# ÜBER DEN BEREICH ABSOLUTER KONVERGENZ DER POINCARÉSCHEN REIHEN.

VON

HANS PETERSSON

in HAMBURG.

## Einleitung.

Die systematische Bedeutung der Poincaréschen Reihen für die analytische Theorie der Grenzkreisgruppen hat in neueren Untersuchungen vornehmlich in zwei Tatsachen ihren Ausdruck gefunden. Einerseits lässt sich der Ansatz der Poincaréschen Reihen durch das Prinzip der *transversalen Summation* unmittelbar und auf natürliche Weise aus den Entwicklungen der automorphen Formen gewinnen. Andrerseits führt die *Metrisierung* der automorphen Formen zu der Erkenntnis einer Fülle von neuen Eigenschaften dieser Reihen; die Gesamtheit dieser Eigenschaften bedeutet, dass man den Apparat der Poincaréschen Reihen in seinen Beziehungen zu der Struktur der automorphen Funktionenscharen vom analytischen und algebraischen Standpunkte aus im Prinzip vollkommen beherrscht.

In der vorliegenden Arbeit wird die absolute Konvergenz der Poincaréschen Reihen mit neuen Methoden untersucht. Dabei wird der ganze Fragenkomplex, soweit er sich im Verlaufe der neueren Entwicklung herausgebildet hat, vollständig, von anderen Darstellungen im wesentlichen unabhängig, weitgehend elementar und — innerhalb eines bestimmten Rahmens — bis zu abschliessenden Ergebnissen behandelt.

Wir betrachten im folgenden Gruppen von linear gebrochenen Substitutionen, die die obere Halbebene der komplexen Variablen $\tau = x + iy$ ($x$ reell, $y > 0$) in sich überführen. Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, dabei nicht von den Substitutionen, sondern von deren Koeffizientenschemata, also von zweireihigen quadratischen Matrizen auszugehen. Eine Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit reellen Elementen und der Determinante $ad - bc = 1$ nennen wir *normiert*; im übrigen treten nur zweireihige quadratische Matrizen auf. Wir ordnen $S$ die lineare Substitution

$$\tau' = S(\tau) = S\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

in der komplexen Variablen $\tau$ zu. Die Verknüpfung von Matrizen geschieht nach den Vorschriften und in der Schreibweise der Matrizenrechnung; die einzige Inkonsequenz besteht in der angegebenen Bedeutung des Symbols $S\tau$. Neben $S$ ist $-S$ die einzige normierte Matrix, der die Substitution $\tau' = S\tau$ entspricht. Dem Produkt zweier Matrizen entspricht das Produkt der zugeordneten Substitutionen bei funktionaler Schreibweise, der inversen Matrix die inverse Substitution.

Es sei $\Gamma$ eine unendliche Gruppe von normierten Matrizen $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, die die Matrix $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ enthält und zunächst lediglich die nachstehende *Diskontinuitätsforderung* erfüllt:

*Es gibt in* $\Gamma$ *keine Folge von normierten Matrizen* $L_n \neq I$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *die elementweise gegen* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *konvergiert.*

Wir nennen dann $\Gamma$ eine *normierte diskontinuierliche Gruppe.* Die Voraussetzung

$$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < \Gamma \tag{1}$$

bedeutet keine Einschränkung für die $\Gamma$ zugeordnete Substitutionsgruppe $\Gamma$.

In der systematischen Theorie der Poincaréschen Reihen auf Grenzkreisgruppen hat man es mit drei Reihentypen zu tun. Die Erklärung der drei Typen erfolgt auf Grund des genannten Prinzips der transversalen Summation. Aus den Entwicklungen der automorphen Formen nach den Ortsvariablen der parabolischen Fixpunkte von $\Gamma$, der Punkte in der oberen Halbebene und hyperbolischen Fixpunktepaare ergeben sich die Ansätze der Reihen vom *parabolischen, elliptischen* und *hyperbolischen Typ.*[1] Im folgenden können wir auf die ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge verzichten, da der nur bedingten Konvergenz der Reihen keine systematische Bedeutung zukommt, und da zur Untersuchung der absoluten Konvergenz das allgemeine Reihenglied auf einen sehr einfach gebauten Ausdruck reduziert werden kann.

[1] H. PETERSSON, Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art, Abh. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Univ. **14** (1941), S. 22—60, im folgenden zitiert mit (J IV).

Die Ergebnisse der Untersuchung sollen hier im parabolischen Falle kurz referiert werden. Wir nennen eine normierte Matrix $S$ zugleich mit der ihr zugeordneten Substitution parabolisch, elliptisch oder hyperbolisch. Ein Punkt $\tau = \zeta$ heisst parabolischer Fixpunkt oder parabolische Spitze von $\Gamma$, wenn er Fixpunkt einer parabolischen Matrix von $\Gamma$ ist. Ein parabolischer Fixpunkt $\zeta$ von $\Gamma$ liegt stets auf der reellen Achse oder im Unendlichen.

Es sei $\tau = \infty$ ein parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$, $\mathfrak{S}$ ein volles System von Matrizen aus $\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen, $r$ eine feste positive Zahl, $Q_r = Q_r(\tau)$ die Reihe

$$Q_r(\tau) = \sum_{L \subset \mathfrak{S}} |\gamma\tau + \delta|^{-r} \qquad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)$$

Dann handelt es sich um die folgenden Aussagen:

(A) Ist $\Gamma$ eine normierte diskontinuierliche Gruppe, so konvergiert $Q_r(\tau)$ für $r > 2$ und die $\tau$ in der oberen Halbebene. Die Konvergenz ist für die $\tau$ eines jeden Vertikalhalbstreifens von positiver Mindesthöhe gleichmässig.

(B) Unter den gleichen Voraussetzungen über $\Gamma$ und für positive $r$ konvergiert die Reihe $Q_r(\tau)$ in der unter (A) angegebenen Art, wenn sie in einem einzigen Punkte $\tau = \tau_0$ der oberen Halbebene konvergiert. Sie zeigt ein übersichtliches Verhalten bei Annäherung an die parabolischen Fixpunkte von $\Gamma$.

(C) Ist $\Gamma$ eine Grenzkreisgruppe von erster Art, so divergiert $Q_r(\tau)$ für jedes $r < 2$ und jedes $\tau$ in der oberen Halbebene.

(Eine *Grenzkreisgruppe von erster Art* ist eine Grenzkreisgruppe mit einem endlichen Erzeugendensystem; sie uniformisiert ein algebraisches Gebilde mit endlich vielen Relativverzweigungen.)

Entsprechende Ergebnisse bestehen für die Reihen der Gliederbeträge, die aus den Poincaréschen Reihen des elliptischen und hyperbolischen Typus durch die obengenannte Reduktion hervorgehen.

In historischer und methodischer Hinsicht sei hierzu folgendes bemerkt: Der bisher einzige Beweis von (A) stammt von Poincaré. Er behandelt die Poincaréschen Reihen des ursprünglichen Ansatzes mit dem Einheitskreis als Grenzkreis und benutzt als wesentliches Hilfsmittel den hyperbolischen Flächeninhalt.[1] Diese Reihen gehen durch Abbildung des Grenzkreisinneren auf die obere Halbebene in stark spezialisierte Reihen des elliptischen Typus über. Die Ausgestaltung des Poincaréschen Gedankens zu einem exakten Konvergenzbeweis für die Reihen

[1] Vgl. Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. II (Teubner 1912), I, 3, § 7, S. 167—175.

des parabolischen und hyperbolischen Typus ergibt eine zwar nicht sehr umfangreiche, aber doch ziemlich komplizierte Schlusskette.[1] Im Gegensatz dazu führen die neuen Beweise bei allen drei Reihentypen mit einer überraschend kurzen und durchsichtigen Deduktion zum Ziel. Sie stehen in engem Zusammenhang mit dem analytischen Apparat der eingangs erwähnten Metrisierung.

Die Durchführung der Konvergenzbeweise erfordert vorbereitende Untersuchungen nur in relativ bescheidenem Umfange. Die verwendeten Hilfsmittel spielen zudem in der gesamten Theorie der Grenzkreisgruppen eine fundamentale Rolle und sind insbesondere bei allen Beweisen von (A) unentbehrlich. Die Aussagen (B) ergeben sich auf im Prinzip bekannte Weise aus den Aussagen (A) und einigen zusätzlichen Abschätzungen. Dagegen erfordern die Beweise von (C) die Ausnutzung der Eigenschaften einer Grenzkreisgruppe von erster Art in vollem Umfange. Hier wird wirklich benutzt, dass $\Gamma$ einen von endlich vielen hyperbolischen Strecken und Halbgeraden begrenzten, sog. *kanonischen Fundamentalbereich* besitzt, der bis auf endlich viele parabolische Spitzen ganz dem Inneren der oberen Halbebene angehört.

Es liegt in der Natur der Sache, dass die drei Reihentypen trotz vieler gemeinsamen Eigenschaften in den nachstehenden Untersuchungen nicht immer gemeinsam behandelt werden können, was gelegentlich Wiederholungen unvermeidlich macht. Die für die Beweisführung erforderlichen Grundlagen, Vorbereitungen und Hilfssätze werden in einem besonderen § 1 zusammengestellt. Es ist hervorzuheben, dass für die sehr einfachen Konvergenzbeweise des § 2, insbesondere im elliptischen Fall, nur ein geringer Teil der Ergebnisse des § 1 benötigt wird. § 3 enthält die Ausführungen zu den Aussagen (B) für die drei Reihentypen. In § 4 werden die Begriffsbestimmungen der Grenzkreisgruppen von erster Art und ihrer kanonischen Fundamentalbereiche[2] sowie die Konstruktion gewisser, aus unendlich vielen Fundamentalbereichen bestehenden Konfigurationen[3] reproduziert. § 5 endlich dient der Darstellung der Divergenzbeweise.

Die vorliegende Abhandlung ist mit Ausnahme des § 4 ohne besondere Vorkenntnisse verständlich. In § 4 werden einige Tatsachen aus der Topologie der Riemannschen Flächen herangezogen.

---

[1] H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen V, Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 127—155, im folgenden zitiert mit (G V).

[2] Ders., Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I, Math. Ann. **115** (1938), S. 23—67, im folgenden zitiert mit (G I).

[3] (J IV) und: Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen, Math. Ann. **117** (1940). § 4, 1.

Um die im Text auftretenden Zitate und Hinweise kurz zu kennzeichnen, werden diese in eckige Klammern gesetzt.

Unter $\Gamma$ verstehen wir bis zum Schluss des § 3 eine normierte diskontinuierliche Gruppe.

## § 1. Grundbegriffe und Hilfssätze.

1. (*Parabolische Fixpunkte.*) Ist $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine komplexe Matrix, so schreiben wir für die zweite Zeile von $S$:

$$\underline{S} = \{c, d\}.$$

Wir setzen $$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ U^{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\xi \text{ reell}).$$

Zwei zweireihige normierte Matrizen $S_1$, $S_2$ mit der gleichen zweiten Zeile $\underline{S_1} = \underline{S_2}$ unterscheiden sich gemäss $S_2 = U^{\xi} S_1$ ($\xi$ reell) um einen linken Faktor von der Gestalt $U^{\xi}$ und umgekehrt. Die zweireihigen normierten parabolischen Matrizen $S$ mit dem Fixpunkt $\tau = \infty$ haben die Gestalt $S = \pm\, U^{\xi}$ ($\xi$ reell $\neq 0$; für $\xi = 0$ ergibt sich $S = \pm\, I$). Die parabolischen Matrizen $L$ aus $\Gamma$ mit dem Fixpunkt $\tau = \infty$ bilden, falls vorhanden, zusammen mit $\pm\, I$ eine unendliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}_{\infty}$. Infolge der Diskontinuität von $\Gamma$ bedeutet $L < \mathfrak{Z}_{\infty}$, dass $L = \pm\, U^{kN}$ mit festem $N > 0$, beliebigem Vorzeichen und beliebigem ganzem $k$. Ein volles System $\mathfrak{S}$ von Matrizen $L$ aus $\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen $\underline{L}$ ist daher ein volles System von Matrizen $L$ aus $\Gamma$, die sich nicht um eine Matrix $U^{kN}$ mit ganzem $k$ (d. h. nicht um eine Matrix $U^{\xi}$ mit reellem $\xi$) als linkem Faktor unterscheiden.

Es sei $\tau = \zeta$ eine parabolische Spitze von $\Gamma$, $A$ eine normierte Matrix mit $A\,\zeta = \infty$. Dann ist $\tau = \infty$ parabolischer Fixpunkt der Gruppe $A\,\Gamma A^{-1}$. Die parabolischen Matrizen $L$ von $\Gamma$ mit $L\zeta = \zeta$ bilden zusammen mit $\pm\, I$ eine unendliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}_{\zeta}$. Sie besteht aus den Matrizen der Gestalt $\pm\, P^k = \pm\, A^{-1}\, U^{kN'} A$ (mit festem $N' > 0$, beliebigem Vorzeichen und beliebigem $k$). Hier heisst $P$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\zeta}$; $k$ ist ganz.

Zwei Matrizen $M_1$ und $M_2$ aus der Nebengruppe $A\,\Gamma$ haben dann und nur dann die gleiche zweite Zeile $\underline{M_1} = \underline{M_2}$, wenn $M_2 = U^{kN'} M_1$ mit ganzem $k$, d. h. wenn

$$M_1 = A\,L_1,\ M_2 = A\,L_2,\ L_1 < \Gamma,\ L_2 < \Gamma,\ L_2 = P^k L_1 \qquad (k \text{ ganz}).$$

Ein volles System $\mathfrak{S}$ $(A, \Gamma)$ von Matrizen $M = AL$ aus $A\,\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen entsteht, indem hierin ein volles System von Matrizen $L$ aus $\Gamma$ so bestimmt wird, dass sich zwei dieser Matrizen nicht um einen linken Faktor von der Gestalt $P^k$ ($k$ ganz) unterscheiden. Das obige System $\mathfrak{S}$ ist danach als $\mathfrak{S}(I, \Gamma)$ zu bezeichnen.

Nicht alle Grenzkreisgruppen enthalten parabolische Matrizen.[1]

**2.** (*Hyperbolische Fixpunkte.*) Ist $\lambda$ reell, $\lambda \neq 0$, $\lambda\lambda' = 1$, so schreiben wir

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}.$$

Die zweireihigen normierten Matrizen $S$ mit den Fixpunkten $\tau = \infty$ und $\tau = 0$ haben die Gestalt $S = \pm D_\lambda$ ($\lambda > 0$). Sie sind hyperbolisch, falls $\lambda \neq 1$. Zwei normierte Matrizen $S_1$ und $S_2$ heissen *ähnlich*, wenn

$$S_2^{-1}\,0 = S_1^{-1}\,0, \quad S_2^{-1}\,\infty = S_1^{-1}\,\infty.$$

Dies bedeutet, dass sich $S_1$ und $S_2$ um einen linken Faktor $\pm D_\lambda$ ($\lambda > 0$) unterscheiden. Wir nennen $S_1$ und $S_2$ *eigentlich ähnlich*, wenn $S_2 = D_\lambda S_1$ mit $\lambda > 0$. Die hyperbolischen Matrizen $L$ aus $\Gamma$ mit den Fixpunkten $\infty$ und $0$ bilden, falls vorhanden, zusammen mit $\pm I$ eine unendliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}_{0,\infty}$. Infolge der Diskontinuität von $\Gamma$ bedeutet $L < \mathfrak{Z}_{0,\infty}$, dass $L = \pm D_{\mu'}^k$ mit festem $\mu' > 1$, beliebigem Vorzeichen und beliebigem ganzem $k$. Ein volles System $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ von paarweise nicht eigentlich ähnlichen Matrizen aus $\Gamma$ ist daher ein volles System von Matrizen $L$ aus $\Gamma$, die sich nicht um eine Potenz von $D_{\mu'}$ (d. h. nicht um eine Matrix $D_\lambda$ mit $\lambda > 0$) als linkem Faktor unterscheiden.

Es sei $\eta, \eta'$ ein Paar hyperbolischer Fixpunkte (einer Matrix) von $\Gamma$, $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix mit

$$\mathsf{H}\eta = 0, \; \mathsf{H}\eta' = \infty \quad (\text{d. h. } \eta_1\eta + \eta_2 = 0, \; \eta_1'\eta' + \eta_2' = 0).$$

Wir schreiben $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{H}' = -T\mathsf{H} = \begin{pmatrix} -\eta_1' & -\eta_2' \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$, so dass $\mathsf{H}'\eta = \infty$, $\mathsf{H}'\eta' = 0$. Die Gruppen $\Gamma^* = \mathsf{H}\Gamma\mathsf{H}^{-1}$ und $(-T)\,\Gamma^*\,T = \mathsf{H}'\Gamma\mathsf{H}'^{-1}$ haben das hyperbolische Fixpunktepaar $0, \infty$, die Diagonalmatrizen von $\Gamma^*$ fallen in ihrer Gesamtheit mit denen von $-T\Gamma^*T$ zusammen. Wir setzen

$$H = \mathsf{H}^{-1} D_{\mu'}\, \mathsf{H} = \mathsf{H}'^{-1} D_\mu \mathsf{H}' \qquad (\mu\mu' = 1, \mu' > 1)$$

und denken uns hier $\mu'$ in bezug auf die Gruppe $\Gamma^*$ nach der obigen Vorschrift

[1] Folgt aus der Möglichkeit, analytische Gebilde, von sehr speziellen Ausnahmefällen abgesehen, ohne logarithmische Relativverzweigungen durch Grenzkreisgruppen zu uniformisieren. Vgl. auch (G V), Fussnote 5.

bestimmt. Die hyperbolischen Matrizen von $\Gamma$ mit dem Fixpunktepaar $\eta$, $\eta'$ bilden zuzüglich $\pm I$ eine unendliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}_{\eta,\eta'}$. Sie besteht aus den sämtlichen Matrizen $\pm H^k$ mit beliebigem Vorzeichen und beliebigem ganzem $k$. Wir bezeichnen $H$ als normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta,\eta'}$.

Zwei Matrizen $\mathsf{B}_1$, $\mathsf{B}_2$ aus der Nebengruppe $\mathsf{H}\Gamma$ sind dann und nur dann einander eigentlich ähnlich, wenn $\mathsf{B}_2 = D^k_{\mu'}\mathsf{B}_1$ mit ganzem $k$, d. h. wenn

$$\mathsf{B}_1 = \mathsf{H} L_1,\ \mathsf{B}_2 = \mathsf{H} L_2,\ L_1 < \Gamma,\ L_2 < \Gamma,\ L_2 = H^k L_1 \qquad (k \text{ ganz}).$$

Ein volles System $\mathfrak{S}\,(\mathsf{H}, \Gamma)$ von paarweise nicht eigentlich ähnlichen Matrizen aus der Nebengruppe $\mathsf{H}\Gamma$ entsteht dadurch, dass $L$ in der Darstellung $\mathsf{B} = \mathsf{H} L$ dieser Matrizen ein volles System von Matrizen aus $\Gamma$ von der Art durchläuft, dass sich je zwei dieser $L$ nicht um eine Matrix von der Gestalt $H^k$ mit ganzen $k$ als linkem Faktor unterscheiden.

Nicht benutzt werden später folgende Sätze, die hier zur Orientierung mitgeteilt seien:

Jede normierte diskontinuierliche unendliche Matrizengruppe $\Gamma$ enthält hyperbolische Matrizen. [(G V), Hilfssatz 1, § 1.]

Haben zwei hyperbolische Matrizen einer solchen Gruppe $\Gamma$ einen Fixpunkt gemein, so haben sie auch den anderen Fixpunkt gemein. [(G V), Hilfssatz 2, § 1.]

Sind lediglich die ersten oder lediglich die zweiten Zeilen zweier Matrizen $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2$ aus der Nebengruppe $\mathsf{H}\Gamma$ proportional, so sind $\mathsf{B}_1$ und $\mathsf{B}_2$ bereits ähnlich. [(G V), § 1, 3.]

**3.** (*Geometrische Grundlagen.*) Die Begriffe der hyperbolischen Geometrie in der oberen Halbebene und die Begriffe der euklidischen Geometrie werden durch den dem Begriffsnamen vorgesetzten Buchstaben H bzw. E unterschieden (z. B. H-Abstand, E-Strecke, H-Halbgerade, E-Kreis, H-Kreis, H-Radius, E-Mittelpunkt, usw.). Sind $\tau_1$, $\tau_2$ zwei Punkte der oberen Halbebene, und ist $\mathfrak{h}$ die sie verbindende H-Strecke, so nennen wir

$$|\tau_1 - \tau_2|_{\mathrm{H}} = \int_{\mathfrak{h}} \frac{|d\tau|}{y} \qquad (y = \Im\mathrm{m}\,\tau > 0) \tag{2}$$

den H-Abstand oder die H-Entfernung von $\tau_1$ und $\tau_2$ oder auch den H-Betrag von $\tau_1 - \tau_2$. Diese Zahl lässt sich bekanntlich als Logarithmus des Doppelverhältnisses von $\tau_1$, $\tau_2$ und den Fusspunkten von $\mathfrak{h}$ bei geeigneter Anordnung dieser vier Punkte auffassen. Die H-Entfernung ist gegenüber den linearen Transformationen der oberen Halbebene in sich invariant, sie ist als Funktion der beiden Punkte stetig, strebt gegen Null, wenn beide Punkte in der oberen Halbebene zusammenrücken, sie ist symmetrisch in $\tau_1$ und $\tau_2$, genügt der Dreiecksungleichung und gestattet daher in der Symbolik (2) das übliche additive Rechnen mit dem Betragzeichen. Aus der Invarianz des Doppelverhältnisses gegen beliebige lineare Transformationen in der Variabeln $\tau$ folgt überdies, dass aus der genannten Metrik eine Metrik mit den gleichen Eigenschaften in demjenigen Gebiet entsteht, in welches die obere $\tau$-Halbebene durch die lineare Transformation übergeht.

Als H-Kreis $\mathfrak{k}$ mit dem H-Mittelpunkt $c = a + ib$ ($a$ reell, $b > 0$) und dem H-Radius $\varrho > 0$ bezeichnet man die Kurve $|\tau - c|_H = \varrho$. Die E-Höhe des unteren bzw. oberen Kulminationspunktes von $\mathfrak{k}$ beträgt $be^{-\varrho}$ bzw. $be^{\varrho}$; $\mathfrak{k}$ ist also ein E-Kreis mit dem E-Mittelpunkt $\tau_0 = a + ib \operatorname{ch} \varrho$ und dem E-Radius $b \operatorname{sh} \varrho$. Der maximale E-Abstand der H-Kreisperipherie $\mathfrak{k}$ vom H-Mittelpunkt $c$ hat den Wert $b(e^{\varrho} - 1)$. Hier bedeuten ch und sh den hyperbolischen Kosinus und Sinus.

Es seien $\tau_0 = a + ib \operatorname{ch} \varrho$ der E-Mittelpunkt von $\mathfrak{k}$, $\tau_1$ und $\tau_2$ die Punkte auf der Peripherie von $\mathfrak{k}$ mit grösstem bzw. kleinstem E-Abstand vom Ursprung $\tau = 0$. Man erkennt unmittelbar, dass

$$|\tau_1| \leqq |c| + \operatorname*{Max}_{\tau \subset \mathfrak{k}} |\tau - c| \leqq |c| + b(e^{\varrho} - 1) \leqq |c| e^{\varrho}.$$

Ferner erhält man, da $|\tau_0| + b \operatorname{sh} \varrho = |\tau_1|$ ist,

$$|\tau_2| = |\tau_0| - b \operatorname{sh} \varrho = \frac{|\tau_0|^2 - b^2 \operatorname{sh}^2 \varrho}{|\tau_0| + b \operatorname{sh} \varrho} = \frac{a^2 + b^2}{|\tau_1|} \geqq |c| e^{-\varrho}.$$

Mithin gilt: Die Punkte $\tau$ auf der Peripherie des H-Kreises mit dem H-Mittelpunkt $c = a + ib$ und dem H-Radius $\varrho$ erfüllen die Ungleichungen

$$|\tau - c| \leqq b(e^{\varrho} - 1), \tag{3}$$

$$|c| e^{-\varrho} \leqq |\tau| \leqq |c| e^{\varrho}. \tag{4}$$

**4.** (*Geometrische Eigenschaften von* $\Gamma$.) Wir übernehmen ohne Beweise die folgenden fundamentalen Sätze von Poincaré[1]:

Ist ein Punkt $\tau = \tau_0$ der oberen Halbebene Fixpunkt einer Substitution von $\Gamma$, so ist diese elliptisch. Die elliptischen Substitutionen von $\Gamma$ mit dem Fixpunkt $\tau_0$ bilden eine endliche zyklische Gruppe. Die Fixpunkte elliptischer Substitutionen von $\Gamma$ häufen sich in der oberen Halbebene nicht. Für jeden Punkt $\tau = \tau_0$ der oberen Halbebene hat die Menge der positiven unter den Zahlen $|L\tau_0 - \tau_0|_H$

[1] Vgl. etwa H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Teubner 1913), im folgenden zitiert mit (W); siehe hierzu § 20.

$(L < \Gamma)$ eine positive untere Schranke. Für jeden solchen Punkt $\tau = \tau_0$ häufen sich die $L\tau_0$ $(L < \Gamma)$ in der oberen Halbebene nicht.

Wir nennen zwei komplexe Zahlen $\tau_1$, $\tau_2$ einander *äquivalent nach* $\Gamma$, in Zeichen $\tau_1 \sim \tau_2$ $(\Gamma)$, wenn es eine Matrix $L$ aus $\Gamma$ gibt mit $\tau_1 = L\tau_2$.

**5.** (*Hilfssätze*).

**Hilfssatz 1.** *Es sei $A$ eine normierte Matrix, und es seien $\tau = \infty$ und $\tau = A^{-1}\infty$ parabolische Fixpunkte von $\Gamma$. Dann besitzt die Menge der Zahlen $|m_1| \neq 0$ aus den Matrizen $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} < A\,\Gamma$ eine positive untere Schranke.*

Beweis siehe (G I), § 1, Satz 2. Wir bezeichnen diese Schranke durch

$$\vartheta_0(A) = \vartheta_0(A, \Gamma).$$

**Hilfssatz 2.** *Es sei $\mathfrak{k}$ eine beliebige, aber fest gewählte abgeschlossene* H-*Kreisscheibe. Dann gilt für beliebige reelle $m_1$, $m_2$, die nicht beide verschwinden, und beliebige komplexe $\tau_1$, $\tau_2 < \mathfrak{k}$:*

$$C_1 \leqq \left| \frac{m_1\tau_1 + m_2}{m_1\tau_2 + m_2} \right| \leqq C_2$$

*mit positiven, nur von $\mathfrak{k}$ abhängigen Konstanten $C_1$, $C_2$.*

Beweis. Man bilde mit variablen reellen $\lambda_1$, $\lambda_2$, für die $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$, und mit variablem $\tau < \mathfrak{k}$ die Funktion $|\lambda_1\tau + \lambda_2|$. Sie hat ein positives Minimum, dessen Wert nur von $\mathfrak{k}$ abhängt. Andrerseits ist sie durch eine nur von $\mathfrak{k}$ abhängige Konstante nach oben beschränkt. Die Behauptung folgt hieraus und aus der Darstellung

$$\left| \frac{m_1\tau_1 + m_2}{m_1\tau_2 + m_2} \right| = \left| \frac{\lambda_1\tau_1 + \lambda_2}{\lambda_1\tau_2 + \lambda_2} \right| \text{ mit } \lambda_i = \frac{m_i}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \qquad (i = 1, 2).$$

**Hilfssatz 3.** *Es bezeichne $\mathfrak{B}$ den Vertikalhalbstreifen*

$$y \geqq \alpha_0, \; -\alpha_1 \leqq x \leqq +\alpha_1 \; (\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0),$$

*$\mathfrak{M}$ die dreidimensionale Menge der Zahlentripel $\{\lambda_1, \lambda_2, \tau\}$ mit*

$$\lambda_1 \textit{ reell}, \; \lambda_2 \textit{ reell}, \; \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1, \; \tau < \mathfrak{B}.$$

*Dann ist die Funktion $|\lambda_1\tau + \lambda_2|$ auf $\mathfrak{M}$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt.*

Beweis. Auf der Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$, auf der $|\lambda_1\tau+\lambda_2|<1$ ist, gilt $\lambda_1^2<\frac{1}{y^2}$. Man bestimme eine nur von $\alpha_1$ abhängige Schranke $y_0$ derart, dass

$$\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}-\frac{\alpha_1}{y}\geqq\frac{1}{2}\text{ für } y\geqq y_0.$$

Nun erhält man auf $\mathfrak{M}_1$, und wenn überdies $y\geqq y_0$ ist,

$$|\lambda_1\tau+\lambda_2|\geqq|\lambda_1 x+\lambda_2|\geqq\sqrt{1-\lambda_1^2}-|\lambda_1 x|\geqq\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}-\frac{\alpha_1}{y}\geqq\frac{1}{2}.$$

Andrerseits besitzt die Funktion $|\lambda_1\tau+\lambda_2|$ auf der Vereinigung der Restmenge $\mathfrak{M}-\mathfrak{M}_1$ mit der Menge der Zahlentripel $\{\lambda_1,\lambda_2,\tau\}$ des Hilfssatzes, für die $y<y_0$ zutrifft, offenbar ein positives Minimum.

Aus Hilfssatz 3 folgt sofort

**Hilfssatz 4.** *Für $\tau<\mathfrak{V}$ und reelle $m_1$, $m_2$, die nicht beide verschwinden, gilt*

$$\frac{1}{|m_1\tau+m_2|}\leqq C_3\frac{1}{|m_1 i+m_2|}$$

*mit einer nur von $\mathfrak{V}$ abhängigen Konstanten $C_3$.*

Wir beweisen weiter

**Hilfssatz 5.** *Es habe $\Gamma$ den parabolischen Fixpunkt $\tau=\infty$. Dann gibt es in $\Gamma$ keine hyperbolische Matrix mit dem Fixpunkt $\tau=\infty$.*

Beweis. Sei im Gegensatz zur Behauptung $H$ eine hyperbolische Matrix in $\Gamma$ mit den Fixpunkten $\tau=\xi$ und $\tau=\infty$. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes treffen für die Gruppe $U^{-\xi}\,\Gamma\,U^{\xi}$ zu. Diese enthält die hyperbolische Matrix $U^{-\xi}HU^{\xi}$ mit den Fixpunkten $\tau=0$ und $\tau=\infty$. Daher setzen wir $\xi=0$ voraus. Seien $U^N$ und $D_\lambda$ die normierten Erzeugenden von $\mathfrak{Z}_\infty$ und $\mathfrak{Z}_{0,\infty}$. Es ist für ganze $k$:

$$D_\lambda^k U^N D_\lambda^{-k}=U^{N\lambda^{2k}}<\Gamma.$$

Diese Matrizen sind für negative ganze $k$ paarweise verschieden und streben für $k\to-\infty$ elementweise gegen $I$.

**Hilfssatz 6.** *Es sei $\infty$ parabolischer Fixpunkt, $\eta$, $\eta'$ ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma$. In den oben eingeführten Bezeichnungen sei ferner $\mathsf{B}=\mathsf{H}L=$ $=\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2\\\beta_1'&\beta_2'\end{pmatrix}<\mathsf{H}\Gamma$. Dann liegt $|\beta_1\beta_1'|$ oberhalb einer nur von $\mathsf{H}$ und $\Gamma$ abhängigen positiven Schranke $\vartheta_0(\mathsf{H})=\vartheta_0(\mathsf{H},\Gamma)$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 5 sind $\eta$, $\eta'$ reelle Zahlen, es ist also

$$\eta_1 \neq 0 \neq \eta_1', \quad \eta = -\frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \eta' = -\frac{\eta_2'}{\eta_1'}, \quad \eta_1 \eta_1' (\eta - \eta') = \| \mathsf{H} \| = 1.$$

Man erhält, wenn $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ geschrieben wird,

$$\beta_1 \beta_1' = (\eta_1 \alpha + \eta_2 \gamma)(\eta_1' \alpha + \eta_2' \gamma) = \eta_1 \eta_1' (-\gamma \eta + \alpha)(-\gamma \eta' + \alpha),$$

$$L^{-1}\eta - L^{-1}\eta' = \frac{\eta - \eta'}{(-\gamma\eta + \alpha)(-\gamma\eta' + \alpha)},$$

$$\beta_1 \beta_1' = \eta_1 \eta_1' (\eta - \eta') \frac{1}{L^{-1}\eta - L^{-1}\eta'} = \frac{1}{L^{-1}\eta - L^{-1}\eta'}.$$

Sei $H = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$. Indem wir die nachstehenden Quadratwurzeln mit positivem Vorzeichen ausziehen, erhalten wir

$$\eta = \frac{\alpha_0 - \delta_0}{2\gamma_0} \pm \frac{\sqrt{(\alpha_0 + \delta_0)^2 - 4}}{2\gamma_0}, \quad \eta' = \frac{\alpha_0 - \delta_0}{2\gamma_0} \mp \frac{\sqrt{(\alpha_0 + \delta_0)^2 - 4}}{2\gamma_0}.$$

Andrerseits sind $L^{-1}\eta$, $L^{-1}\eta'$ die Fixpunkte der hyperbolischen Matrix

$$H^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} = L^{-1} H L < \Gamma,$$

in der $\gamma^*$ nach Hilfssatz 5 nicht verschwindet. Daraus folgt

$$L^{-1}\eta - L^{-1}\eta' = \pm \frac{\sqrt{(\alpha^* + \delta^*)^2 - 4}}{\gamma^*} = \pm \frac{\sqrt{(\alpha_0 + \delta_0)^2 - 4}}{\gamma^*},$$

$$|\beta_1 \beta_1'| = \frac{|\gamma^*|}{\sqrt{(\alpha_0 + \delta_0)^2 - 4}} \geqq \frac{\vartheta_0(I)}{\sqrt{(\alpha_0 + \delta_0)^2 - 4}} = \vartheta_0(\mathsf{H}) = \vartheta_0(\mathsf{H}, \Gamma).$$

Die Konvergenzbeweise des folgenden Paragraphen machen, soweit Konvergenz in der oberen Halbebene untersucht wird, von den Hilfssätzen 3 bis 6 keinen Gebrauch. Auch von der Theorie der Fixpunkte wird nur ein geringer Teil verwendet. Insbesondere bedient sich der Konvergenzbeweis für die $\tau$ in der oberen Halbebene im elliptischen Falle nur des Hilfssatzes 2 und eines Teiles des Inhaltes der Abschnitte 3, 4.

Mit $C_1$, $C_2$, ... werden Konstante bezeichnet. Sie tragen gelegentlich als Argumente diejenigen Parameter, von denen sie abhängen.

## § 2. Konvergenzbeweise.

Es sei $\tau_0$ ein Nichtfixpunkt in der oberen Halbebene, $\tau_0 = x_0 + i y_0$ ($x_0$ reell, $y_0 > 0$),

$$\lambda_0 = \operatorname{Min} |L\tau_0 - \tau_0|_H \; (L < \Gamma,\ L \neq \pm I), \quad 0 < \lambda < \tfrac{1}{2}\lambda_0,$$

$\mathfrak{k}_0$ die abgeschlossene H-Kreisscheibe $|\tau - \tau_0|_H \leqq \lambda$. Man erkennt, dass die verschiedenen unter den H-Kreisen $L\mathfrak{k}_0 (L < \Gamma)$ paarweise punktfremd sind; $L_1 \mathfrak{k}_0 = = L\mathfrak{k}_0 (L_1 < \Gamma)$ gilt nur für $L_1 = \pm L$.

Wir unterscheiden im folgenden den parabolischen, hyperbolischen und elliptischen Fall und kennzeichnen sie als Fall P, Fall H und Fall E. Die Konvergenzbeweise in den Fällen P und H werden gemeinsam geführt. Im Falle P sei $\infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ und $U^N$ $(N > 0)$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\infty$. Im Falle H sei $0, \infty$ ein hyperbolisches Fixpunktepaar von $\Gamma$ und $D_{\mu'}$ $(\mu' > 1)$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{0,\infty}$.

Zur Bestimmung eines Systems $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ in den Fällen P und H wählen wir $\tau_0$ gemäss

(5) $$|\Re\mathfrak{e}\, \tau_0| < \frac{N}{2} \text{ im Falle P}, \qquad |\log|\tau_0|| < \log \mu' \text{ im Falle H}$$

und erklären $\mathfrak{S}$ durch

(6) $$L < \mathfrak{S} \text{ bedeute: } -\frac{N}{2} \leqq \Re\mathfrak{e}\, L\tau_0 < +\frac{N}{2} \qquad \text{im Falle P},$$

(7) $$L < \mathfrak{S} \text{ bedeute: } \mu'^{-1} \leqq |L\tau_0| < \mu'^{+1} \qquad \text{im Falle H}.$$

In der Tat erkennt man: Zu jedem $L_0$ aus $\Gamma$ gibt es genau ein ganzes $k$ und genau ein $L$ aus $\mathfrak{S}$, so dass

$$L_0 = U^{kN} L \text{ im Falle P}, \qquad L_0 = D_{\mu'}^k L \text{ im Falle H}.$$

$\mathfrak{S}$ enthält die Matrizen $\pm I$.

Wir beweisen, dass die Vereinigung der H-Kreise $L\mathfrak{k}_0$ $(L < \mathfrak{S})$ beschränkt ist. Im Falle P erhält man mit $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} < \mathfrak{S}, \gamma \neq 0$:

(8) $$\Im\mathfrak{m}\, L\tau_0 = \frac{y_0}{|\gamma\tau_0 + \delta|^2} \leqq \frac{y_0}{\gamma^2 y_0^2} = \frac{1}{\gamma^2 y_0} \leqq \frac{1}{\vartheta_0(I)^2 y_0}.$$

Für $\gamma = 0$ gilt dagegen nach Hilfssatz 5, (5) und (6): $L = \pm I$, $\Im\mathfrak{m}\, L\tau_0 = y_0$. Deshalb und wegen (6), (7) ergibt sich zunächst

$$|L\tau_0| \leqq C_4 (L < \mathfrak{S}) \text{ in den Fällen P und H}.$$

Diese $L\tau_0$ sind die H-Mittelpunkte der H-Kreise $L\mathfrak{k}_0$. Aus (4) folgt also

(9) $$|L\tau| \leqq C_4 e^{\lambda} = C_5 \ (L < \mathfrak{S}, \tau < \mathfrak{k}_0) \text{ in den Fällen P und H.}$$

Hier bedeuten $C_4$ und $C_5$ positive, von $L$ unabhängige Konstanten.

Es sei $r > 2$. Die zu untersuchenden Betragreihen haben in den Fällen P und H die Gestalt

(10) $$Q_r(\tau) = \sum_{L \subset \mathfrak{S}} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r} \quad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right).$$

Im Falle P hängen die Reihenglieder von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}$ nicht ab, im Falle H dagegen ändern sich die Reihenglieder bei Änderung von $\mathfrak{S}$. Da die beiden mit $L$ und $-L$ gebildeten Reihenglieder stets denselben Wert aufweisen, bestimmen wir ein Teilsystem $\mathfrak{S}^*$ von $\mathfrak{S}$, welches von jedem Paar von Matrizen $L$ und $-L$ aus $\mathfrak{S}$ genau einen Vertreter enthält, und setzen

$$Q_r^*(\tau) = \sum_{L \subset \mathfrak{S}^*} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r} = \frac{1}{2} Q_r(\tau).$$

Es sei $\mathfrak{B}$ ein nach Peano-Jordan euklidisch messbarer beschränkter Bereich der oberen Halbebene, dessen Punkte von der reellen $\tau$-Achse einen positiven Minimalabstand haben. Wir setzen für $r > 2$

(11) $$J(\mathfrak{B}) = J_r(\mathfrak{B}) = \iint\limits_{\mathfrak{B}} y^{\frac{r}{2}-2}\, dx\, dy, \quad J_r(\mathfrak{k}_0) = J_{r,0}.$$

Variiert $\tau' = L\tau$ auf $L\mathfrak{k}_0$ $(L < \mathfrak{S}^*)$, so findet man mit $\tau' = x' + iy'$ ($x'$ reell, $y' > 0$):

(12) $$J_r(L\mathfrak{k}_0) = \iint\limits_{L\mathfrak{k}_0} y'^{\frac{r}{2}} \frac{dx'\, dy'}{y'^2} = \iint\limits_{\mathfrak{k}_0} \frac{y^{\frac{r}{2}}}{|\gamma\tau + \delta|^r} \frac{dx\, dy}{y^2}.$$

Um die Konvergenz der Reihe $Q_r^*(\tau)$ zu beweisen, wenn $\tau$ auf einer beliebig vorgeschriebenen H-Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ variiert, wenden wir Hilfssatz 2 an, indem wir — offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit — voraussetzen, dass $\mathfrak{k}_0 < \mathfrak{k}$. Dann ergibt sich für irgendein $\tau_1$ auf $\mathfrak{k}$, für $\tau < \mathfrak{k}_0$ und mit der entsprechenden Bedeutung von $C_1$ aus Hilfssatz 2

(13) $$\frac{1}{|\gamma\tau + \delta|} \geqq \frac{C_1}{|\gamma\tau_1 + \delta|}, \quad J_r(L\mathfrak{k}_0) \geqq \frac{C_1^r}{|\gamma\tau_1 + \delta|^r} J_{r,0} \quad (\tau_1 < \mathfrak{k},\ L < \mathfrak{S}^*).$$

Es sei $\mathfrak{E}^*$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{S}^*$, $\mathfrak{H}$ der Halbkreis $|\tau| \leqq C_5$, $y > 0$, $\mathfrak{R}$ das Rechteck $|x| \leqq C_5$, $0 < y \leqq C_5$. Wir erhalten, da die uneigentlichen Integrale $J_r(\mathfrak{H})$ und $J_r(\mathfrak{R})$ offenbar existieren, die folgenden Ungleichungen und mit ihnen die behauptete, auf $\mathfrak{k}$ gleichmässige Konvergenz von $Q_r(\tau_1)$:

$$\sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} J_r(L\,\mathfrak{k}_0) \leqq J_r(\mathfrak{H}) \leqq J_r(\mathfrak{R}) = 2\,C_5 \frac{2}{r-2}\,C_5^{\frac{r}{2}-1} = \frac{4}{r-2}\,C_5^{\frac{r}{2}},$$

$$(14) \qquad \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\gamma\tau_1+\delta|^r} < Q_r^*(\tau_1) \leqq \frac{4}{r-2}\,C_1^{-r}\,C_5^{\frac{r}{2}}\,J_{r,0}^{-1} = \frac{C_6}{r-2}.$$

Dabei kann man unter $C_6$ eine für festes $\Gamma$, festes $\mathfrak{k}$ und beschränktes $r \geqq 0$ feste Konstante verstehen. $Q_r(\tau_1)$ wird für $r \to 2+0$ in höchstens erster Ordnung unendlich.

Im elliptischen Falle E handelt es sich um die Reihe

$$(15) \qquad Q_r(\tau) = \sum_{L \subset \Gamma} \frac{1}{|\gamma\tau+\delta|^r\,|L\tau+z|^r}, \qquad \left(L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\ r > 2\right),$$

in der $z = a + i\,b$ ($a$ reell, $b > 0$) einen festen Punkt in der oberen Halbebene bezeichnet. Wir setzen, indem wir die Bedeutungen der oben eingeführten Symbole beibehalten,

$$J_r^*(\mathfrak{B}) = \iint_{\mathfrak{B}} y^{\frac{r}{2}-2}\,|\tau+z|^{-r}\,dx\,dy$$

und gewinnen zunächst die zu (12) analoge Darstellung

$$J_r^*(L\mathfrak{B}) = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{y^{\frac{r}{2}}}{|\gamma\tau+\delta|^r}\,|L\tau+z|^{-r}\frac{dx\,dy}{y^2} = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{y^{\frac{r}{2}-2}}{|\gamma\tau+\delta|^r\,|L\tau+z|^r}\,dx\,dy.$$

Es sei $\mathfrak{k}$ eine beliebig vorgeschriebene H-Kreisscheibe, die $\mathfrak{k}_0$ im Innern enthält; $R$ sei der H-Radius von $\mathfrak{k}$. Man findet für $\tau < \mathfrak{k}_0$, $\tau_1 < \mathfrak{k}$:

$$\left|\frac{L\tau+z}{L_1\tau+z}\right| = \left|\frac{L\tau-L\tau_1}{L\tau_1+z}+1\right| \leqq \frac{|L\tau-L\tau_1|}{|L\tau_1+z|}+1.$$

$L\tau$ liegt im H-Kreis mit dem H-Radius $2R$ um den Punkt $L\tau_1$ als H-Mittelpunkt. Nach (3) gilt daher $|L\tau-L\tau_1| \leqq \mathfrak{Im}\,L\tau_1\cdot(e^{2R}-1)$ und

$$\left|\frac{L\tau+z}{L\tau_1+z}\right| \leqq \frac{\mathfrak{Im}\,L\tau_1(e^{2R}-1)}{\mathfrak{Im}\,L\tau_1}+1 = e^{2R}.$$

Zusammen mit der ersten Ungleichung (13) gibt dies

$$(16) \qquad J_r^*(L\,\mathfrak{k}_0) \geqq \frac{C_1^r\,e^{-2rR}}{|\gamma\tau_1+\delta|^r\,|L\tau_1+z|^r}\,J_{r,0}.$$

Wir setzen

$$w = w(\tau) = \frac{\tau + \bar{z}}{\tau + z} = u + iv\,(u, v \text{ reell}) = \varrho\, e^{i\vartheta} \ (\varrho > 0, \vartheta \text{ reell}).$$

$w = w(\tau)$ bildet die obere $\tau$-Halbebene auf das Gebiet $|w| < 1$ ab. Dabei gehe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ über. Aus den Formeln

$$w = 1 - \frac{2ib}{\tau + z}, \quad \tau + z = \frac{2ib}{1 - w}$$

folgt nach einer elementaren Rechnung

$$y = b\frac{1 - \varrho^2}{|1 - w|^2}, \quad |\tau + z| = \frac{2b}{|1 - w|}, \quad \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \frac{4b^2}{|1 - w|^4},$$

$$J_r^*(\mathfrak{B}) = 2^{2-r} b^{-\frac{r}{2}} \iint\limits_{w \subset \mathfrak{B}'} (1 - \varrho^2)^{\frac{r}{2} - 2} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta.$$

Mithin besteht die für alle Bereiche $\mathfrak{B}$ der genannten Eigenschaft gleichmässige Abschätzung

$$J_r^*(\mathfrak{B}) \leqq \frac{8\pi}{r - 2} (4b)^{-\frac{r}{2}}.$$

Es enthalte das System $\Gamma^*$ von jedem Paar von Matrizen $\pm L$ aus $\Gamma$ genau einen Vertreter. Wir setzen

$$Q_r^*(\tau) = \sum_{L \subset \Gamma^*} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r |L\tau + z|^r}.$$

Für jede endliche Teilmenge $\mathfrak{E}^*$ von $\Gamma^*$ und alle $\tau_1$ in $\mathfrak{k}$ gilt dann

$$(17) \quad \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\gamma\tau_1 + \delta|^r |L\tau_1 + z|^r} < Q_r^*(\tau_1) \leqq \frac{8\pi}{r - 2} (4b)^{-\frac{r}{2}} C_1^{-r} e^{2rR} J_{r,0}^{-1} = \frac{C_6}{r - 2}.$$

Dabei kann man unter $C_6$ eine feste Konstante verstehen, wenn angenommen wird, dass $\Gamma$, $\mathfrak{k}$, die obere Schranke von $r \geqq 0$ und die positive untere Schranke des Imaginärteils von $z$ festliegen.

Schliesslich wenden wir Hilfssatz 4 an, um zu beweisen, dass die Summen $Q_r(\tau)$ in jedem Vertikalstreifen $\mathfrak{V}$, gegeben durch $|x| \leqq C$, $y \geqq \xi$ ($C, \xi$ willkürliche positive Konstanten) gleichmässig konvergieren.

Liegt der Fall P oder H vor, so gilt für $\tau \subset \mathfrak{V}$ gliedweise die Abschätzung

$$\sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r} \leqq C_3^r \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\gamma i + \delta|^r} \leqq \frac{C_3^r C_6}{r - 2} = \frac{C_7}{r - 2}.$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{E}^*$ wie oben eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{S}^*$, $C_7$ eine nur von $\Gamma$, $\mathfrak{V}$ und der oberen Schranke von $r \geqq 0$ abhängige Konstante.

Im Falle E beweisen wir das entsprechende Ergebnis lediglich dann, wenn $\tau = \infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ ist. Sei dies erfüllt, $\tau < \mathfrak{V}$, $U^N$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\infty$. Man hat hier mit einer nur von $\mathfrak{V}$ abhängigen Konstanten $C_8$:

$$\left|\frac{Li + z}{L\tau + z}\right| = \left|\frac{Li - L\tau}{L\tau + z} + 1\right| < \frac{|Li - L\tau|}{b} + 1,$$

$$|Li - L\tau| = \frac{|i - \tau|}{|\gamma i + \delta|\,|\gamma\tau + \delta|} \leqq \frac{C_8 y}{\gamma^2 y} \leqq \frac{C_8}{\vartheta_0(I)^2}, \qquad (\gamma \neq 0)$$

$$\left|\frac{Li + z}{L\tau + z}\right| \leqq C_9 \qquad (\gamma \neq 0). \tag{18}$$

Für $\gamma = 0$ ist $L = \pm U^{kN}$ ($k$ ganz) und

$$\left|\frac{Li - L\tau}{L\tau + z}\right| = \frac{|i - \tau|}{|\tau + z + kN|} < \frac{C_9 y}{y} = C_9.$$

Daher besteht (18) auch für $\gamma = 0$, und es ergibt sich für $\tau < \mathfrak{V}$ die gliedweise gültige Abschätzung

$$\sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r |L\tau + z|^r} \leqq C_3^r C_9^r \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\gamma i + \delta|^r |Li + z|^r} \leqq \frac{C_{10}}{r - 2},$$

in der $C_{10}$ als eine nur von $\Gamma$, $\mathfrak{V}$, der positiven unteren Schranke von $\mathfrak{Im}\, z$ und der oberen Schranke der nicht negativen Zahl $r$ aufgefasst werden kann. Insgesamt haben wir damit bewiesen:

**Satz 1.** *Es sei $\Gamma$ eine normierte diskontinuierliche Gruppe. Die durch* (6), (7), (10) *und* (15) *erklärten Betragreihen $Q_r(\tau)$ sind für die $\tau$ in der oberen Halbebene und für $r > 2$ konvergent. Sie konvergieren gleichmässig, wenn $2 + \varepsilon_0 \leqq r \leqq r_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$, und wenn $\tau$ und gegebenenfalls $z$ auf einer beliebig vorgeschriebenen* H-*Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ liegen. Im parabolischen, hyperbolischen und, falls $\tau = \infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ ist, auch im elliptischen Falle konvergieren sie gleichmässig, wenn $2 + \varepsilon_0 \leqq r \leqq r_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$ und wenn $\tau$ und gegebenenfalls $z$ auf einem Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{V}$ von positiver Mindesthöhe liegen. Für $\tau$ (und $z$) auf $\mathfrak{k}$ und für $\tau$ (und $z$) auf $\mathfrak{V}$ gilt in allen genannten Fällen*

$$Q_r(\tau) \leqq \frac{C_{10}}{r - 2}.$$

*Dabei bezeichnet* $C_{10}$ *eine nur von* $\Gamma$, $\mathfrak{B}$ *(bzw.* $\mathfrak{k}$*) und* $r_0$ *abhängige Konstante. Wenn* $\tau = \infty$ *parabolischer Fixpunkt von* $\Gamma$ *ist, besteht diese Abschätzung im parabolischen und elliptischen Fall für* $2 + \varepsilon_0 \leqq r \leqq r_0$, $\mathfrak{Im}\, \tau \geqq \varepsilon_0, \mathfrak{Im}\, z \geqq \varepsilon_0$.

Man erschliesst die letzte Aussage des Satzes aus der allgemein gültigen Umsetzungsformel

$$Q_r(L\tau) = |\gamma\tau + \delta|^r\, Q_r(\tau).$$

Sie hat zur Folge, dass $Q_r(\tau)$ falls $\tau = \infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ ist, eine periodische Funktion von $\tau$ mit der Periode $N$ darstellt; dabei bezeichnet wie früher $U^N$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\infty$. [Vgl. hierzu die Ausführungen des folgenden Paragraphen.]

## § 3. Die Betragreihen als Funktionen von $\tau$.

**Parabolischer Fall.** Es sei $\tau = \zeta$ ein parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$, $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix mit $\zeta = A^{-1}\infty$, $P = A^{-1}\, U^N A$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\zeta$, $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ ein bestimmtes der so bezeichneten Systeme aus § 1. Es durchlaufe $M$ das System $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$. Bezeichnet $S$ eine normierte Matrix, so sei $\mathfrak{S}(A, \Gamma)\, S$ das System der $MS$, $M < \mathfrak{S}(A, \Gamma)$. Man erkennt, dass $\mathfrak{S}(A, \Gamma)\, S$ ein bestimmtes System $\mathfrak{S}(A\,S, S^{-1}\Gamma\, S)$ darstellt. Denn mit $M = A\,L, L < \Gamma$, findet man zunächst $MS = A\,S S^{-1} L S < A S S^{-1} \Gamma\, S$, und die verschiedenen $MS$ unterscheiden sich nie um einen linken Faktor $U^\xi$ ($\xi$ reell). Sei weiter

$$M_0^* < A\,S S^{-1}\Gamma\, S,\ M_0^* = A\,S S^{-1} L_0 S = A\,L_0 S,\ L_0 < \Gamma,$$

also $M_0^* S^{-1} = A\,L_0 < A\,\Gamma$. Dann gibt es genau ein ganzes $k$ und ein $M < \mathfrak{S}(A, \Gamma)$ mit $M_0^* S^{-1} = U^{kN} M$, $M_0^* = U^{kN} MS$, wo nun $MS < \mathfrak{S}(A, \Gamma)\, S$.

Überdies ist $\zeta' = S^{-1}\zeta = (A\,S)^{-1}\infty$ parabolischer Fixpunkt der Gruppe $\Gamma' = S^{-1}\Gamma\, S$. Die zugehörige Untergruppe $\mathfrak{Z}'_{\zeta'}$ von $\Gamma'$ hat die normierte Erzeugende $(A\,S)^{-1}\, U^N A\,S = S^{-1} P S$.

Wir setzen für $y = \mathfrak{Im}\ \tau > 0$ und festes $r > 0$

$$Q_r(\tau, A, \Gamma) = \sum_{M < \mathfrak{S}(A, \Gamma)} \frac{1}{|m_1\tau + m_2|^r} \qquad (\underline{M} = \{m_1, m_2\}). \tag{19}$$

Die folgenden Transformationsgleichungen sind, falls diese und die anderen auftretenden Reihen nicht konvergieren, formal, d. h. als mengentheoretische Relationen aufzufassen. In diesem Sinne hängt zunächst $Q_r(\tau, A, \Gamma)$ von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ nicht ab. Ferner gilt

(20) $$Q_r(S\tau, A, \Gamma) = |c\tau + d|^r Q_r(\tau, AS, S^{-1}\Gamma S) \qquad (S = \{c, d\}).$$

(21) $$Q_r(L\tau, A, \Gamma) = |\gamma\tau + \delta|^r Q_r(\tau, A, \Gamma) \qquad (L < \Gamma, L = \{\gamma, \delta\}).$$

Wir beweisen nun den folgenden Satz:

**Satz 2.** *Es sei $\Gamma$ eine normierte diskontinuierliche Gruppe und die durch* (19) *erklärte unendliche Reihe $Q_{r_0}(\tau, A, \Gamma)$ für ein festes $A$, ein festes $r_0 > 0$ und ein festes $\tau = \tau_0$ in der oberen Halbebene konvergent. Dann konvergieren die sämtlichen Reihen $Q_{r_0}(\tau, AS, S^{-1}\Gamma S)$, wo $S$ eine beliebige normierte Matrix darstellt, in jedem Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{V}$ von positiver Mindesthöhe gleichmässig. Ist überdies $\tau = S\infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$, so sind alle diese Reihen für die $\tau$ mit $\mathfrak{Im}\,\tau \geqq \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$ beschränkt.*

Beweis. Nach (20) konvergiert die Reihe $Q_{r_0}(S^{-1}\tau_0, AS, S^{-1}\Gamma S)$. Es genügt, die behauptete gleichmässige Konvergenz für die Reihe $Q_{r_0}(\tau, A, \Gamma)$ zu beweisen. Sie folgt aus der nach den Hilfssätzen 4 und 2 gültigen Formel

$$\frac{1}{|m_1\tau + m_2|^{r_0}} \leqq C_3^{r_0} \frac{1}{|m_1 i + m_2|^{r_0}} \leqq C_1^{-r_0} C_3^{r_0} \frac{1}{|m_1\tau_0 + m_2|^{r_0}} \qquad (\tau < \mathfrak{V}).$$

Dabei gehört $C_1$ im Sinne des Hilfssatzes 2 zu irgendeiner H-Kreisscheibe $\mathfrak{k}$, die $\tau_0$ und $i$ enthält.

Aus diesen Ungleichungen ergibt sich weiter

(22) $$Q_{r_0}(\tau, A, \Gamma) \leqq C_1^{-r_0} C_3^{r_0} Q_{r_0}(\tau_0, A, \Gamma) = C_{11} \qquad (\tau < \mathfrak{V}),$$

(23) $$Q_{r_0}(\tau, AS, S^{-1}\Gamma S) \leqq C_1'^{-r_0} C_3^{r_0} Q_{r_0}(S^{-1}\tau_0, AS, S^{-1}\Gamma S) = C_{12} \qquad (\tau < \mathfrak{V}).$$

Hier hat man $C_1'$ als die Konstante des Hilfssatzes 2 für eine H-Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ aufzufassen, die $S^{-1}\tau_0$ und $i$ enthält. $C_1'$ und $C_{12}$ hängen somit von $S$ ab. Sei $S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ normiert, $c' \neq 0$. Nach (20), (23) führt die Identität

$$|c'\tau + d'|^{r_0} = |-c'S'\tau + a'|^{-r_0}$$

zu folgender Aussage:

Die Reihe $|-c'\tau + a'|^{r_0} Q_{r_0}(\tau, AS, S^{-1}\Gamma S)$ ist auf einem Kreisbogendreieck $\mathfrak{D}$ gleichmässig konvergent und beschränkt, das von zwei H-Geraden durch $\frac{a'}{c'}$ und einen die reelle Achse im Punkte $\frac{a'}{c'}$ berührenden Kreis begrenzt wird. Falls

$\tau = S S' \infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ ist, so bleibt die genannte Reihe auf jeder die reelle Achse von oben im Punkte $\frac{a'}{c'}$ berührenden Kreisscheibe beschränkt.

Im übrigen gilt nach (20)

$$Q_{r_0}(A^{-1}\tau, A, \Gamma) = |-a_1\tau + a_0|^r Q_{r_0}(\tau, I, A\Gamma A^{-1}),$$

die Gruppe $A\Gamma A^{-1}$ enthält die Matrix $U^N$, hat also den parabolischen Fixpunkt $\tau = \infty$. Daher treffen die hier abgeleiteten Ergebnisse für $r_0 > 2$ zu. Sie gestatten in diesem Falle indessen noch eine erhebliche Verschärfung, falls (wie dies für $S = A^{-1}$ zutrifft) neben $\tau = \zeta$ auch $\tau = S\infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ ist. Bei der Formulierung dieser Ergebnisse wollen wir uns von der Voraussetzung $r_0 > 2$ nicht abhängig machen und nehmen deshalb über die Voraussetzungen von Sats 2 hinaus lediglich an, dass $r$ eine feste Zahl $> r_0$ sei, und dass $\Gamma$ die parabolischen Fixpunkte $\tau = \zeta = A^{-1}\infty$ und $\tau = S\infty$ besitze.

Da $|m_1 i + m_2|$ über alle Grenzen wächst, wenn $M$ das System $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ durchläuft, besteht zunächst die Konvergenzaussage von Satz 2 mit $r$ an Stelle von $r_0$. Eine normierte Matrix $W = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix}$ hat die Gestalt $W = \pm U^{\xi} D_{\lambda}$ ($\lambda > 0$, $\xi$ reell). Enthält das System $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ eine Matrix $M_0$ mit $\underline{(M_0)} = \{0, m_{0,2}\}$, so setzen wir $M_0 = A L_0$ und finden

$$A L_0 \infty = \infty, \quad \zeta = A^{-1}\infty = L_0 \infty \sim \infty(\Gamma).$$

Wenn umgekehrt $\zeta \sim \infty(\Gamma)$, also etwa $\zeta = L\infty$ ($L < \Gamma$), so gilt $\infty = A L \infty$; wir bestimmen ein ganzes $k$ und ein $M_0 < \mathfrak{S}(A, \Gamma)$ mit $A L = U^{kN} M_0$ und erhalten $\infty = M_0 \infty$, so dass $\underline{M_0} = \{m_{0,1}, m_{0,2}\}$, $m_{0,1} = 0$. $M_0 < \mathfrak{S}(A, \Gamma)$ mit $m_{0,1} = 0$ bedeutet also, dass $\zeta \sim \infty(\Gamma)$. Verschwindet sowohl in $M_0$ als auch in $M_1$ ($M_0, M_1 < \mathfrak{S}(A, \Gamma)$) das Element links unten, so gilt mit $M_1 = A L_1$, $L_1 < \Gamma$ nach Hilfssatz 5:

$$M_0 M_1^{-1} = A L_0 L_1^{-1} A^{-1} < A\Gamma A^{-1}, \quad M_0 M_1^{-1} = \pm U^{kN} \qquad (k \text{ ganz}),$$

daher $M_1 = M_0$ oder $M_1 = -U^{k_0 N} M_0$, $k_0$ ganz.

Für $\tau < \mathfrak{B}$ und $M < \mathfrak{S}(A, \Gamma)$ ergibt sich nun

$$\frac{1}{|m_1\tau + m_2|^r} \leqq \frac{1}{|m_1\tau + m_2|^{r-r_0}} \frac{C_3^{r_0}}{|m_1 i + m_2|^{r_0}} \leqq \frac{C_3^{r_0}}{\vartheta_0(A)^{r-r_0} y^{r-r_0}} \frac{1}{|m_1 i + m_2|^{r_0}}.$$
$$(m_1 \neq 0).$$

Berücksichtigt man, dass $\tau = S\infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ und dass folglich $Q_r(\tau, A S, S^{-1}\Gamma S)$ nach (21) eine periodische Funktion von $\tau$ mit einer reellen Periode ist, so führt dies zu dem folgenden Sachverhalt:

**Satz 3.** *Unter den Voraussetzungen und in den Bezeichnungen von Satz 2 sei $r$ eine feste Zahl $> r_0$, und $\Gamma$ habe die parabolischen Fixpunkte $\tau = \zeta = A^{-1}\infty$, $\tau = S\infty$. Dann strebt $Q_r(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma S)$ für $y \to +\infty$ gleichmässig gegen Null, falls nicht $(A\,S)^{-1}\infty = S^{-1}\zeta \sim \infty\,(S^{-1}\Gamma S)$. Diese Beziehung bedeutet, dass eine Matrix $M'$ in $\mathfrak{S}(A\,S, S^{-1}\Gamma S)$ existiert, deren Element links unten verschwindet. Wenn sie erfüllt ist, so gibt es genau zwei solche Matrizen $M' = \pm\, U^{\xi} D_{\lambda}$ mit reellen $\xi$, verschiedenen Vorzeichen und dem gleichen $\lambda > 0$, und es strebt $Q_r(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma S)$ für $y \to +\infty$ gleichmässig gegen $2\lambda^r$. Die entsprechenden Limesbeziehungen gelten bei normiertem $S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ mit $c' \neq 0$ für das Verhalten der Funktion*

$$\left|\tau - \frac{a'}{c'}\right|^r Q_r(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma S),$$

*wenn $\tau = S\,S'\infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ ist und $\tau$ gegen $\frac{a'}{c'}$ strebt. (Hier braucht $\tau = S\infty$ nicht parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ zu sein.)*

Im Falle $r > 2$ bestehen die sämtlichen Aussagen dieses Satzes für alle $A$, $S, S'$ der genannten Beschaffenheit.

**Elliptischer Fall.** Wenn $\Gamma$ parabolische Matrizen enthält, so sei $\tau = \zeta = A^{-1}\infty$ mit normiertem $A$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$. Sonst sei $A = I$. Wir schreiben

$$Q_r(\tau, A, \Gamma, z) = \sum_{M \subset A\Gamma} \frac{1}{|m_1\tau + m_2|^r\,|M\tau + z|^r} \tag{24}$$

$$(z = a + i\,b\,(a \text{ reell}, b > 0), \underline{M} = \{m_1, m_2\}).$$

In voller Analogie zu den Umsetzungsformeln (20), (21) im parabolischen Falle bestehen hier die Gleichungen

$$Q_r(S\tau, A, \Gamma, z) = |c\tau + d|^r\, Q_r(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma S, z) \qquad (\underline{S} = \{c, d\}), \tag{25}$$

falls $\Gamma$ parabolische Matrizen enthält; sowie stets

$$Q_r(L\tau, A, \Gamma, z) = |\gamma\tau + \delta|^r\, Q_r(\tau, A, \Gamma, z) \qquad (L < \Gamma,\ \underline{L} = \{\gamma, \delta\}). \tag{26}$$

Ferner ergibt sich nach den Überlegungen, die zum Beweise von Satz 2 und der Ungleichung (16) führen, als Analogon von Satz 2:

**Satz 4.** *Es sei $\Gamma$ eine normierte diskontinuierliche Gruppe und die Betragreihe $Q_{r_0}(\tau_0, A, \Gamma, z_0)$ für ein festes $A$, ein festes $r_0 > 0$ und feste $\tau_0$, $z_0$ in der oberen Halbebene konvergent. Dann konvergieren die sämtlichen Reihen $Q_{r_0}(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma S, z)$,* *wenn $S$ eine normierte Matrix darstellt und $\tau$, $z$ auf einer beliebig vorgegebenen H-Kreisscheibe liegen, gleichmässig. Dabei ist $A = S = I$, wenn $\Gamma$ keine parabolischen Matrizen enthält, im anderen Falle dagegen $\tau = \zeta = A^{-1}\infty$ als parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ vorauszusetzen.*

Aus diesem Satze folgt, dass die Reihen $Q_{r_0}(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma\,S, z)$ sämtlich beschränkt sind, wenn $\tau$ und $z$ auf einer H-Kreisscheibe liegen. Falls $\tau = A^{-1}\infty$ und $\tau = S\infty$ parabolische Fixpunkte von $\Gamma$ sind, kann die gleichmässige Konvergenz dieser Reihen $Q_{r_0}(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma\,S, z)$ auch für die $\tau$ und $z$ auf einem Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{V}$ von positiver Mindesthöhe erschlossen werden. Daraus ergibt sich dann die Beschränktheit der Betragreihen $Q_{r_0}(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma\,S, z)$ für die $\tau$ und $z$ in den Halbebenen $\mathfrak{Im}\,\tau \geqq \varepsilon_0$, $\mathfrak{Im}\,z \geqq \varepsilon_0\,(\varepsilon_0 > 0)$.

Um diese Tatsachen zu erkennen, bedient man sich der Abschätzungen, die zu Satz 3, und derjenigen, welche zu der Ungleichung (18) führen, sowie des folgenden Umstandes: Für feste $\tau_0$, $z_0$, und wenn $\tau$ und $z$ in einem Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{V}$ von positiver Mindesthöhe liegen, erweist sich $\left|\dfrac{M\tau_0 + z_0}{M\tau + z}\right|$ wegen

$$\left|\frac{M\tau_0 + z_0}{M\tau + z}\right| = \left|\frac{M\tau_0 + z_0}{M\tau_0 + z}\right| \left|\frac{M\tau_0 + z}{M\tau + z}\right| \leqq \left(1 + \left|\frac{z_0 - z}{M\tau_0 + z}\right|\right) \left(1 + \left|\frac{M\tau_0 - M\tau}{M\tau + z}\right|\right)$$

als beschränkt; dabei hat man für $M$, wofern $(M) = \{m_1, m_2\}$ ist und $m_1$ verschwindet, die Matrizen

$$M = \pm\, U^{\xi + kN_0} D_\lambda \text{ in } \frac{M\tau_0 - M\tau}{M\tau + z} = \frac{\lambda^2(\tau_0 - \tau)}{\lambda^2\tau + z + \xi + kN_0}$$

einzutragen, wo $k$ die ganzen Zahlen durchläuft, während $N_0 > 0$, $\lambda > 0$ und die reelle Zahl $\xi$ festliegen. Ausserdem ist $Q_r(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma\,S, z)$ eine periodische Funktion mit einer reellen Periode $N_0 > 0$ nicht nur in $\tau$, sondern auch in $z$.

Damit haben wir den ersten Teil des nachstehenden Satzes bewiesen:

**Satz 5.** *Unter den Voraussetzungen und in den Bezeichnungen von Satz 4 habe $\Gamma$ die parabolischen Fixpunkte $A^{-1}\infty$ und $S\infty$. Dann konvergiert zunächst die Betragreihe $Q_{r_0}(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma\,S, z)$ $(r = r_0)$ gleichmässig für die $\tau$ und $z$ in einem Vertikalhalbstreifen von positiver Mindesthöhe. Ferner streben für $r > r_0$ die Funktionen*

$$Q_r(\tau, A\,S, S^{-1}\Gamma\,S, z), \quad \left|\tau' - \frac{a'}{c'}\right|^r Q_r(\tau', A\,S, S^{-1}\Gamma\,S, z)$$

*gleichmässig gegen Null, wenn bei der ersten Funktion $A^{-1}\infty$ und $S\infty$ parabolische Fixpunkte von $\Gamma$ sind, $y$ über alle Grenzen wächst und $\mathfrak{Im}\, z \geqq \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$ ist; wenn bei der zweiten Funktion $S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix, $c' \neq 0$ ist, $A^{-1}\infty$ und $SS'\infty$ parabolische Fixpunkte von $\Gamma$ sind, $\tau'$ gegen $\frac{a'}{c'}$ strebt und $\mathfrak{Im}\, z \geqq \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$ bleibt; hier braucht $S\infty$ nicht parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$ zu sein.*

Im Falle $r > 2$ bestehen die sämtlichen Aussagen dieses Satzes für alle $A, S, S'$ der genannten Beschaffenheit.

Zum Beweise des zweiten Teils von Satz 5 bedarf man neben einfachsten Abschätzungen der zitierten Art für $S^{-1}\zeta \sim \infty\, (S^{-1}\Gamma S)$ noch einer anderen Überlegung. Die mit den oben angegebenen Matrizen $M = \pm\, U^{\xi + kN_0} D_\lambda$ aus $ASS^{-1}\Gamma S = A\Gamma S$ gebildete Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda^2\tau + z + \xi + kN_0|^r} \leqq \frac{1}{(\lambda^2 y)^{r'}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda^2\tau + z + \xi + kN_0|^{r-r'}},$$

in der $r' > 0$, $r - r' > 1$, strebt gleichmässig gegen Null, wenn $\tau$ in einem Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{V}$ über alle Grenzen wächst. Um die Reihe rechts unter diesen Umständen als beschränkt nachzuweisen, nehme man vorübergehend $a = \mathfrak{Re}\, z$ als beschränkt an und bediene sich der für hinreichend grosses $k$ gültigen Abschätzung

$$|\lambda^2\tau + z + \xi + kN_0| \geqq |kN_0 + \xi + a + \lambda^2 x| \geqq |k|\,N_0 - |\xi + a + \lambda^2 x| \geqq \frac{N_0}{2}|k|.$$

Im übrigen ist die in den Formeln und Sätzen dieses Abschnittes zutage tretende Asymmetrie bezüglich $\tau$ und $z$ nur eine scheinbare. Denn man hat mit $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} |m_1\tau + m_2|\,|M\tau + z| &= |m_0\tau + m_3 + z(m_1\tau + m_2)| = |m_0\bar{\tau} + m_3 + \bar{z}(m_1\bar{\tau} + m_2)| \\ &= |m_2(-\bar{z}) - m_3 + (-\bar{\tau})\,((-m_1)(-\bar{z}) + m_0)| \\ &= |(-m_1)(-\bar{z}) + m_0|\,|M^{-1}(-\bar{z}) + (-\bar{\tau})| \end{aligned}$$

und daher $Q_r(\tau, A, \Gamma, z) = Q_r(-\bar{z}, A^{-1}, A\Gamma A^{-1}, -\bar{\tau})$.

**Hyperbolischer Fall.** Sei $\eta, \eta'$ ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma$, $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \eta_1, & \eta_2 \\ \eta_1', & \eta_2' \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix mit $\mathsf{H}\eta = 0$, $\mathsf{H}\eta' = \infty$, $H = \mathsf{H}^{-1} D_{\mu'} \mathsf{H}$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta,\eta'}$, und $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2 \\ \beta_1', & \beta_2' \end{pmatrix}$ durchlaufe ein System $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$.

Die allgemeinen Betragreihen vom hyperbolischen Typus werden durch

$$X_r(\tau, \mathsf{H}, \Gamma) = \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H},\Gamma)} \frac{1}{|\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{r}{2}} |\beta_1' \tau + \beta_2'|^{\frac{r}{2}}} \tag{27}$$

erklärt. Ändert man das System $\mathfrak{S}$ $(\mathsf{H}, \Gamma)$ an der Stelle $\mathsf{B}$ ab, d. h. ersetzt man $\mathsf{B}$ durch $D_{\mu'}^{k}$ $\mathsf{B}$ ($k$ ganz), so bleibt das betreffende Reihenglied erhalten. Mithin hängt $X_r(\tau, \mathsf{H}, \Gamma)$ von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ nicht ab.

Wir beweisen zunächst, dass die Reihen $X_r(\tau, \mathsf{H}, \Gamma)$ für $2 + \varepsilon_0 \leqq r \leqq r_0$ ($\varepsilon_0 > 0, r_0 > 2$) und für $\tau$ auf einer beliebigen abgeschlossenen H-Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ gleichmässig konvergieren. Zum Beweise dient der.

**Hilfssatz 7.** *Es seien $c_0$, $c_1$, $R$ willkürliche positive Zahlen mit $c_0 < c_1$. Für die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte $\tau$, deren H-Abstand von irgendeinem Punkte $\tau_1$ mit $c_0 \leqq |\tau_1| \leqq c_1$ höchstens gleich $R$ ist, gilt*

$$c_0 e^{-R} \leqq |\tau| \leqq c_1 e^{+R}.$$

Beweis. Man hat nach (4)

$$c_0 e^{-R} \leqq |\tau_1| e^{-R} \leqq |\tau| \leqq |\tau_1| e^{+R} \leqq c_1 e^{R}, \qquad \text{q. e. d. —}$$

Wir finden nun

$$X_r(\tau, \mathsf{H}, \Gamma) = \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H},\Gamma)} \frac{|\mathsf{B}\tau|^{-\frac{r}{2}}}{|\beta_1' \tau + \beta_2'|^r}.$$

Die Gruppe $\Gamma' = \mathsf{H}\Gamma\mathsf{H}^{-1}$ hat das hyperbolische Fixpunktepaar $0, \infty$ und die zugehörige Untergruppe $\mathfrak{Z}_{0,\infty}' = \mathsf{H}\,\mathfrak{Z}_{\eta,\eta'}\,\mathsf{H}^{-1}$ hat die normierte Erzeugende $D_{\mu'}$. Die Matrizen $\mathsf{B} = \mathsf{H}L$ durchlaufen genau dann das System $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$, wenn die Matrizen $\mathsf{B}\mathsf{H}^{-1} = L' = \mathsf{H}L\mathsf{H}^{-1} < \Gamma'$ ein volles System $\mathfrak{S}(I, \Gamma')$von nicht eigentlich ähnlichen Matrizen aus $\Gamma'$ durchlaufen. Mit $\mathsf{H}^{-1} = \begin{pmatrix} \eta_2' & -\eta_2 \\ -\eta_1' & \eta_1 \end{pmatrix}$ wird

$$X_r(\mathsf{H}^{-1}\tau, \mathsf{H}, \Gamma) = |-\eta_1'\tau + \eta_1|^r \sum_{L' \subset \mathfrak{S}(I,\Gamma')} \frac{|L'\tau|^{-\frac{r}{2}}}{|\gamma'\tau + \delta'|^r} \tag{28}$$
$$(L' = \{\gamma', \delta'\}).$$

Hier wähle man $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ so, dass $\mathfrak{S}(I, \Gamma')$ durch (7) (mit $L'$ an Stelle von $L$) beschrieben wird. Dann gilt nach Hilfssatz 7, wenn $\mathfrak{k}$ den H-Radius $R$ aufweist, für $\tau$ auf $\mathfrak{k}$

$$\mu'^{-\frac{r}{2}} e^{-\frac{r}{2}R} \leqq |L'\tau|^{-\frac{r}{2}} \leqq \mu'^{+\frac{r}{2}} e^{+\frac{r}{2}R},$$

und die behauptete Konvergenz folgt aus Satz 1.

Sei $S$ eine normierte Matrix, $(\underline{S}) = \{c, d\}$. Zwischen den Systemen $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ und $\mathfrak{S}(\mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S)$ wird durch

$$\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)\,S = \mathfrak{S}(\mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S) \tag{29}$$

eine umkehrbar eindeutige Beziehung gestiftet. Dabei bedeutet $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)\,S$ die Menge der $\mathsf{B}\,S, \mathsf{B} < \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$. Nach (29) gilt im gleichen Sinne, wie er für (20), (21) verabredet wurde,

$$X_r(S\tau, \mathsf{H}, \Gamma) = |c\tau + d|^r X_r(\tau, \mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S) \qquad (\underline{S} = \{c, d\}), \tag{30}$$

$$X_r(L\tau, \mathsf{H}, \Gamma) = |\gamma\tau + \delta|^r X_r(\tau, \mathsf{H}, \Gamma) \qquad (L < \Gamma, \underline{L} = \{\gamma, \delta\}), \tag{31}$$

sowie der nachstehende, zu Satz 2 analoge.

**Satz 6.** *Es sei $\Gamma$ eine normierte diskontinuierliche Gruppe. Die durch (27) erklärte Betragreihe $X_{r_0}(\tau_0, \mathsf{H}, \Gamma)$ sei für ein festes $\mathsf{H}$, ein festes $r_0 > 0$ und ein festes $\tau = \tau_0$ in der oberen Halbebene konvergent. Dann konvergieren die sämtlichen Betragreihen $X_{r_0}(\tau, \mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S)$, wo $S$ eine beliebige normierte Matrix darstellt, in jedem Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{V}$ von positiver Mindesthöhe gleichmässig.*

Der Beweis verläuft in voller Analogie zu dem von Satz 2; ebenso erhält man die zu (22), (23) analogen Ungleichungen

$$X_{r_0}(\tau, \mathsf{H}, \Gamma) \leqq C_1^{-r_0} C_3^{r_0} X_{r_0}(\tau_0, \mathsf{H}, \Gamma) = C_{13} \qquad (\tau < \mathfrak{V}), \tag{32}$$

$$X_{r_0}(\tau, \mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S) \leqq C_1'^{-r_0} C_3^{r_0} X_{r_0}(S^{-1}\tau_0, \mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S) = C_{14} \qquad (\tau < \mathfrak{V}) \tag{33}$$

($C_1'$ und $C_{14}$ hängen von $S$ ab). Bezeichnet $S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix mit $c' \neq 0$, so ist die Reihe $|-c'\tau + a'|^{r_0} X_{r_0}(\tau, \mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S)$ im obengenannten Kreisbogendreieck $\mathfrak{D}$ gleichmässig konvergent und beschränkt. Schliesslich besteht analog zu Satz 3:

**Satz 7.** *Unter den Voraussetzungen und in den Bezeichnungen von Satz 6 sei $r$ eine feste Zahl $> r_0$, und $\Gamma$ habe das hyperbolische Fixpunktepaar $\eta = \mathsf{H}^{-1}0, \eta' = \mathsf{H}^{-1}\infty$. Dann streben die Funktionen*

$$X_r(\tau, \mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S), \quad \left|\tau' - \frac{a'}{c'}\right|^r X_r(\tau', \mathsf{H}\,S, S^{-1}\Gamma\,S)$$

*gleichmässig gegen Null, wenn bei der ersten Funktion $\Gamma$ den parabolischen Fixpunkt*

*$S\infty$ hat und $y$ über alle Grenzen wächst; wenn bei der zweiten Funktion $\Gamma$ den parabolischen Fixpunkt $SS'\infty$ hat und $\tau'$ gegen $\frac{a'}{c'}$ strebt. Hier ist $S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix mit $c' \neq 0$.*

Im Falle $r > 2$ bestehen die sämtlichen Aussagen dieses Satzes für alle $\mathsf{H}, S, S'$ der genannten Beschaffenheit.

Zum Beweise sei $\mathsf{B} = \mathsf{H}\,L < \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$. Aus $\beta_1 = 0$ folgt $\mathsf{B}\,\infty = 0$, $\infty = L^{-1}\eta$, was nach Hilfssatz 5 nicht zutreffen kann; denn $\Gamma$ hat den parabolischen Fixpunkt $\infty$ und enthält die hyperbolische Matrix $L^{-1}HL$ mit dem Fixpunkt $L^{-1}\eta$. Ebenso widerlegt man $\beta_1' = 0$.

Nun folgt für die $\tau$ in $\mathfrak{B}$ aus Hilfssatz 4 und 6, dass

$$\frac{1}{|\beta_1\tau + \beta_2|^{\frac{r}{2}}\,|\beta_1'\tau + \beta_2'|^{\frac{r}{2}}}$$

$$\leqq \frac{1}{|\beta_1\tau + \beta_2|^{\frac{r-r_0}{2}}\,|\beta_1'\tau + \beta_2'|^{\frac{r-r_0}{2}}}\;\frac{C_3^{r_0}}{|\beta_1 i + \beta_2|^{\frac{r_0}{2}}\,|\beta_1' i + \beta_2'|^{\frac{r_0}{2}}}$$

$$\leqq \frac{C_3^{r_0}}{\vartheta_0(\mathsf{H}, \Gamma)^{\frac{r-r_0}{2}}\,y^{r-r_0}}\;\frac{1}{|\beta_1 i + \beta_2|^{\frac{r_0}{2}}\,|\beta_1' i + \beta_2'|^{\frac{r_0}{2}}}.$$

Die Aussagen über das Verhalten der Betragreihen bei Annäherung an den Rand der oberen Halbebene gewinnen in der Theorie der *analytischen Poincaréreihen* entscheidende Bedeutung.

## § 4. Kanonische Fundamentalbereiche von Grenzkreisgruppen.

Dass eine normierte diskontinuierliche Gruppe $\Gamma$ in der oberen Halbebene einen Fundamentalbereich besitzt, lehrt die Konstruktion des *Normalpolygons* von $\Gamma$ [(W), S. 154—156]. Es sei $\mathfrak{N}$ ein Normalpolygon, $\mathfrak{P}$ das von der Gesamtheit der $L\mathfrak{N}(L < \Gamma)$ gebildete *Parkett*. Von einer *Grenzkreisgruppe* pflegt man sich vorzustellen, dass sich ihr Parkett $\mathfrak{P}$ gegen den Rand der oberen Halbebene verdichtet. Um dies genauer zu formulieren, wird man $\Gamma$ eine Grenzkreisgruppe nennen, wenn jeder Randpunkt $\tau = u$ der oberen Halbebene Häufungspunkt einer Punktfolge ist, deren Glieder lauter paarweise verschiedenen Bereichen $L\mathfrak{N}(L < \Gamma)$ des Parketts $\mathfrak{P}$ angehören. Da es wünschenswert erscheinen muss, die Eigenschaften einer Grenzkreisgruppe vor der Durchführung geometrischer Konstruktionen festzulegen, definieren wir nun:

*Zu jedem Randpunkt $\tau = u$ der oberen Halbebene gibt es zwei Folgen von Punkten $\tau_n$, $\tau_n'$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) in der oberen Halbebene derart, dass*

$$\lim_{n \to \infty} \tau_n = \lim_{n \to \infty} \tau_n' = u, \quad \tau_n' = L_n \tau_n \qquad (L_n < \Gamma),$$

*wo die Matrizen $L_n$ paarweise verschieden sind.*

Es sei von jetzt an, wofern nicht ausdrücklich etwas anderes bestimmt wird, $\Gamma$ eine Grenzkreisgruppe.

Die *kanonischen Fundamentalbereiche* von $\Gamma$, die wir im folgenden konstruieren wollen, erscheinen als konkrete Bilder des *abstrakten Fundamentalbereichs* von $\Gamma$; dieser stellt eine durch $\Gamma$ eindeutig bestimmte Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$ dar. Es sei $\mathfrak{H}_0$ die Menge der Punkte in der oberen Halbebene und der parabolischen Fixpunkte von $\Gamma$. Jedes System von untereinander nach $\Gamma$ äquivalenten Punkten von $\mathfrak{H}_0$ wird als *ein Punkt* $\mathfrak{p}_0$ von $\mathfrak{F}$ aufgefasst. Ein Punkt $\tau_0$ in $\mathfrak{H}_0$ heisst ein Vertreter von $\mathfrak{p}_0$, wenn er dem $\mathfrak{p}_0$ definierenden System angehört. Zwischen diesen Systemen und den Punkten von $\mathfrak{F}$ besteht eine eineindeutige Zuordnung.

Vor der Erklärung der Umgebungen definieren wir die *ortsuniformisierenden Variablen* der Punkte von $\mathfrak{H}_0$. Ein Punkt $\tau = \tau_0$ in der oberen Halbebene erhält die ortsuniformisierende Variable $t = \dfrac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}$, wenn er nicht Fixpunkt von $\Gamma$ ist. Ist er (elliptischer) Fixpunkt von $\Gamma$ und ist $l$ seine Ordnung, d. h. bezeichnet $l$ die Anzahl der Substitutionen von $\bar{\Gamma}$ mit dem Fixpunkt $\tau = \tau_0$, so erhält $\tau_0$ die ortsuniformisierende Variable $t = \left(\dfrac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^l$. Sei schliesslich $\tau = \tau_0 = \zeta = A^{-1}\infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$, dabei $A$ eine normierte Matrix und $P = A^{-1}U^N A$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\zeta$. Dann entspreche $\tau = \tau_0 = \zeta$ die ortsuniformisierende Variable $t = e^{2\pi i \frac{A\tau}{N}}$. Als Umgebung von $\tau_0$ innerhalb $\mathfrak{H}_0$ bestimmen wir in allen Fällen ein volles System von nach $\Gamma$ inäquivalenten Punkten $\tau$ der oberen Halbebene mit $|t| < \varrho$ bei hinreichend kleinem $\varrho > 0$. Der punktierte Kreis $0 < |t| < \varrho$ ist das schlichte konforme Bild a) einer punktierten H-Kreisscheibe mit dem H-Mittelpunkt $\tau_0$, wenn $\tau_0$ nicht Fixpunkt von $\Gamma$ ist; b) eines einseitig offenen H-Kreissektors mit dem H-Mittelpunkt $\tau_0$ und der Winkelöffnung $\dfrac{2\pi}{l}$, wenn $\tau_0$ elliptischer Fixpunkt der Ordnung $l$ ist; c) eines einseitig offenen Vertikalhalbstreifens der Breite $N$ in der Variablen $A\tau$, wenn $\tau_0$ der parabolische Fixpunkt $\tau_0 = \zeta = A^{-1}\infty$ ist. Man bestätigt hierzu leicht, dass für hinreichend kleines $\varrho$ die genannten Punktmengen tatsächlich aus paarweise nach $\Gamma$ inäquivalenten Punkten bestehen. Zu einer *Umgebung* $\mathfrak{U}$ *eines Punktes* $\mathfrak{p}_0$ von $\mathfrak{F}$ zählen wir diejenigen Punkte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$, deren Vertreter $\tau$ einer Umgebung von $\tau_0$ in der oberen Halbebene angehören.

Jeder zusammenhängende Fundamentalbereich von $\Gamma$ kann als konkrete Darstellung der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ aufgefasst werden. Sei insbesondere $\mathfrak{N}$ das Normalpolygon von $\Gamma$. Dieses lässt sich, wie man ohne nennenswerte Schwierigkeiten erkennt, H-geradlinig *triangulieren*. Dadurch wird eine Triangulation der abstrakten Fläche $\mathfrak{F}$ bewirkt, bei welcher die Elementarstrecken so erklärt sind, dass sie nach Übertragung in die obere Halbebene dort als Stücke von H-Geraden erscheinen. Die angegebenen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ erweisen diese als Riemannsche Fläche, $\mathfrak{H}_0$ als die universelle, über den Fixpunkten in den entsprechenden Ordnungen verzweigte *Überlagerungsfläche* von $\mathfrak{F}$. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktionsvorschrift für die abstrakte, universelle, in vorgegebener Art verzweigte Überlagerungsfläche von $\mathfrak{F}$. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{c}_0$ eine stetige, die Verzweigungspunkte vermeidende Kurve auf $\mathfrak{F}$, so überdecken wir sie mit solchen Umgebungen von Kurvenpunkten, welche in $\mathfrak{H}_0$ durch vollständige H-Kreise vertreten werden. Dann lässt sich $\mathfrak{c}_0$ stückweise in die obere Halbebene übertragen, und die Stücke fügen sich dort zu einer stetigen, die Fixpunkte vermeidenden Kurve $\mathfrak{C}_0$ zusammen. Umgekehrt erhält man durch dieses Verfahren aus einer stetigen, die Fixpunkte von $\Gamma$ vermeidenden Kurve in der oberen Halbebene eine stetige, die Verzweigungspunkte vermeidende Kurve auf $\mathfrak{F}$. Daher besteht zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}_0$ in der Tat der gleiche Zusammenhang wie zwischen einer Riemannschen Fläche und ihrer im Sinne (W), § 9 erklärten universellen Überlagerungsfläche.

$\Gamma$ heisst eine *Grenzkreisgruppe von erster Art*, wenn $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Riemannsche Fläche darstellt, wozu notwendig gehört, dass $\mathfrak{H}_0$ über nur endlich vielen Punkten von $\mathfrak{F}$ verzweigt ist; dies wiederum besagt, dass nur endlich viele paarweise inäquivalente Fixpunkte von $\Gamma$ vorhanden sind. Ist $\mathfrak{F}$ keine geschlossene Riemannsche Fläche, so heisst $\Gamma$ eine Grenzkreisgruppe von zweiter Art. Die Eigenschaft einer Grenzkreisgruppe $\Gamma$, von erster Art zu sein, bedeutet, wie man zeigen kann, sowohl, dass $\Gamma$ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, als auch, dass ein Fundamentalbereich von $\Gamma$ endlichen H-Flächeninhalt hat, als auch, dass $\Gamma$ ein algebraisches Gebilde mit endlich vielen Relativverzweigungen uniformisiert. Wir setzen von hier ab voraus, dass $\Gamma$ eine Grenzkreisgruppe von erster Art sei.

Die Konstruktion eines kanonischen Fundamentalbereichs von $\Gamma$ verläuft wie folgt: Man wähle auf $\mathfrak{F}$ einen Nichtverzweigungspunkt $\mathfrak{p}^0$ aus und zerlege $\mathfrak{F}$ durch das kanonische Schnittsystem der $p$ Paare konjugierter *Rückkehrschnitte* in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{F}^*$. Die Schnitte sollen die Verzweigungspunkte vermeiden, zu je zweien nur den *Kreuzungspunkt* $\mathfrak{p}^0$ gemein haben und aus endlich vielen Elementarstrecken zusammengesetzt sein. Ferner führe man von $\mathfrak{p}^0$ aus zu jedem der endlich vielen, im Innern von $\mathfrak{F}^*$ gelegenen Verzweigungspunkte einen einfachen Elementarstreckenzug als *Verzweigungsschnitt.* Je zwei Schnitte, Rückkehr- oder Verzweigungsschnitte haben den Kreuzungspunkt als einzigen Punkt miteinander gemein. Die damit entstandene, einfach zusammenhängende wie beschrieben aufgeschnittene Fläche heisse $\mathfrak{F}'$.

Die Vorstellung, dass $\mathfrak{H}_0$ als eine universelle Überlagerungsfläche aus Blättern von der Struktur dieser Fläche $\mathfrak{F}'$ durch einen bestimmten Heftungsprozess zusammengesetzt werden kann[1], führt unmittelbar auf den Begriff des kanonischen Fundamentalbereichs von $\Gamma$. Ein solcher ist nichts anderes als ein einzelnes (beliebiges) Exemplar der bei dieser Heftung verwendeten, untereinander und zu $\mathfrak{F}'$ kongruenten Blätter. Seine exakte Erklärung geschieht durch Übertragung der auf der abstrakten Fläche $\mathfrak{F}'$ verlaufenden stetigen Kurven in die obere Halbebene: Man bestimmt einen Punkt $\mathfrak{p}^1$ im Innern von $\mathfrak{F}'$, wählt in der oberen Halbebene einen Vertreter $\tau^1$ von $\mathfrak{p}^1$ und gewinnt alsdann einen kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{K}$ in der oberen Halbebene als die Gesamtheit der Endpunkte derjenigen stetigen Kurven, welche den Anfangspunkt $\tau^1$ haben und durch Übertragung der stetigen, in $\mathfrak{F}'$ verlaufenden und dort im Punkte $\mathfrak{p}^1$ beginnenden Kurven entstehen. $\mathfrak{K}$ wird von endlich vielen H-Strecken und H-Halbgeraden begrenzt. Jedem Ufer eines Rückkehr- oder Verzweigungsschnitts entspricht ein dem Rande von $\mathfrak{K}$ angehörender Elementarstreckenzug, welcher eine *Kante* genannt wird. Die Koinzidenz der beiden Ufer eines Schnittes auf $\mathfrak{F}$ findet in der oberen Halbebene ihren Ausdruck in der Existenz eines Paares von Matrizen $L$ und $L^{-1}$ aus $\Gamma$, welche die den beiden Ufern entsprechenden Kanten aufeinander abbilden. Dass diese hierdurch erklärten Matrizen, die die Zuordnung der sämtlichen Kantenpaare des Randes von $\mathfrak{K}$ bewirken, ein *endliches Erzeugendensystem* von $\Gamma$ darstellen, wird im folgenden nicht verwendet, ebenso treten auch die zwischen diesen Erzeugenden bestehenden, $\Gamma$ *definierenden Relationen*

---

[1] Vgl. das Prinzip der relationenfreien Heftung bei P. Koebe, Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I, Math. Ann. **67** (1909), S. 145—224; siehe auch P. Koebe, Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (Konforme Abbildung und Uniformisierung, Preisschrift), Acta math. **50** (1927), S. 29—257.

nicht auf. Dagegen muss hervorgehoben werden, dass $\mathfrak{K}$ von jedem System von untereinander äquivalenten elliptischen oder parabolischen Fixpunkten von $\Gamma$ genau einen Vertreter enthält. Dieser liegt stets am Rande von $\mathfrak{K}$. Handelt es sich um einen elliptischen Fixpunkt der Ordnung $l$, so besteht der Rand von $\mathfrak{K}$ in der Nähe des Fixpunktes aus zwei von ihm ausgehenden, vermöge einer H-Drehung um den Fixpunkt als Drehzentrum und den Winkel $\frac{2\pi}{l}$ einander H-kongruenten H-Strecken. Handelt es sich um einen parabolischen Fixpunkt $\zeta = A^{-1}\infty$, so besteht der Rand von $\mathfrak{K}$ in der Nähe von $\zeta = A^{-1}\infty$ aus zwei H-Halbgeraden durch $\zeta$, deren eine auf die andere durch die normierte Erzeugende $P$ von $\mathfrak{Z}_\zeta$ abgebildet wird. Dies rechtfertigt die Bezeichnung der parabolischen Fixpunkte als der (parabolischen) Spitzen von $\mathfrak{K}$ bzw. $\Gamma$.

Wir kommen nun zu den eingangs angekündigten *Konfigurationen*, die aus unendlich vielen, geeignet bestimmten kanonischen Fundamentalbereichen von $\Gamma$ zusammengesetzt sind.

Es sei erstens $\tau = \infty$ parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$. Wir wählen einen kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{K}$ von $\Gamma$ aus, welcher den Punkt $\infty$ enthält. In hinreichender Höhe besteht $\mathfrak{K}$ aus einem einseitig abgeschlossenen Vertikalhalbstreifen der Breite $N$, wo $U^N$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\infty$ angibt. Ist $L_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} < \Gamma$, $\gamma_0 \neq 0$, so hat $\Gamma$ die Spitze

$$\xi = L_0 \infty = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} \neq \infty.$$

Nach der Konstruktion der kanonischen Fundamentalbereiche kann und soll $\mathfrak{K}$ so bestimmt werden, dass der genannte Vertikalhalbstreifen seitlich von den Geraden $\mathfrak{h}$, gegeben durch $x = \xi$, und $U^N\mathfrak{h}$, gegeben durch $x = \xi + N$, berandet wird. Beide Geraden, $\mathfrak{h}$ und $U^N\mathfrak{h}$, bilden in hinreichend grosser Höhe $y$ die Grenzen zwischen je genau zwei Fundamentalbereichen $\mathfrak{K}$ und $L\mathfrak{K}$ $(L < \Gamma)$; jede von ihnen verläuft in hinreichend geringer Höhe $y$ ganz im Innern eines Bereiches $L\mathfrak{K}$ oder ist gleichfalls gemeinsame Grenze zweier solchen Bereiche $L\mathfrak{K}$ $(L < \Gamma)$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{h}$ insgesamt nur Punkte aus endlich vielen Bereichen $L\mathfrak{K}$ $(L < \Gamma)$ enthalten kann. Denn andernfalls gäbe es in der oberen Halbebene einen Punkt, in dessen jeder Umgebung Punkte aus unendlich vielen dieser Bereiche liegen, was offenbar nicht zutrifft. Nunmehr reduziere man die Gerade $\mathfrak{h}$ in den Bereich $\mathfrak{K}$ hinein, indem man jedesmal, wenn eine (zusammenhängende und nicht erweiterungsfähige) Teilstrecke $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{h}$ in $L\mathfrak{K}$, aber nicht in $\mathfrak{K}$ verläuft, $\mathfrak{s}$ durch $L^{-1}\mathfrak{s}$ ersetzt. Da $\mathfrak{h}$ mit jedem Bereich $L\mathfrak{K}$ $(L < \Gamma)$ nur endlich viele Teilstrecken gemein haben kann, entsteht durch diese Reduktion aus $\mathfrak{h}$ ein endliches System $\mathfrak{h}^*$ von in $\mathfrak{K}$ verlaufenden H-Strecken und H-Halbgeraden. Das genau gleiche System entsteht durch die Reduktion der sämtlichen Geraden $U^{kN}\mathfrak{h}$ ($k$ ganz).

Ein im Innern von $\mathfrak{K}$ gelegener Punkt $\tau_0$, der überdies zwischen $\mathfrak{h}$ und $U^N\mathfrak{h}$ liegt und von $\mathfrak{h}^*$ nicht getroffen wird, hat die Eigenschaft, dass $L\tau_0$ $(L < \Gamma)$ niemals auf $\mathfrak{h}$ oder $U^N\mathfrak{h}$ liegen kann. Es sei nun $\mathfrak{V}$ der Vertikalhalbstreifen $\xi \leqq x \leqq \xi + N$, $y > 0$, und es werde das System $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ wie folgt beschrieben:

$$L < \mathfrak{S}_0 \text{ bedeute } \xi < \Re e\, L\tau_0 < \xi + N \qquad (\text{d. h. } L\tau_0 < \mathfrak{V}). \tag{34}$$

$\mathfrak{S}_0$ ist ersichtlich ein System $\mathfrak{S}(I, \Gamma)$. Von den sämtlichen Bereichen $L\mathfrak{K}$ $(L < \mathfrak{S}_0)$ liegt je ein Punkt, nämlich $L\tau_0$, in $\mathfrak{V}$. Mit endlich vielen Ausnahmen liegen daher alle diese Bereiche ganz in $\mathfrak{V}$. Bezeichnet $L_0\mathfrak{K}$ einen der Ausnahmebereiche, so reduziere man seine (ausserhalb von $\mathfrak{V}$ liegenden) endlich vielen Stücke, die er mit den Streifen $U^{kN}\mathfrak{V}$ ($k$ ganz und $\neq 0$) gemein hat, durch $U^{-kN}$ in $\mathfrak{V}$ hinein. Der so aus $L_0\mathfrak{K}$ entstehende, i. a. nicht zusammenhängende Bereich heisse $\mathfrak{K}_{L_0}$. Für $L\mathfrak{K} < \mathfrak{V}$ sei $L\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_L$ $(L < \mathfrak{S}_0)$. Schliesst man noch alle Bereiche $\mathfrak{K}_L$ $(L < \mathfrak{S}_0)$ durch Hinzunahme der in ihnen ursprünglich nicht enthaltenen Randteile ab, und bildet man ein System $\mathfrak{S}_0^*$, das von jedem Paar von Matrizen $\pm L$ aus $\mathfrak{S}_0$ genau einen Vertreter enthält, so ergibt sich

**Hilfssatz 8.** *Die abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{K}_L$ $(L < \mathfrak{S}_0^*)$ überdecken den Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{V}$ lückenlos und bis auf Randkoinzidenzen einfach.*

Wir betrachten nun zweitens den hyperbolischen Fall. Es sei $0, \infty$ ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma$, $D_{\mu'}$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{0,\infty}$; $\Gamma$ besitze parabolische Fixpunkte. In (J IV), § 1 wurde gezeigt, dass die zu einer gegebenen Spitze nach $\Gamma$ äquivalenten Spitzen auf der reellen $\tau$-Achse überall dicht liegen. Seien $\zeta, \zeta'$ zwei Spitzen von $\Gamma$, die den Bedingungen

$$\zeta' \sim \zeta(\Gamma),\ \zeta < 0 < \zeta',\ \zeta' < |\zeta| < \mu'^2\zeta' \tag{34 a}$$

genügen. Es bezeichne $\mathfrak{k}_0$ den E-Halbkreis durch $\zeta$ und $\zeta'$, $\mathfrak{R}$ den Ringbereich der Punkte in $\mathfrak{H}_0$, die auf $\mathfrak{k}_0$ oder zwischen $\mathfrak{k}_0$ und $D_{\mu'}\mathfrak{k}_0$ oder auf $D_{\mu'}\mathfrak{k}_0$ liegen.

Es sei $A$ eine normierte Matrix mit $A\zeta = \infty$. Wir setzen $\tau' = A\tau$, $\xi = A\zeta'$ und bestimmen für die transformierte Gruppe $\Gamma' = A\Gamma A^{-1}$ die $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{K}$, $\tau_0$ entsprechenden Objekte $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{K}'$, $\tau_0'$ wie im parabolischen Fall mit der Zusatzbedingung, dass der aus $\tau_0'$ durch Rücktransformation entstehende Punkt $\tau_0 = A^{-1}\tau_0'$ im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt. Bei der Rücktransformation entstehe ausserdem $\mathfrak{K} = A^{-1}\mathfrak{K}'$ aus $\mathfrak{K}'$; es entsteht $\mathfrak{k}_0 = A^{-1}\mathfrak{h}'$ aus $\mathfrak{h}'$. Unter diesen Umständen liegen die Punkte $L\tau_0$ $(L < \Gamma)$ weder auf $\mathfrak{k}_0$ noch auf $D_{\mu'}\mathfrak{k}_0$. Wir bestimmen ein System $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ durch die Forderung

(35) $\quad L < \mathfrak{S}_0$ bedeute: $L\tau_0$ liegt zwischen $\mathfrak{k}_0$ und $D_{\mu'}\mathfrak{k}_0$.

Von den Bereichen $L\mathfrak{K}$ $(L < \mathfrak{S}_0)$ sind alle bis auf endlich viele in $\mathfrak{R}$ enthalten. Sei $L_0\mathfrak{K}$ einer der Ausnahmebereiche. Man reduziere seine ausserhalb von $\mathfrak{R}$ liegenden, endlich vielen, mit den Ringbereichen $D_{\mu}^{k'}\mathfrak{R}$ $(k \neq 0)$ gemeinsamen Stücke durch $D_{\mu'}^{-k}$ in $\mathfrak{R}$ hinein. Der dadurch aus $L_0\mathfrak{K}$ entstehende, i. a. nicht zusammenhängende Bereich heisse $\mathfrak{K}_{L_0}$. Für $L\mathfrak{K} < \mathfrak{R}$ sei $\mathfrak{K}_L = L\mathfrak{K}$. Schliesst man noch alle Bereiche $\mathfrak{K}_L$ $(L < \mathfrak{S}_0)$ durch Hinzunahme der ursprünglich in ihnen nicht enthaltenen Randstücke ab, und bildet ein System $\mathfrak{S}_0^*$, das von jedem Paar von Matrizen $\pm L$ aus $\mathfrak{S}_0$ genau einen Vertreter enthält, so findet man

**Hilfssatz 9.** *Die abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{K}_L$ $(L < \mathfrak{S}_0^*)$ überdecken den Ringbereich $\mathfrak{R}$ lückenlos und bis auf Randkoinzidenzen einfach. Für $\tau < \mathfrak{K}$ und $L < \mathfrak{S}_0$ ist $|\log|L\tau||$ beschränkt.*

Schliesslich sei im hyperbolischen Fall wieder $0, \infty$ ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma$; $\Gamma$ enthalte jedoch keine parabolischen Matrizen. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{k}_0$ den E-Halbkreis $|\tau| = \mu'^{-1}$ in der oberen Halbebene und mit $\mathfrak{R}$ den Halbkreisring $\mu'^{-1} \leqq |\tau| \leqq \mu'^{+1}, y > 0$; ferner mit $\mathfrak{K}$ einen kanonischen Fundamentalbereich von $\Gamma$, der einen inneren Punkt mit dem Innern von $\mathfrak{R}$ gemein hat, mit $\tau_0$ einen solchen Punkt und erklären ein System $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ durch

(36) $\quad L < \mathfrak{S}_0$ bedeute $\mu'^{-1} \leqq |L\tau_0| < \mu'^{+1}$.

Da $\mathfrak{K}$ auf einer H-Kreisscheibe Platz findet, und da die $L\tau_0 (L < \mathfrak{S}_0)$ sich (innerhalb von $\mathfrak{R}$) nur gegen die reelle Achse häufen, strebt der E-Durchmesser von $L\mathfrak{K}$ gegen Null, wenn $L$ das System $\mathfrak{S}_0$ durchläuft. Infolgedessen hat $L\mathfrak{K}$ für alle $L < \mathfrak{S}_0$, abgesehen von einer endlichen Ausnahmemenge, nur mit den Ringen $D_{\mu'}^{-1}\mathfrak{R}, \mathfrak{R}$ und $D_{\mu'}\mathfrak{R}$ Punkte gemein. Man reduziere die ausserhalb von $\mathfrak{R}$ liegenden, endlich vielen, mit den Ringen $D_{\mu'}^{k}\mathfrak{R}$ ($k$ ganz und $\neq 0$) gemeinsamen Stücke von $L\mathfrak{K}$ durch $D_{\mu'}^{-k}$ in $\mathfrak{R}$ hinein. Dadurch entsteht aus $L\mathfrak{R}$ ein i. a. nicht mehr zusammenhängender Bereich $\mathfrak{K}_L$. Die Anzahl der von dieser Reduktion durch die Kreise $|\tau| = \mu'^{2k+1}$ ($k$ ganz) von $L\mathfrak{K}$ abgetrennten Stücke ist hinsichtlich $L$

beschränkt. Um dies einzusehen, denke man sich $\mathfrak{K}$ in dem früher angegebenen Sinne trianguliert, übertrage diese Triangulation auf $L\mathfrak{K}$ und beachte, dass jedes Dreieck von $L\mathfrak{K}$ von höchstens einem Kreise $|\tau| = \mu'^{2k+1}$ geschnitten wird, wofern man die $L$ einer gewissen endlichen Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{S}_0$ ausschliesst. Die Anzahl der von dem Bereiche $L\mathfrak{K}$ $(L < \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{E})$ wie oben angedeutet abgeschnittenen Stücke ist mithin höchstens doppelt so gross wie die Anzahl der zur Triangulation verwendeten Dreiecke. Schliesst man die Bereiche $\mathfrak{K}_L$ $(L < \mathfrak{S}_0)$ durch Hinzunahme der ihnen ursprünglich nicht angehörenden Randstücke ab und bildet ein System $\mathfrak{S}_0^*$, das von jedem Paar von Matrizen $\pm L$ aus $\mathfrak{S}_0$ genau einen Vertreter enthält, so gilt Hilfssatz 9.

Zum Schluss behandeln wir noch eine besondere Zerlegung des kanonischen Fundamentalbereichs, die im § 5 und darüber hinaus bei der Metrisierung der automorphen Formen eine wesentliche Rolle spielt. $\Gamma$ enthalte parabolische Matrizen; mit der normierten Matrix $A$ durchlaufe $\zeta = A^{-1}\infty$ je einfach die $\sigma_0$ Spitzen des kanonischen Fundamentalbereichs $\mathfrak{K}$. $\tilde{\mathfrak{K}}$ bezeichne die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{K}$. Dann lässt sich $\tilde{\mathfrak{K}}$ vollständig in $\sigma_0$ Bereiche $\mathfrak{B}_\zeta$ $(\zeta < \mathfrak{K})$ mit folgenden drei Eigenschaften zerlegen:

a) Jeder Bereich $\mathfrak{B}_\zeta$ wird von endlich vielen H-Strecken und H-Halbgeraden berandet.

b) $\mathfrak{B}_\zeta$ ist die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden offenen Menge; zwei verschiedene Bereiche $\mathfrak{B}_\zeta$ und $\mathfrak{B}_{\zeta'}$ haben höchstens beiderseitige Randpunkte miteinander gemein.

c) $\mathfrak{B}_\zeta$ enthält die Spitze $\zeta$ als einzigen Randpunkt der oberen Halbebene und wird daher in der Nähe von $\zeta$ von zwei H-Halbgeraden durch $\zeta$ berandet.

Dadurch, dass man aus $\mathfrak{B}_\zeta$ den Punkt $\zeta$ und diejenigen Punkte entfernt, welche, falls $\zeta$ reell, auf einer offenen, hinreichend kleinen, die reelle Achse in $\zeta$ von oben berührenden E-Kreisscheibe liegen, welche, falls $\zeta = \infty$, über einer hinreichend hohen horizontalen E-Geraden liegen, entstehe der Bereich $\mathfrak{B}_\zeta^*$ aus $\mathfrak{B}_\zeta$. Der genannte E-Kreis sei so klein, und die genannte E-Gerade liege so hoch, dass sie die beiden, von $\zeta$ ausgehenden, $\mathfrak{B}_\zeta$ berandenden H-Halbgeraden treffen. Dann ist offenbar $\mathfrak{B}_\zeta^*$ stets beschränkt und hat von der reellen Achse einen positiven Mindestabstand. Den hier beschriebenen Prozess, durch den $\mathfrak{B}_\zeta$ in $\mathfrak{B}_\zeta^*$ übergeht, bezeichnen wir als *Abschneiden der Spitze* $\zeta$ *von* $\mathfrak{B}_\zeta$. Die abschneidende Kurve (ein E-Kreis oder eine horizontale E-Gerade) wird, wenn $\zeta = A^{-1}\infty$, durch $A$ in eine horizontale E-Gerade übergeführt. Hat deren Ordinate den Wert $h$, so sagen wir, dass von $\mathfrak{B}_\zeta$ die Spitze $\zeta$ in der Höhe $h$ abgeschnitten wird. Der so entstehende Bereich heisse genauer $\mathfrak{B}_\zeta^* = \mathfrak{B}_{\zeta h}^*$. Wegen der Bedeutung dieser Bereiche $\mathfrak{B}_\zeta$ führen wir für sie einen besonderen Namen ein. Wir nennen einen solchen Bereich $\mathfrak{B}_\zeta$ einen *Klingenbereich* oder kurz eine *Klinge mit der Spitze* $\zeta$. Werden von den sämtlichen Klingen $\mathfrak{B}_\zeta$ ($\zeta < \mathfrak{K}$), für die $\mathfrak{K} = \sum_{\zeta \subset \mathfrak{K}} \mathfrak{B}_\zeta$, die Spitzen in der Höhe $h$ abgeschnitten, so sagen wir, dass sämtliche Spitzen von $\mathfrak{K}$ in der Höhe $h$ abgeschnitten werden.

## § 5. Divergenzbeweise.

**a) Parabolischer Fall.** Es sei $\Gamma$ eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit parabolischen Matrizen, $\zeta_0 = A_0^{-1}\infty$ ein parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$, dabei $A_0$ eine normierte Matrix, $r_0 < 2$, $\tau_0$ ein Punkt in der oberen Halbebene. Wir beweisen, dass die Reihe

$$Q_{r_0}(\tau_0, A_0, \Gamma) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A_0, \Gamma)} \frac{1}{|m_1 \tau_0 + m_2|^{r_0}}$$

divergiert. Da sie für $r_0 > 2$ konvergiert, divergiert sie für $r_0 \leqq 0$. Wir beschränken uns also auf den Fall $0 < r_0 < 2$. Ferner gilt nach (20) mit $A_0 = \{a_{0,1}, a_{0,2}\}$, zunächst formal,

$$Q_{r_0}(A_0 \tau_0, I, A_0 \Gamma A_0^{-1}) = |a_{0,1} \tau_0 + a_{0,2}|^{r_0} Q_{r_0}(\tau_0, A_0, \Gamma).$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass $Q_{r_0}(A_0 \tau_0, I, A_0 \Gamma A_0^{-1})$ gleichzeitig mit $Q_{r_0}(\tau_0, A_0, \Gamma)$ konvergiert und divergiert. Hier hat die Gruppe $A_0 \Gamma A_0^{-1}$ den parabolischen Fixpunkt $\infty$. Um die Konvergenz von $Q_{r_0}(\tau_0, A_0, \Gamma)$ zu widerlegen, können und wollen wir also voraussetzen, dass $\Gamma$ den parabolischen Fixpunkt $\infty$ habe, und dass $A_0 = I$ sei. Wir schreiben $r$ für $r_0$ ($0 < r < 2$, $r$ fest) und gründen unseren indirekten Beweis auf die Annahme, dass die Reihe $Q_r(\tau_0, I, \Gamma)$ konvergiere.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein an $\infty$ anstossender kanonischer Fundamentalbereich von $\Gamma$; $\zeta = A^{-1}\infty$ durchlaufe die sämtlichen parabolischen Spitzen von $\mathfrak{K}$, wo jeweils $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix darstellt; für $\zeta = \infty$ sei $A = I$. Die abgeschlossene Hülle $\tilde{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ werde, den $\sigma_0$ Spitzen von $\mathfrak{K}$ entsprechend, nach dem oben angegebenen Verfahren in die $\sigma_0$ Klingenbereiche $\mathfrak{B}_\zeta$ zerlegt.

Nach Satz 2 konvergieren die Betragreihen $Q_r(\tau', A^{-1}, A \Gamma A^{-1})$, wenn $\tau'$ auf einem Vertikalhalbstreifen von positiver Mindesthöhe liegt, gleichmässig und sind dort beschränkt. Sie hängen mit $Q_r(\tau, I, \Gamma)$ durch die Gleichung

$$Q_r(A^{-1}\tau', I, \Gamma) = |-a_1\tau' + a_0|^r\, Q_r(\tau', A^{-1}, A\,\Gamma\,A^{-1}) \tag{37}$$

zusammen. Die Gruppe $A\,\Gamma\,A^{-1}$ besitzt den parabolischen Fixpunkt $\tau = A\,\infty$.

Wir behaupten zunächst, dass das Integral

$$J = \iint_{\mathfrak{K}} Q_r(\tau, I, \Gamma)\, y^{\frac{r}{2}-2}\, dx\, dy$$

existiert. Zum Beweise zerlegen wir $J$ nach dem Schema

$$J = \sum_{\zeta \subset \mathfrak{K}} J_\zeta,\quad J_\zeta = \iint_{\mathfrak{B}_\zeta} Q_r(\tau, I, \Gamma) y^{\frac{r}{2}-2}\, dx\, dy,$$

schneiden von $\mathfrak{B}_\zeta$ die Spitze $\zeta$ in hinreichend grosser Höhe $h$ ab, bezeichnen den entstehenden Bereich mit $\mathfrak{B}^*_{\zeta, h}$, setzen $\tau' = A\,\tau = x' + i\,y'$ ($x'$ reell, $y' > 0$), wenden (37) an und erhalten

$$J^*_{\zeta, h} = \iint_{\mathfrak{B}^*_{\zeta, h}} Q_r(\tau, I, \Gamma)\, y^{\frac{r}{2}} \frac{dx\, dy}{y^2} = \iint_{\tau' \subset A\,\mathfrak{B}^*_{\zeta, h}} Q_r(A^{-1}\tau', I, \Gamma) \frac{y'^{\frac{r}{2}}}{|-a_1\tau' + a_0|^r} \frac{dx'\, dy'}{y'^2},$$

$$J^*_{\zeta, h} = \iint_{\tau' \subset A\,\mathfrak{B}^*_{\zeta, h}} Q_r(\tau', A^{-1}, A\,\Gamma\,A^{-1})\, y'^{\frac{r}{2}-2}\, dx'\, dy'.$$

$A\,\mathfrak{B}_\zeta$ stellt eine Klinge mit der Spitze $\infty$ dar und gehört daher einem Vertikalhalbstreifen von positiver Mindesthöhe an. Nach Satz 2 und wegen $r < 2$ existieren die $\sigma_0 + 1$ Integrale $J_\zeta = \lim_{h \to \infty} J^*_{\zeta, h}$ und $J$.

Für hinreichend grosses $h$ setzen wir $\mathfrak{K}^*_h = \sum_{\zeta \subset \mathfrak{K}} \mathfrak{B}^*_{\zeta, h}$ und schreiben

$$Q^*(\tau) = \sum_{L \subset \mathfrak{S}^*_0} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r} = \frac{1}{2}\, Q_r(\tau, I, \Gamma),$$

$$Q^*(\tau, \mathfrak{E}^*) = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r},$$

wo $\mathfrak{E}^*$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{S}^*_0$ bedeute. Das Integral

$$J^*_h(\mathfrak{E}^*) = \iint_{\mathfrak{K}^*_h} Q^*(\tau, \mathfrak{E}^*)\, y^{\frac{r}{2}-2}\, dx\, dy$$

genügt der Ungleichung

$$J^*_h(\mathfrak{E}^*) \leqq \tfrac{1}{2} J. \tag{38}$$

Man findet durch Vertauschung von Summe und Integral

$$(39)\qquad J_h^*(\mathfrak{E}^*) = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \iint_{\mathfrak{K}_h^*} \frac{y^{\frac{r}{2}}}{|\gamma\tau + \delta|^r} \frac{dx\,dy}{y^2} = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \iint_{L\mathfrak{K}_h^*} y^{\frac{r}{2}-2} dx\,dy.$$

Bezeichnet $L\mathfrak{K}$ einen der Ausnahmebereiche in der Konstruktion des § 4, so lässt sich leicht einsehen, dass beim Abschneiden der Spitzen von $L\mathfrak{K}$, wenn $h$ hinreichend gross ist, keine Verminderung der Anzahl der Teilstücke von $L\mathfrak{K}$ eintritt, in die $L\mathfrak{K}$ durch die Geraden $U^{kN}\mathfrak{h}$ ($k$ ganz) zerlegt wird. Wir nennen $\mathfrak{K}_{L,h}^*$ den durch die in § 4 beschriebene Reduktion aus $L\mathfrak{K}_h^*$ entstehenden Bereich. Da die einzelnen Integrale auf der rechten Seite von (39) translationsinvariant sind, ergibt sich

$$J_h^*(\mathfrak{E}^*) = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \iint_{\mathfrak{K}_{L,h}^*} y^{\frac{r}{2}-2} dx\,dy.$$

Hier nehmen wir an, dass $\mathfrak{E}^*$ die endlich vielen $L$ aus $\mathfrak{S}_0^*$ enthält, für die $L\mathfrak{K}$ zu den Ausnahmebereichen im Sinne des § 4 gehört.

Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, $\varepsilon < 1$, $\mathfrak{B}_\varepsilon$ der Halbstreifen $\xi \leqq x \leqq \xi + N$, $y \geqq \varepsilon$. Es gibt nur endlich viele Bereiche $\mathfrak{K}_L (L < \mathfrak{S}_0^*)$, die mit $\mathfrak{B}_\varepsilon$ einen Punkt gemein haben. Denn sonst würde, da $\mathfrak{B}_\varepsilon$ in hinreichender Höhe von $\mathfrak{K}$ allein ausgefüllt wird, ein Punkt in der oberen Halbebene existieren, in dessen jeder Umgebung Punkte aus unendlich vielen Bereichen $L\mathfrak{K}$ $(L < \mathfrak{S}_0)$ liegen. Es bezeichne $\mathfrak{E}^*(\varepsilon)$ die endliche Menge derjenigen $L < \mathfrak{S}_0^*$, für die $L\mathfrak{K}$ zu den Ausnahmebereichen im Sinne des § 4 gehört oder $\mathfrak{K}_L$ einen Punkt mit $\mathfrak{B}_\varepsilon$ gemein hat. Wir bestimmen nun eine Zahl $h_0 > 1$ derart, dass für $h > h_0$ folgendes stattfindet: Schneidet man die reellen Spitzen der $\mathfrak{K}_L$, $L < \mathfrak{E}^*(\varepsilon)$ nach der oben angegebenen Vorschrift sämtlich in der Höhe $h$ ab, so kommen dadurch nur solche Punkte $\tau$ von $\mathfrak{K}_L$ in Fortfall, deren Ordinate $y < \varepsilon$ ist. Es sei also $h > h_0$. Dann überdeckt ersichtlich das Bereichsystem $\sum\limits_{L \subset \mathfrak{E}^*(\varepsilon)} \mathfrak{K}_{L,h}^*$ vollständig und bis auf Randkoinzidenzen einfach das Rechteck $\mathfrak{A}$, gegeben durch

$$\xi \leqq x \leqq \xi + N,\quad \varepsilon \leqq y \leqq h.$$

Man erhält daher aus (39)

$$J_h^*(\mathfrak{E}^*(\varepsilon)) \geqq \iint_{\mathfrak{A}} y^{\frac{r}{2}-2} dx\,dy \geqq N \int_\varepsilon^1 y^{\frac{r}{2}-2} dy$$

$$(0 < \varepsilon < 1,\ h > h_0).$$

Dies gibt in Verbindung mit (38) die widerspruchsvolle Ungleichung

$$\int_{\varepsilon}^{1} y^{\frac{r}{2}-2}\,dy \leqq \frac{1}{2N} J \qquad \begin{array}{l}(0 < \varepsilon < 1,\ \varepsilon \text{ beliebig;} \\ 0 < r < 2,\ r \text{ fest})\end{array}$$

und den behaupteten Sachverhalt:

**Satz 8.** *Es sei* $\Gamma$ *eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit parabolischen Matrizen,* $\zeta_0 = A_0^{-1}\infty$ *ein parabolischer Fixpunkt von* $\Gamma$*, dabei* $A_0$ *eine normierte Matrix, ferner* $r_0$ *eine feste Zahl* $< 2$*,* $\tau_0$ *ein fester Punkt der oberen Halbebene. Dann divergiert die Reihe*

$$Q_{r_0}(\tau_0, A_0, \Gamma) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A_0, \Gamma)} \frac{1}{|m_1\tau_0 + m_2|^{r_0}} \qquad (\underline{M} = \{m_1, m_2\}).$$

Für die folgende Behandlung des elliptischen und hyperbolischen Falles verabreden wir: Enthält $\Gamma$ parabolische Matrizen, so werden die oben eingeführten Bezeichnungen sinngemäss angewendet. Enthält $\Gamma$ keine parabolischen Matrizen, so sei alles über Spitzen Gesagte inhaltlos, dementsprechend $A = A_0 = I$; ferner sei, wenn $\mathfrak{K}$ einen kanonischen Fundamentalbereich bezeichnet, $\mathfrak{K} = \mathfrak{B}_{\zeta} = \mathfrak{K}_h^* = \mathfrak{B}_{\zeta, h}^*$. $\Gamma$ sei stets eine Grenzkreisgruppe von erster Art. Wir schreiben stets $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

**b) Elliptischer Fall.** Für eine feste Spitze $\zeta_0 = A_0^{-1}\infty$ von $\Gamma$ mit normiertem $A_0$ und $\underline{A_0} = \{a_{0,1}, a_{0,2}\}$, für festes $r_0 < 2$ und für feste $\tau_0$, $z_0$ in der oberen Halbebene wird bewiesen, dass die Reihe

$$Q_{r_0}(\tau_0, A_0, \Gamma, z_0) = \sum_{M \subset A_0\Gamma} \frac{1}{|m_1\tau_0 + m_2|^{r_0}\,|M\tau_0 + z_0|^{r_0}}$$

divergiert. Gemäss der Beziehung

$$Q_{r_0}(A_0\tau, I, A_0\Gamma A_0^{-1}, z_0) = |a_{0,1}\tau + a_{0,2}|^{r_0}\, Q_{r_0}(\tau, A_0, \Gamma, z_0)$$

beschränken wir uns auf den Fall, in dem $A_0 = I$ ist und $\Gamma$ die Spitze $\infty$ aufweist. Ferner kann und soll $0 < r_0 < 2$ vorausgesetzt werden; wir schreiben $z$ für $z_0$, $r$ für $r_0$ $(0 < r < 2,\ r$ fest) und nehmen an, dass die Reihe $Q_r(\tau_0, I, \Gamma, z)$ konvergiere.

Nach Satz 5 und wegen $r < 2$ existiert das Integral

$$J = \iint_{\mathfrak{K}} Q_r(\tau, I, \Gamma, z)\, y^{\frac{r}{2}-2}\, dx\, dy,$$

wie man, wenn $\Gamma$ parabolische Matrizen enthält, aus der Zerlegung

$$J = \sum_{\zeta \subset \mathfrak{K}} J_\zeta, \quad J_\zeta = \iint_{\mathfrak{B}_\zeta} Q_r(\tau, I, \Gamma, z)\, y^{\frac{r}{2}-2}\, dx\, dy \qquad (\zeta = A^{-1}\infty),$$

der Transformationsgleichung

$$Q_r(A^{-1}\tau', I, \Gamma, z) = |-a_1\tau' + a_0|^r\, Q_r(\tau', A^{-1}, A\,\Gamma A^{-1}, z)$$
$$\left(A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}\right)$$

und der Darstellung

$$J^*_{\zeta,h} = \iint_{\mathfrak{B}^*_{\zeta,h}} Q_r(\tau, I, \Gamma, z)\, y^{\frac{r}{2}-2}\, dx\, dy = \iint_{A\mathfrak{B}^*_{\zeta,h}} Q_r(\tau', A^{-1}, A\,\Gamma A^{-1}, z)\, y'^{\frac{r}{2}-2}\, dx'\, dy'$$

erkennt. Wir nennen $\Gamma^*$ ein volles System von Matrizen $L$ aus $\Gamma$, die sich nicht im Vorzeichen unterscheiden, $\mathfrak{E}^*$ eine endliche Teilmenge von $\Gamma^*$ und setzen

$$Q^*(\tau) = \sum_{L \subset \Gamma^*} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r\, |L\tau + z|^r} = \frac{1}{2}\, Q_r(\tau, I, \Gamma, z),$$

$$Q^*(\tau, \mathfrak{E}^*) = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r\, |L\tau + z|^r} \qquad (\underline{(L)} = \{\gamma, \delta\}).$$

Dann ergibt sich

$$J^*_h(\mathfrak{E}^*) = \iint_{\mathfrak{K}^*_h} Q^*(\tau, \mathfrak{E}^*)\, y^{\frac{r}{2}-2}\, dx\, dy \leqq \tfrac{1}{2} J,$$

$$J^*_h(\mathfrak{E}^*) = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \iint_{\mathfrak{K}^*_h} \frac{y^{\frac{r}{2}}}{|\gamma\tau + \delta|^r}\, |L\tau + z|^{-r}\, \frac{dx\, dy}{y^2} = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \iint_{L\mathfrak{K}^*_h} y^{\frac{r}{2}-2}\, |\tau + z|^{-r}\, dx\, dy.$$

Im letzten Integral werde die Substitution $w = \dfrac{\tau + \bar{z}}{\tau + z} = V\tau = \varrho e^{i\vartheta}$ $(|w| = \varrho)$ mit $V = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ 1 & z \end{pmatrix}$, $z = a + ib$ ausgeführt. Dadurch gewinnt man die Darstellung

$$J_h^*(\mathfrak{E}^*) = 2^{1-r} b^{-\frac{r}{2}} \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \iint_{VL\mathfrak{K}_h^*} (1-\varrho^2)^{\frac{r}{2}-2} d\varrho^2 d\vartheta.$$

Es sei $\varepsilon$ vorgegeben, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\mathfrak{E}^*(\varepsilon)$ die endliche Menge derjenigen $L$ aus $\Gamma^*$, für die $VL\mathfrak{K}$ einen Punkt mit dem Kreise $|w| = \varrho \leqq \sqrt{1-\varepsilon}$ gemein hat. Diesem Kreise entspricht in der oberen $\tau$-Halbebene ein H-Kreis $\mathfrak{k}(\varepsilon)$ mit dem H-Mittelpunkt $\tau = -\bar{z}$, und $\mathfrak{E}^*(\varepsilon)$ erscheint dabei als die Menge derjenigen $L < \Gamma^*$, für die $L\mathfrak{K}$ einen Punkt mit $\mathfrak{k}(\varepsilon)$ gemein hat. Man bestimme nun eine Zahl $h_0 > 1$ von folgender Beschaffenheit: Werden von $\mathfrak{K}$ sämtliche Spitzen in der Höhe $h > h_0$ abgeschnitten, so kommen dadurch nur Punkte $\tau$ in Fortfall, für die $L\tau$, $L < \mathfrak{E}^*(\varepsilon)$, ausserhalb von $\mathfrak{k}(\varepsilon)$ liegt. Für $h > h_0$ wird also der Kreis $\varrho \leqq \sqrt{1-\varepsilon}$ durch die Vereinigung der $VL\mathfrak{K}_h^*$, $L < \mathfrak{E}^*(\varepsilon)$ lückenlos und bis auf Randkoinzidenzen einfach überdeckt. Daraus folgt

$$J_h^*(\mathfrak{E}^*(\varepsilon)) \geqq 2^{1-r} b^{-\frac{r}{2}} 2\pi \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} (1-\varrho^2)^{\frac{r}{2}-2} d\varrho^2 = 4\pi \,.\, (4b)^{-\frac{r}{2}} \int_\varepsilon^1 x^{\frac{r}{2}-2} dx;$$

dies führt auf die widerspruchsvolle Ungleichung

$$\int_\varepsilon^1 x^{\frac{r}{2}-2} dx \leqq \frac{1}{8\pi} (4b)^{\frac{r}{2}} J \qquad \begin{array}{l}(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, \varepsilon \text{ beliebig;}\\ 0 < r < 2, r \text{ fest})\end{array}$$

und damit auf den behaupteten Sachverhalt

**Satz 9.** *Es sei $\Gamma$ eine Grenzkreisgruppe von erster Art. Wenn $\Gamma$ parabolische Matrizen enthält, so sei $\zeta_0 = A_0^{-1}\infty$ ein parabolischer Fixpunkt von $\Gamma$, dabei $A_0$ eine normierte Matrix. Im anderen Falle sei $A_0 = I$. Ferner sei in beiden Fällen $r_0$ eine feste Zahl $< 2$, und $\tau_0$, $z_0$ seien feste Punkte in der oberen Halbebene. Dann divergiert die Reihe*

$$Q_{r_0}(\tau_0, A_0, \Gamma, z_0) = \sum_{M \subset A_0\Gamma} \frac{1}{|m_1\tau_0 + m_2|^{r_0} |M\tau_0 + z_0|^{r_0}}.$$

**c) Hyperbolischer Fall.** Sei $\eta_0 = \mathsf{H}_0^{-1} 0$, $\eta_0' = \mathsf{H}_0^{-1}\infty$ ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma$, dabei $\mathsf{H}_0 = \begin{pmatrix} \eta_{0,1} & \eta_{0,2} \\ \eta_{0,1}' & \eta_{0,2}' \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix, $r_0$ eine feste reelle Zahl $< 2$ und $\tau_0$ ein fester Punkt in der oberen Halbebene. Es soll gezeigt werden, dass die Reihe

$$X_{r_0}(\tau_0, \mathsf{H}_0, \Gamma) = \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}_0, \Gamma)} \frac{1}{|\beta_1 \tau_0 + \beta_2|^{\frac{r_0}{2}} |\beta_1' \tau_0 + \beta_2'|^{\frac{r_0}{2}}}$$

$$\left(\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix}\right)$$

divergiert. Gemäss der Beziehung

$$X_{r_0}(\mathsf{H}_0 \tau_0, I, \mathsf{H}_0 \Gamma \mathsf{H}_0^{-1}) = |\eta'_{0,1} \tau_0 + \eta'_{0,2}|^{r_0} X_{r_0}(\tau_0, \mathsf{H}_0, \Gamma)$$

beschränken wir uns auf den Fall, in dem $\Gamma$ das hyperbolische Fixpunktepaar $0, \infty$ aufweist und $\mathsf{H}_0 = I$ ist. Ferner kann und soll $0 < r_0 < 2$ vorausgesetzt werden; wir schreiben $r$ für $r_0$ ($0 < r < 2$, $r$ fest) und nehmen an, dass die Reihe $X_r(\tau_0, I, \Gamma)$ konvergiere.

Wir stellen zunächst fest, dass das Integral

$$J = \iint_{\mathfrak{K}} X_r(\tau, I, \Gamma) y^{\frac{r}{2}-2} \, dx\, dy = \sum_{\zeta \subset \mathfrak{K}} \lim_{h \to +\infty} \iint_{\mathfrak{B}^*_{\zeta, h}} X_r(\tau, I, \Gamma) y^{\frac{r}{2}-2} \, dx\, dy$$

auf Grund von $r < 2$, Satz 6, der Transformationsgleichung (30) und nach den im parabolischen und elliptischen Falle hierfür angestellten Überlegungen existiert. Jedes der Integrale auf der rechten Seite unter dem Limeszeichen strebt mit wachsendem $h \to +\infty$ monoton wachsend gegen einen Grenzwert, in voller Analogie zum parabolischen und elliptischen Falle.

Es enthalte $\mathfrak{S}_0^*$ wie früher von jedem Paar $\pm L$ von Matrizen aus $\mathfrak{S}_0$ genau einen Vertreter. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{E}^*$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{S}_0^*$, mit $\mathfrak{K}_h^*$ die Vereinigung der Bereiche $\mathfrak{B}^*_{\zeta, h}$ $(\zeta < \mathfrak{K})$ und setzen

$$X^*(\tau) = \sum_{L \subset \mathfrak{S}_0^*} \frac{1}{|\alpha\tau + \beta|^{\frac{r}{2}} |\gamma\tau + \delta|^{\frac{r}{2}}} = \sum_{L \subset \mathfrak{S}_0^*} \frac{|L\tau|^{-\frac{r}{2}}}{|\gamma\tau + \delta|^r} = \tfrac{1}{2} X_r(\tau, I, \Gamma),$$

$$X^*(\tau, \mathfrak{E}^*) = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{1}{|\alpha\tau + \beta|^{\frac{r}{2}} |\gamma\tau + \delta|^{\frac{r}{2}}} = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \frac{|L\tau|^{-\frac{r}{2}}}{|\gamma\tau + \delta|^r},$$

$$J_h^*(\mathfrak{E}^*) = \iint_{\mathfrak{K}_h^*} X^*(\tau, \mathfrak{E}^*) y^{\frac{r}{2}-2} \, dx\, dy.$$

Dann wird

(40) $$J_h^*(\mathfrak{E}^*) = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \iint_{L\mathfrak{K}_h^*} y^{\frac{r}{2}-2} |\tau|^{-\frac{r}{2}} \, dx\, dy \leqq \tfrac{1}{2} J.$$

Bezeichnet $L\mathfrak{K}$ einen der Ausnahmebereiche im Sinne der Konstruktion des § 4, so lässt sich leicht einsehen, dass die Anzahl der Teilstücke, in die der Bereich $L\mathfrak{K}$ durch die Kreise $D^k_{\mu'}\mathfrak{k}_0$ ($k$ ganz) zerlegt wird, durch Abschneiden der Spitzen von $L\mathfrak{K}$, falls dies in hinreichend grosser Höhe $h$ geschieht, keine Verminderung erfährt. Wir nennen in allen Fällen den Bereich, der aus $\mathfrak{K}_L$ durch die in § 4 beschriebene Reduktion gewonnen wird, $\mathfrak{K}^*_{L,h}$. Hier erweist sich das Integral im allgemeinen Glied der Summe in (40) als invariant gegenüber den Ähnlichkeitstransformationen $D^k_{\mu'}$ ($k$ ganz). Daher ergibt sich.

$$J^*_h(\mathfrak{E}^*) = \sum_{L \subset \mathfrak{E}^*} \iint_{\mathfrak{K}^*_{L,h}} y^{\frac{r}{2}-2} |\tau|^{-\frac{r}{2}} dx\,dy. \tag{41}$$

Es sei $\tau = \varrho_0(\vartheta)e^{i\vartheta}$ $(0 \leqq \vartheta \leqq \pi,\ \varrho_0(\vartheta) > 0)$ die Darstellung des Kreises $\mathfrak{k}_0$ durch Polarkoordination. Dabei ist entweder $\varrho_0(\vartheta)$ eine für $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ erklärte, stetige, von $\varrho_0(0) = \zeta'$ bis $\varrho_0(\pi) = |\zeta|$ monoton wachsende Funktion, oder $\varrho_0(\vartheta) = \mu'^{-1}$ ist konstant, je nachdem, ob $\Gamma$ parabolische Matrizen enthält oder nicht. In beiden Fällen gewinnt man eine Beschreibung von $\mathfrak{R}$ durch die Ungleichungen

$$\tau = \varrho e^{i\vartheta} \qquad (0 < \vartheta < \pi, \varrho_0(\vartheta) \leqq \varrho \leqq \mu'^2 \varrho_0(\vartheta)). \tag{42}$$

Es bezeichne $\mathfrak{R}_\varepsilon$ für $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ den in (42) durch $\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \pi - \varepsilon$ dargestellten Sektor von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{E}^*(\varepsilon)$ die endliche Menge derjenigen $L < \mathfrak{S}^*_0$, für die $\mathfrak{K}_L$ einen Punkt mit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ gemein hat, $h_0 > 1$ eine Zahl von folgender Beschaffenheit: Schneidet man die Spitzen von $\mathfrak{K}$ sämtlich in der Höhe $h > h_0$ ab, bildet man hierauf die Bereiche $L\mathfrak{K}^*_h$ $(L < \mathfrak{E}^*(\varepsilon))$ und reduziert man diese in den Ring $\mathfrak{R}$ hinein, so werden dadurch aus den Bereichen $\mathfrak{K}_L$ $(L < \mathfrak{E}^*(\varepsilon))$ nur Punkte entfernt, die in $\mathfrak{R}$, nicht aber in $\mathfrak{R}_\varepsilon$ liegen. Mithin bedeckt die Vereinigung $\sum_{L \subset \mathfrak{E}^*(\varepsilon)} \mathfrak{K}^*_{L,h}$ den Ringsektor $\mathfrak{R}_\varepsilon$ lückenlos und bis auf Randkoinzidenzen einfach, und man erhält nach (41)

$$J^*_h(\mathfrak{E}^*(\varepsilon)) \geqq \iint_{\mathfrak{R}_\varepsilon} y^{\frac{r}{2}-2} |\tau|^{-\frac{r}{2}} dx\,dy = \int_{\vartheta=\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left( \int_{\varrho=\varrho_0(\vartheta)}^{\mu'^2\varrho_0(\vartheta)} \varrho^{-1} d\varrho \right) \sin^{\frac{r}{2}-2} \vartheta\, d\vartheta$$

$$= 4 \log \mu' \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{r}{2}-2} \vartheta\, d\vartheta \geqq 4 \log \mu' \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{r}{2}-2} dt.$$

Dies führt auf die widerspruchsvolle Ungleichung

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{r}{2}-2}\,dt \leqq \frac{1}{8\log\mu'}\,J \qquad \left(0 < r < 2,\ r \text{ fest}; \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4},\ \varepsilon \text{ beliebig}\right)$$

und damit zu dem behaupteten Sachverhalt

**Satz 10.** *Es sei* $\Gamma$ *eine Grenzkreisgruppe von erster Art,* $\eta_0 = \mathsf{H}_0^{-1}\,0$, $\eta'_0 = \mathsf{H}_0^{-1}\,\infty$ *ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von* $\Gamma$, *dabei* $\mathsf{H}_0$ *eine (feste) normierte Matrix,* $r_0$ *eine feste reelle Zahl* $< 2$, $\tau_0$ *ein fester Punkt in der oberen Halbebene. Dann divergiert die Reihe:*

$$X_{r_0}(\tau_0, \mathsf{H}_0, \Gamma) = \sum_{\mathsf{B} \subset \Xi(\mathsf{H}_0, \Gamma)} \frac{1}{|\beta_1\tau_0 + \beta_2|^{\frac{r_0}{2}}\,|\beta_1'\tau_0 + \beta_2'|^{\frac{r_0}{2}}}.$$

$$\left(\mathsf{B} = \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_1' & \beta_2'\end{pmatrix}\right)$$