SUR LES RACINES DE L'ÉQUATION $X_n = 0$

PAR

T. J. STIELTJES

à TOULOUSE.

1. Nous aurons à invoquer dans la suite une proposition d'algèbre que nous allons établir tout d'abord.

Soit

$$X = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

une forme quadratique *positive* des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

On sait que les coefficients a_{ii} sont positifs. Nous ajoutons maintenant la condition que les autres coefficients a_{ik} soient tous négatifs ou nuls.

Considérons les m équations linéaires

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial x_i} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = \xi_i. \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

Nous supposons que les quantités ξ_i sont toutes positives ou nulles. Dans ces conditions on peut énoncer la proposition suivante: »*Aucune des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tirées des équations* (1) *ne peut être négative, et si les quantités ξ_i sont toutes positives alors $x_1, x_2, \ldots, x_m$ le sont aussi.*»

Dans la démonstration suivante nous ferons abstraction du cas trivial

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = 0$$

dans lequel on a aussi

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0.$$

On a

$$\sum_1^m \xi_i x_i = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

et il est clair par là qu'au moins un des x_i doit être positif car le second membre est positif.

Mais supposons que

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ soient négatifs ou nuls, et}$$

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m \text{ positifs.}$$

Dans la relation

$$\sum_1^n \xi_i x_i = \sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{n+1}^m x_i(a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n) \tag{2}$$

le premier membre est nul ou négatif. Au contraire dans le second membre la première partie

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k$$

est nulle ou positive, et il en est de même de la seconde partie

$$\sum_{n+1}^m x_i(a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n).$$

Par conséquent les deux membres de la relation (2) sont nécessairement nuls tous les deux, ce qui exige:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

La première partie de notre proposition se trouve établie par là. Pour démontrer aussi la seconde partie nous observons qu'en supposant

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m \text{ positifs}$$

les n premiers équations (1) montrent qu'on a

$$a_{ik} = 0 \tag{3}$$

dès que l'un (et seulement un) des indices i, k surpasse n. Et ensuite il est clair qu'on doit avoir

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0.$$

Cette dernière conséquence démontre la seconde partie de notre proposition.

Les équations (3) font voir que dans le cas exceptionnel que nous considérons on a

$$X = \sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{n+1}^m \sum_{n+1}^m a_{ik} x_i x_k$$

en sorte que X se décompose directement dans la somme de deux formes quadratiques positives des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x_{n+1}, \ldots, x_m$. Le cas $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ se présente alors dès qu'on prend $\xi_1 = \xi_2 = \ldots \ldots = \xi_n = 0$.

D'après ce qui précède il est clair que lorsque X ne se décompose pas directement dans la somme de deux ou d'un plus grand nombre de formes quadratiques d'un nombre de variables moindre que m, alors $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont tous positifs, même dans le cas que quelques-uns des ξ_i sont nuls.

Corollaire. Soit D le déterminant de X et désignons par D_{ik} les mineurs de D en sorte qu'on a

$$Dx_i = \xi_1 D_{1i} + \xi_2 D_{2i} + \ldots + \xi_m D_{mi}$$

alors aucun des mineurs D_{ik} ne peut être négatif. Et si le cas exceptionnel examiné plus haut ne se présente pas, tous les D_{ik} sont positifs.

2. Supposons que sur l'axe des abscisses OX on ait dans les points A et B dont les abscisses sont -1 et $+1$ deux points matériels fixes, la masse du premier en A étant α, celle du second en B, β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Imaginons encore n points matériels de masse égale à 1, qui peuvent glisser librement sur l'axe et placés entre A et B. Supposons enfin que deux points matériels se repoussent en raison directe de leurs masses et en raison inverse de leur distance. Dans ces conditions il y a une position unique d'équilibre pour les n points placés entre A et B, et si l'on désigne leurs abscisses dans la position d'équilibre par

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n \tag{4}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines d'une équation

$$\varphi(x) = 0$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme du degré n défini par l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\varphi''(x) + 2[\alpha - \beta - (\alpha + \beta)x]\varphi'(x) + C\varphi(x) = 0. \tag{5}$$

C est une constante dont la valeur est

$$n(n + 2\alpha + 2\beta - 1)$$

comme on le trouve en cherchant le coefficient de x^n dans le premier membre de (5).

C'est là un cas particulier d'un théorème démontré dans ce journal, t. 6, p. 321 et suiv.

3. Les racines $x_1, \ldots, x_n$ dépendent de α et β et l'on peut les considérer comme fonctions des variables α et β qui doivent rester toujours positives.

Lorsque α et β varient d'une manière continue, x_i varie aussi d'une manière continue et comme deux racines ne deviennent jamais égales, leur ordre de grandeur fixé par les inégalités (4) ne sera jamais changé.

Nous allons démontrer les inégalités

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} > 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \beta} < 0. \tag{7}$$

En effet, les quantités $x_1, \ldots, x_n$ dépendent de α et de β par les relations

$$\frac{\alpha}{x_i + 1} + \frac{\beta}{x_i - 1} + \frac{1}{x_i - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{x_i - x_n} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

En prenant les dérivées par rapport à α on obtient pour les $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}$ le système linéaire suivant:

$$a_{i1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + a_{i2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \ldots + a_{in}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha} = \frac{1}{x_i + 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

où

$$a_{ii} = \frac{\alpha}{(x_i + 1)^2} + \frac{\beta}{(x_i - 1)^2} + \frac{1}{(x_i - x_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(x_i - x_n)^2}$$

$$a_{ik} = a_{ki} = -\frac{1}{(x_i - x_k)^2}.$$

Ce système rentre évidemment dans le type des équations (1) car la forme quadratique

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{ik} X_i X_k = \sum_1^n \left(\frac{\alpha}{(x_i + 1)^2} + \frac{\beta}{(x_i - 1)^2} \right) X_i^2 + \sum \sum \frac{1}{(x_i - x_k)^2} (X_i - X_k)^2$$

est positive, et $x_i + 1$ est aussi positif.

Les valeurs de $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}, \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}$ sont donc toutes positives.

On trouve de la même manière

$$a_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + a_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \ldots + a_{in} \frac{\partial x_n}{\partial \beta} = \frac{1}{x_i - 1}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ici les seconds membres sont tous négatifs, et il en est donc de même des valeurs des $\frac{\partial x_i}{\partial \beta}$.

4. Considérons le cas particulier $\alpha = \beta$, en sorte que x_i est fonction de la seule variable α. Il est clair d'abord qu'on aura

$$x_1 + x_n = x_2 + x_{n-1} = x_3 + x_{n-2} = \ldots = 0.$$

Ainsi en supposant $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ il suffira de considérer les racines positives

$$x_1, x_2, \ldots, x_m.$$

Nous allons démontrer qu'on a toujours

$$\frac{dx_i}{d\alpha} < 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

En effet supposons d'abord $n = 2m$, on aura

$$(10) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\alpha}{x_i + 1} + \frac{\alpha}{x_i - 1} + \frac{1}{2x_i} + \frac{1}{x_i - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{x_i - x_m} \\ &+ \frac{1}{x_i + x_1} + \ldots + \frac{1}{x_i + x_{i-1}} + \frac{1}{x_i + x_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{x_i + x_m} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit

$$a_{i1} \frac{dx_1}{d\alpha} + a_{i2} \frac{dx_2}{d\alpha} + \ldots + a_{im} \frac{dx_m}{d\alpha} = -\frac{2x_i}{1 - x_i^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{11}$$

en posant

$$a_{ii} = \frac{a}{(x_i+1)^2} + \frac{a}{(x_i-1)^2} + \frac{1}{2x_i^2} + P_i + Q_i$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{(x_i+x_k)^2} - \frac{1}{(x_i-x_k)^2}$$

$$P_i = \frac{1}{(x_i-x_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i-x_{i+1})^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i-x_m)^2}$$

$$Q_i = \frac{1}{(x_i+x_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i+x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i+x_{i+1})^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i+x_m)^2}.$$

Le système (11) rentre encore dans le type des équations (1) car a_{ik} est négatif et la forme quadratique

$$\sum_1^m \sum_1^m a_{ik} X_i X_k = \sum_1^m \left(\frac{a}{(x_i+1)^2} + \frac{a}{(x_i-1)^2} + \frac{1}{2x_i^2} + 2Q_i\right) X_i^2$$
$$+ \sum\sum \left(\frac{1}{(x_i-x_k)^2} - \frac{1}{(x_i+x_k)^2}\right)(X_i - X_k)^2$$

est positive. Mais les seconds membres dans le système (11) sont tous négatifs et l'on a par conséquent

$$\frac{dx_i}{da} < 0.$$

Dans le cas $n = 2m + 1$ on aura $x_{m+1} = 0$, et

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{a}{x_i+1} + \frac{a}{x_i-1} + \frac{3}{2x_i} + \frac{1}{x_i-x_1} + \ldots + \frac{1}{x_i-x_{i-1}} + \frac{1}{x_i-x_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{x_i-x_m} \\ & \quad + \frac{1}{x_i+x_1} + \ldots + \frac{1}{x_i+x_{i-1}} + \frac{1}{x_i+x_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{x_i+x_m} = 0. \quad (i=1, 2, \ldots, m) \end{aligned} \right.$$

La seule différence avec les relations (10) consiste, comme on le voit, dans le terme $\frac{3}{2x_i}$ qui est venu remplacer le terme $\frac{1}{2x_i}$. Ce terme

$$\frac{3}{2x_i} = \frac{1}{2x_i} + \frac{1}{x_i}$$

provient de l'action des deux points matériels dont les abscisses sont $-x_i$ et 0.

On trouve les équations linéaires suivantes pour les $\frac{dx_i}{da}$

$$a_{i1}\frac{dx_1}{da} + \ldots + a_{im}\frac{dx_m}{da} = -\frac{2x_i}{1 - x_i^2}$$

$$a_{ii} = \frac{a}{(x_i + 1)^2} + \frac{a}{(x_i - 1)^2} + \frac{3}{2x_i^2} + P_i + Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{(x_i + x_k)^2} - \frac{1}{(x_i - x_k)^2}$$

et l'on en conclut les inégalités (9) comme tout à l'heure.

5. La démonstration des propositions exprimées par les inégalités (6), (7), (9) que nous venons de développer, nous semble la plus simple si l'on n'a en vue que ces inégalités elles-mêmes. Mais nous avons retrouvé ces inégalités encore comme conséquences d'une proposition d'un caractère plus général, à l'occasion d'études sur la quadrature mécanique de Gauss.

6. Nous allons développer maintenant quelques conséquences qui découlent presque immédiatement de ces inégalités (6), (7) et (9).

Supposons d'abord

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

l'équation (5) devient

$$(1 - x^2)\varphi''(x) - 2x\varphi'(x) + n(n + 1)\varphi(x) = 0$$

ainsi x_i est une racine de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynôme X_n de Legendre.

Prenons ensuite

$$\alpha = \frac{3}{4}, \qquad \beta = \frac{1}{4}.$$

On a

$$(1 - x^2)\varphi''(x) + (1 - 2x)\varphi'(x) + n(n + 1)\varphi(x) = 0$$

ou si l'on pose

$$x = \cos\varphi,$$

$$\cos\frac{1}{2}\varphi\,\varphi(x) = y,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 y = 0,$$

donc

$$\varphi(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

et par conséquent

$$x_i = \cos\frac{(2i - 1)\pi}{2n + 1}.$$

Dans le cas

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \beta = \frac{3}{4}$$

on trouve de la même manière

$$x = \cos\varphi,$$

$$\varphi(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

$$x_i = \cos\frac{2i\pi}{2n + 1}.$$

Mais d'après les inégalités (6), (7) il est clair que la valeur de x_i qui correspond à $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ doit être plus petite que la valeur de x_i pour $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$ et plus grande que la valeur de x_i pour $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{4}$.

Ainsi on a la limitation suivante pour la racine x_i de l'équation $X_n = 0$

$$\text{(A)} \qquad \cos\frac{2i\pi}{2n + 1} < x_i < \cos\frac{(2i - 1)\pi}{2n + 1}.$$

Cette proposition est due à M. Bruns qui l'a obtenue dans le tome 90 du Journal de Borchardt, pag. 327.

7. Nous pouvons obtenir des limites plus étroites à l'aide de l'inégalité (9).

Prenons en effet

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \beta = \frac{1}{4}$$

on trouvera

$$x = \cos\varphi,$$
$$\varphi(x) = \cos n\varphi,$$
$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

et en second lieu

$$\alpha = \frac{3}{4}, \qquad \beta = \frac{3}{4},$$

on trouve

$$x = \cos\varphi,$$
$$\varphi(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$
$$x_i = \cos\frac{i\pi}{n+1}.$$

D'après les inégalités (9) on en conclut la limitation suivante d'une racine positive de l'équation $X_n = 0$:

$$\text{(B)} \qquad \cos\frac{i\pi}{n+1} < x_i < \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Pour une racine négative on aurait évidemment

$$\cos\frac{i\pi}{n+1} > x_i > \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Soit $n = 10$, on a d'après (A)

	limites	
x_1	0,98883 0,95557	0,03326
x_2	0,90097 0,82624	0,07473
x_3	0,73305 0,62349	0,10956
x_4	0,50000 0,36534	0,13466
x_5	0,22252 0,07473	0,14779

et d'après (B)

	limites	
x_1	0,98769 0,95949	0,02820
x_2	0,89101 0,84125	0,04976
x_3	0,70711 0,65486	0,05225
x_4	0,45399 0,41542	0,03857
x_5	0,15643 0,14231	0,01412.

8. La proposition d'algèbre démontrée dans le N° 1, ou plutôt le corollaire que nous en avons déduit, se trouve lié étroitement à une question qui se présente dans le problème de la distribution d'électricité sur un système de conducteurs.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ les conducteurs, $e_1, e_2, \ldots, e_m$ leurs charges respectives et $V_1, V_2, \ldots, V_m$ les potentiels correspondants.

On a

$$(\alpha) \qquad V_i = p_{i1}e_1 + p_{i2}e_2 + \ldots + p_{im}e_m \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

et réciproquement

$$(\beta) \qquad e_i = q_{i1}V_1 + q_{i2}V_2 + \ldots + q_{im}V_m \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

(V. Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme,* § 87.)

La forme quadratique

$$\Sigma\Sigma q_{ik}x_ix_k$$

est positive. Le coefficient positif q_{ii} est la capacité du conducteur A_i tandis que q_{ik} est un coefficient d'électricité induit et négatif.

Le système (β) rentre donc dans le type des équations (1), et d'après notre corollaire les coefficients du système (α) sont donc tous positifs, ce qui est bien connu et ce qu'on établit directement à l'aide de la théorie du potentiel.

Mais le système (β) n'a pas la même généralité que le système (1) car on a entre les coefficients q_{ik} les relations

$$q_{i1} + q_{i2} + \ldots + q_{im} \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

tandis que dans le système (1) on n'a pas nécessairement les relations correspondantes entre les a_{ik}.

Mais aussi dans le système (α) les p_{ik} ne sont pas seulement positifs, la théorie du potentiel montre qu'on a en outre

$$p_{ii} \geqq p_{ik}.$$

D'après cela il est fort probable que si l'on assujettit dans le système

$$(1) \qquad a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m = \xi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

les coefficients a_{ik} à ces conditions additionnelles:

$$s_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{im} \geqq 0,$$

il en résultera pour les D_{ik} la conséquence

$$D_{ii} \geqq D_{ik}.$$

C'est ce que nous allons prouver en effet.

9. Supposons d'abord

$$s_i > 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

alors on a

$$D_{ii} > D_{ik}. \qquad (i \gtrless k)$$

Il suffira évidemment de faire voir que $D_{11} > D_{12}$. A cause de

$$Dx_1 = \xi_1 D_{11} + \xi_2 D_{21} + \ldots + \xi_m D_{m1}$$

cela revient à montrer que pour

$$\xi_1 = +1, \qquad \xi_2 = -1, \qquad \xi_i = 0 \qquad (i > 2)$$

la valeur de x_1 tirée du système (1) est positive. Or on a:

$$\sum_1^m \xi_i = 0 = \sum_1^m s_i x_i,$$

$$\sum_1^m x_i \xi_i = x_1 - x_2 = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

d'où l'on conclut d'abord que les x_i ne peuvent pas être tous nuls ou négatifs, ou bien tous nuls ou positifs et ensuite

$$x_1 > x_2.$$

Donc si x_1 était nul ou négatif, x_2 serait négatif. Supposons donc que

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \qquad (m > n \geqq 2)$$

soient nuls ou négatifs, et

$$x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_m$$

positifs.

On devrait avoir

$$\sum_{n+1}^{m} \xi_i x_i = 0 = \sum_{1}^{n} x_i(a_{n+1,i}\, x_{n+1} + \ldots + a_{mi} x_m) + \sum_{n+1}^{m} \sum_{n+1}^{m} a_{ik} x_i x_k$$

ce qui est impossible car le second membre est positif. On a donc nécessairement $x_1 > 0$ ou

$$D_{11} > D_{12}.$$

C. Q. F. D.

Il est clair maintenant que dans le cas

$$s_i \geqq 0$$

on doit avoir nécessairement

$$D_{ii} \geqq D_{ik}$$

car un changement infiniment petit des a_{ik} suffit pour rentrer dans le cas $s_i > 0$.

10. Cherchons encore les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait

$$D_{11} = D_{12}.$$

D'après ce qui précède il est clair qu'au moins un des s_i doit être nul mais cela ne suffit pas.

En prenant comme tout-à-l'heure

$$\xi_1 = +1, \qquad \xi_2 = -1, \qquad \xi_i = 0 \qquad (i > 2)$$

la condition $D_{11} = D_{12}$ revient à $x_1 = 0$, et les inconnues $x_2, \ldots, x_m$ se trouvent déterminées par le système

$$(1')\quad \begin{cases} a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = -1, \\ a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m = \quad 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = \quad 0. \end{cases}$$

Deux cas sont à distinguer.

I. La forme

$$\sum_2^m \sum_2^m a_{ik} x_i x_k$$

ne se décompose pas directement dans la somme de deux formes quadratiques d'un nombre de variables moindre que $m - 1$.

Alors $x_2, x_3, \ldots, x_m$ seront *négatifs,* d'après ce que nous avons vu dans le N° 1. Et comme on a:

$$\sum_1^m \xi_i = 0 = s_2 x_2 + \ldots + s_m x_m$$

on en conclut

$$(a)\qquad s_2 = 0, \qquad s_3 = 0, \quad \ldots, \quad s_m = 0.$$

Réciproquement, si ces relations (a) se trouvent vérifiées, il est clair que le système (1) donnera $x_1 = 0$ ou $D_{11} = D_{12}$ car on trouve

$$s_1 x_1 = \sum_1^m \xi_i = 0$$

et s_1 n'est pas nul.

II. La forme

$$\sum_2^m \sum_2^m a_{ik} x_i x_k$$

se décompose directement dans la somme de deux ou de plusieurs formes quadratiques.

Alors les variables

$$x_2, x_3, \ldots, x_m$$

se décomposent en plusieurs groupes. Soit

$$x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$

le groupe dans lequel se trouve x_2.

Le système (1′) se décompose en deux systèmes relatifs aux deux groupes de variables

$$x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,$$

$$x_{n+1},\ \ldots,\ x_m$$

et on voit qu'on aura:

$$x_2 < 0, \qquad x_3 < 0, \quad \ldots, \quad x_n < 0,$$

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0.$$

La relation

$$0 = s_2 x_2 + \ldots + s_m x_m$$

permet donc de conclure:

$$\text{(b)} \qquad s_2 = 0, \qquad s_3 = 0, \quad \ldots, \quad s_n = 0.$$

Réciproquement, si les conditions (b) sont vérifiées et qu'en outre on a identiquement:

$$\sum_2^m\sum_2^m a_{ik}x_i x_k = \sum_2^n\sum_2^n a_{ik}x_i x_k + \sum_{n+1}^m\sum_{n+1}^m a_{ik}x_i x_k$$

alors le système des valeurs de $x_2, x_3, \ldots, x_m$ tirées des équations (1′), joint à la valeur $x_1 = 0$, satisfait au système (1) et l'on a par conséquent $D_{11} = D_{12}$. Pour le montrer il suffit évidemment de vérifier la première des équations (1), ou bien l'équation obtenue en prenant la somme des équations (1). Or cette dernière

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_m x_m = 0$$

se trouve vérifiée évidemment.

Nous avons supposé ici $n < m$, pour $n = m$ on rentre dans le premier cas; et l'on a le résultat suivant.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$D_{11} = D_{12}$$

consistent dans ce que, pour une valeur spéciale de n

$$2 \leqq n \leqq m$$

on ait

(I) $$s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad \ldots, \quad s_n = 0$$

et

(II) $$\begin{aligned} a_{2,n+1} &= a_{2,n+2} = \ldots = a_{2,m} = 0, \\ a_{3,n+1} &= a_{3,n+2} = \ldots = a_{3,m} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,n+1} &= a_{n,n+2} = \ldots = a_{n,m} = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas $n = m$ les conditions (II) disparaissent.

11. Supposons les conditions (I) et (II) remplies, il n'est pas permis de conclure que les valeurs de $x_2, \ldots, x_n$ sont négatives, car la forme

$$\sum_2^n \sum_2^n a_{ik} x_i x_k$$

pourrait encore être décomposable. Mais si cela eut lieu, il est clair que les conditions (I) et (II) seraient encore satisfaites pour une valeur plus petite du nombre n.

Si donc nous supposons que n soit *le plus petit* nombre pour lequel les conditions (I) et (II) sont satisfaites, on aura

$$x_2 < 0, \quad x_3 < 0, \quad \ldots, \quad x_n < 0,$$

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$$

et à cause de

$$Dx_i = D_{1i} - D_{2i}$$

nous pouvons donc ajouter:

la condition $D_{11} = D_{12}$ entraîne nécessairement les relations

$$D_{1i} < D_{2i} \quad \text{pour } i = 2, 3, \ldots, n.$$

$$D_{1i} = D_{2i} \quad \text{pour } i > n.$$

Note.

Après avoir terminé la rédaction de cet article, je viens de prendre connaissance d'une note *Sur les racines de certaines équations* par M. A. Markoff, (Mathematische Annalen, T. 27, p. 177). L'auteur y déduit d'abord la limitation des racines de l'équation $X_n = 0$ déjà obtenue par M. Bruns, et ensuite il obtient aussi et pour la première fois, la limitation plus étroite (B).

La démonstration que j'ai donnée est différente de celle de M. Markoff, mais une seconde démonstration à laquelle j'ai fait allusion seulement dans le N° 5, ne diffère pas au fond de celle de cet auteur.

Toulouse, Janvier 1887.