ÜBER DIE LINEARE ZERLEGUNG DER DEN GANZEN MODULFORMEN VON HÖHERER STUFE ENTSPRECHENDEN DIRICHLETREIHEN IN VOLLSTÄNDIGE EULERSCHE PRODUKTE.

Von

HANS PETERSSON

in Hamburg.

1. Zur Ableitung der Multiplikationsgesetze, welche die Fourierkoeffizienten der ganzen Modulformen von der Stufe N und der ganzzahligen Dimension $-r \leqq -1$ beherrschen, hat sich die Theorie der von Hecke eingeführten Operatoren T_n als das geeignete Hilfsmittel erwiesen.[1] Die Formulierung dieser Multiplikationsgesetze erfolgt für die allgemeine Modulform $f(\tau)$ dadurch, dass diese zunächst als Linearkombination von solchen Modulformen dargestellt wird, welche Eigenfunktionen aller Operatoren R_n, T_n mit $(n, N) = 1$ sind. Für die der Modulform $f(\tau)$ entsprechende Dirichletreihe $D(s, f)$ bedeutet dies, dass sich die $D(s, f)$ zugeordnete reduzierte Reihe $\tilde{D}(s, f) = D(s, \tilde{f})$ aus endlich vielen durch f eindeutig bestimmten reduzierten kanonischen Eulerprodukten linear mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen lässt. Daraus folgt nach den zitierten Quellen in manchen, aber nachweislich nicht allen Fällen, dass auch die ursprüngliche (nicht reduzierte) Dirichletreihe $D(s, f)$ als Linearkombination von (vollständigen) kanonischen Eulerprodukten geschrieben werden kann.

Geht man zur näheren Beschreibung dieser Verhältnisse von einer im Sinne von AQF § 3 abgeschlossenen Schar $\mathfrak{S}$ aus, der die gegebene Modulform $f(\tau)$

[1] E. Hecke, Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II, Math. Annalen 114 (1937); Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Monographie, Kgl. Danske Videnskab. Selskab Meddelelser XVII, 12 (1940); diese drei Abhandlungen werden mit T_n I, T_n II, AQF zitiert.

H. Petersson, Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II, III, Math. Annalen 116 (1939), 117 (1940), im folgenden zitiert mit K I, K II, K III.

angehört, so lassen sich die (nach der Heckeschen Theorie zunächst hinreichenden) Bedingungen, unter denen der zuletzt zitierte Darstellungssatz für jedes $f < \mathfrak{S}$ zutrifft, wie folgt ausdrücken: Es ist möglich, alle Matrizen $\lambda^t(m) = (\lambda_{jk}^t(m))\,(m \geqq 1)$ mit Hilfe einer und derselben konstanten Matrix auf reine Diagonalgestalt zu transformieren. Diesen Sachverhalt habe ich in K II und K III als das Hauptachsentheorem der Schar $\mathfrak{S}$ bezeichnet; dass es nicht allgemein gilt, folgt bereits aus dem Beispiel $\mathrm{T_n}$ II, Satz 45 a. Wenn es nicht gilt, so gilt auch, wie die Untersuchungen von K III zeigen, der oben an letzter Stelle zitierte Darstellungssats nicht für jedes $f < \mathfrak{S}$, die genannten Bedingungen sind also in diesem Falle auch notwendig.

Das Hauptergebnis von K III besagt, dass sich trotzdem jede Modulform $f < \mathfrak{S}$ aus endlich vielen linear unabhängigen durch $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmten vollständigen Eulerprodukten linear mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen lässt, vorausgesetzt jedoch erstens, dass $\mathfrak{S}$ nur ganze Spitzenformen enthält, zweitens, dass auch andere als kanonische Eulerprodukte herangezogen werden, drittens, dass auf die Bedingung, dass die dabei auftretenden Eulerprodukte ganzen Modulformen entsprechen, verzichtet wird. Diese dritte Voraussetzung tritt nur dann in Kraft, wenn N durch zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist. In jedem der dabei verwendeten Eulerprodukte konstituieren die zu den Primzahlen p mit $(p, N) = 1$ gehörigen Faktoren ein reduziertes kanonisches Produkt, während die zu den Primteilern q von N gehörigen Faktoren die Gestalt

$$(1) \qquad \left(1 - \frac{\alpha}{q^s}\right)^{-\nu} \quad (\alpha \neq 0) \qquad \text{oder} \qquad q^{-(\nu-1)s} \quad (\nu = 1, 2 \ldots, d_0)$$

aufweisen; hier bezeichnet α eine charakteristische Wurzel der einer gewissen Teilschar von $\mathfrak{S}$ zugeordneten Matrix $\lambda^t(q)$, der zweite Ausdruck (1) bezieht sich auf den Fall $\alpha = 0$, und d_0 ist höchstens gleich der Vielfachheit von α als charakteristischer Wurzel von $\lambda^t(q)$.

Dieses Ergebnis lässt sich deshalb auf verhältnismässig einfache Weise ableiten, weil die Funktionen von $\mathfrak{S}$ als ganze Spitzenformen uneingeschränkt miteinander metrisch verknüpft werden können. In den Anwendungen treten jedoch (vgl. AQF) meistens abgeschlossene Scharen $\mathfrak{S}$ auf, die nicht oder nicht nur aus ganzen Spitzenformen bestehen. Diese allgemeinen abgeschlossenen Scharen werden in der vorliegenden Abhandlung untersucht. Wir zitieren in aller Kürze die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchung.

Zunächst wird von der Schar $\mathfrak{S}$ nur vorausgesetzt, dass ihre sämtlichen Formen zu dem gleichen Teiler t von N und dem gleichen Charakter ε mod N gehören, und dass $\mathfrak{S}$ gegenüber den Operatoren T_n mit $(n, N) = 1$ abgeschlossen sei. Eine solche Schar $\mathfrak{S}$ lässt sich stets (und zwar, wie ausdrücklich hervorgehoben sei, auch wenn sie nicht nur ganze Spitzenformen enhält) auf eine und nur eine Weise als direkte Summe von Teilscharen darstellen, deren jede aus lauter Eigenfunktionen aller T_n besteht, wobei die Eigenwerte der Funktionen verschiedener Teilscharen bezüglich dieser Operatoren T_n nicht für alle n übereinstimmen, während innerhalb jeder einzelnen Teilschar nur Funktionen mit dem gleichen Eigenwert für jedes $T_n((n, N) = 1)$ auftreten. Wenn die Dimension $-r$ der Modulformen von $\mathfrak{S}$ kleiner als -1 ist, enthält jede solche Teilschar entweder nur ganze Spitzenformen oder nur Linearkombinationen von Eisensteinreihen. Wenn ferner $\mathfrak{S}$ schlechthin, d. h. gegen alle Operatoren $T^t_m (m \geqq 1)$ abgeschlossen ist, so gilt das gleiche für alle Teilscharen. Die Dirichletreihen, die den Modulformen einer Teilschar entsprechen, lassen sich aus endlich vielen, durch $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmten linear unabhängigen Eulerprodukten linear mit konstanten Koeffizienten kombinieren. Diese Eulerprodukte haben die oben bei (1) angegebene Bauart; im Falle einer Primzahlpotenzstufe entsprechen sie den Modulformen einer passend bestimmten Basis der Teilschar.

Die Anwendung dieser Ergebnisse auf die mit positiven quadratischen Formen gebildeten Thetareihen führt unmittelbar zu der folgenden Verschärfung der Hauptsätze 39, 40 der Heckeschen Theorie aus AQF: Die dort mit

$$\varphi(s, P_\nu, Q) = \sum_{((n))} P_\nu((n))\, Q((n))^{-s}$$

bezeichnete (nicht reduzierte) Dirichletreihe gestattet eine eindeutige Darstellung als Linearkombination eines festen durch P_ν und Q eindeutig bestimmten Systems linear unabhängiger vollständiger Eulerprodukte von der bei (1) angegebenen Bauart. Im Falle einer Primzahlpotenzstufe entsprechen diese Eulerprodukte gewissen Modulformen aus der kleinsten die zugehörige Thetareihe enthaltenden abgeschlossenen Schar. Wenn ferner die quadratische Form Q nicht binär, ihre Variabelnzahl also $\geqq 4$ ist, so ist jede dieser Modulformen entweder eine ganze Spitzenform oder eine Linearkombination von Eisensteinreihen.

Zu dem Hauptsatz der vorliegenden allgemeinen Theorie ist hervorzuheben, dass man die lineare Zerlegung der Dirichletreihen $D(s, f)\,(f < \mathfrak{S})$ in die vollständigen Eulerprodukte der genannten Art für Stufen N mit mehr als einem Primteiler nur dadurch erreicht, dass man aus der Schar der den Modulformen von $\mathfrak{S}$ entsprechenden Dirichletreihen heraustritt. Wenn N zwei verschiedene Primteiler besitzt, entsprechen jene vollständigen Eulerprodukte i. a. nicht mehr irgendwelchen Modulformen der Schar $\mathfrak{S}$ und wahrscheinlich auch nicht mehr irgendwelchen Modulformen überhaupt. Sie unterscheiden sich jedoch von den Eulerprodukten, die gewissen Modulformen der Schar $\mathfrak{S}$ entsprechen, lediglich um elementare transzendente Funktionen von s als Faktoren.

Zur Ableitung der zitierten Ergebnisse reicht die in K II und K III angewendete Metrisierung, obwohl sie auch jetzt das wichtigste Hilfsmittel bildet, allein nicht mehr aus. Es zeigt sich aber, dass die Metrisierung im Verein mit den vorauszusetzenden Invarianzeigenschaften der Schar $\mathfrak{S}$ gegenüber den Operatoren U, R_n, $T_n((n, N) = 1)$ eine Zerlegung von $\mathfrak{S}$ in abgeschlossene Teilscharen ermöglicht und damit alle Voraussetzungen für das weitere Vorgehen schafft. In diesem Sinne ist z. B. das folgende Teilergebnis zu interpretieren: Es gehöre $\mathfrak{S}$ zum Teiler t, zum Charakter ε, und es sei $\mathfrak{S}$ gegenüber allen Operatoren $T_n((n, N) = 1)$ abgeschlossen. Man zerlege $\mathfrak{S}$ in die direkten Summanden $\mathfrak{S}^+$ und $\mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{S}^+$ die lineare Schar der in $\mathfrak{S}$ enthaltenen ganzen Spitzenformen, $\mathfrak{N}$ die Orthogonalschar von $\mathfrak{S}^+$ in $\mathfrak{S}$ angibt. Dann erweist sich, wofern $r > 1$ ist, die Schar $\mathfrak{N}$, obwohl nur durch ihre Orthogonalität zu der Schar $\mathfrak{S}^+$ (also möglicherweise zu einem geringen Teil aller ganzen Spitzenformen) definiert, dennoch als aus lauter Linearkombinationen der Eisensteinreihen bestehend. Dies gilt sogar dann, wenn $\mathfrak{S}$ überhaupt keine ganze Spitzenform ausser Null enthält. Auf andere Ergebnisse, insbesondere solche, die weniger dem systematischen Aufbau der vorliegenden Theorie dienen, als vielmehr den Grundlagen der Transformationstheorie zugerechnet werden müssen, kann hier nur hingewiesen werden.

Im letzten Abschnitt der Untersuchung gehe ich auf eine mit dem eigentlichen Gegenstand nicht unmittelbar zusammenhängende arithmetische Frage ein, die sich jedoch durch die Gestalt der kanonischen Eulerprodukte aufdrängt: Es handelt sich um das in seinen ersten Auswirkungen bereits von Hecke in AQF erörterte Analogon einer bekannten Vermutung von Ramanujan. Dieser hatte vermutet, dass die Faktoren des Eulerprodukts der der Diskriminante

$$\Delta(\tau) = e^{2\pi i\tau} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m\tau})^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, e^{2\pi i n\tau}$$

entsprechenden Dirichletreihe

$$D(s, \Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, n^{-s} = \prod_{p\geqq 2} \left(1 - \frac{\tau(p)}{p^s} + \frac{p^{11}}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

die folgende Eigenschaft aufweisen: Ersetzt man in dem Ausdruck

$$p^{2s}\left(1-\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{p^{11}}{p^{2s}}\right)=p^{2s}-\tau(p)p^s+p^{11}$$

p^s durch eine komplexe Unbestimmte z, so hat das entstehende quadratische Polynom von z für keine Primzahl p eine reelle Nullstelle, es gilt also

$$(^*) \qquad |\tau(p)|<2p^{\frac{11}{2}}$$

für alle positiven Primzahlen p.

Denkt man sich eine Schar $\mathfrak{S}$ vom Teiler t und vom Charakter ε vorgelegt, die gegenüber allen Operatoren T_n mit $(n, N)=1$ abgeschlossen ist, so existiert ein wohlbestimmtes Analogon der Ramanujanschen Vermutung für jede ganze Spitzenform aus $\mathfrak{S}$, welche Eigenfunktion aller $T_n((n, N)=1)$ ist; dies betrifft natürlich nur die in der Stufe N nicht aufgehenden Primzahlen p. Im letzten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung untersuche ich nun die volle Schar $\mathfrak{C}_2^+$ der ganzen Spitzenformen von der Dimension -2 zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(8)(N=8)$. $\mathfrak{C}_2^+$ hat nach bekannten Formeln der klassischen Theorie den Rang 5. Es zeigt sich, dass $\mathfrak{C}_2^+$ in drei abgeschlossene Scharen von je einem festen Teiler und einem festen Charakter zerfällt, und dass, da nur die Teiler $t=1$ und 2 auftreten, in jeder dieser drei Scharen das Hauptachsentheorem gilt. Daher besitzt die lineare Schar der den Formen von $\mathfrak{C}_2^+$ entsprechenden Dirichletreihen eine bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmte Basis, die aus fünf reduzierten kanonischen Eulerprodukten besteht. Hinsichtlich der oben gestellten Frage gelangt man mit Hilfe besonders einfach gebauter Thetareihen zu dem Ergebnis, dass für alle diese fünf kanonischen Eulerprodukte das Analogon der Ramanujanschen Vermutung in der scharfen der Ungleichung (*) entsprechenden Gestalt zutrifft; dabei kommen alle ungeraden Primzahlen p in Betracht.

In der folgenden Darstellung müssen die Grundlagen der Heckeschen Theorie und der Metrisierung vorausgesetzt werden. Zur Einführung in die Heckesche Theorie sei auf die ersten Paragraphen von AQF verwiesen. Die in der vorliegenden Abhandlung verwendeten Bezeichnungen stimmen bis auf geringfügige Änderungen mit denen von AQF nnd K II, K III überein. Einige von ihnen sollen hier nochmals kurz zusammengestellt werden.

Es seien N, r fest gegebene natürliche Zahlen. Unter $\{N, -r\}$ verstehen wir die Gesamtheit der ganzen Modulformen zur Gruppe $\Gamma(N)$ von der Dimension $-r$ (d. h. der Modulformen von der Art $(-r, N)$ in der Terminologie von

AQF). Eine einzelne solche Modulform nennen wir kurz eine (ganze) Modulform $\{N, -r\}$. Wir schreiben bei festem N auch $\mathfrak{C}_r$ für $\{N, -r\}$ und bezeichnen mit $\mathfrak{C}_r^+ = \mathfrak{C}^+(N, -r)$ die Schar der (ganzen) Spitzenformen $\{N, -r\}$, d. h. der ganzen Formen $\{N, -r\}$, die in allen Spitzen der Gruppe $\Gamma(N)$ verschwinden. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_r$ diejenige Schar, welche aus den sämtlichen Linearkombinationen der Eisensteinreihen $\{N, -r\}$ besteht, mit $\mathfrak{E}_r(\varepsilon)$ die Teilschar der normierten Funktionen von $\mathfrak{E}_r$, die zum Charakter ε mod N gehören.

Dabei bedeutet wie üblich $\Gamma(N)$ die Hauptkongruenzgruppe der Stufe N, speziell $\Gamma(1)$ die volle Modulgruppe; unter $\mathfrak{O}_m$ hat man die Gesamtheit der Transformationen m-ter Ordnung, d. h. der Matrizen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit ganzen a, b, c, a und $ad - bc = m$ zu verstehen ($m \geqq 1$); insbesondere ist $\mathfrak{O}_1 = \Gamma(1)$.

Für jede in der oberen τ-Halbebene stetige Funktion $f(\tau)$ und jede reelle Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc > 0$ wird bei fest gegebenem ganzen $r > 0$

$$S\tau = S(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \; f \mid S = f(\tau) \mid S = f(S\tau)(c\tau + d)^{-r}$$

geschrieben. Für zwei Matrizen S_1, S_2 mit den Eigenschaften von S gilt

$$f(\tau) \mid S_1 \mid S_2 \equiv (f(\tau) \mid S_1) \mid S_2 = f(\tau) \mid (S_1 S_2).$$

Ist Γ eine Untergruppe von endlichem Index in $\Gamma(1)$, und sind $f(\tau)$, $g(\tau)$ zwei ganze Modulformen zu Γ von der ganzzahligen Dimension $-r$, so wird ihr Skalarprodukt mit

$$(f, g) = (f, g; \Gamma) = (f(\tau), g(\tau)) = (f(\tau), g(\tau); \Gamma)$$

bezeichnet. Damit (f, g) existiere, ist notwendig und hinreichend, dass fg in allen Spitzen von Γ verschwindet. Unter dieser Einschränkung induziert (f, g) eine positiv-definite, beiderseits distributive Hermitesche Metrik. Wir schreiben (f, g) unter Fortlassung des Zeichens Γ nur dann, wenn Γ mit der Gruppe $\Gamma(N)$ für das gegebene N zusammenfällt.

Es sei $\Gamma = \Gamma(N)$. Die Modulformen f und $g < \{N, -r\}$ heissen zu einander orthogonal oder aufeinander senkrecht, wenn (f, g) existiert und verschwindet. Sind $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ zwei Mengen von Modulformen $\{N, -r\}$ derart, dass (f_1, f_2) für jedes Paar $f_1 < \mathfrak{M}_1$, $f_2 < \mathfrak{M}_2$ existiert und verschwindet, so heissen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zueinander orthogonal oder aufeinander senkrecht. Es sei $\mathfrak{S}$ eine beliebig vorgegebene Schar in $\mathfrak{C}_r$, $\mathfrak{S}'$ eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene Schar, $\mathfrak{N}$ die Schar der sämtlichen auf $\mathfrak{S}'$

senkrechten Formen aus $\mathfrak{S}$. Dann heisst $\mathfrak{N}$ die Normalschar von $\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{S}$. (Oben wurde $\mathfrak{N}$ einmal als Orthogonalschar bezeichnet.)

Wir bezeichnen die der Modulform $f < \{N, -r\}$ entsprechende Dirichletreihe mit $D(s, f)$. Dieser Zusammenhang wird durch die Formeln

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \frac{\tau}{N}}, \qquad D(s, f) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s}$$

beschrieben. — Die im folgenden auftretenden, mit t oder t' bezeichneten Teiler von N werden stillschweigend stets als positiv vorausgesetzt. Demgemäss durchläuft in $\sum_{t/N}$ der Summationsbuchstabe t die sämtlichen positiven Teiler von N.

2. Wir werden uns im Laufe der Untersuchung einiger Sätze bedienen, die als unmittelbare Erweiterungen gewisser Aussagen von K II aufzufassen sind (K II, Hilfssatz 4, 5 und Satz 9). Während von den zwei in jenen Aussagen auftretenden Modulformen angenommen wurde, dass sie beide in allen Spitzen der $\Gamma(N)$ verschwinden, wird nunmehr eingeräumt, dass nur eine von ihnen in allen Spitzen verschwindet. Die Beweise der folgenden Sätze 1, 2 lassen sich ungeändert von K II auf den vorliegenden Fall übertragen und sollen deshalb nicht reproduziert werden. Hingegen gestattet der Beweis von Satz 3 für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung eine merkliche Vereinfachung, weshalb er kurz dargestellt wird.

In den folgenden Sätzen 1, 2, 3 bedeuten $f(\tau)$ und $g(\tau)$ ganze Modulformen $\{N, -r\}$, von denen mindestens eine in allen Spitzen der $\Gamma(N)$ verschwindet.

Satz 1. *Für irgend ein natürliches m und irgend ein $S < \mathfrak{O}_m$ gilt*

$$(f \mid S, g;\, \Gamma(m N)) = (f, g \mid m S^{-1};\, \Gamma(m N)) \qquad (S < \mathfrak{O}_m);$$

insbesondere ist (mit $m = 1$ und $g \mid S$ anstelle von g)

$$(f \mid S, g \mid S;\, \Gamma(N)) = (f, g;\, \Gamma(N)) \qquad (S < \Gamma(1)).$$

Satz 2. *Wenn f und g zum gleichen Teiler t von N und zum gleichen Charakter ε* mod *N gehören, gilt*

$$(f \mid T_n, g;\, \Gamma(N)) = \varepsilon(n)(f, g \mid T_n;\, \Gamma(N))$$

für jedes natürliche n mit $(n, N) = 1$.

Satz 3. *Für ein* $S < \Gamma(1)$ *gelte* $f \mid S = \varrho f, g \mid S = \sigma g$ *mit konstanten* ϱ, σ. *Dann folgt aus* $\varrho \bar{\sigma} \neq 1$, *dass* (f, g) *verschwindet. Gehören* f *und* g *zu verschiedenen Teilern oder verschiedenen Charakteren, so verschwindet* (f, g). *Gehören* f *und* g *zum gleichen Teiler* t *und zum gleichen Charakter* ε, *und ist* $f \mid T_n = \varrho_n f, g \mid T_n = \sigma_n g$ *mit konstanten* ϱ_n, σ_n *für ein* n *mit* $(n, N) = 1$, *so folgt aus* $\varrho_n \neq \sigma_n$, *dass* (f, g) *verschwindet.*

Beweis: Die erste Behauptung sowie die Orthogonalität von f und g, wenn diese zu verschiedenen Charakteren gehören, folgt aus der zweiten Formel von Satz 1. Wenn ferner die Modulformen f und g zu verschiedenen Teilern t bzw. t' von N gehören, so sind sie Summen von Eigenfunktionen des Operators $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit primitiven Einheitswurzeln der Ordnungen $\frac{N}{t}$ bezw. $\frac{N}{t'}$ als Eigenwerten und stehen deshalb aufeinander senkrecht. Zum Beweise der letzten Behauptung bilde man nach der Formel von Satz 2

$$\varrho_n (f, g) = (f \mid T_n, g) = \varepsilon(n) (f, g \mid T_n) = \varepsilon(n) \bar{\sigma}_n (f, g).$$

Es verschwinde etwa g in allen Spitzen von $\Gamma(N)$, aber nicht identisch. Dann folgt aus der letzten Gleichung mit g anstelle von f, dass $\sigma_n = \varepsilon(n) \bar{\sigma}_n$ zutrifft, und damit die dritte Behauptung des Satzes 3.

Jede Modulform $f(\tau) < \{N, -r\}$ lässt sich auf eine und nur eine Weise gemäss

$$f(\tau) = \sum_{t/N} \hat{f}_t(\tau)$$

in Komponenten $\hat{f}_t(\tau)$ zerlegen, deren einzelne zur Schar $\{N, -r\}$ und zum Teiler t gehört; wenn f in allen Spitzen verschwindet, so verschwindet jedes $\hat{f}_t$ in allen Spitzen. Unter den obigen Voraussetzungen über f und g gilt nach Satz 3

$$(f, g) = \sum_{t/N} (\hat{f}_t, \hat{g}_t). \tag{2}$$

Wir reproduzieren sodann der Vollständigkeit halber den Beweis der folgenden Aussage:

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{S}$ *irgend eine lineare Schar in* $\mathfrak{C}_r$, $\mathfrak{S}^+$ *der Durchschnitt von* $\mathfrak{S}$ *mit* $\mathfrak{C}_r^+$, $\mathfrak{N}$ *die Normalschar von* $\mathfrak{S}^+$ *in* $\mathfrak{S}$. *Dann ist* $\mathfrak{S}$ *die direkte Summe von* $\mathfrak{S}^+$ *und* $\mathfrak{N}$.

Beweis: Man ergänze eine Basis $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ von $\mathfrak{S}^+$ durch Hinzunahme der $\varkappa$ Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ zu einer Basis von $\mathfrak{S}$ und bilde

$$g_j = f_j - \sum_{\nu=1}^{\mu} \xi_{j\nu}\, \varphi_\nu$$

mit konstanten $\xi_{j\nu}$ und $(g_j, \varphi_k) = 0$ $(1 \leqq j \leqq \varkappa,\ 1 \leqq k \leqq \mu)$. Die Relationen $(g_j, \varphi_k) = 0$ besagen $\sum_{\nu=1}^{\mu} \xi_{j\nu} (\varphi_\nu, \varphi_k) = (f_j, \varphi_k)$; sie lassen sich wegen des Nicht-Verschwindens der Determinante $|(\varphi_j, \varphi_k)|$ $(j, k = 1, 2, \ldots, \mu)$ durch Wahl der $\xi_{j\nu}$ auf eine und nur eine Weise befriedigen. Geschieht dies, so bilden die $\mu + \varkappa$ Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ eine Basis von $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{N}$ wird von den $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ aufgespannt. Daraus folgt die Behauptung.

Wir nennen eine lineare Schar $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{C}_r$ abgeschlossen gegenüber einem linearen Operator V, wenn $f \mid V$ für jedes $f < \mathfrak{S}$ ebenfalls in $\mathfrak{S}$ liegt. Wir sagen ferner, die Schar $\mathfrak{S}$ gehöre zum Teiler t, wenn alle ihre Funktionen zum Teiler t gehören, $\mathfrak{S}$ gehöre zum Charakter ε, wenn alle ihre Funktionen zum Charakter ε gehören. $\mathfrak{S}$ heisst (schlechthin) abgeschlossen, wenn $\mathfrak{S}$ zu einem Teiler t von N und zu einem Charakter ε mod N gehört, und wenn überdies $f \mid T_m^t$ für alle f aus $\mathfrak{S}$ und alle natürlichen m in $\mathfrak{S}$ liegt.

In den folgenden beiden Sätzen haben $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^+$ und $\mathfrak{N}$ die Bedeutung von Satz 4.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{S}$ abgeschlossen gegenüber einem einzelnen Operator R_n $((n, N) = 1)$. Dann gilt das gleiche von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}^+$.*

Beweis: Für $\mathfrak{S}^+$ folgt die Behauptung unmittelbar aus den Voraussetzungen. Die Schar $\mathfrak{S}^+ \mid R_n$ der Funktionen $\varphi \mid R_n$ mit $\varphi < \mathfrak{S}^+$ ist in $\mathfrak{S}^+$ enthalten und hat den gleichen Rang μ wie $\mathfrak{S}^+$, stimmt daher mit $\mathfrak{S}^+$ überein. Für jede Funktion $g < \mathfrak{N}$ gilt $g \mid R_n < \mathfrak{S}$; um zu beweisen, dass $g \mid R_n$ auf $\mathfrak{S}^+$ senkrecht steht, schreiben wir die allgemeine Modulform aus $\mathfrak{S}^+$ in der Gestalt $\varphi \mid R_n$ $(\varphi < \mathfrak{S}^+)$ und erhalten nach Satz 1

$$(g \mid R_n,\ \varphi \mid R_n) = (g, \varphi) = 0,$$

$g \mid R_n$ senkrecht auf $\mathfrak{S}^+$, q. e. d.

Dieser Satz hat für das folgende nur grundsätzliche Bedeutung.

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{S}$ vom Teiler t, vom Charakter ε und abgeschlossen gegenüber einem einzelnen Operator T_n mit $(n, N) = 1$. Dann gilt das gleiche von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}^+$.*

Beweis: Für $\mathfrak{S}^+$ folgt die Behauptung unmittelbar aus den Voraussetzungen. Es sei $g < \mathfrak{N}$, $g \,|\, T_n = g_1 + \varphi_1 (g_1 < \mathfrak{N}, \varphi_1 < \mathfrak{S}^+)$. Nach Satz 2 ergibt sich

$$(\varphi_1, \varphi_1) = (g_1 + \varphi_1, \varphi_1) = (g \,|\, T_n, \varphi_1) = \varepsilon(n)(g, \varphi_1 \,|\, T_n) = 0,$$

weil $\varphi_1 \,|\, T_n < \mathfrak{S}^+$, $g < \mathfrak{N}$; die letzte Gleichung besagt $g \,|\, T_n = g_1 < \mathfrak{N}$ für jedes $g < \mathfrak{N}$. —

Im folgenden setzen wir voraus, dass $\mathfrak{S}$ zu einem Teiler t von N sowie zu einem Charakter ε mod N gehört und überdies allen Operatoren $T_n ((n, N) = 1)$ gegenüber abgeschlossen ist. Nach Satz 6 gilt dann das gleiche von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}^+$. Ferner besitzt $\mathfrak{S}^+$ nach K II, Satz 5 eine normierte Orthogonalbasis, die aus lauter Eigenfunktionen der sämtlichen Operatoren T_n mit $(n, N) = 1$ besteht. Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass auch $\mathfrak{N}$ eine Basis besitzt, die aus lauter Eigenfunktionen aller dieser Operatoren T_n besteht.

In der vollen Schar $\mathfrak{C}_r$ ist $\mathfrak{E}_r$ die Normalschar von $\mathfrak{C}_r^+$ und daher $\mathfrak{C}_r$ die direkte Summe von $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{C}_r^+$.[1] Auf Grund dieser Tatsache beweisen wir den folgenden vorbereitenden

Satz 7. *Es sei* $f < \mathfrak{C}_r$, $f = E + \varphi$, $E < \mathfrak{E}_r$, $\varphi < \mathfrak{C}_r^+$.

a. *Gehört* f *zum Teiler* t_0 *von* N, *so gilt das gleiche von* E *und* φ.

b. *Ist* $f \,|\, R_n = \lambda_n f$ *für ein* n *mit* $(n, N) = 1$ *und ein konstantes* λ_n, *so gilt*

$$E \,|\, R_n = \lambda_n E, \quad \varphi \,|\, R_n = \lambda_n \varphi.$$

c. *Gehört* f *zum Teiler* t *von* N, *zum Charakter* ε mod N, *und ist* $f \,|\, T_n = \varrho_n f$ *für ein* n *mit* $(n, N) = 1$ *und ein konstantes* ϱ_n, *so gilt*

$$E \,|\, T_n = \varrho_n E, \quad \varphi \,|\, T_n = \varrho_n \varphi.$$

Beweis: Ad a. Wir setzen im Sinne der bei (2) verwendeten Zerlegung $\varphi = \sum_{t/N} \hat{\varphi}_t$ und erhalten nach Satz 3 für $t' \,|\, N$, $t' \neq t_0$:

$$0 = (f, \hat{\varphi}_{t'}) = (\varphi, \hat{\varphi}_{t'}) = (\hat{\varphi}_{t'}, \hat{\varphi}_{t'}).$$

Daraus folgt $\varphi = \hat{\varphi}_{t_0}$, $E = f - \hat{\varphi}_{t_0}$ und damit die Behauptung a.

---

[1] H. Petersson, Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen, Math. Annalen 117 (1940); der dort dargestellte Beweis lässt sich für $r > 2$, wofern lediglich die Eisensteinreihen in Betracht gezogen werden, erheblich vereinfachen, und auch für $r = 2$ ist durch die Beschränkung auf Eisensteinreihen noch eine gewisse Vereinfachung möglich. Zum Falle $r = 1$ s. H. Petersson, Über die systematische Bedeutung der Eisensteinschen Reihen, im Druck bei den Abhandl. Math. Seminar Hamburg.

Ad b. $E|R_n + \varphi|R_n = \lambda_n E + \lambda_n \varphi$ gibt die Behauptung b., weil $E|R_n$ nach dem Beweise von Satz 5 auf $\mathfrak{E}_r^+$ senkrecht steht.

Ad c. Analog zu dem Beweise von b. und dem Beweise von Satz 6. —

Es bezeichne $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ eine Basis von $\mathfrak{R}$. Wir setzen

(3) $$g_j = F_j + \psi_j \qquad (F_j < \mathfrak{E}_r,\ \psi_j < \mathfrak{E}_r^+,\ 1 \leqq j \leqq \varkappa),$$

bemerken, dass i. a. weder F_j noch ψ_j der Schar $\mathfrak{S}$ angehört und erkennen zunächst, dass die $F_j (1 \leqq j \leqq \varkappa)$ linear unabhängig sind. Denn aus einer linearen Relation

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_j F_j = 0 \ (\lambda_j \text{ konstant}) \text{ folgt } \sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_j g_j = \sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_j \psi_j < \mathfrak{E}_r^+$$

und daraus weiter, dass $\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_j g_j$ sowohl in $\mathfrak{R}$ als auch in $\mathfrak{S}^+$ liegt, also identisch verschwindet. Dies gibt $\lambda_j = 0 (1 \leqq j \leqq \varkappa)$. — Nach Satz 7 gehören alle F_j aud alle ψ_j zum Teiler t und zum Charakter ε.

Nach $\mathrm{T_n}$ II, Satz 44 wird die Schar der Dirichletreihen $D(s, E) (E < \mathfrak{E}_r)$ von den in ihr enthaltenen Funktionen

(4) $$M(s; t', t''; \chi', \chi'') = (t' t'')^{-s} L(s, \chi') L(s - r + 1, \chi'')$$

aufgespannt; dabei sind t', t'' positive Teiler von N, χ', χ'' Restcharaktere mod $\frac{N}{t'}$ bzw. mod $\frac{N}{t''}$, es gilt

$$\chi'(-1)\chi''(-1) = (-1)^r, \quad L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) m^{-s} \qquad (\chi = \chi' \text{ oder } \chi''),$$

und für $r = 2$ darf nicht gleichzeitig $t'' = N$ und χ' der Hauptcharakter mod $\frac{N}{t'}$ sein. Wir bezeichnen mit $P(\tau; t', t''; \chi', \chi'')$ diejenige Linearkombination der Eisensteinreihen, welche $M(s; t', t''; \chi', \chi'')$ vermöge

(4 a) $$M(s; t', t''; \chi', \chi'') = D(s; P(\tau; t', t''; \chi', \chi'')) \qquad (P(\tau; t', t''; \chi', \chi'') < \mathfrak{E}_r)$$

entspricht; $P(\tau; t', t''; \chi', \chi'')$ ist stets normiert und gehört zum Charakter $\chi' \chi''$ mod N,

$$P(\tau; t', t''; \chi', \chi'') < \mathfrak{E}_r(\varepsilon)$$

besagt also

$$\chi'(n)\chi''(n) = \varepsilon(n) \qquad ((n, N) = 1).$$

Wir bestimmen eine Basis von $\mathfrak{E}_r(\varepsilon)$ in Gestalt der Funktionen

$$P_k(\tau) = P(\tau; t_k, t_k'; \chi_k, \chi_k') \qquad (1 \leqq k \leqq b)$$

und bilden aus den Funktionen $F_j(\tau)$, $P_k(\tau)$ die Vektoren

$$\mathfrak{F}(\tau) = \{F_1(\tau), F_2(\tau), \ldots, F_\varkappa(\tau)\}, \quad \mathfrak{P}(\tau) = \{P_1(\tau), P_2(\tau), \ldots, P_b(\tau)\}$$

die wir bei der rechnerischen Verknüpfung nach dem Matrizenkalkül als Spalten behandeln werden: Es gilt zunächst wegen $F_j < \mathfrak{E}_r(\varepsilon)$:

$$(5) \qquad \mathfrak{F}(\tau) = \mathrm{A}\,\mathfrak{P}(\tau) \text{ mit } \mathrm{A} = (\alpha_{jk}) \qquad (1 \leqq j \leqq \varkappa,\ 1 \leqq k \leqq b;\ \alpha_{jk} \text{ konstant}).$$

Da $\mathfrak{R}$ gegenüber den sämtlichen Operatoren $T_n((n, N) = 1)$ abgeschlossen ist, gilt ferner mit passenden konstanten $\lambda_{j\nu}(n)$:

$$g_j \,|\, T_n = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \lambda_{j\nu}(n)\, g_\nu \qquad (1 \leqq j \leqq \varkappa,\ (n, N) = 1),$$

und daraus folgt, weil $F_j \,|\, T_n$ wieder der Schar $\mathfrak{E}_r(\varepsilon)$, $\psi_j \,|\, T_n$ wieder der Schar $\mathfrak{E}_r^+$ angehört:

$$(6) \qquad F_j \,|\, T_n = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \lambda_{j\nu}(n)\, F_\nu, \quad \psi_j \,|\, T_n = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \lambda_{j\nu}(n)\, \psi_\nu \qquad (1 \leqq j \leqq \varkappa,\ (n, N) = 1).$$

Andrerseits sind alle $P_k(\tau)\,(1 \leqq k \leqq b)$ Eigenfunktionen der Operatoren $R_n, T_n((n, N) = 1)$, es wird also

$$(7) \quad P_k \,|\, T_n = \mu_k(n)\, P_k, \quad \mathfrak{P} \,|\, T_n = M(n)\, \mathfrak{P}, \quad M(n) = (\delta_{ik}\, \mu_k(n)) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, b).$$

Indem wir noch $\varLambda(n) = (\lambda_{jl}(n))\ (j, l = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ setzen, erhalten wir nach (5), (6), (7)

$$\mathfrak{F} \,|\, T_n = \varLambda(n)\, \mathrm{A}\, \mathfrak{P} = \mathrm{A}\, M(n)\, \mathfrak{P}, \quad \varLambda(n)\, \mathrm{A} = \mathrm{A}\, M(n),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\varkappa} \lambda_{j\nu}(n)\, \alpha_{\nu k} = \alpha_{jk}\, \mu_k(n) \qquad (1 \leqq j \leqq \varkappa,\ 1 \leqq k \leqq b,\ (n, N) = 1).$$

Bezeichnet schliesslich $\mathfrak{a}_k$ den k-ten Spaltenvektor von $\mathrm{A}\,(1 \leqq k \leqq b)$, so gibt die letzte Gleichung:

$$(8) \qquad \varLambda(n)\, \mathfrak{a}_k = \mu_k(n)\, \mathfrak{a}_k \qquad (1 \leqq k \leqq b,\ (n, N) = 1).$$

Nun sind die sämtlichen $\varkappa$ Zeilen von A linear unabhängig, daher befinden sich unter den $\mathfrak{a}_k\,(1 \leqq k \leqq b)$ $\varkappa$ linear unabhängige Vektoren, jedes $\varLambda(n)$ besitzt mithin $\varkappa$ linear unabhängige Eigenvektoren und lässt sich daher auf Diagonalgestalt transformieren. Hieraus folgt nach bekannten Sätzen der linearen Algebra, dass sich alle Matrizen $\varLambda(n)((n, N) = 1)$ simultan (d. h. mit Hilfe einer und derselben Matrix) auf Diagonalgestalt transformieren lassen. Es gibt demgemäss eine Basis $E_1(\tau), E_2(\tau), \ldots, E_\varkappa(\tau)$ der von den $F_j(\tau)$ aufgespannten linearen Schar $(1 \leqq j \leqq \varkappa)$ derart, dass

$$E_j(\tau) \mid T_n = \varrho_j(n) E_j(\tau) \tag{9}$$

mit konstanten $\varrho_j(n)$ für $1 \leqq j \leqq \varkappa, (n, N) = 1$ zutrifft, und nun lehrt die Anwendung der Gleichung (8) auf die Diagonalmatrix $(\varrho_j(n)\delta_{jl})$, dass jedes $\varrho_j(n)$ $(1 \leqq j \leqq \varkappa)$ für alle n mit $(n, N) = 1$ mit einem $\mu_k(n)$ $(k = k(j)$ von n unabhängig, $1 \leqq k \leqq b)$ übereinstimmen muss, wobei alle $k(j)$ von einander verschieden sind. Durch eine auf die Funktionen $P_k(\tau)$ nachträglich auszuübende Permutation lässt sich erreichen, dass die Gleichungen

$$\varrho_j(n) = \mu_j(n)$$

für alle j, n mit $1 \leqq j \leqq \varkappa, (n, N) = 1$ erfüllt sind.

Wir formulieren das Ergebnis zusammenfassend unter Benutzung der Bezeichnungen (4), (4 a) in dem folgenden

Satz 8. *Es sei $\mathfrak{S}$ eine in $\mathfrak{C}_r$ enthaltene lineare Schar vom Teiler t und vom Charakter ε, und es sei $\mathfrak{S}$ abgeschlossen gegenüber allen Operatoren T_n mit $(n, N) = 1$. Dann gilt das gleiche von den in Satz 4 erklärten Scharen $\mathfrak{S}^+$ und $\mathfrak{N}$. Sowohl $\mathfrak{S}^+$ als auch $\mathfrak{N}$ besitzt eine Basis, die aus lauter Eigenfunktionen aller Operatoren $T_n((n, N)) = 1)$ besteht. Bezeichnet $h_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq \varkappa)$ eine geeignet gewählte solche Basis von $\mathfrak{N}$, $P_k(\tau) = P(\tau;\, t_k, t'_k;\, \chi_k, \chi'_k)$ $(1 \leqq k \leqq b)$ eine passend geordnete Basis der Schar $\mathfrak{C}_r(\varepsilon)$, so nehmen die Funktionen $h_j(\tau)$ und $P_j(\tau)$ bei Anwendung eines jeden T_n mit $(n, N) = 1$ den gleichen Eigenwert $\mu_j(n)$ als Faktor auf $(1 \leqq j \leqq \varkappa)$.*

Hiernach lässt sich von der $h_j(\tau)$ entsprechenden Dirichletreihe $D(s, h_j)$ das gleiche reduzierte kanonische Eulerprodukt abspalten, wie von $D(s, P_j)$. Wir erhalten daher

Satz 9. *Die $h_j(\tau)$ entsprechende Dirichletreihe gestattet die Darstellung*

$$\begin{aligned} D(s, h_j) &= t^{-s} K(s, h_j) \prod_{(p, N)=1} \left(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi'_j(p)\, p^{r-1}}{p^s}\right)^{-1} \\ &= t^{-s} K(s, h_j) \prod_{(p, N)=1} \left(1 - \frac{\mu_j(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p)\, p^{r-1}}{p^{2s}}\right)^{-1}; \end{aligned}$$

hier ist $\mu_j(p) = \chi_j(p) + \bar{\chi}_j(p)\,\varepsilon(p)\, p^{r-1}$ und $K(s, h_j)$, der »Kern« von $D(s, h_j)$ eine Dirichletreihe der Gestalt

$$K(s, h_j) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{jm} m^{-s},$$

in der b_{jm} verschwindet, wenn m durch andere als diejenigen Primzahlen teilbar ist, welche in t, nicht aber in $t_1 = \frac{N}{t}$ aufgehen.

Bezüglich der entsprechenden Sätze über die Basisformen von $\mathfrak{S}^+$, welche Eigenfunktionen aller T_n mit $(n, N) = 1$ sind, vgl. K II, Satz 5, 6.

3. Es sei $\mathfrak{S}$ wie in Satz 8 eine in $\mathfrak{C}_r$ enthaltene lineare Schar vom Teiler t und vom Charakter ε, die gegenüber allen Operatoren T_n mit $(n, N) = 1$ abgeschlossen ist. Wir verstehen unter $h_j(\tau)\,(1 \leqq j \leqq \varkappa)$ die oben konstruierte Basis von $\mathfrak{R}$, für die also

$$h_j(\tau) = E_j(\tau) + \sigma_j(\tau), \quad E_j(\tau) < \mathfrak{E}_r(\varepsilon), \quad \sigma_j(\tau) < \mathfrak{C}_r^+ \qquad (1 \leqq j \leqq \varkappa) \tag{10}$$

und nach (6), (9)

$$E_j = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \eta_{j\nu} F_\nu, \quad \sigma_j = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \eta_{j\nu} \psi_\nu, \quad E_j \,|\, T_n = \mu_j(n) E_j, \quad \sigma_j \,|\, T_n = \mu_j(n) \sigma_j \tag{11}$$

mit konstanten $\eta_{j\nu}$ zutrifft, wenn $1 \leqq j \leqq \varkappa$, $(n, N) = 1$. Ferner bezeichne $v_i(\tau)$ $(1 \leqq i \leqq \mu)$ eine aus lauter Eigenfunktionen aller $T_n((n, N) = 1)$ bestehende normierte Orthogonalbasis der Schar $\mathfrak{S}^+$.

Wir nennen im folgenden zwei Funktionen f und g aus $\mathfrak{S}$ einander äquivalent, in Zeichen $f \sim g$, wenn sie beide Eigenfunktionen aller T_n mit $(n, N) = 1$ sind, und wenn für jedes solche n der Eigenwert von f bei Anwendung von T_n mit dem Eigenwert von g bei Anwendung von T_n übereinstimmt. Für die Funktion Null können alle komplexen Zahlen als Eigenwerte auftreten, sie ist also zu jeder Eigenfunktion aller $T_n((n, N) = 1)$ äquivalent. Dass f überhaupt Eigenfunktion aller dieser T_n sei, kann daher auch durch $f \sim 0$ ausgedrückt werden. Wir bezeichnen ferner die Gesamtheit der zu einer nicht identisch verschwindenden Eigenfunktion f aller $T_n((n, N) = 1)$ äquivalenten Funktionen von $\mathfrak{S}$ als eine Klasse und zwar als die Klasse von f. Offenbar bilden die Funktionen einer Klasse stets eine lineare Schar.

Wir denken uns die von den Funktionen v_i, $h_j(1 \leqq i \leqq \mu,\ 1 \leqq j \leqq \varkappa)$ gebildete Basis von $\mathfrak{S}$ in maximale Systeme untereinander äquivalenter Funktionen zerlegt. Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_d$ diese Systeme, es sei c_h die Anzahl der in $\mathfrak{A}_h$

zusammengefassten Basisfunktionen, mithin auch $\sum_{h=1}^{d} c_h = \mu + \varkappa$, und es sei $\mathfrak{L}_h$ die von den Funktionen von $\mathfrak{A}_h$ aufgespannte lineare Schar. Dann gilt der erste Hauptsatz der vorliegenden Theorie in Gestalt der folgenden Aussage:

Satz 10. *Jede der d Scharen $\mathfrak{L}_h (1 \leqq h \leqq d)$ ist eine Klasse. Es gibt in $\mathfrak{S}$ keine anderen Klassen als diese $\mathfrak{L}_h$, jede Eigenfunktion aller $T_n((n, N) = 1)$ gehört also einer und, wenn sie nicht identisch verschwindet, nur einer dieser Klassen $\mathfrak{L}_h$ an. $\mathfrak{S}$ ist direkte Summe der $\mathfrak{L}_h (1 \leqq h \leqq d)$, jede Funktion von $\mathfrak{S}$ lässt sich dementsprechend auf eine und nur eine Weise in der Gestalt*

$$f(\tau) = \sum_{h=1}^{d} H_h(\tau), \quad H_h(\tau) < \mathfrak{L}_h$$

darstellen.

Zum Beweise genügt es offenbar, zu zeigen, dass eine Eigenfunktion $f \not\equiv 0$ aller $T_n((n, N) = 1)$ genau einer der Scharen $\mathfrak{L}_h (1 \leqq h \leqq d)$ angehört. Wir bilden die Zerlegung

$$f = g + \varphi \qquad (g < \mathfrak{N},\ \varphi < \mathfrak{S}^+). \tag{12}$$

Aus $f \mid T_n = \lambda(n) f$ ($\lambda(n)$ konstant, $(n, N) = 1$) folgt nach Satz 4 und Satz 6

$$\varphi \mid T_n = \lambda(n)\varphi, \quad g \mid T_n = \lambda(n) g \qquad ((n, N) = 1). \tag{13}$$

Wir setzen $\varphi = \sum_{i=1}^{\mu} \xi_i v_i$ (ξ_i konstant) und erhalten aus der ersten Gleichung (13), wenn

$$v_i \mid T_n = \omega_i(n) v_i \qquad (1 \leqq i \leqq \mu,\ (n, N) = 1)$$

geschrieben wird:

$$\sum_{i=1}^{\mu} \xi_i \omega_i(n) v_i = \sum_{i=1}^{\mu} \xi_i \lambda(n) v_i \qquad ((n, N) = 1).$$

Wenn also φ nicht identisch verschwindet, gilt einerseits $\lambda(n) = \omega_i(n)$ für gewisse der $i = 1, 2, \ldots, \mu$ und alle n mit $(n, N) = 1$; andrerseits verschwindet ξ_i für die anderen $i = 1, 2, \ldots, \mu$, d. h. für diejenigen i, welche $\lambda(n) = \omega_i(n)$ nicht für alle n mit $(n, N) = 1$ erfüllen. Daher liegt φ stets (auch $\varphi \equiv 0$) in einer und, wenn $\varphi \not\equiv 0$ zutrifft, genau einer der Scharen $\mathfrak{L}_h$.

Durch dieselbe Überlegung findet man, dass die Funktion g, wenn sie nicht identisch verschwindet, genau einer der Scharen $\mathfrak{L}_h (1 \leqq h \leqq d)$ angehört, und zwar derjenigen, deren Funktionen bei Anwendung jedes $T_n((n, N) = 1)$ den

Eigenwert $\lambda(n)$ als Faktor aufnehmen. Die Behauptung folgt dann daraus, dass die beiden hier genannten Scharen $\mathfrak{L}_h$ (also die zugehörigen h) übereinstimmen müssen, wenn weder g noch φ identisch verschwindet.

Der damit bewiesene erste Hauptsatz wird für $r > 1$ durch die folgende Aussage ergänzt:

Satz 11. *Es sei $r > 1$. Dann verschwinden die Funktionen $\psi_j(\tau), \sigma_j(\tau)$ aus (3), (10) identisch, jede der Basisfunktionen $h_j(\tau)$ und mit ihnen die ganze Normalschar $\mathfrak{N}$ ist in $\mathfrak{E}_r(\varepsilon)$ enthalten (d. h. $\mathfrak{N}$ besteht aus lauter normierten Linearkombinationen der Eisensteinreihen vom Charakter ε), und keine Klasse $\mathfrak{L}_h$ von $\mathfrak{S}$ enthält sowohl eine nicht identisch verschwindende ganze Spitzenform als auch eine ganze Nicht-Spitzenform (d. h. jedes der Systeme $\mathfrak{A}_h$ besteht entweder nur aus Basisformen v_i von $\mathfrak{S}^+$ oder nur aus Basisformen h_j von $\mathfrak{N}$).*

Beweis: Nach dem Beweise von Satz 8 ist jede der Funktionen $\sigma_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq \varkappa)$ eine ganze Spitzenform vom Teiler t und vom Charakter ε, die für alle n mit $(n, N) = 1$ den Relationen $\sigma_j \,|\, T_n = \mu_j(n)\sigma_j$ genügt. Zum Beweise von Satz 11 reicht es offenbar hin, zu zeigen, dass eine ganze Spitzenform w zum Teiler t und zum Charakter ε, die den Relationen $w \,|\, T_n = \mu_j(n)\, w$ für alle n mit $(n, N) = 1$ und ein festes von n unabhängiges der $j = 1, 2, \ldots, \varkappa$ genügt, identisch verschwinden muss. — Es sei

$$w(\tau) = \sum_{\substack{m=1\\(m,t_1)=1}}^{\infty} a_m\, e^{2\pi i \frac{m\tau}{t_1}} \qquad \left(t_1 = \frac{N}{t}\right)$$

die Fourierentwicklung von w. Für ein festes $m = m_0$ mit $(m_0, t_1) = 1$ und eine Primzahl p, die in $m_0 N$ nicht aufgeht, ergibt sich nach $\mathrm{T_n}$ II, (16)

$$(14) \qquad a_{m_0 p} = \mu_j(p)\, a_{m_0} = (\chi_j(p) + \varepsilon(p)\bar{\chi}_j(p)p^{r-1})\, a_{m_0}.$$

Hier lassen wir p über alle Grenzen wachsen und bedienen uns der allgemein gültigen Abschätzung[1]

$$(15) \qquad |a_m| \leqq C\cdot(m\,t)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{5}} \quad (C > 0 \text{ eine nur von } w \text{ abhängige Konstante}).$$

Sie liefert nach (14)

$$(16) \qquad |a_{m_0}|\, p^{r-1} = |a_{m_0 p} - \chi_j(p)\, a_{m_0}| \leqq C(m_0\, t\, p)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{5}} + |a_{m_0}|$$

[1] R. A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions II: The order of the Fourier coefficients of integral modular forms, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 35, Part 3 (1939).

und daher, wenn $r > 1$ berücksichtigt wird: $a_{m_0} = 0$ für jedes m_0 mit $(m_0, t_1) = 1$. Damit ist Satz 11 bewiesen.

Im Hinblick auf T_n I, Satz 25 formulieren wir den folgenden Spezialfall gesondert:

Satz 11 a. *Die lineare Schar $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{C}_r$ gehöre zum Teiler t, zum Charakter ε und sei gegenüber allen Operatoren T_n mit $(n, N) = 1$ abgeschlossen. $\mathfrak{S}$ enthalte keine ganze Spitzenform ausser Null, und es gelte $r > 1$. Dann besteht $\mathfrak{S}$ aus lauter Linearkombinationen der Eisensteinreihen $\{N, -r\}$.*

Zum Schluss dieser Untersuchungen, die sich bisher auf Invarianzeigenschaften normierter Modulformen vom gleichen Teiler und Charakter bei Anwendung der Operatoren T_n mit $(n, N) = 1$ bezogen, erörtern wir noch die Frage nach der linearen Unabhängigkeit lediglich normierter Modulformen beliebiger Charaktere, die sämtlich Eigenfunktionen aller T_n mit $(n, N) = 1$ sind. Diese Frage wird durch den grundlegenden Satz 42 in T_n II nahegelegt; nach diesem Satz hängt die Möglichkeit der Abspaltung eines reduzierten kanonischen Eulerprodukts von der Dirichletreihe einer Modulform f nur an dem Verhalten von f gegenüber den Operatoren R_n, T_n, während die Zugehörigkeit von f zu einem Teiler t von N keine Rolle spielt.

Es seien also $u_1(\tau), u_2(\tau), \ldots, u_\alpha(\tau)$ lauter nicht identisch verschwindende ganze Modulformen $\{N, -r\}$, von denen wir voraussetzen wollen, dass jede von ihnen normiert und Eigenfunktion aller T_n mit $(n, N) = 1$ sei. Genauer gelte

$$u_i \mid R_n = \varepsilon_i(n)\, u_i, \quad u_i \mid T_n = \lambda_i(n)\, u_i \qquad (\varepsilon_i(n) \text{ und } \lambda_i(n) \text{ konstant})$$
$$(1 \leqq i \leqq \alpha, (n, N) = 1),$$

und es gebe zu jedem Indexpaar $i, i' = 1, 2, \ldots, \alpha\ (i \neq i')$ ein zu N teilerfremdes n derart, dass entweder $\varepsilon_i(n) \neq \varepsilon_{i'}(n)$ oder dass $\lambda_i(n) \neq \lambda_{i'}(n)$. Dann behaupten wir

Satz 12. *Die sämtlichen α Funktionen $u_i(\tau)\,(1 \leqq i \leqq \alpha)$ sind linear unabhängig.*

Beweis: Durch eine Permutation der u_i werde erreicht, dass die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_\beta\ (1 \leqq \beta \leqq \alpha)$ ein Maximalsystem linear unabhängiger unter den sämtlichen $u_i\,(1 \leqq i \leqq \alpha)$ bilden. Im Falle $\beta < \alpha$ stelle man die $u_j\ (\beta + 1 \leqq j \leqq \alpha)$ als Linearkombinationen $u_j = \sum_{i=1}^{\beta} \xi_{ji} u_i$ der $u_i\,(1 \leqq i \leqq \beta)$ dar. Bezeichnet W_n einen der Operatoren R_n, $T_n((n, N) = 1)$ und gilt $u_i | W_n = \varrho_i(n) u_i (1 \leqq i \leqq \alpha)$, so ergibt sich, da die konstanten $\xi_{ji} (1 \leqq i \leqq \beta)$ bei gegebenem $j = \beta + 1, \beta + 2, \ldots, \alpha$ nicht sämtlich verschwinden können, aus

$$\sum_{i=1}^{\beta} \xi_{ji} \varrho_i(n) u_i = \sum_{i=1}^{\beta} \xi_{ji} \varrho_j(n) u_i \qquad (j = \beta + 1, \beta + 2, \ldots, \alpha),$$

dass $\varrho_j(n)$ mit dem Eigenwertsystem $\varrho_i(n)$ für alle $W_n((n, N) = 1)$ übereinstimmt, wo i aus $\xi_{ji} \neq 0$ unabhängig von n durch j allein bestimmt ist. Dies widerspricht den Voraussetzungen, also gilt $\beta = \alpha$, q. e. d.

Zur allgemeinen Orientierung beweisen wir noch die folgenden Sätze, die eigentlich die Grundlagen der Transformationstheorie betreffen.

Satz 13. *Es sei die Schar $\mathfrak{S} < \mathfrak{C}_r$ gegenüber allen Operatoren $R_n((n, N) = 1)$ abgeschlossen. Dann gestattet $\mathfrak{S}$ die direkte Zerlegung*

$$\mathfrak{S} = \sum_{j=1}^{a} \mathfrak{S}^{(j)} \qquad (a = \varphi(N) = \textit{Wert der Eulerschen Funktion})$$

wo $\mathfrak{S}^{(j)}$ die Gesamtheit aller in $\mathfrak{S}$ enthaltenen normierten Funktionen zu dem vorgegebenen Charakter $\varepsilon^{(j)}$ mod N darstellt $(1 \leqq j \leqq a)$.

Beweis: Dass sich jede Funktion von $\mathfrak{S}$ als Summe von Eigenfunktionen der sämtlichen Operatoren $R_n((n, N) = 1)$ darstellen lässt, dass also $\mathfrak{S}$ mit der Summe der $\mathfrak{S}^{(j)}$ übereinstimmt, ist in $\mathrm{T_n}$ II bewiesen. Es durchlaufe $\varepsilon^{(j)} (1 \leqq j \leqq a)$, wie angedeutet, die sämtlichen verschiedenen Charaktere mod N, und es sei $f_j < \mathfrak{S}^{(j)}$. Aus

$$\sum_{j=1}^{a} f_j(\tau) \equiv 0 \text{ und } f_j(\tau) < \mathfrak{S}^{(j)}$$

folgt

$$\sum_{j=1}^{a} \varepsilon^{(j)}(n) f_j(\tau) \equiv 0 \qquad ((n, N) = 1)$$

und hieraus weiter, dass alle $f_j(\tau) (1 \leqq j \leqq a)$ für jeden festen Wert von τ verschwinden müssen. Denn die Determinante

$$\mathrm{E} = |\varepsilon^{(j)}(k)| \qquad (1 \leqq j \leqq a, 0 \leqq k \leqq N - 1, (k, N) = 1)$$

genügt der Relation $\mathrm{E}\bar{\mathrm{E}} = \varphi(N)^{\varphi(N)}$, ist also von Null verschieden.

Satz 14. *Es sei $E(\tau)$ in der Schar $\mathfrak{E}_r$ enthalten. Dann gilt das gleiche von jeder Komponente $\hat{E}_t(\tau)$ in der Zerlegung $E(\tau) = \sum_{t/N} \hat{E}_t(\tau)$.*

Beweis: Es bezeichne t einen festen Teiler von N, φ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{E}_r^+$; $\varphi = \sum_{t'/N} \hat{\varphi}_{t'}$ sei ihre Zerlegung in Komponenten zu den Teilern t' von N. Aus (2) und Satz 3 folgt

$$(\hat{E}_t, \varphi) = \left(\hat{E}_t, \sum_{t'/N} \hat{\varphi}_{t'}\right) = (\hat{E}_t, \hat{\varphi}_t) = \left(\sum_{t'/N} \hat{E}_{t'}, \hat{\varphi}_t\right) = (E, \hat{\varphi}_t) = 0.$$

Satz 15. *Es sei $f(\tau) < \{N, -r\}$ Eigenfunktion aller Operatoren R_n, T_n $((n, N) = 1)$. Wenn $r > 1$ ist, so ist $f(\tau)$ entweder eine Funktion von $\mathfrak{E}_r^+$ oder eine Funktion von $\mathfrak{E}_r$.*

Beweis: Es bezeichne ε den Charakter von f. Nach $\mathrm{T_n II}$, Satz 35 ist jede Komponente $\hat{f}_t$ der Zerlegung $f = \sum_{t/N} \hat{f}_t$ eine Eigenfunktion aller R_n, T_n $((n, N) = 1)$ mit den gleichen Eigenwerten wie f. Setzt man $f = E + \varphi$ $(E < \mathfrak{E}_r, \varphi < \mathfrak{E}_r^+)$, so wird $\hat{f}_t = \hat{E}_t + \hat{\varphi}_t$, und nach den Sätzen 7, 14 sind auch $\hat{E}_t$, $\hat{\varphi}_t$ Eigenfunktionen aller R_n, T_n mit den gleichen Eigenwerten wie f. Wenn E nicht identisch verschwindet, so folgt aus den Eigenschaften der in Satz 8 genannten Basis $P_k(\tau)$ $(1 \leqq k \leqq b)$ von $\mathfrak{E}_r(\varepsilon)$, dass der Eigenwert von E bei Anwendung eines jeden $T_n((n, N) = 1)$ mit dem Eigenwert $\mu_k(n)$ einer der Basisfunktionen $P_k(\tau)$ für ein gewisses festes, von n unabhängiges k $(1 \leqq k \leqq b)$ übereinstimmt. Dies gibt nach dem Beweise von Satz 11 das identische Verschwinden aller $\hat{\varphi}_t(\tau)$ (t/N) und damit auch das von φ.

4. Die abschliessenden Sätze der vorliegenden Theorie ergeben sich nunmehr aus der Voraussetzung, dass $\mathfrak{S}$ vom Teiler t, vom Charakter ε und gegenüber allen Operatoren T_m^t $(m \geqq 1)$, also schlechthin abgeschlossen sei, durch Anwendung der Methoden von K III auf die Klassen $\mathfrak{L}_h$ $(1 \leqq h \leqq d)$. Es sei nochmals betont, dass nicht vorausgesetzt wird, dass $\mathfrak{S}$ nur ganze Spitzenformen enthalte.

Eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{S}$ in irreduzible abgeschlossene Teilscharen kann stets durch eine direkte Zerlegung der Klassen $\mathfrak{L}_h$ $(1 \leqq h \leqq d)$ in irreduzible abgeschlossene Scharen bewirkt werden. Wenn $t = 1$ ist, oder wenn jeder Primteiler von t in $t_1 = \frac{N}{t}$ aufgeht, sind alle Basisformen v_i, h_j von $\mathfrak{S}$ $(1 \leqq i \leqq \mu$,

$1 \leqq j \leqq \varkappa$) auch Eigenfunktionen aller $T_m^t (m \geqq 1)$, und $\mathfrak{S}$ ist direkte Summe eingliedriger abgeschlossener Teilscharen. Wenn es einen und nur einen Primteiler q von t gibt, der nicht in t_1 aufgeht, so gewinnt man eine Zerlegung der einzelnen Schar $\mathfrak{L}_h$ in irreduzible abgeschlossene Teilscharen wie folgt:

Man betrachte die der Basis $\mathfrak{A}_h$ von $\mathfrak{L}_h$ zugeordnete, in dieser die Transformation T_q^t vermittelnde Matrix $\varDelta_h^t(q)$, bestimme eine umkehrbare Matrix A derart dass $\mathrm{A}\, \varDelta_h^t(q)\, \mathrm{A}^{-1} = J_h$ die Jordansche Normalform aufweist und bilde die den einzelnen Diagonalzellen von J_h entsprechenden Teilvektoren der Funktionenspalte $\mathrm{A}\mathfrak{A}_h$. Dann spannen die Komponenten jedes dieser Teilvektoren eine abgeschlossene und in dem Sinne irreduzible Teilschar von $\mathfrak{L}_h$ auf, dass sich diese nicht als direkte Summe von Null verschiedener abgeschlossener Scharen darstellen lässt. Für eine Primzahlpotenzstufe $N = q^\alpha$ besteht entweder immer dieser oder der vorangehend beschriebene Sachverhalt; in den Fällen $t \leqq q^{\alpha-1}$ findet stets eine Zerlegung in eingliedrige abgeschlossene Teilscharen statt.

Wir beginnen mit der Formulierung der nach den Methoden von K III zu beweisenden Hauptsätze. Es sei $\mathfrak{S}$ abgeschlossen; wenn eine Schar $\mathfrak{S}$ zu grunde gelegt wird, die zunächst nur den Voraussetzungen von Satz 8 genügt, so ist die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{S}$ mit der aller $\mathfrak{L}_h (1 \leqq h \leqq d)$ gleichbedeutend. Es bezeichne ferner $\mathfrak{T}$ die lineare Schar der den Formen von $\mathfrak{S}$ entsprechenden Dirichletreihen, $\mathfrak{M}_h$ die lineare Schar der den Formen von $\mathfrak{L}_h$ entsprechenden Dirichletreihen $(1 \leqq h \leqq d)$. Dann gilt

Satz 16. *Es besteht die direkte Zerlegung* $\mathfrak{T} = \sum_{h=1}^{d} \mathfrak{M}_h$. *Jede der Dirichletreihen von* $\mathfrak{M}_h$ *hat die Gestalt*

$$D_h(s) = D_h(s, f_h) = t^{-s} H_h(s) \prod_{(p,N)=1} \left(1 - \frac{\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p)\, p^{r-1}}{p^{2s}}\right)^{-1} \tag{17}$$
$$(f_h < \mathfrak{L}_h,\ 1 \leqq h \leqq d).$$

In der Dirichletreihe $H_h(s) = H(s, f_h) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{hm}\, m^{-s}$ *verschwindet* b_{hm}, *wenn* m *durch andere als diejenigen Primzahlen teilbar ist, welche in* t, *aber nicht in* $t_1 = \frac{N}{t}$ *aufgehen. Zu zwei verschiedenen Indizes* $h, h' = 1, 2, \ldots, d$ *existiert stets eine Primzahl* p *mit* $(p, N) = 1$, $\omega_h(p) \neq \omega_{h'}(p)$.

Nach diesem Satze können und wollen wir uns auf die Untersuchung der einzelnen Schar $\mathfrak{L}_h$ bzw. $\mathfrak{M}_h$ beschränken. Jede dieser beiden Scharen ist zu der Schar $\mathfrak{K}_h$ der in (17) auftretenden Kerne $H_h(s) = H(s, f_h) (f_h < \mathfrak{L}_h)$ linear isomorph.

Eine grundsätzliche Aufklärung über die Natur gewisser bereits in K III verwendeten Funktionenscharen und Operatoren gewährt eine Verallgemeinerung des Satzes 19 aus AQF, die sich mit dem Beweisverfahren dieses Satzes ohne wesentliche Änderungen begründen lässt:

Es sei $F(\tau) = \sum\limits_{(m,\,t_1)=1} a_m\, e^{2\pi i \frac{m t \tau}{N}}$ eine Modulform $\{N, -r\}$ vom Teiler t und vom Charakter ε; es sei ferner t' ein positiver Teiler von t. Dann existiert ein nur von t und t' abhängiger linearer Operator $B_{t,t'}$ mit folgenden Eigenschaften:

Die Funktion

$$(18)\qquad F(\tau)\,|\,B_{t,t'} = \sum_{(m,\,t_1')=1} a_m\, e^{2\pi i \frac{m t' \tau}{N}} < \{N, -r\} \qquad \left(t_1' = \frac{N}{t'}\right)$$

gehört zum Teiler t' und zum Charakter ε.

Aus

$$(19)\qquad F(\tau) < \mathfrak{C}_r^+ \text{ folgt } F(\tau)\,|\,B_{t,t'} < \mathfrak{C}_r^+.$$

$$(20)\qquad B_{t,t'}\, T_n = T_n\, B_{t,t'}\; ((n, N) = 1,\; t' \,|\, t,\; t \,|\, N).$$

Wir führen einige Bezeichnungen ein. Es sei $\mathfrak{o}_h$ für festes $h = 1, 2, \ldots, d$ der Vektor mit den nach wachsenden n geordneten Komponenten $\omega_h(n)\;((n, N) = 1)$; es sei

$$(21)\qquad R(s, \varepsilon, \mathfrak{o}_h) = \prod_{(p,\,N)=1} \left(1 - \frac{\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p)\, p^{r-1}}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

und $K_{t,t'}$ der auf die Kerne $H_h(s)$ aus $\mathfrak{K}_h$ anzuwendende lineare Operator mit dem Effekt

$$(22)\qquad D(s, f_h\,|\,B_{t,t'}) = t'^{-s} H_h(s)\,|\,K_{t,t'} \cdot R(s, \varepsilon, \mathfrak{o}_h) \qquad (1 \leqq h \leqq d,\; t' \,|\, t,\; t \,|\, N),$$

der offenbar auch durch

$$H(s, f_h\,|\,B_{t,t'}) = H(s, f_h)\,|\,K_{t,t'} \qquad (f_h < \mathfrak{L}_h)$$

beschrieben werden kann. Wenn $q_1, q_2, \ldots, q_l$ die Primteiler von t sind, welche nicht in $t_1 = \frac{N}{t}$ aufgehen, so nennen wir $\mathfrak{N}_i$ für $1 \leqq i \leqq l$ das System der sämtlichen natürlichen Zahlen m, in denen keine von den $q_1, q_2, \ldots, q_i$ verschiedene Primzahl aufgeht, und erklären den auf $H_h(s) < \mathfrak{K}_h$ anzuwendenden Operator V_j durch

$$(23) \qquad D(s, f_h \mid T^t(q_j)) = t^{-s} H_h(s) \mid V_j \cdot R(s, \varepsilon, \mathfrak{v}_h)$$
$$(T_m^t = T^t(m), \ 1 \leqq h \leqq d, \ 1 \leqq j \leqq l).$$

Seine Wirkung kann auch durch

$$H(s, f_h \mid T^t(q_j)) = H(s, f_h) \mid V_j \qquad (f_h < \mathfrak{L}_h)$$

beschrieben werden. Nach der Definition von T_q^t in $\mathrm{T_n}$ II, (12) wird

$$(24) \qquad H_h(s) \mid V_j = \sum_{\mathfrak{N}_h} b_{h, m q_j} m^{-s} \qquad (1 \leqq h \leqq d, \ 1 \leqq j \leqq l).$$

Es bezeichne $\mathfrak{L}_h \mid B_{t,t'}$ die lineare Schar der Funktionen $f_h \mid B_{t,t'} (f_h < \mathfrak{L}_h$, $1 \leqq h \leqq d)$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{L}_h \mid B_{t,t'}$ abgeschlossen ist. Nach (18) (20) besteht $\mathfrak{L}_h \mid B_{t,t'}$ aus ganzen Modulformen $\{N, -r\}$, die sämtlich zum Teiler t' und zum Charakter ε gehören und (was auch durch (22) ausgedrückt wird) Eigenfunktionen aller $T_n ((n, N) = 1)$ mit den Eigenwerten $\omega_h(n)$ sind. Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_i$ die Primteiler von t, die nicht in $t_1' = \dfrac{N}{t'}$ aufgehen $(0 \leqq i \leqq l)$. Dann gilt zunächst

$$(f_h(\tau) \mid B_{t,t'}) \mid T^t(q_j) = 0 \qquad (1 \leqq h \leqq d, \ h \text{ fest}, \ i+1 \leqq j \leqq l).$$

$H_h(s) \mid K_{t,t'}$ geht aus $H_h(s)$ durch Tilgung derjenigen Glieder $b_{hm} m^{-s}$ hervor, deren m durch eine der Primzahlen $q_{i+1}, q_{i+2}, \ldots, q_l$ teilbar ist. Man hat also nach (24) für $1 \leqq j \leqq i$, $1 \leqq h \leqq d$ (h fest):

$$(H_h(s) \mid K_{t,t'}) \mid V_j = \sum_{\mathfrak{N}_i} b_{h, m q_j} m^{-s} = (H_h(s) \mid V_j) \mid K_{t,t'}.$$

Daraus folgt nach (22), (23) die Behauptung.

Wir bestimmen eine Kette von Teilern $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(l-1)}, t^{(l)} = t$ mit folgenden Eigenschaften:

$$t^{(1)} \mid t^{(2)}, \ t^{(2)} \mid t^{(3)}, \ldots, \ t^{(i)} \mid t^{(i+1)}, \ldots, \ t^{(l-1)} \mid t^{(l)} = t;$$

$q_1, q_2, \ldots, q_i$ sind die sämtlichen Primteiler von $t^{(i)}$, die nicht in $t_1^{(i)} = N t^{(i)-1}$ aufgehen. Wir setzen

$$\mathfrak{L}_h^{(i)} = \mathfrak{L}_h \mid B_{t, t^{(i)}} \qquad (1 \leqq h \leqq d, \ 1 \leqq i \leqq l)$$

und verstehen unter $\zeta_h^{(i)}(u)$ das Minimalpolynom der in $\mathfrak{L}_h^{(i)}$ erklärten linearen Transformation $T^{t^{(i)}}(q_i)$, unter $G_h^{(i)}$ den Grad von $\zeta_h^{(i)}(u)$. Dann gilt in der Bezeichnung

$$\zeta_h^{(i)}(u) = \prod_{\nu=1}^{g_h^{(i)}} (u - \alpha_{h,\nu}^{(i)})^{k_{h,\nu}^{(i)}} \qquad (\alpha_{h,\nu}^{(i)} \neq \alpha_{h,\nu'}^{(i)} \text{ für } \nu \neq \nu';\ 1 \leqq h \leqq d,\ 1 \leqq i \leqq l):$$

Satz 17. *In der Darstellung* (17) *von* $D(s, f_h)$ *lässt sich der Kern* $H_h(s) = H(s, f_h)$ *für jedes* $h = 1, 2, \ldots, d$ *aus den* $G_h^{(1)} G_h^{(2)} \ldots G_h^{(l)}$ *Funktionen*

$$W_h(s) = \left(1 - \frac{\alpha_{h,\nu}^{(1)}}{q_1^s}\right)^{-j_{h,\nu}^{(1)}} \left(1 - \frac{\alpha_{h,\nu}^{(2)}}{q_2^s}\right)^{-j_{h,\nu}^{(2)}} \cdots \left(1 - \frac{\alpha_{h,\nu}^{(i)}}{q_i^s}\right)^{-j_{h,\nu}^{(i)}} \cdots \left(1 - \frac{\alpha_{h,\nu}^{(l)}}{q_l^s}\right)^{-j_{h,\nu}^{(l)}}$$

linear mit konstanten Koeffizienten kombinieren. Dabei durchlaufen ν *und* $j_{h,\nu}^{(i)}$ *im* i*-ten Faktor von* $W_h(s)$ *die Werte*

$$\nu = 1, 2, \ldots, g_h^{(i)};\ j_{h,\nu}^{(i)} = 1, 2, \ldots, k_{h,\nu}^{(i)} \qquad (1 \leqq h \leqq d,\ 1 \leqq i \leqq l).$$

Wenn $\alpha_{h,\nu}^{(i)}$ *verschwindet, so ist der* i*-te Faktor von* $W_h(s)$

$$\left(1 - \frac{\alpha_{h,\nu}^{(i)}}{q_i^s}\right)^{-j_{h,\nu}^{(i)}} \text{ durch } q_i^{-(j_{h,\nu}^{(i)}-1)s} \text{ zu ersetzen.}$$

Es wird weder bewiesen, noch behauptet, dass die Funktionen $W_h(s)$ im üblichen Sinne stets eine Basis der von den Kernen $H_h(s)$ gebildeten Schar darstellen. Für $l > 1$ ist vielmehr damit zu rechnen, dass der grösste Teil dieser $W_h(s)$ der Schar $\mathfrak{K}_h$ nicht angehört. Zu der Frage, welche der Linearkombinationen der $W_h(s)$ (bei festem h) eine Basis von $\mathfrak{K}_h$ bilden, vgl. K III 2.6. Das dort dargestellte Verfahren hat allgemeine Gültigkeit. Für $l = 1$ gilt der folgende

Satz 18. *Es sei* q *die einzige Primzahl, welche in* t, *aber nicht in* $\frac{N}{t}$ *aufgeht. Dann sind die Dirichletreihen* $D_h(s)$ *von* $\mathfrak{M}_h$ *identisch mit den sämtlichen Linearkombinationen der Funktionen*

$$(25) \qquad t^{-s}\left(1 - \frac{\alpha_{h,\nu}}{q^s}\right)^{-j_{h,\nu}} \prod_{(p,N)=1} \left(1 - \frac{\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p)\,p^{r-1}}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

Hier durchläuft $\alpha_{h,\nu}$ *bei festem* $h = 1, 2, \ldots, d$ *mit* $\nu = 1, 2, \ldots, g_h$ *die sämtlichen* g_h *verschiedenen charakteristischen Wurzeln der in* $\mathfrak{L}_h$ *erklärten Transformation* T_q^t *und* $j_{h,\nu}$ *für jedes dieser* ν *die Werte* $1, 2, \ldots, k_{h,\nu}$, *wo* $k_{h,\nu}$ *die Vielfachheit der Nullstelle* $\alpha_{h,\nu}$ *des Minimalpolynoms von* T_q^t *bezüglich* $\mathfrak{L}_h$ *angibt. Dieses Minimalpolynom stimmt bis auf das Vorzeichen mit dem charakteristischen Polynom der*

Matrix $A^t(q)$ *(bezüglich der Basis* $\mathfrak{A}_h$ *der Schar* $\mathfrak{L}_h$*) überein. Im Falle* $\alpha_{h,\nu}=0$ *hat man*

$$\left(1-\frac{\alpha_{h,\nu}}{q^s}\right)^{-j_{h,\nu}} \text{ durch } q^{-(j_{h,\nu}-1)s}$$

zu ersetzen. Für $r>1$ *und bei festem* h *entsprechen die Dirichletreihen* (25) *entweder sämtlich ganzen Spitzenformen oder sämtlich Linearkombinationen der Eisensteinreihen* $\{N,\,-r\}$.

Wenn N mit einer Primzahlpotenz q^a identisch ist, so gilt für $t=q^a$ der Satz 18, für $t\leqq q^{a-1}$ das Hauptachsentheorem. Die lineare Äquivalenz der in K III verwendeten Funktionen

$$w_\nu(u,\alpha)=u^{\nu-1}(1-\alpha u)^{-\nu} \qquad (\alpha\neq 0 \text{ oder } =0,\ 1\leqq\nu\leqq k)$$

zu den hier für $\alpha\neq 0$ verwendeten $(1-\alpha u)^{-\nu}(1\leqq\nu\leqq k)$ wird mit Hilfe der binomischen Formel durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} w_\nu(u,\alpha)&=\alpha^{1-\nu}(1-(1-\alpha u))^{\nu-1}(1-\alpha u)^{-\nu} \\ (1-\alpha u)^{-\nu}&=(1-\alpha u+\alpha u)^{\nu-1}(1-\alpha u)^{-\nu} \end{aligned} \qquad (\alpha\neq 0)$$

bewirkt. Dass sich, wie eingangs behauptet wurde, jede der Funktionen

$$\Phi_h(s)=t^{-s}\,W_h(s)\,R(s,\,\varepsilon,\,\mathfrak{v}_h)$$

aus Satz 14 von einer Dirichletreihe, die einer Modulform der Schar $\mathfrak{L}_h$ entspricht, um eine nicht identisch verschwindende elementare Funktion von s als Faktor unterscheidet, geht unmittelbar aus dem Zusammenhang hervor.

Über die Natur der Eigenwerte $\alpha_{h,\nu}$ ist nur im Falle einer Primzahlstufe $N=q\geqq 3$ näheres bekannt (vgl. die Sätze über den Haupttypus und den reellen Nebentypus in AQF, pp. 96, 112). Wir beweisen hier den im Hinblick auf die Disjunktion $\alpha_{h,\nu}\neq 0$ bzw. $\alpha_{h,\nu}=0$ wichtigen

Satz 19. *Im Falle einer ungeraden Primzahlstufe* $N=q$ *treten für* $t=q$ *nur von Null verschiedene Eigenwerte* $\alpha_{h,\nu}$ *auf* $(1\leqq h\leqq d,\ 1\leqq\nu\leqq g_h)$, *hier existiert also stets eine Basis der Schar* $\mathfrak{M}_h$ *von der Gestalt* (25).

Zum Beweise zeigen wir, dass der Operator T_q^q umkehrbar ist, d. h. dass eine Form $f(\tau)$ vom Teiler $t=q$ und vom Charakter ε identisch verschwinden muss, wenn $f(\tau)\,|\,T_q^q$ identisch verschwindet. Nach AQF (34) (58) genügen die Operatoren T_q^q und

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \sum_{m \bmod q} T\,U^m \qquad \left(T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

den Relationen

$$T_q^q = (-1)^r q^{r-1} H\,W, \quad W^2 = (-1)^r q + \gamma W, \tag{26}$$

wo $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ einen skalaren Faktor bezeichnet. Wir setzen $g(\tau) = f(\tau)\,|\,H$ und erhalten

$$f(\tau)\,|\,T_q^q = (-1)^r q^{r-1} g(\tau)\,|\,W. \tag{27}$$

Aus $f(\tau)\,|\,T_q^q \equiv 0$ folgt nach (27): $g(\tau)\,|\,W \equiv 0$ und daraus nach der zweiten Gleichung (26)

$$(-1)^r q\,g(\tau) = g(\tau)\,|\,W^2 - \gamma\,g(\tau)\,|\,W = 0,$$

also, da H umkehrbar ist, $f(\tau) \equiv 0$, q. e. d.

Das Analogen des hiermit bewiesenen Satzes trifft für die Stufe $N = q^3$ (q Primzahl $\geqq 3$) nach T_n II, Satz 45 a bereits nicht mehr allgemein zu. Ich habe daher nach einem Beweise des Analogons für die Stufe $N = q^2$ nicht gesucht.

5. Es bezeichne σ_8 die Anzahl der Spitzen, p_8 das Geschlecht eines Fundamentalbereichs der Gruppe $\Gamma(8)$, μ_8 den Index von $\overline{\Gamma}(8)$ in $\overline{\Gamma}(1)$ (diese letzteren als Substitutionsgruppen verstanden). Nach der klassischen Theorie gilt

$$\sigma_8 = 24, \quad \frac{\mu_8}{12} = p_8 - 1 + \frac{\sigma_8}{2} = 16, \quad p_8 = 5. \tag{28}$$

Wir bedienen uns der folgenden Thetareihen[1]: Es sei N gerade, h ganz,

$$\vartheta_0(\tau, h, N) = \sum_{m \equiv h\,(N)} e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{N}}, \quad \vartheta_1(\tau, h, N) = \sum_{m \equiv h\,(N)} m\,e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{N}}. \tag{29}$$

Wird zusammenfassend

$$\vartheta_\lambda(\tau, h, N) = \sum_{m \equiv h\,(N)} m^\lambda e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{N}} \qquad (\lambda = 0, 1)$$

geschrieben, so bestehen die folgenden Formeln:

$$\text{a.}\quad \vartheta_\lambda(\tau, -h, N) = (-1)^\lambda \vartheta_\lambda(\tau, h, N), \tag{30}$$

[1] H. Petersson, Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen, erscheint in den Commentarii mathematici Helvetici.

$$(31)\qquad \text{b.}\quad \vartheta_\lambda(S\tau, h, N) = (c\tau + d)^{\frac{1}{2}+\lambda} e^{\pi i \frac{d-1}{4}} \left(\frac{cN}{d}\right)_* e^{\pi i \frac{abh^2}{N}} \vartheta_\lambda(\tau, ah, N);$$

dabei ist $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} < \Gamma(1)$, $c \equiv 0 \pmod{2N}$, $-\pi < \arg(c\tau + d) \leqq +\pi$ und $\left(\frac{k}{j}\right)_*$ das Legendre-Jacobische Restsymbol, das aus dem üblichen Symbol dieser Art durch

$$\left(\frac{j}{k}\right)_* = \left(\frac{j}{|k|}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} j - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} k - 1}{2}} \qquad (k \equiv 1\ (2),\ j \neq 0), \quad \left(\frac{0}{1}\right)_* = 1,$$

hervorgeht.

$$(32)\qquad \text{c.}\quad \vartheta_\lambda(L\tau, h, N) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* (\gamma\tau + \delta)^{\frac{1}{2}+\lambda} \vartheta_\lambda(\tau, h, N)$$

$$\left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2N}\right).$$

Dass $\vartheta_\lambda(\tau, h, N)$ eine ganze Modulform von der Dimension $-\frac{1}{2} - \lambda$, zur Gruppe $\Gamma(2N)$ und zum Multiplikatorsystem $v_\vartheta(L) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_*$ darstellt, lässt sich nach Fussnote [1], p. 215 derjenigen allgemeinen Transformationsformel entnehmen, welche für beliebiges S aus $\Gamma(1)$ die lineare Darstellung von $\vartheta_\lambda(S\tau, h, N)$ durch die $\vartheta_\lambda(\tau, \nu, N)$ (ν mod N) vermittelt. Eine Modulform der genannten Art kennzeichnen wir im eingangs verabredeten Sinne durch das Symbol $\{\Gamma(2N), -\frac{1}{2} - \lambda, v_\vartheta\}$.

Zur Gruppe $\Gamma(8)$ $(N = 4)$ entspringen aus diesem Ansatz fünf linear unabhängige ganze Modulformen $\{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ und eine nicht identisch verschwindende ganze Spitzenform $\{\Gamma(8), -\frac{3}{2}, v_\vartheta\}$. Es sind dies

$$(33)\qquad \vartheta_0(\tau, 0, 4),\ \vartheta_0(\tau, 1, 4),\ \vartheta_0(\tau, 2, 4);\ \vartheta_0(\tau, 0, 2),\ \vartheta_0(\tau, 1, 2) \qquad (\{\Gamma(8), -\tfrac{1}{2}, v_\vartheta\}),$$

$$(34)\qquad \vartheta_1(\tau, 1, 4) = \sqrt[8]{\Delta(\tau)} = e^{\pi i \frac{\tau}{4}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m\tau})^3 \qquad (\{\Gamma(8), -\tfrac{3}{2}, v_\vartheta\}).$$

Die fünf Funktionen (33) erweisen sich durch eine Betrachtung ihrer Fourierkoeffizienten als linear unabhängig; $\vartheta_1(\tau, 1, 4)$ verschwindet in allen Spitzen. Daher erhält man ein volles System linear unabhängiger ganzer Spitzenformen $\{8, -2\}$ in den fünf Funktionen

$$(35)\qquad \begin{aligned} \Theta_4(\tau, h) &= \vartheta_0(\tau, h, 4)\,\vartheta_1(\tau, 1, 4) \qquad (h = 0, 1, 2), \\ \Theta_2(\tau, h) &= \vartheta_0(\tau, h, 2)\,\vartheta_1(\tau, 1, 4) \qquad (h = 0, 1). \end{aligned}$$

Zur Zerlegung der Schar $\mathfrak{C}_2^+$ von der Stufe 8 in Teilscharen von festem Teiler und Charakter überzeugt man sich zunächst davon, dass bereits jede der

Funktionen (35) zu einem Teiler t der Stufe 8 gehört: Es ist $t = 1$ für alle diese Funktionen mit Ausnahme von $\Theta_4(\tau, 1)$, wo $t = 2$ ist. Aus (30) und (31) folgt ferner, dass jede der Funktionen (35) auch normiert ist: Nach (30) wird für ungerades n'

$$\vartheta_1(\tau, n', 4) = (-1)^{\frac{n'-1}{2}} \vartheta_1(\tau, 1, 4)$$

und daher mit $N = 4$, $nn' \equiv 1$ (8) nach (31)

$$\Theta_4(\tau, h) \mid R_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n'-1}{2}} \Theta_4(\tau, h) = \Theta_4(\tau, h) \qquad (h = 0, 1, 2, (n, 2) = 1).$$

Also gehören die $\Theta_4(\tau, h) (h = 0, 1, 2)$ zum Hauptcharakter mod 8. Analog ergibt sich nach (30), (31)

$$\Theta_2(\tau, h) \mid R_n = \left(\frac{2}{n}\right) \Theta_2(\tau, h) \qquad (h = 0, 1, (n, 2) = 1).$$

Diese Formeln zeigen, dass die Schar $\mathfrak{C}_2^+$ der Stufe 8 in drei abgeschlossene Teilscharen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ direkt zerlegt werden kann. Basisfunktionen, Ränge, Teiler und Charaktere der einzelnen Scharen finden sich in der folgenden Tabelle.

Tabelle.

Schar	Basisfunktionen	Rang	Teiler	Charakter
$\mathfrak{S}_1$	$\Theta_4(\tau, 0)$, $\Theta_4(\tau, 2)$	2	1	1
$\mathfrak{S}_2$	$\Theta_4(\tau, 1)$	1	2	1
$\mathfrak{S}_3$	$\Theta_2(\tau, 0)$, $\Theta_2(\tau, 1)$	2	1	$\left(\frac{2}{n}\right)$

Nach der allgemeinen Theorie ($\mathrm{T_n}$ II und K II) gilt in jeder dieser Scharen $\mathfrak{S}_j (j = 1, 2, 3)$ das Hauptachsentheorem, es gibt also in jedem $\mathfrak{S}_j (j = 1, 2, 3)$ eine bis auf konstante Faktoren und die Reihenfolge eindeutig bestimmte Basis, die aus lauter Eigenfunktionen aller $T_n((n, 2) = 1)$ besteht. Zur rechnerischen Bestimmung dieser Basen bedienen wir uns der folgenden allgemeinen Zusammenhänge:

Es sei (in den eingangs verabredeten Bezeichnungen) $\mathfrak{S} < \{N, -r\}$ eine beliebige abgeschlossene Schar, es gehöre $\mathfrak{S}$ zum Teiler t und zum Charakter ε. Man verstehe unter

$$(36)\qquad \mathfrak{q}(\tau)=\{\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau),\ldots,\varphi_\mu(\tau)\}=\sum_{(m,t_1)=1}\mathfrak{b}_m e^{2\pi i\frac{m\tau}{t_1}}\qquad\left(t_1=\frac{N}{t}\right)$$

einen Basisvektor über $\mathfrak{S}$ (was bedeute, dass die Formen φ_j $(1\leqq j\leqq\mu)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$ bilden); alle Vektoren werden bei der rechnerischen Verknüpfung nach dem Matrizenkalkül als Spalten behandelt. Mit

$$\mathfrak{q}(\tau)\,|\,T_m^t=\{\ldots,\varphi_j(\tau)\,|\,T_m^t,\ldots\}=A^t(m)\,\mathfrak{q}(\tau),\quad \mathfrak{b}_m=\{b_{1m},b_{2m},\ldots,b_{\mu m}\}$$

gilt nach T_n II (18)

$$(37)\qquad A^t(m)=\sum_{\nu=1}^{\mu}b_{\nu m}\mathrm{B}^{(\nu)},\quad \mathrm{B}^{(\nu)}=(\beta_{jk}^{(\nu)})\ \text{konstant}\ (j,k=1,2,\ldots,\mu).$$

Bezeichnet $\mathfrak{b}_{m_1},\mathfrak{b}_{m_2},\ldots,\mathfrak{b}_{m_\mu}$ irgend ein System linear unabhängiger $\mathfrak{b}_n$ mit $(m_k,t_1)=1$, $m_k\geqq 1$, so folgt aus (37) für passende skalare $C_\varrho^{(\nu)}$, c_{mi}:

$$\mathrm{B}^{(\nu)}=\sum_{\varrho=1}^{\mu}C_\varrho^{(\nu)}A^t(m_\varrho),\qquad A^t(m)=\sum_{i=1}^{\mu}c_{mi}A^t(m_i).$$

Daher wird

$$(38)\qquad T_m^t=\sum_{i=1}^{\mu}c_{mi}T^t(m_i)\qquad((m,t_1)=1,\ m>0);$$

wenn also die Funktion $f<\mathfrak{S}$ Eigenfunktion aller $T^t(m_i)$ $(1\leqq i\leqq\mu)$ ist, so ist sie bereits Eigenfunktion aller T_m^t $(m\geqq 1)$.

Wir setzen nun

$$(39)\qquad \mathfrak{q}(\tau)\,|\,T_k^t=\sum_{(m,t_1)=1}\mathfrak{b}_m^{(k)}e^{2\pi i\frac{m\tau}{t_1}}\qquad((k,t_1)=1,\ k\geqq 1)$$

und schreiben eine zunächst beliebige Funktion $f=\sum_{j=1}^{\mu}\xi_j\varphi_j$ (ξ_j konstant) aus $\mathfrak{S}$ in der Gestalt

$$(40)\qquad f(\tau)=\mathfrak{x}'\,\mathfrak{q}(\tau)=\sum_{(m,t_1)=1}\mathfrak{x}'\,\mathfrak{b}_m e^{2\pi i\frac{m\tau}{t_1}}$$

$$(\mathfrak{x}=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\mu\},\ \mathfrak{x}'\ \text{die Transponierte von}\ \mathfrak{x}).$$

Dass f Eigenfunktion aller T_k^t $(k\geqq 1)$ zu dem Eigenwertsystem $\omega(k)$ sei, besagt nach (38), (39), (40)

$$f\,|\,T^t(m_i)=\omega(m_i)f,\quad \mathfrak{x}'(\mathfrak{q}\,|\,T^t(m_i))=\omega(m_i)\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{q}$$

$$\mathfrak{x}'\,\mathfrak{b}_m^{(m_i)}=\omega(m_i)\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{b}_m\qquad((m,t_1)=1,\ 1\leqq i\leqq\mu)$$

und demgemäss, weil zwei Formen aus $\mathfrak{S}$ bereits dann miteinander übereinstimmen, wenn ihre Koeffizienten in den (36) entsprechenden Fourierentwicklungen für $m = m_k\,(1 \leqq k \leqq \mu)$ zusammenfallen:

$$\mathfrak{x}'\,\mathfrak{b}_{m_k}^{(m_i)} = \omega(m_i)\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{b}_{m_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{41}$$

Von diesen Gleichungen (41) steht fest, dass sie, falls in $\mathfrak{S}$ das Hauptachsentheorem gilt, genau μ linear unabhängige Lösungsvektoren $\mathfrak{x}$ besitzen, und dass zu jedem dieser $\mathfrak{x}$ ein und nur ein mit ihm durch (41) verknüpftes System $\omega(m_i)\,(1 \leqq i \leqq \mu)$ gehört.

Die rechnerische Auflösung der Gleichungen (41) für die in der Tabelle genannten Basen der Scharen $\mathfrak{S}_j\,(j = 1, 2, 3)$ bereitet keine Schwierigkeiten. Als Eigenfunktionen aller $T_n\,((n, 2) = 1)$ ergeben sich die folgenden Modulformen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}_1: \ \varphi_{11}(\tau) = \Theta_4(\tau, 0) + \Theta_4(\tau, 2), \quad \varphi_{12}(\tau) = \Theta_4(\tau, 0) - \Theta_4(\tau, 2);\\ &\mathfrak{S}_2: \qquad \varphi_{21}(\tau) = \Theta_4(\tau, 1);\\ &\mathfrak{S}_3: \ \varphi_{31}(\tau) = \Theta_2(\tau, 0) + i\,\Theta_2(\tau, 1), \quad \varphi_{32}(\tau) = \Theta_2(\tau, 0) - i\,\Theta_2(\tau, 1). \end{aligned} \tag{42}$$

Die Koeffizienten $b_{jk}(m)$ ihrer Fourierentwicklungen

$$\varphi_{jk}(\tau) = \sum_{\substack{m=1\\(m,2)=1}}^{\infty} b_{jk}(m)\, e^{2\pi i \frac{m t \tau}{8}} \qquad (t = 1, 2, 1 \text{ für } j = 1, 2, 3)$$

sind auf Grund von (29), (35), (42) der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen:

$$b_{11}(m) = \begin{Bmatrix} a_{40}(m) \\ a_{42}(m) \end{Bmatrix}, \quad b_{12}(m) = \begin{Bmatrix} a_{40}(m) \\ -a_{42}(m) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} m \equiv 1\,(8) \\ m \equiv 5\,(8) \end{Bmatrix},$$

$$b_{21}(m) = a_{41}(2m), \qquad (m \equiv 1\,(4)),$$

$$b_{31}(m) = \begin{Bmatrix} a_{20}(m) \\ i\,a_{21}(m) \end{Bmatrix}, \quad b_{32}(m) = \begin{Bmatrix} a_{20}(m) \\ -i\,a_{21}(m) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} m \equiv 1\,(8) \\ m \equiv 3\,(8) \end{Bmatrix},$$

und hier gilt mit ganzrationalen ν, ν'

$$a_{4h}(m) = \sum_{\substack{\nu^2+\nu'^2=m\\ \nu\equiv 1,\ \nu'\equiv h\,(4)}} \nu \quad (h = 0, 1, 2), \qquad a_{2h}(m) = \sum_{\substack{\nu^2+2\nu'^2=m\\ \nu\equiv 1\,(4),\ \nu'\equiv h\,(2)}} \nu \quad (h = 0, 1).$$

Aus diesen Formeln folgt zunächst

$$b_{jk}(1) = 1\,(j = 1, k = 1, 2;\ j = 2, k = 1;\ j = 3, k = 1, 2);$$

daher gilt für die hier genannten Indexpaare j, k

$$D(s, \varphi_{jk}) = t^{-s} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{b_{jk}(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p)p}{p^{2s}}\right)^{-1},$$

wo $t = 1$ für $j = 1$ und $j = 3$, $t = 2$ für $j = 2$, $\varepsilon(p) = 1$ für $j = 1$ und $j = 2$, $\varepsilon(p) = \left(\frac{2}{p}\right)$ für $j = 3$.

In den Fällen $j = 1, 2$ besteht das Analogon der Ramanujanschen Vermutung in der Behauptung, dass das quadratische Polynom $z^2 - b_{jk}(p)z + p$ keine reelle Nullstelle aufweist, d. h. dass

$$|b_{jk}(p)| < 2\sqrt{p}\,(j = 1,\ k = 1, 2;\ j = 2,\ k = 1)$$

für alle ungeraden Primzahlen p zutrifft. Im Falle $j = 1$ handelt es sich um eine Abschätzung von $|a_{40}(p)|\,(p \equiv 1 \pmod 8)$ und von $|a_{42}(p)|\,(p \equiv 5 \pmod 8)$. Die Anzahl aller Darstellungen der Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ als Summe von zwei Quadraten hat bei der üblichen Zählung den Wert 8. Schreibt man $p = \nu^2 + \nu'^2$, so muss ν oder ν' ungerade ausfallen. Es sei etwa ν ungerade, also $\nu' \equiv \frac{p-1}{2} \pmod 4$. Indem man durch passende Wahl des Vorzeichens von ν erreicht, dass $\nu \equiv 1\,(4)$ wird, und die damit bestimmte Reihenfolge von ν, ν' beibehält, legt man die Darstellungen von p in der Gestalt $\nu^2 + \nu'^2$ bis auf das Vorzeichen von ν' völlig fest. So ergibt sich für $k = 1, 2$

$$|a_{40}(p)| = 2|\nu| = 2\sqrt{p - \nu'^2} \leqq 2\sqrt{p - 16},$$
$$|a_{42}(p)| = 2|\nu| = 2\sqrt{p - \nu'^2} \leqq 2\sqrt{p - 4},$$

$$(43)\qquad \begin{gathered} |b_{1k}(p)| \leqq 2\sqrt{p - 16}\ \ (p \equiv 1 \pmod 8), \quad |b_{1k}(p)| \leqq 2\sqrt{p - 4}\ \ (p \equiv 5 \pmod 8), \\ b_{1k}(p) = 0 \quad (p \equiv 3 \pmod 4),\ k = 1, 2. \end{gathered}$$

Im Falle $j = 2$ handelt es sich um die Darstellungen von $2p$ als Summe von zwei Quadraten, wo p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$ angibt. In jeder Darstellung $2p = \nu^2 + \nu'^2$ sind die ganzrationalen ν, ν' ungerade und ihre Beträge voneinander verschieden. Durch die Vorschrift $\nu \equiv \nu' \equiv 1 \pmod 4$ werden sie bis auf die Reihenfolge eindeutig fixiert. Mithin gilt

$$a_{41}(2p)^2 = (\nu + \nu')^2 = 2(\nu^2 + \nu'^2) - (\nu - \nu')^2 = 4p - (\nu - \nu')^2 \leqq 4p - 16,$$

$$(44)\qquad |b_{21}(p)| \leqq 2\sqrt{p - 4} \quad (p \equiv 1 \pmod 4), \qquad b_{21}(p) = 0 \quad (p \equiv 3 \pmod 4).$$

Sei schliesslich $j = 3$. Dann ist $b_{3k}(p)$ nicht immer reell, es gilt aber $b_{3k}(p) = \sqrt{\varepsilon(p)}\, b'_{3k}(p)$ mit reellen $b'_{3k}(p)$ (p eine ungerade Primzahl, $\sqrt{\varepsilon(p)}$ positiv oder positiv-imaginär). Das Analogon der Ramanujanschen Vermutung für die Eulerprodukte $D(s, \varphi_{3k})(k = 1, 2)$ bezieht sich auf das aus $z^2 - b_{3k}(p)z + \varepsilon(p)p$ durch die Substitution $z = \sqrt{\varepsilon(p)}\, z'$ entstehende Polynom $\varepsilon(p)(z'^2 - b'_{3k}(p)z' + p)$ und besagt hier gleichfalls, dass das letztere Polynom in der Variabeln z' keine reelle Nullstelle besitzt. Dies bedeutet das Bestehen der Ungleichung $|b_{3k}(p)| < 2\sqrt{p}$ für alle ungeraden Primzahlen p und $k = 1, 2$; dabei brauchen nur die $p \equiv 1$ und die $p \equiv 3 \pmod 8$ in Betracht gezogen zu werden.

Da das Hauptideal (p) im imaginär-quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{-2})$ in zwei verschiedene Primideale $(\pi), (\pi')(\pi, \pi' < R(\sqrt{-2}))$ zerfällt, lässt sich p auf genau vier Arten in der Gestalt $\nu^2 + 2\nu'^2$ mit ganzrationalen ν, ν' darstellen, und für genau zwei dieser Darstellungen gilt $\nu \equiv 1 \pmod 4$. Hier ist ν durch p eindeutig, ν' durch p bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Daraus folgt

$$a_{2h}(p) = 2\nu, \quad a_{2h}(p)^2 = 4\nu^2 = 4p - 8\nu'^2,$$

$$(45) \quad \begin{aligned} &|b_{3k}(p)| \leqq 2\sqrt{p-8} \quad (p \equiv 1 \pmod 8), \quad |b_{3k}(p)| \leqq 2\sqrt{p-2} \quad (p \equiv 3 \pmod 8), \\ &b_{3k}(p) = 0 \quad (p \equiv 5 \text{ und } p \equiv 7 \pmod 8), \ k = 1, 2. \end{aligned}$$

Damit sind die Analoga der Ramanujanschen Vermutung für die sämtlichen (fünf) Eulerprodukte, die ganzen Spitzenformen von der Stufe 8 und der Dimension -2 entsprechen, bewiesen.