die Substitutionsdeterminante, die bei der Elimination der Idealbasis am Integral auftritt und es ist (siehe etwa auch [6] S. 545)

$$|\Delta| = N(\mathfrak{c})\,|d^{\frac{1}{2}}|, \quad d = \text{Diskriminante von } K.$$

Um $a(\nu)$ abzuschätzen, benötigen wir zunächst eine Abschätzung von

$$N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}\right\}}}{x^r}\, dx\right], \quad \nu > 0, \;\; \mu > 0.$$

Hierzu setzt man

$$t = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{m}{\lambda}\right| x = \varrho\, x$$

und erhält

$$J = \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}\right\}}}{x^r}\, dx = \varrho^{r-1} \int_{i\varrho y-\infty}^{i\varrho y+\infty} \frac{e^{-2\pi i\,(\nu\mu)^{\frac{1}{2}} \cdot \left|\frac{\lambda}{m}\right| (t + t^{-1})}}{t^r}\, dt.$$

Setzt man nun noch $\zeta = -\,it$, so ergibt sich

$$J = 2\pi\, e^{-\frac{1}{2}\pi i r}\, \varrho^{r-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} \frac{e^{2\pi(\nu\mu)^{\frac{1}{2}} \cdot \left|\frac{\lambda}{m}\right| (\zeta - \zeta^{-1})}}{\zeta^r}\, d\zeta =$$

$$= 2\pi\, e^{-\frac{1}{2}\pi i r}\, \varrho^{r-1} J_{r-1}\left(4\pi\,(\nu\,\mu)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\lambda}{m}\right|\right);$$

J_{r-1} ist die $r-1$-te Besselfunktion. Für die Besselfunktionen hat man die beiden Abschätzungen

$$|J_{r-1}(z)| \leq C_1\, z^{r-1-\varepsilon} \qquad 0 \leq \varepsilon \leq \tfrac{1}{2}, \; z > 0$$

$$|J_{r-1}(z)| \leq C_2\, z^{-\varepsilon} \qquad z > 0.$$

Damit wird

$$(31)\qquad \begin{aligned} |J| &\le C_3\left(\left[\frac{\nu}{\mu}\right]^{\frac{1}{2}}\left|\frac{m}{\lambda}\right|\right)^{r-1}\left([\nu\,\mu]^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\lambda}{m}\right|\right)^{r-1-\varepsilon} = C_3\,\nu^{r-1-\frac{1}{2}\varepsilon}\,\mu^{-\frac{1}{2}\varepsilon}\left|\frac{\lambda}{m}\right|^{-\varepsilon} \\ |J| &\le C_4\left(\left[\frac{\nu}{\mu}\right]^{\frac{1}{2}}\left|\frac{m}{\lambda}\right|\right)^{r-1}\left([\nu\,\mu]^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\lambda}{m}\right|\right)^{-\varepsilon} = C_4\,\nu^{\frac{1}{2}(r-1-\varepsilon)}\,\mu^{-\frac{1}{2}(r-1+\varepsilon)}\left|\frac{\lambda}{m}\right|^{-r+1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Bei der Verwendung der Abschätzung (31) wählt man nun für die verschiedenen Konjugierten verschiedene Werte von ε. Ist $\lambda^{(j)} < 0$, so wählt man für die j-te Konjugierte $\varepsilon = 0$, für die restlichen Konjugierten nimmt man einen gemeinsamen Wert $\varepsilon > 0$. Das liefert

$$(32)\qquad \left|N\left[\int\limits_{iy-\infty}^{iy+\infty}\frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x+\frac{\lambda^2\mu}{m^2 x}\right\}}}{x^r}\,dx\right]\right| \le C_5\,N(\nu)^{r-1}\prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1\\ 1\le k\le n}}\nu^{(k)-\frac{1}{2}\varepsilon}\,\mu^{(k)-\frac{1}{2}\varepsilon}\left|\frac{\lambda^{(k)}}{m^{(k)}}\right|^{-\varepsilon}$$

$$(33)\qquad \left|N\left[\int\limits_{iy-\infty}^{iy+\infty}\frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x+\frac{\lambda^2\mu}{m^2 x}\right\}}}{x^r}\,dx\right]\right| \le$$

$$\le C_5\,N(\nu)^{\frac{1}{2}(r-1)}\,N(\mu)^{-\frac{1}{2}(r-1)}\,|N(m)|^{r-1}\prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1\\ 1\le k\le n}}\nu^{(k)-\frac{1}{2}\varepsilon}\,\mu^{(k)-\frac{1}{2}\varepsilon}\left|\frac{\lambda^{(k)}}{m^{(k)}}\right|^{-\varepsilon}.$$

Für $W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c}))$ wollen wir eine Abschätzung folgender Art voraussetzen

$$(34)\qquad |W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c}))| \le C_7\,N(\mathfrak{e}_1)^l\,N(\mathfrak{e}_2)^{\frac{4}{5}},\quad l < 1,$$

wobei

$$(m) = \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2 \text{ ist mit } \mathfrak{e}_2 = \prod_{\substack{\mathfrak{r}^{\omega}\,\|\,m\\ \mathfrak{r}|2}}\mathfrak{r}^{\omega};$$

dabei soll $\mathfrak{r}^{\omega}\,\|\,m$ heissen, dass $\mathfrak{r}^{\omega}\mid m$ und $\mathfrak{r}^{\omega+1}\nmid m$, $\mathfrak{e}_2$ ist also genau der Teil von (m), der zu 2 nicht teilerfremd ist.

Wie schon bemerkt, kommen nur solche $a(\nu)$ vor, bei denen ν total-positiv, $\nu > 0$, ist, da es sich um ganze Spitzenformen handelt (Die in (27) abgetrennte Reihe enthält nur Anteile für total-positive ν). Ist $\lambda \equiv 1 \bmod \mathfrak{c}$ eine Einheit aus K, so ist

$$(35)\qquad |a(\lambda^2\nu)| = |a(\nu)|$$

(siehe [6] S. 545). Von den ν, die sich nur um eine Einheit unterscheiden, braucht man daher nur eine feste endliche Auswahl zu betrachten, die ausserdem so bestimmt werden kann, dass für ein derartiges ν

$$(36)\qquad C_8^{-1}\,|N(\nu)|^{\frac{1}{n}} \le \nu \le C_8\,|N(\nu)|^{\frac{1}{n}}$$

für alle Konjugierten gilt. Entsprechend kann das System nicht assoziierter m so ausgewählt werden, dass

$$C_8^{-1}\,|N(m)|^{\frac{1}{n}} \leq |m| \leq C_8\,|N(m)|^{\frac{1}{n}} \tag{36 a}$$

für alle Konjugierten gilt. Da die m nicht assoziiert sein dürfen, ist die Anzahl der verschiedenen m zu gleichem Hauptideal (m) durch eine nur von K und $\mathfrak{c}$ abhängige Konstante beschränkt. Nun ist

$$N(\mathfrak{e}_1)^{l-r}\,N(\mathfrak{e}_2)^{\frac{4}{5}-r} = |N(m)|^{1-r-\varepsilon}\,N(\mathfrak{e}_1)^{l-1+\varepsilon}\,N(\mathfrak{e}_2)^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}.$$

Für $a(\nu)$ erhalten wir die Abschätzung

$$|a(\nu)| \leq \left|\frac{1}{\Delta}\right| C_7 \sum_{m\subset\mathfrak{H}} N(\mathfrak{e}_1)^{l-1+\varepsilon}\,N(\mathfrak{e}_2)^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}\,|N(m)|^{1-r-\varepsilon} \cdot \sum_{\lambda>0}\left|N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty}\frac{e^{-2\pi i\left(\nu x+\frac{\lambda^2\mu}{m^2 x}\right)}}{x^r}\,dx\right]\right|. \tag{37}$$

Die Summe über m zerspalten wir in zwei Teile, und zwar

$$\Sigma_1 = \sum_{N(\mathfrak{e}_1)\leq N(\nu)^{\frac{1}{2}}},\quad \Sigma_2 = \sum_{N(\mathfrak{e}_1)>N(\nu)^{\frac{1}{2}}}.$$

In Σ_1 wählen wir für das Integralprodukt die Abschätzung (33), erhalten also unter Berücksichtigung von (36) und (36 a)

$$|\Sigma_1| \leq \sum_m C_5\,N(\nu)^{\frac{1}{2}(r-1)}\,N(\mu)^{-\frac{1}{2}(r-1)}\,|N(m)|^{-\varepsilon}\,N(\mathfrak{e}_1)^{l-1+\varepsilon}$$
$$N(\mathfrak{e}_2)^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}\sum_{\lambda>0}\left[\prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1\\1\leq k\leq n}}\nu^{(k)-\frac{1}{2}\varepsilon}\,\mu^{(k)-\frac{1}{2}\varepsilon}\left|\frac{\lambda^{(k)}}{m^{(k)}}\right|^{-\varepsilon}\right]$$

$$|\Sigma_1| \leq C_6\,C_8^{2n\varepsilon}\,N(\mu)^{-\frac{1}{2}(r-1)}\,\mu^{*\varepsilon}\,N(\nu)^{\frac{1}{2}(r-1)}$$
$$\sum_{m\subset\mathfrak{H}} N(\mathfrak{e}_1)^{l-1+\varepsilon}\,N(\mathfrak{e}_2)^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}\sum_{\lambda>0}\prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1\\1\leq k\leq n}}\lambda^{(k)^{-\varepsilon}}$$

mit

$$\mu^* = [\underset{1\leq k\leq n}{\text{Maximum}}\,(\mu^{(k)},\,\mu^{(k)^{-1}})].$$

In der Summe über m können wir die Teilsumme über $\mathfrak{e}_2$ für sich abschätzen. Es ist

$$\sum N(\mathfrak{e}_2)^{-\frac{1}{5}+\varepsilon} \leq \sum_{\substack{\mathfrak{r}|2\\1\leq\omega<\infty}} N(\mathfrak{r}^{\omega})^{-\frac{1}{5}+\varepsilon} \leq C(\varepsilon),$$

wobei $\mathfrak{e}_2$ die zu einem festen $\mathfrak{e}_1$ vorhandenen $\mathfrak{e}_2$ durchläuft. Ist nun $N(\mathfrak{e}_1)=j$, so ist $\mathfrak{e}_1$ ein Teiler von j, die Anzahl der ganzen Ideale, die j als Norm haben, ist also höchstens so gross wie die Anzahl der Idealteiler $d(j)$ von j; nun ist aber

$$d(j)=O(N(j)^{\varepsilon_1})=O(j^{\varepsilon}), \quad j \text{ ganz rational}$$

(siehe hierzu Landau, Vorlesungen Band I Satz 260; der Beweis lässt sich fast wörtlich auf algebraische Zahlkörper übertragen). Damit ist

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m \\ N(\mathfrak{e}_1)\leq N(\nu)^{\frac{1}{2}}}} N(\mathfrak{e}_1)^{l-1+\varepsilon} N(\mathfrak{e}_2)^{-\frac{1}{5}+\varepsilon} &\leq \sum_{\substack{(1)\mid\mathfrak{e}_1 \\ N(\mathfrak{e}_1)\leq N(\nu)^{\frac{1}{2}}}} C(\varepsilon)\, N(\mathfrak{e}_1)^{l-1+\varepsilon} \\ &\leq \sum_{j\leq N(\nu)^{\frac{1}{2}}} d(j)\, j^{l-1+\varepsilon} = O(N(\nu)^{\frac{1}{2}l+\varepsilon}).\end{aligned} \tag{38}$$

In Σ_2 nimmt man für die Integrale die Abschätzung (32) und erhält

$$|\Sigma_2| \leq C_6\, C_8^{2n\varepsilon}\, C(\varepsilon)\, N(\nu)^{r-1}\mu^* \sum_{N(\mathfrak{e}_1)>N(\nu)^{\frac{1}{2}}} N(\mathfrak{e}_1)^{l-r-\varepsilon} \sum_{\lambda>0} \prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)^{-\varepsilon}}$$

sowie genau so wie in (38)

$$\sum_{m\subset\mathfrak{H},\, N(\mathfrak{e}_1)>N(\nu)^{\frac{1}{2}}} N(\mathfrak{e}_1)^{l-r+\varepsilon} N(\mathfrak{e}_2)^{-\frac{1}{5}+\varepsilon} = O(N(\nu)^{-\frac{1}{2}(r-1)+\frac{1}{2}l+\varepsilon}). \tag{39}$$

Zur Behandlung von

$$\sum_{\lambda>0} \prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)^{-\varepsilon}}$$

begeben wir uns in den Raum der Logarithmen der Komponenten. Die Vektoren $\{\varepsilon \log \lambda^{(1)}, \dots, \varepsilon \log \lambda^{(n)}\}$ bilden ein Gitter auf der Hyperebene H durch den Nullpunkt senkrecht zu dem Vektor $\{1, 1, \dots, 1\}$. Man schneide nun die positiven Achsen in der Höhe g (g sei eine natürliche Zahl) durch zu den betreffenden Achsen senkrechte Hyperebenen ab. Diese Hyperebenen schneiden aus der Hyperebene H einen Simplex des R_{n-1} mit dem Mittelpunkt 0 aus. Bei jedem ausserhalb dieses Simplex liegenden Gitterpunkt ist mindestens eine der positiven Komponenten $>g$. In dem Simplex liegen somit alle Gitterpunkte mit

$$\sum_{\substack{\lambda^{(k)}>1 \\ 1\leq k\leq n}} \varepsilon \log \lambda^{(k)} < g, \quad \text{d. h.} \prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)^{-\varepsilon}} > e^{-g}.$$

Die Anzahl der Gitterpunkte in dem Simplex ist proportional dem Volumen, also

$$\leq C_9\, g^{n-1}.$$

Diese Zahl ist offenbar auch eine obere Schranke für die Anzahl der λ mit

$$e^{-g} < \prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1\\ 1\le k\le n}} \lambda^{(k)^{-\varepsilon}} \le e^{-(g-1)}.$$

Damit erhält man

$$\sum_{\lambda>0} \prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1\\ 1\le k\le n}} \lambda^{(k)^{-\varepsilon}} < C_9 \sum_{g=1}^{\infty} g^{n-1}\, e^{-(g-1)}.$$

Diese Summe konvergiert natürlich. Damit erhalten wir aus (37), (38), (39)

$$a(\nu) = O\left(N(\nu)^{\frac{1}{2}(r-1)+\frac{1}{2}l+\varepsilon}\right).$$

Da wir die Abschätzung für W in § 4 mit $l=\frac{1}{2}+\varepsilon$ erhalten, ergibt sich der Satz 3 für natürliches $r>2$, wir werden aber in § 3 sehen, dass er auch für $r=2$ richtig ist.

§ 3. Die Reihen $G_{-2}(\tau, s, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu)$

Wir wollen jetzt eine Basis der Schar der ganzen Spitzenformen für $r=2$ $(v=1)$ konstruieren und mit ihrer Hilfe die Gültigkeit von Satz 3 für $r=2$ beweisen. Zur Konstruktion der Basis benutzen wir die in τ nicht analytischen Reihen

$$(40)\qquad G_{-2}(\tau, s, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M_1 \subset (A\Gamma(\mathfrak{c}))} N(m_1\tau+m_2)^{-2}\,|N(m_1\tau+m_2)|^{-s} \sum_{\lambda>0} e^{2\pi i\, S\mu(\lambda^2 M_1(\tau)+b^*)}.$$

$G_{-2}(\tau, s)$ ist eine gleichmässig konvergente Reihe für τ in einem endlichen abgeschlossenen Bereich in $\operatorname{Im}(\tau^{(k)})>0$, $k=1,\dots,n$, $\operatorname{Re}(s)>\sigma>0$. G_{-2} ist für festes τ eine holomorphe Funktion von s in diesem Bereich und genügt den Relationen

$$(41)\qquad G_{-2}(L\tau, s) = N(c\tau+d)^2\,|N(c\tau+d)|^s\, G_{-2}(\tau, s) \quad \text{für } L=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \text{ aus } \Gamma(\mathfrak{c}).$$

Wir wollen $G_{-2}(\tau, s)$ als Funktion von s bis in den Punkt $s=0$ analytisch fortsetzen. Hierzu sei

$$(41\,\mathrm{a})\qquad -\sigma \le \operatorname{Re}(s) \le +\sigma, \quad -T \le \operatorname{Im}(s) \le +T,$$

der Bequemlichkeit halber wählen wir $0<\sigma<\frac{1}{6}$. Wir teilen einen vorgelegten Fundamentalbereich in einen ganz in $y>0$ liegenden abgeschlossenen Teil und die „Spitzensektoren“ auf. $-\dfrac{\delta_1}{\gamma_1}$ sei eine der Spitzen. Wir wollen diese Spitze und den ganz in $y>0$ liegenden Teil des Bereiches betrachten. Hier ist $y>y_0$ für alle Komponenten, wenn $-\dfrac{\delta_1}{\gamma_1}$ nach ∞ transformiert worden ist. Wie in § 2 teilen wir die Reihe auf,

$$G_{-2}(B^{-1}\tau, s) = N(-\gamma_1\tau+\alpha_1)^2 \,|\, N(-\gamma_1\tau+\alpha_1)|^s \Big[\sum_{m=0} + \sum_{m\neq 0}\Big]. \tag{42}$$

Die erste Summe ist eine in τ holomorphe Funktion für $y>0$, die von s nicht abhängt und braucht uns daher zunächst nicht weiter zu bekümmern. Die zweite Summe entwickeln wir genau wie in § 2 in eine Fourierreihe nach $x=\mathrm{Re}(\tau)$ für festes $y=\mathrm{Im}(\tau)$. Wir erhalten

$$\sum_{m\neq 0} = \sum_{\nu\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2\mathfrak{d}^{-1}} a(\nu, s, y)\, e^{2\pi i S\nu\tau}. \tag{43}$$

Hier können wir allerdings ν nicht auf total-positive Zahlen beschränken. $a(\nu, s, y)$ hängt ausserdem von $y=\mathrm{Im}(\tau)$ und natürlich von s ab. Wie in § 2 wird

$$a(\nu, s, y) = \frac{1}{\Delta}\sum_{\lambda>0} e^{2\pi i S\mu b^*} \sum_{m\subset\mathfrak{H}} \frac{W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c}))}{N(m)^2\,|N(m)|^s}\, N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x+\frac{\lambda^2\mu}{m^2 x}\right\}}}{x^2\,|x|^s}\,dx\right]. \tag{44}$$

Ist eine Konjugierte von $\nu<0$ oder $\nu=0$, so verschwindet das zugehörige Integral rechts, wie man sieht, für $s=0$, also ist

$$a(\nu, 0, y) = 0 \quad \text{für } \nu \text{ nicht total-positiv.} \tag{45}$$

$a(\nu, 0, y)$ hängt ausserdem nicht von y ab. Wir werden zeigen, dass die Reihe (43) absolut und gleichmässig konvergiert für $y>y_0$, $-\sigma\leq \mathrm{Re}(s)\leq\sigma$, $-T\leq \mathrm{Im}(s)\leq T$. Zu diesem Zweck benötigen wir passende Abschätzungen für die Integrale. Dabei müssen wir für jede Konjugierte $\nu^{(k)}$, $k=1,\ldots,n$, von ν die Fälle $\nu^{(k)}>0$, $\nu^{(k)}<0$ sowie den Fall $\nu=0$ unterscheiden. Für die k-te Konjugierte des Integrales nehmen wir die Abschätzung von Hilfssatz 2, wenn $\nu^{(k)}>0$ ist, und die Abschätzung von Hilfssatz 3, wenn $\nu^{(k)}<0$ ist (siehe § 5). Dabei wählen wir $\varepsilon=0$, wenn $\lambda^{(k)}<1$ ist, anderenfalls benutzen wir einen festen Wert $\varepsilon>0$. Im Falle $\nu\neq 0$ liefert das

$$\begin{aligned} |N[\textstyle\int]| \leq C_{11}^n\; N(y_0)^{-2}\, e^{\pi S|\nu|y}\Big[\prod_{\substack{|\nu^{(k)}|>1\\ 1\leq k\leq n}} \nu^{(k)2}\Big] \\ \Big[\prod_{\substack{|\nu^{(k)}|<1\\ 1\leq k\leq n}} \nu^{(k)-2}\Big]\Big[\prod_{\substack{\nu^{(k)}<0\\ 1\leq k\leq n}} e^{4\pi\nu^{(k)}y^{(k)}}\Big] \prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1\\ 1\leq k\leq n}} \left|\frac{\lambda^{(k)}}{m^{(k)}}\right|^{-\varepsilon}. \end{aligned} \tag{46}$$

Für $\nu=0$ erhält man nach Hilfssatz 3 ebenso

$$|N[\textstyle\int]| \leq C_{11}^n\; N(y_0)^{-2} \prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1\\ 1\leq k\leq n}} \left|\frac{\lambda^{(k)}}{m^{(k)}}\right|^{-\varepsilon}. \tag{46 a}$$

Jetzt können wir die $a(\nu, s, y)$ abschätzen und erhalten, wenn wir die m wie in § 2 auswählen (36 a) und in der Abschätzung für W $\frac{4}{5}$ an Stelle von l nehmen (was ja sicher zulässig ist)

$$
\begin{aligned}
(47) \qquad |a(\nu, s, y)| \leq \left|\frac{1}{\Delta}\right| C_8^{n\varepsilon} C_7 \sum_m |N(m)|^{\frac{4}{5}-2+\varepsilon+\sigma} C_{11}^n \; N(y_0)^{-2} \\
\Big[\prod_{\substack{|\nu^{(k)}|>1 \\ 1\leq k\leq n}} \nu^{(k)2}\Big] \Big[\prod_{\substack{|\nu^{(k)}|<1 \\ 1\leq k\leq n}} \nu^{(k)-2}\Big] \Big[\prod_{\substack{\lambda^{(k)}>1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)^{-\varepsilon}}\Big] \Big[\prod_{\substack{\nu^{(k)}<0 \\ 1\leq k\leq n}} e^{4\pi\nu^{(k)} y^{(k)}}\Big] e^{S\pi|\nu| y} \\
\leq C_{12} \Big[\prod_{\substack{|\nu^{(k)}|>1 \\ 1\leq k\leq n}} \nu^{(k)2}\Big] \Big[\prod_{\substack{|\nu^{(k)}|<1 \\ 1\leq k\leq n}} \nu^{(k)-2}\Big] \Big[\prod_{\substack{\nu^{(k)}<0 \\ 1\leq k\leq n}} e^{4\pi\nu^{(k)} y^{(k)}}\Big] e^{S\pi|\nu| y}.
\end{aligned}
$$

Für $\nu = 0$ müssen wir (46 a) anwenden und es ergibt sich

$$
(48) \qquad |a(0, s, y)| \leq C_{12}.
$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir daran gehen, eine Majorante für die Reihe für G_{-2} anzugeben. Zunächst behandeln wir die erste Summe in (42). Wir finden

$$
\begin{aligned}
(49) \qquad \Big|\sum_{m=0}\Big| &\leq \sum_{(\lambda^*)_{\mathfrak{c}}} \sum_{\lambda>0} e^{-2\pi S\mu\lambda^{*2}\lambda^2 y} \\
&\leq \sum e^{-c_7 N(\mu\lambda^{*2} y)^{\frac{1}{n}}} (c_8 + c_9 |\log N(\mu\lambda^{*2} y)|^{n-1}).
\end{aligned}
$$

λ^* durchläuft dabei ein System nicht-assoziierter Multiplikatoren, die Summe rechts ist also eine endliche Summe. Die zweite Summe in (42) liefert

$$
\begin{aligned}
(50) \qquad \Big|\sum_{m\neq 0}\Big| &\leq |a(0, s, y)| + \sum_{\nu\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2\mathfrak{d}^{-1}} |a(\nu, s, y)| e^{-2\pi S\nu y} \\
&\leq C_{12} + C_{12} \sum_{\nu\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2\mathfrak{d}^{-1}} e^{-\pi S|\nu| y} \Big[\prod_{\substack{|\nu^{(k)}|>1 \\ 1\leq k\leq n}} \nu^{(k)2}\Big] \Big[\prod_{\substack{|\nu^{(k)}|<1 \\ 1\leq k\leq n}} \nu^{(k)-2}\Big].
\end{aligned}
$$

Wie in § 2 (36) können wir aus den ν, die das gleiche Hauptideal (ν) definieren, eine Auswahl $\mathfrak{E}((\nu))$, deren Anzahl nur von K und $\mathfrak{c}$ abhängt, so aussortieren, dass

$$
C_8^{-1} |N(\nu)|^{\frac{1}{n}} \leq |\nu| \leq C_8 |N(\nu)|^{\frac{1}{n}} \quad \text{für } \nu \subset \mathfrak{E}((\nu))
$$

ist und alle anderen ν' mit $(\nu') = (\nu)$ die Gestalt

$$
\nu' = \lambda^2 \nu \qquad \text{mit } \nu \text{ aus } \mathfrak{E}((\nu))
$$

haben. Da $|N(\nu)|$ nach unten beschränkt ist, erhalten wir

$$\Big|\sum_{m\neq 0}\Big| \leq C_{12} + C_{12} \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2\mathfrak{d}^{-1} \mid (\nu) \\ \nu \subset \mathfrak{E}((\nu))}} N(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})\, C_8^{2n} \,|N(\nu)|^2 \sum_{\lambda} e^{-\pi S|\nu|\lambda^2 y} \cdot \prod_{\substack{|\lambda^{(k)}|>1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)2} \prod_{\substack{|\lambda^{(k)}|<1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)-2}.$$

Für $\nu \subset \mathfrak{E}((\nu))$ ist nun

$$|\nu| \geq C_8^{-1} N(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})^{-\frac{1}{n}},$$

da ausserdem $y > y_0$ ist, so können wir

$$\prod_{\substack{|\lambda^{(k)}|>1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)2} \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^n C_8^{2n} N(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})\, N(y_0)^{-1} \prod_{\substack{|\lambda^{(k)}|>1 \\ 1\leq k\leq n}} e^{\frac{1}{4}\pi\lambda^{(k)2}|\nu^{(k)}|y^{(k)}}$$

setzen. Nun ist

$$\prod_{\substack{|\lambda^{(k)}|<1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)-2} = \prod_{\substack{|\lambda^{(k)}|>1 \\ 1\leq k\leq n}} \lambda^{(k)2} \quad \text{da } |N(\lambda)| = 1 \text{ ist.}$$

Hiermit erhalten wir

$$\Big|\sum_{m\neq 0}\Big| \leq C_{12} + C_{12}\, N(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})^3\, C_8^{4n} N(y_0)^{-2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n} \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2\mathfrak{d}^{-1} \mid (\nu) \\ \nu \subset \mathfrak{E}((\nu))}} N(\nu)^2 \sum_{\lambda} e^{-\frac{1}{2}\pi S|\nu|\lambda^2 y}.$$

Nach Maass (77) ([6] S. 533) ist

$$\sum_{\lambda} e^{-\frac{1}{2}\pi S|\nu|\lambda^2 y} \leq e^{-\frac{1}{4}c_7 N(\nu)^{\frac{1}{n}} N(y)^{\frac{1}{n}}} \left(c_8 + c_9 \left|\log \frac{N(\nu)}{4^n} N(y)\right|^{n-1}\right)$$

$$\leq C_{13}\, e^{-\frac{1}{5}c_7 N(\nu)^{\frac{1}{n}} N(y)^{\frac{1}{n}}}$$

da $N(\nu)$ und $N(y)$ nach unten beschränkt sind.

Wir können jetzt die Majorante für die Reihe für $G_{-2}(\tau, s)$ angeben, sie ist

$$\begin{aligned} &|N(-\gamma_1\tau + \delta_1)|^{2+\mathrm{Re}(s)} \\ (51) \qquad &\Bigg(\Big\{\sum_{\lambda^*} e^{-c_7 N(\mu\lambda^{*2}y)^{\frac{1}{n}}} (c_8 + c_9 \,|\log N(\mu\lambda^{*2}y)|^{n-1})\Big\} \\ &\quad + C_{12} + C_{12} N(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})^3 C_8^{4n} C_{13} N(y_0)^{-2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n} \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2\mathfrak{d}^{-1} \mid (\nu) \\ \nu \subset \mathfrak{E}((\nu))}} N(\nu)^2 e^{-\frac{1}{5}c_7 N(\nu y)^{\frac{1}{n}}}\Bigg). \end{aligned}$$

Diese Reihe entspricht bis auf geringfügige Unterschiede der Betragreihe der Entwicklung einer ganzen Form der Dimension $-2-\mathrm{Re}(s)$ zu der betreffenden Spitze.

Die Reihenentwicklungen zu den Spitzen liefern offenbar, da die Reihen in $y > y_0$ absolut und gleichmässig konvergieren, die analytische Fortsetzung von $G_{-2}(\tau, s)$ für beliebiges τ als Funktion von s in das ganze Gebiet $-\sigma \leq \mathrm{Re}(s) \leq \sigma$, $-T \leq \mathrm{Im}(s) \leq T$. $G_{-2}(\tau, s)$ ist ausserdem natürlich stetig in τ. Wegen der Permanenz der Funktionalgleichung gelten die Transformationsformeln (41) auch für die so fortgesetzte Reihe.

Im Punkte $s=0$ wird nach (45) $a(\nu)=0$, ausser, wenn $\nu \neq 0$ und total-positiv ist. $G_{-2}(\tau, 0)$ ist analytisch in τ und verschwindet in den Spitzen. Ausserdem erfüllt es die Transformationsbedingung einer Modulform, also

(52) $\qquad G_{-2}(\tau, 0)$ *ist eine ganze Spitzenform aus* $\{\Gamma(\mathfrak{c}), -2, 1\}$.

Um den Vollständigkeitssatz ([6] S. 557) auch für die G_{-2} abzuleiten, bilden wir zunächst das etwas modifizierte Skalarprodukt mit einer Spitzenform

$$\overline{(f, G_{-2}(*, s), s)} = \int \underset{\mathfrak{F}}{\cdots} \int \overline{f(\tau)}\, G_{-2}(\tau, s)\, N\{y^{\frac{1}{2}s}\, dx\, dy\}.$$

Da $G_{-2}(\tau, s)$ eine analytische Funktion von s bei beliebigem τ ist, ist das Integral über den Teil von $\mathfrak{F}$, der einen beschränkten und abgeschlossenen Bereich in $y>0$ bildet, eine holomorphe Funktion von s. Das Verhalten der Majoranten (51) in der jeweiligen Spitze garantiert die gleichmässige Konvergenz des Integrales in der Spitze. Damit haben wir festgestellt, dass das modifizierte Skalarprodukt eine holomorphe Funktion von s ist (s immer in $-\sigma \leq \mathrm{Re}(s) \leq \sigma$, $-T \leq \mathrm{Im}(s) \leq T$ gedacht). Sei zunächst $\mathrm{Re}(s)>0$. Dann berechnet man das Skalarprodukt wörtlich wie bei Maass und erhält

$$\overline{(f, G_{-2}(*, s), s)} = 2^{\delta_0} N(\mu)^{-1} \Delta_1^{-1} \{(4\pi)^{-1} \Gamma(s+1)\}^n\, \overline{c(\mu)}.$$

$c(\mu)$ ist der Koeffizient von $e^{2\pi i S \mu \tau}$ in der Entwicklung von $f(\tau)$ in der betreffenden Spitze. δ_0 ist 1, wenn $-I$ in $\Gamma(\mathfrak{c})$ liegt, sonst 0. Der Unterschied zu Maass (2^n) kommt daher, dass wir die Substitutionen E_k ([5] S. 10) hier nicht hinzugefügt haben, so dass im Gegensatz zu Mass ([6] S. 575 oben) jeder Punkt von $\mathfrak{B}$ nicht 2^n-fach, sondern nur doppelt oder einfach überdeckt ist. Die Permanenz der Funktionalgleichung liefert uns somit

$$\overline{(f, G_{-2}(*, 0), 0)} = 2^{\delta_0} N(\mu)^{-1} \Delta_1^{-1} (4\pi)^{-n}\, \overline{c(\mu)} = \overline{(f, G_{-2}(*, 0))}.$$

Damit ist die Gültigkeit des Vollständigkeitssatzes auch für $r=2$ gewährleistet. Man überzeugt sich, dass die Fourierkoeffizienten von $G_{-2}(\tau, 0, A, \Gamma(\mathfrak{c}), \mu)$ aus den entsprechenden Ausdrücken des § 2 hervorgehen, indem man dort $r=2$ setzt. Satz 3 ist damit auch für den Fall $r=2$ bewiesen.

§ 4. Die verallgemeinerten Kloostermanschen Summen $\Sigma(u, v, \mathfrak{d}^*, \mathfrak{c}, \mathfrak{e})$

Die Grösse $W(m, A, B, \Gamma(\mathfrak{c}))$ aus (30) hat bis auf einen Faktor des Betrages 1 die Form

$$\Sigma(u, v, \delta^*, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) = \sum_{\substack{j \equiv \delta^* \bmod \mathfrak{c} \\ j \bmod \mathfrak{e} \ (j, \mathfrak{e}) = 1}} e^{2\pi i\, S(uj + v\bar{j})} \qquad \begin{array}{c} u \equiv v \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}^{-1} \\ \mathfrak{c} \mid \mathfrak{e} \\ \text{für } \mathfrak{e}_3 \mid \mathfrak{e} \text{ ist } v \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{e}_3\mathfrak{d}^{-1} \\ \text{falls nicht } \mathfrak{e}_3 \mid \mathfrak{e}_4 \end{array} . \tag{53}$$

$\mathfrak{e}_4$ ist nach Satz 2 ein Ideal, das nur von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mu$ abhängt. $\bar{j}$ ist erklärt durch

$$j\bar{j} \equiv 1 \bmod \mathfrak{e}.$$

Durch Vertauschung von u und v entsteht eine gleichartige Summe, da wegen

$$j \equiv \delta^* \bmod \mathfrak{c} \longleftrightarrow \bar{j} \equiv \bar{\delta}^* \bmod \mathfrak{c} \text{ für } \delta^*\bar{\delta}^* \equiv 1 \bmod \mathfrak{e}, \quad ((\delta^*, \mathfrak{e}) = 1)$$

$$\Sigma(u, v, \delta^*, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) = \Sigma(v, u, \bar{\delta}^*, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) \tag{54}$$

ist. Es sei nun

$$(\varrho) = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{g} \text{ mit } (\mathfrak{g}, \mathfrak{c}\mathfrak{d}) = 1.$$

Dann ist

$$\frac{1}{N(\mathfrak{c})} \sum_{r \bmod \mathfrak{c}} e^{2\pi i\, S[\varrho(l - \bar{\delta}^*)r]} = \begin{array}{ll} 1 & \text{für } l \equiv \bar{\delta}^* \bmod \mathfrak{c} \\ 0 & \text{sonst}. \end{array}$$

Wir können daher schreiben

$$\Sigma(u, v, \delta^*, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) = \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{e} \\ (j, \mathfrak{e}) = 1}} e^{-2\pi i\, S(uj + v\bar{j})} \frac{1}{N(\mathfrak{c})} \sum_{r \bmod \mathfrak{c}} e^{2\pi i\, S[\varrho(\bar{j} - \bar{\delta}^*)r]}$$

$$= \frac{1}{N(\mathfrak{c})} \sum_{r \bmod \mathfrak{c}} e^{-2\pi i\, S\varrho\bar{\delta}^* r} \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{e} \\ (j, \mathfrak{e}) = 1}} e^{2\pi i\, S[uj + (v + \varrho r)\bar{j}]}. \tag{55}$$

Wir können uns wegen (55) darauf beschränken,

$$\Sigma(u, v, \mathfrak{e}) = \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{e} \\ (j, \mathfrak{e}) = 1}} e^{2\pi i\, S(uj + v\bar{j})} \qquad u \equiv v \equiv 0 \bmod \mathfrak{e}^{-1}\mathfrak{d}^{-1} \tag{56}$$

abzuschätzen.

Als erstes zeigen wir, dass Σ eine Art distributiver Funktion von $\mathfrak{e}$ ist. Es sei dazu

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2, \quad (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) = 1, \quad \mathfrak{d}(u) = \mathfrak{g}\,\mathfrak{e}_1^{-1}\mathfrak{e}_2^{-1}.$$

Wir wählen zwei Zahlen u_1^* und u_2^* so aus, dass

$$(u_1^*) = \frac{(\mathfrak{g}, \mathfrak{e}_1)}{\mathfrak{e}_1} \frac{\mathfrak{g}_1^*}{\mathfrak{d}}, \quad (u_2^*) = \frac{(\mathfrak{g}, \mathfrak{e}_2)}{\mathfrak{e}_2} \frac{\mathfrak{g}_2^*}{\mathfrak{d}}, \quad (\mathfrak{g}_1^*, \mathfrak{e}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{g}_2^*, \mathfrak{e}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{g}_1^*, \mathfrak{g}_2^*) = 1$$

ist. Dann ist

$$(u_1^*, u_2^*) = \frac{(\mathfrak{g}, \mathfrak{e})}{\mathfrak{e}} \frac{1}{\mathfrak{d}}$$

und

$$u = \alpha u_1^* + \beta u_2^* = u_1 + u_2, \quad \alpha, \beta \text{ ganz}.$$

Ersichtlich ist

$$(\alpha, \mathfrak{e}_1) = (\beta, \mathfrak{e}_2) = 1.$$

Ist $(j, \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2) = 1$, so ist

$$S(uj) \equiv S(ju_1 + ju_2) \equiv S(hu_1 + lu_2) \bmod (1)$$

mit

$$j \equiv h \bmod \mathfrak{e}_1 \quad \text{und} \quad j \equiv l \bmod \mathfrak{e}_2.$$

Durchläuft j ein volles System teilerfremder Reste mod $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2$, so durchlaufen h und l je ein volles System teilerfremder Reste mod $\mathfrak{e}_1$ bzw. mod $\mathfrak{e}_2$. Es ist selbstverständlich

$$\bar{j} \equiv \bar{h} \bmod \mathfrak{e}_1 \quad \text{und} \quad \bar{j} \equiv \bar{l} \bmod \mathfrak{e}_2,$$

wenn

$$h\bar{h} \equiv 1 \bmod \mathfrak{e}_1, \, l\bar{l} \equiv 1 \bmod \mathfrak{e}_2 \text{ und } j \equiv h \bmod \mathfrak{e}_1, \, j \equiv l \bmod \mathfrak{e}_2$$

ist. Genau wie u stellen wir auch v als

$$v = v_1 + v_2$$

dar, wobei $\mathfrak{d}(v_1)$ den zu $\mathfrak{e}_2$ teilerfremden Teil des genauen Nenners von $\mathfrak{d}(v)$ als genauen Nenner hat, entsprechend v_2. Somit erhalten wir

$$\text{(57)} \qquad \Sigma(u, v, \mathfrak{e}) = \sum_{\substack{h \bmod \mathfrak{e}_1 \\ (h, \mathfrak{e}_1)=1}} \sum_{\substack{l \bmod \mathfrak{e}_2 \\ (l, \mathfrak{e}_2)=1}} e^{2\pi i S(hu_1 + lu_2 + \bar{h}v_1 + \bar{l}v_2)}$$

$$= \Sigma(u_1, v_1, \mathfrak{e}_1) \, \Sigma(u_2, v_2, \mathfrak{e}_2).$$

Hieraus folgt natürlich

$$\text{(58)} \qquad \Sigma(u, v, \mathfrak{e}) = \prod_{\mathfrak{x}_i^{\nu_i} \| \mathfrak{e}} \Sigma(u_i, v_i, \mathfrak{x}_i^{\nu_i}).$$

$$\text{Nenner von } \mathfrak{d}(u_i) = (\text{Nenner von } \mathfrak{d}(u), \mathfrak{x}_i^{\nu_i}),$$

$$\text{Nenner von } \mathfrak{d}(v_i) = (\text{Nenner von } \mathfrak{d}(v), \mathfrak{x}_i^{\nu_i}).$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{x}_i^{\nu_i} \| \mathfrak{e} : \mathfrak{x}_i^{\nu_i} | \mathfrak{e}$ und $\mathfrak{x}_i^{\nu_i+1} \nmid \mathfrak{e}$ ($\mathfrak{x}$ = Primideal).

Wegen der Produktdarstellung (58) brauchen wir nur noch die Summen

$$\Sigma(u, v, \mathfrak{x}_i^{\nu}) = \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{x}^{\nu} \\ (j, \mathfrak{x})=1}} e^{2\pi i S(uj + v\bar{j})} \quad u \equiv v \equiv 0 \bmod \mathfrak{x}^{-\nu} \mathfrak{d}^{-1}$$

zu behandeln. Offenbar ist

$$\text{(59)} \qquad \Sigma(u, v, \mathfrak{x}^{\nu}) = \Sigma(v, u, \mathfrak{x}^{\nu}).$$

Wir wollen zunächst nur den Fall erörtern, dass $\mathfrak{x} \nmid 2$.

Sei jetzt

$$\mathfrak{d}\,(u) \equiv \mathfrak{d}\,(v) \equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{k-\nu}, \quad 0 \leq k \leq \nu$$

aber

$$\mathfrak{d}\,(u) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{k+1-\nu} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{d}\,(v) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{k+1-\nu} \quad \text{falls } k < \nu,$$

so ist

$$S\,(u\,j_1) \equiv S\,(u\,j_2) \quad \text{mod} \quad (1) \text{ für } j_1 \equiv j_2 \bmod \mathfrak{r}^{\nu-k}$$

$$S\,(v\,\bar{j}_1) \equiv S\,(v\,\bar{j}_2) \quad \text{mod} \quad (1) \text{ für } j_1 \equiv j_2 \bmod \mathfrak{r}^{\nu-k},$$

also

$$\begin{aligned} \Sigma\,(u, v, \mathfrak{r}^{\nu}) &= N\,(\mathfrak{r}^{k})\,\Sigma\,(u, v, \mathfrak{r}^{\nu-k}) && \text{für } k < \nu \\ \Sigma\,(u, v, \mathfrak{r}^{\nu}) &= \varphi\,(\mathfrak{r}^{\nu}) && \text{für } k = \nu. \end{aligned} \tag{60}$$

Setzen wir $\nu - k = \nu^*$, so müssen wir

$$\Sigma\,(u, v, \mathfrak{r}^{\nu^*}) \quad \begin{array}{l} \text{für } \nu^* > 0, \quad \mathfrak{d}\,(u) \equiv \mathfrak{d}\,(v) \equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{-\nu^*} \\ \text{aber nicht} \quad \mathfrak{d}\,(u) \equiv \mathfrak{d}\,(v) \equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{1-\nu^*} \end{array} \tag{61}$$

abschätzen. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

1) $$\mathfrak{d}\,(u) \equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{1-\nu^*} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{d}\,(v) \equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{1-\nu^*}$$

O.B.d.A. sei dann

$$\mathfrak{d}\,(v) \equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{1-\nu^*} \text{ (beachte (59)), also } \mathfrak{d}\,(u) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{r}^{1-\nu^*}.$$

p sei ein für alle von $\mathfrak{r}$ verschiedenen Primideale ganzes Primelement für $\mathfrak{r}$, also

$$(p) = \mathfrak{r}\,\mathfrak{g}, \quad (\mathfrak{r}, \mathfrak{g}) = 1. \tag{62}$$

j mod $\mathfrak{r}^{\nu^*}$ können wir darstellen als

$$j \equiv j_1 + p^{\nu^*-1}\,j_2 \bmod \mathfrak{r}^{\nu^*}, \quad j_1 \quad \bmod \mathfrak{r}^{\nu^*-1} \quad j_2 \bmod \mathfrak{r}.$$

Natürlich ist

$$\bar{j} \equiv \overline{(j_1 + p^{\nu^*-1}\,j_2)} \equiv \bar{j}_1 \bmod \mathfrak{r}^{\nu^*-1}, \qquad (j\,\bar{j} \equiv 1 \bmod \mathfrak{r}^{\nu^*}).$$

Das liefert

$$\Sigma\,(u, v, \mathfrak{r}^{\nu^*}) = \sum_{j_2 \bmod \mathfrak{r}} e^{2\pi i\,S(u p^{\nu^*-1}\,j_2)} \sum_{\substack{j_1 \bmod \mathfrak{r}^{\nu^*-1} \\ (j_1, \mathfrak{r}) = 1}} e^{2\pi i\,S(u j_1 + v \bar{j}_1)} = 0$$

im Falle $\nu > 1$

$$\Sigma\,(u, v, \mathfrak{r}^{\nu^*}) = \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{r} \\ (j, \mathfrak{r}) = 1}} e^{2\pi i\,S(uj)} = -1,$$

im Falle $\nu^* = 1$.

In jedem Falle ist also

$$|\,\Sigma\,(u, v, \mathfrak{r}^{\nu^*})\,| \leq 2\,N\,(\mathfrak{r}^{\nu^*})^{\frac{1}{2}}. \tag{63}$$

2) $$\mathfrak{d}\,(u) \not\equiv 0 \not\equiv \mathfrak{d}\,(v) \bmod \mathfrak{x}^{1-\nu^*}.$$

2 a) $\nu^* = 1$. Dann ist

$$\Sigma\,(u, v, \mathfrak{x}^{\nu^*}) = \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{x} \\ (j, \mathfrak{x})=1}} e^{2\pi i\, S(uj+v\bar{j})}.$$

Für diesen Fall hat André Weil gezeigt ([14] S. 207 oben):

(64) $$|\,\Sigma\,(u, v, \mathfrak{x})\,| \le 2\,N\,(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}}.$$

2 b) $\nu^* > 1$. Wir bestimmen eine Zahl w mit

$$(w) = \mathfrak{x}^{-\nu^*}\,\mathfrak{d}^{-1}\,\mathfrak{g}_1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{x}\,\mathfrak{d}, \mathfrak{g}_1) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1) = 1.$$

$\mathfrak{g}$ ist dabei das zu $\mathfrak{x}$ teilerfremde Ideal aus (62). Dann ist

$$(w, p^{\nu^*}) = \mathfrak{x}^{-\nu^*}\,\mathfrak{d}^{-1}$$

und

$$u = u_1\,w + u_2\,p^{\nu^*}, \quad v = v_1\,w + v_2\,p^{\nu^*}$$

mit ganzen u_1, u_2, v_1, v_2, und nach Voraussetzung gilt

$$(u_1, \mathfrak{x}) = (v_1, \mathfrak{x}) = 1.$$

Da mit j auch $u_1 j$ ein volles System primer Restklassen mod $\mathfrak{x}^{\nu^*}$ durchläuft, ist

$$\Sigma\,(u, v, \mathfrak{x}^{\nu^*}) = \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*} \\ (j, \mathfrak{x})=1}} e^{2\pi i S([u_1 j + v_1 \bar{j}]\,w)} = \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*} \\ (j, \mathfrak{x})=1}} e^{2\pi i\, S(w\,[j + u_1\,v_1 \bar{j}])}.$$

Nach Voraussetzung ist $\nu^* \ge 2$. j und $\bar{j}$ sind dann, wie man nachrechnet, in der Form

$$j \equiv h + r p^{\nu^*-1} \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*}, \qquad h \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*-1},\ r \bmod \mathfrak{x}$$
$$\bar{j} \equiv \bar{h} - r\bar{h}^2\,p^{\nu^*-1} \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*} \qquad (h, \mathfrak{x}) = 1$$

darstellbar. Setzt man das in Σ ein, so erhält man

$$\Sigma\,(w, u_1\,v_1\,w, \mathfrak{x}^{\nu^*}) = \sum_{\substack{h \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*-1} \\ (h, \mathfrak{x})=1}} e^{2\pi i\, S(w\,[h + u_1 v_1 \bar{h}])} \sum_{r \bmod \mathfrak{x}} e^{2\pi i\, S(w p^{\nu^*-1}[1 - u_1 v_1 \bar{h}^2]\,r)}.$$

Ist $u_1\,v_1$ quadratischer Nichtrest mod $\mathfrak{x}$, d. h. quadratischer Nichtrest mod $\mathfrak{x}^{\nu^*}$, da $\mathfrak{x} \nmid 2$ vorausgesetzt war, so ist

$$u_1\,v_1\,\bar{h}^2 \not\equiv 1 \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*}$$

und die zweite Summe ist immer Null. Es sei also

$$u_1\,v_1 \equiv l^2 \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*}.$$

Mit h durchläuft auch lh ein volles System primer Restklassen mod $\mathfrak{x}^{\nu^*-1}$, also ist

$$\Sigma(w, u_1 v_1 w, \mathfrak{x}^{\nu^*}) = \sum_{\substack{h \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*-1} \\ (h,\mathfrak{x})=1}} e^{2\pi i S(wl[h+\bar{h}])} \sum_{r \bmod \mathfrak{x}} e^{2\pi i S(wp^{\nu^*-1}[1-\bar{h}^2]r)}$$

$$= N(\mathfrak{x}) \sum_{\substack{h \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*-1} \\ h \equiv \pm 1 \bmod \mathfrak{x}}} e^{2\pi i S(wl[h+\bar{h}])}, \quad \nu^* \geq 2.$$

Durch vollständige Induktion erhält man hieraus

$$\Sigma(w, u_1 v_1 w, \mathfrak{x}^{\nu^*}) = N(\mathfrak{x})^{\varrho} \sum_{\substack{h \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*-\varrho} \\ h \equiv \pm 1 \bmod \mathfrak{x}^{\varrho}}} e^{2\pi i S(wl[h+\bar{h}])}, \quad \nu^* \geq 2\varrho. \tag{65}$$

Sei nämlich $\nu^* > 2\varrho + 2$. Dann kann man h und $\bar{h}$ als

$$h \equiv j + rp^{\nu^*-\varrho-1} \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*}, \quad j \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*-\varrho-1}, \quad r \bmod \mathfrak{x}$$

$$\bar{h} \equiv \bar{j} - \bar{j}^2 r p^{\nu^*-\varrho-1} \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*} \quad (j, \mathfrak{x}) = 1, \quad j \equiv \pm 1 \bmod \mathfrak{x}^{\varrho}$$

schreiben. Setzt man dies in (65) ein, so erhält man

$$\Sigma(w, u_1 v_1 w, \mathfrak{x}^{\nu^*}) = N(\mathfrak{x})^{\varrho} \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*-\varrho-1} \\ j \equiv \pm 1 \bmod \mathfrak{x}^{\varrho}}} e^{2\pi i S(wl[j+\bar{j}])} \sum_{r \bmod \mathfrak{x}} e^{2\pi i S(wlp^{\nu^*-\varrho-1}(1-\bar{j}^2)r)}$$

$$= N(\mathfrak{x})^{\varrho+1} \sum_{\substack{j \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*-\varrho-1} \\ j \equiv \pm 1 \bmod \mathfrak{x}^{\varrho+1}}} e^{2\pi i S(wl[j+\bar{j}])}, \quad \nu^* \geq 2(\varrho+1).$$

Wir unterscheiden nun $\nu^* \equiv 0, 1 \bmod (2)$.

α) $\nu^* \equiv 0 \bmod (2)$. In diesem Falle gilt (65) mit $\varrho = \frac{1}{2}\nu^*$ und wir erhalten

$$\Sigma(w, u_1 v_1 w, \mathfrak{x}^{\nu^*}) = N(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}\nu^*} \sum_{\substack{h \bmod \mathfrak{x}^{\frac{1}{2}\nu^*} \\ h \equiv \pm 1 \bmod \mathfrak{x}^{\frac{1}{2}\nu^*}}} e^{2\pi i S(lw[h+\bar{h}])}$$

$$= N(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}\nu^*} (e^{2\pi i S(2lw)} + e^{2\pi i S(-2lw)})$$

$$= 2 N(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}\nu^*} \cos(4\pi S(lw)).$$

β) $\nu^* \equiv 1 \bmod (2)$. Wir wenden (65) mit $\varrho = \frac{1}{2}(\nu^* - 1)$ an

$$\Sigma(w, u_1 v_1 w, \mathfrak{x}^{\nu^*}) = N(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}(\nu^*-1)} \sum_{\substack{h \bmod \mathfrak{x}^{\frac{1}{2}(\nu^*+1)} \\ h \equiv \pm 1 \bmod \mathfrak{x}^{\frac{1}{2}(\nu^*-1)}}} e^{2\pi i S(lw[h+\bar{h}])}.$$

ν^* ist ≥ 3 und $h, \bar{h}$ sind darstellbar als

$$h \equiv \pm 1 + rp^{\frac{1}{2}(\nu^*-1)} \quad \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*}, \quad r \bmod \mathfrak{x}$$

$$\bar{h} \equiv \pm 1 - rp^{\frac{1}{2}(\nu^*-1)} \pm r^2 p^{\nu^*-1} \bmod \mathfrak{x}^{\nu^*},$$

also

$$\Sigma\,(w,\,u_1\,v_1\,w,\,\mathfrak{x}^{\nu^*}) = N\,(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}(\nu^*-1)}\,\Big(e^{2\pi i\,S(lw\,2)}\sum_{r \bmod \mathfrak{x}} e^{2\pi i\,S(lwp^{\nu^*-1}r^2)}$$
$$+\,e^{2\pi i\,S(-2lw)}\sum_{r \bmod \mathfrak{x}} e^{-2\pi i\,S(lwp^{\nu^*-1}r^2)}\Big).$$

Nun ist bekanntlich

$$\sum_{r \bmod \mathfrak{x}} e^{2\pi i\,S(lwp^{\nu^*-1}r^2)} = N\,(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}}\,e^{2\pi i\varkappa}, \quad \varkappa \text{ reell}.$$

Das liefert

$$\Sigma\,(w,\,u_1\,v_1\,w,\,\mathfrak{x}^{\nu^*}) = 2\,N\,(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}\nu^*}\cos\,(4\pi\,S\,(lw) + 2\pi\varkappa).$$

In beiden Fällen erhalten wir somit (α) und β)))

$$(66) \qquad |\,\Sigma\,(u,\,v,\,\mathfrak{x}^{\nu^*})\,| \leq 2\,N\,(\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}\nu^*}.$$

Aus (63), (64) und (66) erhalten wir in Verbindung mit (60)

$$(67) \qquad |\,\Sigma\,(u,\,v,\,\mathfrak{x}^{\nu})\,| \leq 2\,N\,(\mathfrak{x}^{\nu})^{\frac{1}{2}}\,N\,((\text{Nenner v. } \mathfrak{d}\,u,\ \text{Nenner v. } \mathfrak{d}\,v,\,\mathfrak{x}^{\nu}))^{\frac{1}{2}},\ \mathfrak{x} \nmid 2.$$

Da $\prod_{\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{e}_1} 2 \leq d\,(\mathfrak{e}_1) = O\,(N\,(\mathfrak{e}_1)^{\varepsilon})$ ist ($d\,(\mathfrak{e}_1) =$ Anzahl der Idealteiler von $\mathfrak{e}_1$), so erhält man aus (66) und (58)

$$(68) \qquad |\,\Sigma\,(u,\,v,\,\mathfrak{c})\,| \leq C_7^*\,N\,(\mathfrak{e}_1)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\,N\,((\text{Nenner } \mathfrak{d}\,u,\ \text{Nenner } \mathfrak{d}\,v,\,\mathfrak{e}_1))^{\frac{1}{2}}\,|\,\Sigma\,(u^*,\,v^*,\,\mathfrak{e}_2)\,|\,.$$

Für den Rest, also den Anteil von $\mathfrak{e}_2$ benötigen wir keine so scharfe Abschätzung. Man kann etwa das Verfahren von Estermann (siehe die Vereinfachung von Walfisz [13]) fast wörtlich übertragen und erhält eine entsprechende Abschätzung mit $\frac{3}{4}$ an Stelle von $\frac{1}{2}$. Wir wollen statt $\frac{3}{4} + \varepsilon$ hier $\frac{4}{5}$ nehmen. Nach (53) bedeutet das

$$(69) \qquad |\,W\,(m,\,A,\,B,\,\Gamma\,(\mathfrak{c}))\,| \leqq C_7\,N\,(\mathfrak{e}_1)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\,N\,(\mathfrak{e}_2)^{\frac{4}{5}}.$$

§ 5. Integralabschätzungen

In diesem § wollen wir die in § 3 benötigten Integralabschätzungen herleiten. Die Ergebnisse formulieren wir in drei Hilfssätzen:

Hilfssatz 2. *Es sei s komplex, $|\,\mathrm{Re}\,(s)\,| \leq \sigma < \frac{1}{4}$, $|\,\mathrm{Im}\,(s)\,| \leq T$. λ, m seien reelle Zahlen, μ, y positive reelle Zahlen. Weiter sei $y \geq y_0 > 0$. Dann gilt für positives ν*

$$\left|\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x + \frac{\lambda^2\mu}{m^2 x}\right\}}}{x^2\,|\,x\,|^s}\,dx\right| \leq C_{11}\,y_0^{-2}\ \text{Maximum}\,(\nu^2,\,\nu^{-2})\,e^{\pi\nu y}|\,\lambda\,|^{-\varepsilon}\,|\,m\,|^{\varepsilon}$$
$$\textit{für } 0 \leq \varepsilon < \sigma.$$

Hilfssatz 3. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 2 gilt für negatives* ν

$$\left| \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}\right\}}}{x^2 |x|^s} dx \right| \leq C_{11}\, y_0^{-2} \text{ Maximum } (\nu^2, \nu^{-2})\, e^{-3\pi|\nu| y} |\lambda|^{-\varepsilon} |m|^{\varepsilon}$$

$$\textit{für } 0 \leq \varepsilon < \sigma.$$

Hilfssatz 4. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 2 gilt*

$$\left| \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}}}{x^2 |x|^s} dx \right| \leq C_{11}\, y_0^{-2} |\lambda|^{-\varepsilon} |m|^{\varepsilon}.$$

Der Beweis von Hilfssatz 2 verläuft folgendermassen: Wie man durch die Substitution $x = t + iy$, $|t + iy|^2 = (t + iy)(t - iy)$, einsieht, ist

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}\right\}}}{x^2 |x|^s} dx = \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}\right\}}}{x^{2+\frac{1}{2}s} (x - 2iy)^{\frac{1}{2}s}} dx.$$

Hierbei denke man sich die x-Ebene längs der imaginären Achse von $0 \to -i\infty$ und von $2iy \to i\infty$ aufgeschnitten und wähle in der rechten Halbebene den Hauptwert des Logarithmus für $\log x$ bzw. $\log (x + 2iy)$. Wir setzen jetzt

$$\varrho = \left|\frac{m}{\lambda}\right| \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = (\nu \mu)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\lambda}{m}\right|$$

und erhalten durch die Substitution $\zeta = -2\pi i z \varrho x$

$$\tag{70} \begin{aligned} \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}\right\}}}{x^{2+\frac{1}{2}s} (x - 2iy)^{\frac{1}{2}s}} dx &= \nu^{1+s} (-2\pi i)^{1+s} \int_{2\pi\nu y + i\infty}^{2\pi\nu y - i\infty} \frac{e^{-\frac{(2\pi z)^2}{\zeta} + \zeta}}{\zeta^{2+\frac{1}{2}s} (\zeta - 4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}} d\zeta \\ &= \nu^{1+s} (-2\pi i)^{1+s} J. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$|\arg (\zeta)| < \tfrac{1}{2}\pi, \quad -\tfrac{3}{2}\pi < \arg (\zeta - 4\pi\nu y) < -\tfrac{1}{2}\pi, \quad [\arg (-2\pi i) = -\tfrac{1}{2}\pi]$$

auf dem Integrationswege. Es ist

$$|\zeta^{2+\frac{1}{2}s}| = e^{(2+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(s)) \log |\zeta| - \frac{1}{2}\operatorname{Im}(s) \arg (\zeta)}$$

$$|(\zeta - 4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}| = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Re}(s) \log |\zeta - 4\pi\nu y| - \frac{1}{2}\operatorname{Im}(s) \arg (\zeta - 4\pi\nu y)}$$

$$C_{10}^{-1} \leq e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(s) \arg (\zeta)} \leq C_{10}$$

$$C_{10}^{-1} \leq e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(s) \arg (\zeta - 4\pi\nu y)} \leq C_{10}$$

mit passendem C_{10} nach der Voraussetzung über s, wenn ζ in der aufgeschnittenen ζ-Ebene variiert. Weiter ist

$$\left| e^{\zeta - \frac{(2\pi z)^2}{\zeta}} \right| = e^{\mathrm{Re}\,(\zeta) - \frac{(2\pi z)^2}{|\zeta|^2} \mathrm{Re}\,(\zeta)}.$$

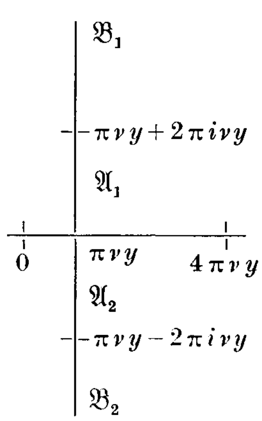
Wir verschieben den Integrationsweg auf die Parallele zur imaginären Achse durch $\pi \nu y$ und teilen diesen Weg in drei Teile.

Es sei zunächst $\pi \nu y \leq 1$. Dann ist auf $\mathfrak{A}_1$

$$\left| e^{\zeta - \frac{(2\pi z)^2}{\zeta}} \right| \leq e^{\pi \nu y}, \quad |\zeta^2| \geq (\pi \nu y)^2$$

$$|\zeta^{\frac{1}{2}s}| \geq C_{10}^{-1} e^{\mathrm{Re}\,(\frac{1}{2}s) \log |\zeta|} = C_{10}^{-1} e^{\frac{1}{2} \mathrm{Re}\,(s) [\log (3) + \log (\frac{1}{3}|\zeta|)]}$$

$$\geq C_{10}^{-1} 3^{-\frac{1}{2}\sigma} (\pi \nu y)^{\frac{1}{2}\sigma}.$$



$$|(\zeta - 4\pi \nu y)^{\frac{1}{2}s}| \geq C_{10}^{-1} 5^{-\frac{1}{2}\sigma} (\pi \nu y)^{\frac{1}{2}\sigma}$$

also

$$\left| \int_{\pi \nu y - 2\pi i \nu y}^{\pi \nu y + 2\pi i \nu y} \frac{e^{\zeta - \frac{(2\pi z)^2}{\zeta}}}{\zeta^{2+\frac{1}{2}s} (\zeta - 4\pi \nu y)^{\frac{1}{2}s}} d\zeta \right| \leq C_{10}^2 15^{\frac{1}{2}\sigma} 2 e^{\pi \nu y} (\pi \nu y)^{-1-\sigma}$$

Auf $\mathfrak{B}_1$ ist

$$\left| e^{\zeta - \frac{(2\pi z)^2}{\zeta}} \right| \leq e^{\pi \nu y}; \text{ sei } t = \frac{\mathrm{Im}\,(\zeta)}{\pi \nu y},$$

so ist

$$|\zeta^{\frac{1}{2}s}| \geq (\pi \nu y)^{\frac{1}{2}\sigma} |1 + it|^{-\frac{1}{2}\sigma} C_{10}^{-1} \geq 2^{-\frac{1}{2}\sigma} C_{10}^{-1} (\pi \nu y)^{\frac{1}{2}\sigma} t^{-\frac{1}{2}\sigma}$$

$$|(\zeta - 4\pi \nu y)^{\frac{1}{2}s}| \geq 3^{-\frac{1}{2}\sigma} C_{10}^{-1} (\pi \nu y)^{\frac{1}{2}\sigma} t^{-\frac{1}{2}\sigma}, \quad |\zeta^2| \geq t^2 (\pi \nu y)^2$$

also

$$\left| \int_{\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2} \right| \leq 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}\sigma} C_{10}^2 (\pi \nu y)^{-\sigma-1} e^{\pi \nu y} \int_2^\infty \frac{dt}{t^{2-s}}$$

$$\leq 2^\sigma 6^{\frac{1}{2}\sigma} C_{10}^2 (1 - \sigma)^{-1} e^{\pi \nu y} (\pi \nu y)^{-\sigma-1},$$

und damit

$$(71) \qquad \left| \int_{\pi \nu y + i\infty}^{\pi \nu y - i\infty} \frac{e^{\zeta - \frac{(2\pi z)^2}{\zeta}}}{\zeta^{2+\frac{1}{2}s} (\zeta - 4\pi \nu y)^{\frac{1}{2}s}} d\zeta \right| \leq 4 \cdot 15^{\frac{1}{2}\sigma} C_{10}^2 (1 - \sigma)^{-1} e^{\pi \nu y} (\pi \nu y)^{-1-\sigma}$$

für $\pi \nu y \leq 1$.

Ist $\pi\nu y \geq 1$, so erhält man offenbar auf die gleiche Weise $(\sigma < \frac{1}{4})$

$$\left|\int_{\pi\nu y+i\infty}^{\pi\nu y-i\infty} \frac{e^{\zeta-\frac{(2\pi z)^2}{\zeta}}}{\zeta^{2+\frac{1}{2}s}(\zeta-4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}}\,d\zeta\right| \leq 4\,(1-\sigma)^{-1}\,C_{10}^2\,e^{\pi\nu y}\,(\pi\nu y)^{\sigma-1} \tag{72}$$

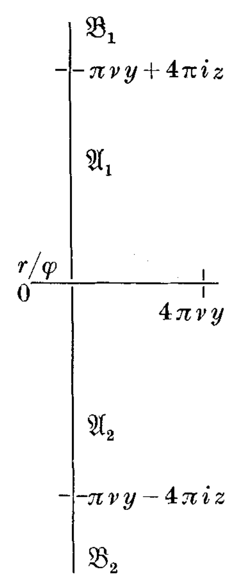
für $\pi\nu y \geq 1$.

Im Falle $\pi\nu y \geq \pi z \geq 1$ erhält man aus (72)

$$\left|\int_{\pi\nu y+i\infty}^{\pi\nu y-i\infty} \frac{e^{\zeta-\frac{(2\pi z)^2}{\zeta}}}{\zeta^{2+\frac{1}{2}s}(\zeta-4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}}\,d\zeta\right| \leq 4\,(1-\sigma)^{-1}\,C_{10}^2\,e^{\pi\nu y}\,(\pi\nu y)^{2\sigma-1}\,(\pi z)^{-\sigma} \tag{72 a}$$

für $\pi\nu y \geq \pi z \geq 1$.

Ist nun aber $\pi z \geq 1 \geq \pi\nu y$, so teilt man den Weg anders und verfährt wie folgt:



Auf $\mathfrak{A}_1$ ist

$$\zeta = r(\varphi)\,e^{i\varphi},\quad \frac{d\zeta}{d\varphi} = \frac{d\,r(\varphi)}{d\varphi}\,e^{i\varphi} + i\,r(\varphi)\,e^{i\varphi}$$

$$r = \pi\nu y\,\cos^{-1}(\varphi),\quad \frac{d\,r(\varphi)}{d\varphi} = \pi\nu y\,\sin(\varphi)\,\cos^{-2}(\varphi),$$

also

$$\left|\frac{d\zeta}{d\varphi}\right| = r^2\,(\pi\nu y)^{-1}.$$

Weiter ist

$$|\zeta^{\frac{1}{2}s}| \geq C_{10}^{-1}\,e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(s)\log|\zeta|} = C_{10}^{-1}\,e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(s)\left[\log(\pi\nu y)+\log\frac{|\zeta|}{\pi\nu y}\right]}$$

$$\geq C_{10}^{-1}\,(\pi\nu y)^{\frac{1}{2}\sigma}\left(\frac{6\pi z}{\pi\nu y}\right)^{-\frac{1}{2}\sigma} \geq C_{10}^{-1}\,(\pi\nu y)^{\sigma}\,6^{-\frac{1}{2}\sigma}\,(\pi z)^{-\frac{1}{2}\sigma}$$

$$|(\zeta-4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}| \geq C_{10}^{-1}\,(\pi\nu y)^{\sigma}\,5^{-\frac{1}{2}\sigma}\,(\pi z)^{-\frac{1}{2}\sigma} \qquad |\zeta^2| = r^2$$

Das ergibt

$$\left|\int_{\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2}\right| \leq 2\,C_{10}^2\,30^{\frac{1}{2}\sigma}\,(\pi\nu y)^{-1-2\sigma}\,(\pi z)^{\sigma}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{\pi\nu y-\frac{1}{5}\pi z\cos(\varphi)}\,d\varphi\,.$$

Wegen

$$\cos(\varphi) \geq \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi\right),\quad 0 \leq \varphi \leq \tfrac{1}{2}\pi$$

erhält man hieraus

$$\left|\int_{\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2}\right| \leq 5\,C_{10}^2\,30^{\frac{1}{2}\sigma}\,e^{\pi\nu y}\,(\pi\nu y)^{-1-2\sigma}\,(\pi z)^{\sigma-1}\,.$$

Auf $\mathfrak{B}_1$ ist wieder

$$\left|e^{\zeta-\frac{(2\pi z)^2}{\zeta}}\right| \leq e^{\pi\nu y},\ \text{sei}\ t=\frac{\operatorname{Im}(\zeta)}{\pi z},\ \text{so ist}\ |\zeta^2| \geq t^2$$

$$|\zeta^{\frac{1}{2}s}| \geq (\pi z)^{-\frac{1}{2}\sigma}\, 2^{-\frac{1}{2}\sigma}\, C_{10}^{-1}\, t^{-\frac{1}{2}\sigma}, \quad |(\zeta-4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}| \geq (\pi z)^{-\frac{1}{2}\sigma}\, C_{10}^{-1}\, 3^{-\frac{1}{2}\sigma}\, t^{-\frac{1}{2}\sigma}$$

und

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2}\right| \leq 2\cdot 6^{\frac{1}{2}\sigma}\, C_{10}^2\, (\pi z)^{\sigma-1}\, e^{\pi\nu y}\int\limits_2^\infty \frac{dt}{t^{2-\sigma}} \leq 2^\sigma\, 6^{\frac{1}{2}\sigma}\, (1-\sigma)^{-1}\, C_{10}^2\, e^{\pi\nu y}\, (\pi z)^{\sigma-1}.$$

Das gesamte Integral wird somit

$$(73)\qquad \left|\int\limits_{\pi\nu y+i\infty}^{\pi\nu y-i\infty}\frac{e^{\zeta-\frac{(2\pi z)^2}{\zeta}}}{\zeta^{2+\frac{1}{2}s}(\zeta-4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}}\,d\zeta\right| \leq 12\cdot 15^{\frac{1}{2}\sigma}\, C_{10}^2\, (1-\sigma)^{-1}\, (\pi\nu y)^{-1-2\sigma}\, (\pi z)^{\sigma-1}\, e^{\pi\nu y}$$

$$\text{für}\ \pi z \geq 1 \geq \pi\nu y.$$

Entsprechend erhält man im Fall $\pi z \geq \pi\nu y \geq 1$

$$(74)\qquad \left|\int\limits_{\pi\nu y+i\infty}^{\pi\nu y-i\infty}\frac{e^{\zeta-\frac{(2\pi z)^2}{\zeta}}}{\zeta^{2+\frac{1}{2}s}(\zeta-4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}}\,d\zeta\right| \leq 12\cdot 15^{\frac{1}{2}\sigma}\, C_{10}^2\, (1-\sigma)^{-1}\, (\pi\nu y)^{2\sigma-1}\, (\pi z)^{\sigma-1}\, e^{\pi\nu y}$$

$$\text{für}\ \pi z \geq \pi\nu y \geq 1.$$

Beachtet man, dass $0<\sigma<\frac{1}{4}$ angenommen war und $y>y_0$ sein sollte, so erhält man aus (71), (72), (72 a), (73) und (74)

$$(75)\ \left|\int\limits_{\pi\nu y+i\infty}^{\pi\nu y-i\infty}\frac{e^{\zeta-\frac{(2\pi z)^2}{\zeta}}}{\zeta^{2+\frac{1}{2}s}(\zeta-4\pi\nu y)^{\frac{1}{2}s}}\,d\zeta\right| \leq 12\cdot 15^{\frac{1}{2}\sigma}\, C_{10}^2\, (1-\sigma)^{-1}\, e^{\pi\nu y}\, y_0^{-2}\, (\pi z)^{-\varepsilon}\, \text{Maximum}\,(\nu^{-2}, 1)$$

$$\text{für}\ 0 \leq \varepsilon < \sigma$$

und hieraus nach (70) unmittelbar die Aussage des Hilfssatzes 2.

Zum Beweise von Hilfssatz 3 beginnt man genau wie bei dem Beweis von Hilfssatz 2, setzt aber dann ϱ und z mit $|\nu|$ an Stelle von ν an. Man erhält an Stelle von (70) ein Integral, das gegen (70) nur dadurch verändert ist, dass im Exponenten von e $-\zeta$ an Stelle von ζ steht und ν durch $|\nu|$ ersetzt ist. Man verfährt weiter wie bei Hilfssatz 2, nur dass man als Integrationsweg die Parallele zur imaginären Achse durch $3\pi|\nu|y$ wählt. Geht man die Herleitung von (71) durch, so sieht man, dass dort nur $e^{\pi\nu y}$ durch $e^{3\pi|\nu|y}$ zu ersetzen ist, die Rollen von $|\zeta^{\frac{1}{2}s}|$ und $|(\zeta-4\pi|\nu|y)^{\frac{1}{2}s}|$ in den Abschätzungen vertauschen sich, ansonsten hat man nichts zu ändern. Ebenso geht es natürlich auch bei (72) und (72 a). Bei der Herleitung von (73) hat man jetzt $r=3\pi|\nu|y\cos^{-1}(\varphi)$, was sich dahingehend auswirkt, dass $\left|\frac{d\zeta}{d\varphi}\right|$ einen Faktor $\frac{1}{3}$

aufnimmt. An Stelle von $-\frac{4}{5}\pi z \cos(\varphi)$ im Exponenten hat man zu schreiben $-\frac{1}{2}\pi z \cos(\varphi)$. Man erhält also die Abschätzung (73) mit $e^{-3\pi|\nu|y}$ an Stelle von $e^{\pi\nu y}$. $\Bigl($Der Faktor $\frac{8}{15}$, der wegen $\frac{1}{3}$ aus $\left|\frac{d\zeta}{d\varphi}\right|$ und $-\frac{1}{2}\pi z \cos(\varphi)$ statt $-\frac{4}{5}\pi z \cos(\varphi)$ hinzukäme, ist vernachlässigt.$\Bigr)$ Das Endergebnis erhält man wieder genau wie bei Hilfssatz 2.

Das in Hilfssatz 4 auftretende Integral unterscheidet sich von dem Integral des Hilfssatzes 2 nur dadurch, dass im Exponenten von e das Glied ζ fehlt und dass statt ν 1 zu setzen ist. Man erhält somit die gleiche Abschätzung wie im Hilfssatz 2 bis auf den Unterschied, dass $e^{\pi\nu y}$ nicht auftritt und $\nu=1$ zu setzen ist. Die Abschätzung des Hilfssatzes 4 ergibt sich also unmittelbar.

Literatur

[1]. ESTERMAN, Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 7 (1930).

[2]. HURWITZ, *Werke* Band 2 (Basel 1933).

[3]. KLOOSTERMAN, Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6 (1928).

[4]. ——, Thetareihen in total-reellen algebraischen Zahlkörpern ,*Mathematische Annalen* 103 (1930).

[5]. MASS, Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften* 1940, Heft 2.

[6]. ——, Zur Theorie der automporhen Funktionen von n Veränderlichen, *Mathematische Annalen* 117 (1940).

[7]. PETERSSON, Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 8 (1931).

[8]. ——, Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen, *Acta Mathematica* 58 (1932).

[9]. ——, Über die Entwicklungskoeffizienten einer allgemeinen Klasse automorpher Formen, *Mathematische Annalen* 108 (1933).

[10]. R. A. RANKIN, The Scalar Product of Modular Forms, *Proceedings of the London Mathematical Society* 3, 2 (1952).

[11]. SALIÉ, Über die Kloostermanschen Summen, *Mathematische Zeitschrift* 34 (1932).

[12]. ——, Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen, *Mathematische Zeitschrift* 36 (1933).

[13]. WALFISZ, Zur elementaren Zahlentheorie (Berichtigung), *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 8 (1931).

[14]. ANDRÉ WEIL, On some Exponential Sums, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.* 34 (1948).