SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA FONCTION $Z(x, y, z)$

À LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

P. APPELL

à PARIS.

1. Dans un mémoire »*Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation* $\Delta F = 0$» publié dans le tome 4 des Acta Mathematica, je me suis occupé plus particulièrement de celles de ces fonctions qui ne cessent d'être finies et continues qu'en certains points isolés les uns des autres. Les fonctions qui se présentent ensuite sont celles qui possèdent des lignes ou des surfaces de points singuliers ou des espaces lacunaires. Il est facile d'étendre à ces fonctions les resultats que M. PICARD (Comptes Rendus, 15 mai 1882) et M. GOURSAT (Ibid., 26 février 1883) ont donnés pour les fonctions uniformes d'une variable complexe possédant des lignes de points singuliers ou des espaces lacunaires. L'extension se fera en suivant exactement la méthode employée par M. GOURSAT et en s'appuyant sur les développements en série que j'ai indiqués pour une fonction de x, y, z vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ régulière en tous les points d'un volume limité par des portions de surfaces sphériques. (Voyes page 344 de mon premier mémoire).

Sans m'arrêter à cette généralisation facile, je vais appliquer la fonction $Z(x, y, z)$ définie dans mon précédent mémoire à la solution de certaines questions de Physique mathématique. Ces applications sont fondées sur l'extension du théorème de M. MITTAG-LEFFLER aux fonctions uniformes satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta F = 0$; elles comprennent, comme cas particuliers, *la détermination de la fonction de Green pour un parallélépipède rectangle* telle qu'elle a été donnée par Riemann,[1] et la détermination des vitesses dans *l'écoulement d'un liquide par le fond d'un vase prismatique* telle qu'elle a été indiquée dans différentes notes insérées aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris[2] par MM. Boussinesq, de Saint-Venant et Flamant. Dans toutes ces applications, le seul élément analytique nouveau qu'il soit nécessaire d'introduire est la fonction que j'ai appelée $Z(x, y, z)$ et dont j'ai étudié précédemment les principales propriétés, ou les fonctions plus simples auxquelles se réduit cette fonction $Z(x, y, z)$ quand un ou deux groupes de périodes deviennent infinis (Acta Mathematica, T. 4, p. 374). L'introduction de la fonction Z qui est définie par une série absolument convergente permet d'éviter l'emploi des *séries non absolument convergentes* auxquelles certains des auteurs cités ci-dessus ont eu recours.

Des exemples de la méthode suivie dans le présent mémoire ont été donnés dans deux notes que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences le 28 janvier et le 11 février 1884, la seconde en commun avec M. Chervet.

2. Rappelons d'abord la définition et les principales propriétés de la fonction $Z(x, y, z)$. Soient, par rapport à un système d'axes coordonnés rectangulaires, trois points de coordonnées respectives

$$(a, b, c), \qquad (a', b', c'), \qquad (a'', b'', c'')$$

non situés dans un même plan avec l'origine, c'est à dire tels que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro; nous supposerons le déterminant positif et nous dirons que les quantités

$$(a, b, c), \qquad (a', b', c'), \qquad (a'', b'', c'')$$

---

[1] *Schwere, Electricität und Magnetismus,* bearbeitet von Hattendorff, p. 84.

[2] Années 1870: 3, 31 janvier, 30 mai; 1882: 3, 10, 24 Avril; 1883: 12, 19 Novembre.

sont les trois groupes de périodes de la fonction Z. En employant les mêmes notations que dans mon premier mémoire (Acta Mathematica T. 4, p. 351), désignons par m, m', m'' trois nombres qui prennent toutes les valeurs entières positives, négatives et nulles, et posons

$$a_\nu = ma + m'a' + m''a''$$
$$b_\nu = mb + m'b' + m''b''$$
$$c_\nu = mc + m'c' + m''c'';$$

les points de coordonnées (a_ν, b_ν, c_ν) formeront les sommets d'un réseau de parallélépipèdes tous égaux entre eux. Faisons

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\rho = +\sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2}$$
$$\cos\varphi = \frac{xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu}{r\rho}$$
$$R = +\sqrt{(x - a_\nu)^2 + (y - b_\nu)^2 + (z - c_\nu)^2} = +\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}$$

et désignons par Σ' une sommation étendue à toutes les valeurs de m, m', m'', la combinaison $m = m' = m'' = 0$ étant exceptée. Alors la fonction $Z(x, y, z)$ est définie par la série

$$(1) \qquad Z(x, y, z) = \frac{1}{r} + \sum{}' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos\varphi)\right]$$

dans laquelle P_1 et P_2 sont les deux premiers polynômes de LEGENDRE

$$P_1(\cos\varphi) = \cos\varphi, \qquad P_2(\cos\varphi) = \frac{3}{2}\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\right)$$

d'où

$$\frac{rP_1(\cos\varphi)}{\rho^2} = \frac{xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu}{\rho^3}$$

$$\frac{r^2 P_2(\cos\varphi)}{\rho^3} = \frac{3}{2\rho^3}\left[\frac{(xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu)^2}{\rho^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right].$$

Pour toutes les positions du point de coordonnées (x, y, z) distinctes des points (a_ν, b_ν, c_ν), la série (1) est absolument convergente et la méthode suivie pour démontrer sa convergence permet de trouver une limite supérieure du reste. En outre la différence

$$Z(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{(x-a_\nu)^2 + (y-b_\nu)^2 + (z-c_\nu)^2}}$$

est régulière au point (a_ν, b_ν, c_ν).

La fonction Z ainsi définie dépend des trois coordonnées variables (x, y, z) et des trois groupes de périodes

$$(a, b, c), \qquad (a', b', c'), \qquad (a'', b'', c'');$$

quand il sera nécessaire de faire mention de ces périodes on pourra désigner la fonction $Z(x, y, z)$ par

$$Z\left(x, y, z \left| \begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{matrix} \right.\right);$$

quand il n'y aura aucun doute possible sur les valeurs des trois groupes de périodes, nous écrirons comme précédemment $Z(x, y, z)$.

Cette fonction Z vérifie l'équation

$$\Delta Z = \frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \frac{d^2Z}{dz^2} = 0;$$

elle satisfait aux trois relations fondamentales

$$(2)\quad \begin{cases} Z(x+a, \; y+b, \; z+c) - Z(x, y, z) = Ax + By + Cz + E \\ Z(x+a', \; y+b', \; z+c') - Z(x, y, z) = A'x + B'y + C'z + E' \\ Z(x+a'', \; y+b'', \; z+c'') - Z(x, y, z) = A''x + B''y + C''z + E'' \end{cases}$$

dans lesquelles $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', E, E', E''$ sont des constantes dépendant des neuf quantités $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$. Ces constantes peuvent s'exprimer comme il suit.

La série qui définit $Z(x, y, z)$ montre que cette fonction ne change pas quand x, y, z changent de signes en même temps, car si l'on change de signes x, y, z et m, m', m'' le terme général de la série ne change pas. Ainsi l'on a

$$Z(-x, -y, -z) = Z(x, y, z).$$

D'aprés cela, si, dans la première des équations fondamentales (2), on fait

$$x = -\frac{a}{2}, \qquad y = -\frac{b}{2}, \qquad z = -\frac{c}{2}$$

le premier membre de cette relation s'annule et il vient

$$E = \frac{1}{2}(Aa + Bb + Cc).$$

On a de même

$$E' = \frac{1}{2}(A'a' + B'b' + C'c')$$

$$E'' = \frac{1}{2}(A''a'' + B''b'' + C''c'').$$

Désignons par

$$Z'_x(x, y, z), \qquad Z'_y(x, y, z), \qquad Z'_z(x, y, z)$$

les dérivées partielles de la fonction Z par rapport à x, y, z. Ces trois fonctions changent de signes quand x, y, z changent de signes en même temps. Par exemple, on a

$$Z'_x(-x, -y, -z) = -Z'_x(x, y, z).$$

En différentiant par rapport à x les deux membres de la relation fondamentale

$$Z(x + a, y + b, z + c) - Z(x, y, z) = Ax + By + Cz + E,$$

il vient

$$Z'_x(x + a, y + b, z + c) - Z'_x(x, y, z) = A;$$

d'où en faisant

$$x = -\frac{a}{2}, \qquad y = -\frac{b}{2}, \qquad z = -\frac{c}{2}$$

$$A = 2Z'_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right);$$

de même

$$B = 2Z'_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$$C = 2Z'_z\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

On trouverait, par un calcul identique, les valeurs des six constantes A', B', C', A'', B'', C'':

$$A' = 2Z'_x\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right), \quad B' = 2Z'_y\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right), \quad C' = 2Z'_z\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right)$$

$$A'' = 2Z'_x\left(\frac{a''}{2}, \frac{b''}{2}, \frac{c''}{2}\right), \quad B'' = 2Z'_y\left(\frac{a''}{2}, \frac{b''}{2}, \frac{c''}{2}\right), \quad C'' = 2Z'_z\left(\frac{a''}{2}, \frac{b''}{2}, \frac{c''}{2}\right).$$

De cette façon les constantes qui figurent dans les équations fondamentales (2) sont exprimées par des séries absolument convergentes. On connaît *a priori* un certain nombre de relations entre ces constantes ainsi que je l'ai montré dans mon premier mémoire. Parmi ces relations, je me bornerai à rappeler la suivante. Considérons le trièdre ayant pour sommet l'origine et dont les arêtes passent par les points de coordonnées

$$(a, b, c), \qquad (a', b', c'), \qquad (a'', b'', c'');$$

appelons θ, θ', θ'' les faces de ce trièdre,

$$(\lambda, \mu, \nu), \qquad (\lambda', \mu', \nu'), \qquad (\lambda'', \mu'', \nu'')$$

les cosinus directeurs des arêtes du trièdre supplémentaire et l, l' l'' les distances des trois points

$$(a, b, c), \qquad (a', b', c), \qquad (a'', b'', c'')$$

à l'origine. On aura

$$(3) \quad \left| \begin{aligned} &(\lambda A + \mu B + \nu C) l' l'' \sin\theta + (\lambda' A' + \mu' B' + \nu' C') l'' l \sin\theta' \\ &\quad + (\lambda'' A'' + \mu'' B'' + \nu'' C'') l l' \sin\theta'' = -4\pi. \end{aligned} \right.$$

3. En vue de certaines des applications qui suivent, il importe de voir ce que deviennent ces formules générales, lorsque le réseau des parallélépipèdes élémentaires ayant pour sommets les points de coordonnées (a_ν, b_ν, c_ν) se compose de parallélépipèdes rectangles dont les arêtes sont parallèles aux axes. Les points de coordonnées

$$(a, b, c), \qquad (a', b' c'), \qquad (a'', b'', c'')$$

seront alors situés le premier sur l'axe Ox le second sur Oy, le troisième sur Oz, et l'on aura

$$b = c = 0, \qquad a' = c' = 0, \qquad a'' = b'' = 0;$$

nous supposerons de plus

$$a > 0, \qquad b' > 0, \qquad c'' > 0.$$

Dans cette hypothése, on aura

$$a_\nu = ma, \qquad b_\nu = m'b', \qquad c_\nu = m''c'',$$

puis

$$\rho = \sqrt{a^2m^2 + b'^2m'^2 + c''^2m''^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{amx + b'm'y + c''m''z}{r\rho}$$

$$R = \sqrt{(x - am)^2 + (y - b'm')^2 + (z - c''m'')^2}$$

d'où

$$(4) \qquad Z\left(x, y, z \middle| \begin{matrix} a, & 0, & 0 \\ 0, & b', & 0 \\ 0, & 0, & c'' \end{matrix}\right) = \frac{1}{r} + \sum{}' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos\varphi)\right]$$

ρ, $\cos\varphi$ et R ayant les valeurs particulières ci-dessus. Cette fonction Z spéciale que nous désignerons pour abréger par

$$Z(x, y, z; a, b', c'')$$

est *paire* par rapport à chacune des variables séparément; en effet, par exemple, la série ne change pas si l'on change de signes x et m. Donc

$$Z(-x,\ y,\ z;\ a,\ b',\ c'') = Z(x,\ y,\ z;\ a,\ b',\ c'');$$

d'où l'on conclut, en différentiant par rapport à x,

$$Z'_x(-x,\ y,\ z;\ a,\ b',\ c'') = -Z'_x(x,\ y,\ z;\ a,\ b',\ c'')$$

et, pour $x = 0$,

$$Z'_x(0,\ y,\ z;\ a,\ b',\ c'') = -Z'_x(0,\ y,\ z;\ a,\ b',\ c'').$$

Cette dernière expression est donc *nulle, indéterminée* ou *infinie.* Comme les seuls points singuliers de

$$Z'_x(x,\ y,\ z;\ a,\ b',\ c'')$$

sont les points de coordonnées

$$x = ma, \qquad y = m'b', \qquad z = m''c'',$$

la fonction

$$Z'_x(0,\ y,\ z;\ a,\ b',\ c'')$$

ne peut devenir infinie ou indéterminée que pour

$$y = m'b', \qquad z = m''c'';$$

pour toutes les autres combinaisons de valeurs de y et z, elle est *nulle.*

De même les deux fonctions

$$Z'_y(x,\ 0,\ z;\ a,\ b',\ c''), \qquad Z'_z(x,\ y,\ 0;\ a,\ b',\ c'')$$

sont nulles, la première en tous les points du plan des xz distincts de ceux qui ont pour coordonnées

$$x = ma, \qquad z = m''c'',$$

la deuxiéme en tous les points du plan des xy distincts de ceux qui ont pour coordonnées

$$x = ma, \qquad y = m'b'.$$

En particulier les six constantes (voyez page 270)

$$B = 2Z'_y\left(\frac{a}{2}, 0, 0; a, b', c''\right), \qquad C = 2Z'_z\left(\frac{a}{2}, 0, 0; a, b', c''\right)$$

$$A' = 2Z'_x\left(0, \frac{b'}{2}, 0; a, b', c''\right), \qquad C' = 2Z'_z\left(0, \frac{b'}{2}, 0; a, b', c''\right)$$

$$A'' = 2Z'_x\left(0, 0, \frac{c''}{2}; a, b', c''\right), \qquad B'' = 2Z'_y\left(0, 0, \frac{c''}{2}; a, b', c''\right)$$

sont *nulles;* quant aux trois autres constantes, elles ont ici pour valeurs:

$$A = 2Z'_x\left(\frac{a}{2}, 0, 0; a, b', c''\right)$$

$$B' = 2Z'_y\left(0, \frac{b'}{2}, 0; a, b', c''\right)$$

$$C'' = 2Z'_z\left(0, 0, \frac{c''}{2}; a, b', c''\right).$$

Les relations (2) deviennent dans ce cas:

$$(5)\quad \left|\begin{aligned} Z(x+a, y, z) &= Z(x, y, z) + Ax + E \\ Z(x, y+b', z) &= Z(x, y, z) + B'y + E' \\ Z(x, y, z+c'') &= Z(x, y, z) + C''z + E''; \end{aligned}\right.$$

l'on a, de plus,

$$E = \frac{1}{2}Aa, \qquad E' = \frac{1}{2}B'b', \qquad E'' = \frac{1}{2}C''c''.$$

La formule (3) se simplifie alors de la façon suivante: les angles θ, θ', θ'' sont droits, et l'on a

$$\lambda = \mu' = \nu'' = 1, \qquad \mu = \nu = \lambda' = \nu' = \lambda'' = \mu'' = 0,$$
$$l = a, \qquad l' = b', \qquad l'' = c''.$$

La formule (3) devient donc

$$Ab'c'' + B'c''a + C''ab' = -4\pi.$$

Dans le cas plus particulier encore où l'on aurait

$$a = b' = c'',$$

c'est à dire dans le cas où les parallélépipèdes élémentaires seraient des cubes,[1] les constantes A, B', C'' seraient égales et la formule précédente donnerait:

$$A = B' = C'' = -\frac{4\pi}{3a^2};$$

d'où

$$E = E' = E'' = -\frac{2\pi}{3a}.$$

4. On sait quelle est, dans un grand nombre de questions d'électricité statique, l'importance de la détermination de la *fonction de Green* pour une surface fermée donnée. Soit S une surface fermée, la fonction U de GREEN est définie par les trois propriétés caractéristiques suivantes:

1°. Elle vérifie dans l'intérieur de la surface S l'équation $\Delta U = 0$;

2°. Elle a, en tous les points de la surface S, la valeur *zéro;*

3°. Elle est, en tous les points de l'intérieur de la surface S, finie et continue excepté en un point (x', y', z') où elle devient infinie[2] comme

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

Suivant la terminologie employée dans mon premier mémoire, la fonction de GREEN U vérifie l'équation $\Delta U = 0$, s'annule sur la surface S et admet dans l'intérieur le pôle simple (x', y', z') avec le résidu $+1$.

Nous nous proposons de déterminer la fonction de GREEN, lorsque la surface S est celle d'un polyèdre possédant la propriété suivante: si l'on prend les symétriques du polyèdre par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des nouveaux polyèdres par rapport à chacune de leurs faces, et ainsi de suite indéfiniment, les polyèdres en nombre infini ainsi obtenus *ne pénètrent pas les uns dans les autres.*

---

[1] C'est ce cas particulier que j'ai envisagé dans les Comptes Rendus T. 96, p. 69; j'ai de plus supposé $a = 1$; les constantes appelées dans cette note λ et μ ont donc pour valeurs $\lambda = -\frac{4\pi}{3}$, $\mu = -\frac{2\pi}{3}$.

[2] Voyez, par exemple, RIEMANN, *Schwere, Electricität und Magnetismus,* page 142.

Cela arrivera, par exemple, si le premier polyèdre est un parallélépipède rectangle ou un prisme droit ayant pour base un triangle équilatéral, un hexagone régulier, etc.

Pour tous ces polyèdres la fonction de GREEN s'exprime à l'aide de la fonction $Z(x, y, z)$; voici de quelle façon. Ayant construit le réseau des polyèdres déduits par symétrie du polyèdre donné S, comme nous venons de le dire, on prendra dans le premier polyèdre S un point $M'(x', y', z')$ et tous ses symétriques M'', M''', M^{IV}, etc.; la fonction de GREEN U sera une fonction ayant pour pôles simples tous les points M', M'', M''', M^{IV} etc., le point M' et ceux qui sont les symétriques d'ordre pair de M' avec le résidu $+1$, les autres points avec le résidu -1. L'on pourra former cette fonction en appliquant le théorème de M. MITTAG-LEFFLER tel que nous l'avons étendu aux fonctions satisfaisant à l'équation $\Delta U = 0$ et l'on arrivera ainsi à exprimer la fonction U à l'aide de la fonction $Z(x, y, z)$; c'est ce qui résulte des recherches de BRAVAIS *sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace* (Journal de l'école polytechnique, 33ième cahier, 1850). Cette fonction U prendra des valeurs égales et de signes contraires en deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à une face de l'un des polyèdres du réseau.

5. Traitons d'abord le problème de RIEMANN[1] et cherchons la fonction de GREEN pour un parallélépipède rectangle. Prenons pour origine le centre du parallélépipède et pour axes des parallèles aux arêtes: les six faces du parallélépipède seront alors deux à deux parallèles aux plans coordonnés et auront pour équations respectives

$$x = \pm \frac{\alpha}{2}, \qquad y = \pm \frac{\beta}{2}, \qquad z = \pm \frac{\gamma}{2},$$

si l'on appelle α, β, γ les dimensions du parallélépipède. D'aprés RIEMANN, la fonction cherchée U a pour pôles simples les points de coordonnées

$$k\alpha + (-1)^k x', \qquad m\beta + (-1)^m y', \qquad n\gamma + (-1)^n z'$$

avec un résidu égal à $(-1)^{k+m+n}$, les entiers k, m, n prenant tous les systèmes possibles de valeurs. En particulier elle admettra les huit pôles

[1] *Schwere, Electricität und Magnetismus,* page 84.

simples dont les coordonnées et les résidus sont indiqués dans le tableau suivant:

Coordonnées			Résidus
x',	y',	z'	$+1$
$\alpha - x'$,	y',	z'	-1
x',	$\beta - y'$,	z'	-1
x',	y',	$\gamma - z'$	-1
$\alpha - x'$,	$\beta - y'$,	z'	$+1$
$\alpha - x'$,	y',	$\gamma - z'$	$+1$
x',	$\beta - y'$,	$\gamma - z'$	$+1$
$\alpha - x'$,	$\beta - y'$,	$\gamma - z'$	-1.

Les coordonnées de tous les autres pôles se déduiront de celles du tableau précédent par l'addition d'un multiple de 2α à la coordonnée x, d'un multiple de 2β à y et d'un multiple de 2γ à z.

Cela posé considérons la fonction

$$Z(x, y, z;\ 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$$

formée avec les trois groupes de périodes

$$(6)\quad \left|\begin{array}{ccc} 2\alpha, & 0, & 0 \\ 0, & 2\beta, & 0 \\ 0, & 0, & 2\gamma. \end{array}\right.$$

Cette fonction a pour pôles simples de résidu $+1$ les points de coordonnées

$$2p\alpha, \quad 2q\beta, \quad 2r\gamma$$

p, q, r entiers. On aura alors une fonction U admettant les pôles indiqués ci-dessus avec les résidus correspondants en prenant l'expression suivante où l'on écrit $Z(x, y, z)$ au lieu de $Z(x, y, z;\ 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$:

$$(7) \quad U = Z(x - x', y - y', z - z') - Z(x - \alpha + x', y - y', z - z')$$
$$- Z(x - x', x - \beta + y', z - z') - Z(x - x', y - y', z - \gamma + z')$$
$$+ Z(x - \alpha + x', y - \beta + y', z - z') + Z(x - \alpha + x', y - y', z - \gamma + z')$$
$$+ Z(x - x', y - \beta + y', z - \gamma + z') - Z(x - \alpha + x', y - \beta + y', z - \gamma + z').$$

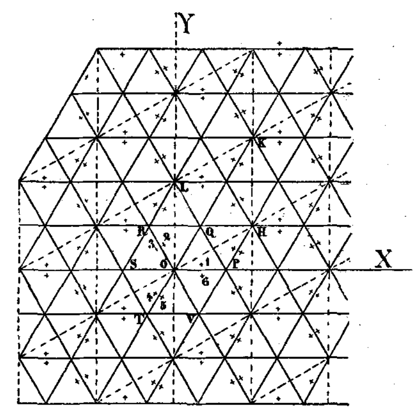
Cette fonction U satisfait à l'équation $\Delta U = 0$, elle a dans l'intérieur du parallélépipède donné le seul pôle x', y', z' de résidu $+1$, enfin elle s'annule sur les six faces du parallélépipède; cela est évident pour les faces $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = \frac{\beta}{2}$, $z = \frac{\gamma}{2}$, car, pour $x = \frac{\alpha}{2}$ par exemple, les huit termes qui figurent dans l'expression de U se détruisent deux à deux en vertu de la relation

$$Z(x, y, z; a, b', c'') = Z(-x, y, z; a, b', c'');$$

quant aux faces $x = -\frac{\alpha}{2}$, $y = -\frac{\beta}{2}$, $z = -\frac{\gamma}{2}$, on vérifie que U s'annule sur ces faces en s'appuyant en outre sur les relations fondamentales (5). Ces mêmes relations montrent que la fonction U admet les trois groupes de périodes (6) c'est à dire reprend les mêmes valeurs aux points ayant pour coordonnées

$$x + 2p\alpha, \qquad y + 2q\beta, \qquad z + 2r\gamma$$

p, q, r étant des entiers quelconques. Cette fonction U constitue donc un exemple des fonctions à trois groupes de périodes étudiées dans un précédent mémoire (Acta Mathematica T. 4, page 360).



On peut vérifier également sur l'expression trouvée que la fonction U est symétrique par rapport aux deux points (x, y, z) et (x', y', z').

6. Appliquons encore la méthode générale à la determination de la fonction de Green pour un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral.[1]

Soit (voyez la figure), dans le plan des

[1] Une question analogue a été traitée par M. Riquier dans une Thèse *Sur la méthode de M. Carl Neumann* soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 2 avril 1886 (page 94).

coordonnées x et y un triangle équilatéral OPQ de coté α; prenons pour origine le sommet O et pour axe des x le coté OP; nous supposerons le prisme placé de telle façon que le triangle OPQ soit la section droite équidistante des bases et nous appellerons h la hauteur du prisme, de sorte que les plans de bases auront pour équations

$$z = \pm \frac{h}{2}.$$

Considérons, dans l'intérieur du prisme, un point M' de coordonnées x', y', z' et construisons ses images successives par rapport à toutes les faces du prisme. D'abord les images successives du point M' par rapport aux bases ont pour coordonnées

$$x', \quad y', \quad nh + (-1)^n z'$$

où n désigne un entier quelconque; les coordonnées de tous ces points se déduisent de celles des deux points

$$x', \; y', \; z', \qquad x', \; y', \; h - z'$$

par l'addition de multiples des périodes

$$0, \quad 0, \quad 2h.$$

Ensuite les images successives du point $M'(x', y', z')$ par rapport aux faces latérales s'obtiennent comme il suit. Soit 1 la projection du point M' sur le plan des xy: construisons le réseau des triangles équilatéraux formés en prenant les symétriques du triangle OPQ par rapport à ses cotés, puis les symétriques des symétriques etc., et marquons par des croix les images du point 1. Dans l'hexagone régulier $PQRSTV$ nous aurons le point 1 et cinq de ses images, les points 2, 3, 4, 5, 6 dont les coordonnées sont les suivantes:

Points	Coordonnées polaires		Coordonnées rectangulaires	
1	r',	θ'	x',	y'
2	r',	$\frac{2\pi}{3} - \theta'$	$-\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}$,	$\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}$

3	r',	$\frac{2\pi}{3} + \theta'$	$-\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}$,	$\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}$
4	r',	$-\frac{2\pi}{3} - \theta'$	$-\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}$,	$-\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}$
5	r',	$-\frac{2\pi}{3} + \theta'$	$-\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}$,	$-\frac{x'\sqrt{3}}{2} - \frac{y'}{2}$
6	r',	$-\theta'$	x',	$-y'$.

Si l'on construit le réseau de parallélogrammes admettant pour parallélogramme élémentaire $OHKL$, réseau dont les sommets ont pour coordonnées

$$\frac{3ka}{2}, \qquad k\frac{a\sqrt{3}}{2} + ma\sqrt{3}$$

où k et m sont des entiers quelconques, toutes les images du point 1 dans le réseau des triangles seront des points homologues des six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans le réseau des parallélogrammes.

Par conséquent la fonction U qu'il s'agit de former aura pour pôles simples les douze points suivants avec les résidus ± 1 comme l'indique le tableau ci-dessous:

Coordonnées	Résidus
$x', \; y', \; z'$	$+1$
$x', \; y', \; h - z'$	-1
$-\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}, \quad z'$	-1
$-\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}, \quad h - z'$	$+1$
$-\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} - \frac{y'}{2}, \quad z'$	$+1$
$-\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} - \frac{y'}{2}, \quad h - z'$	-1

$$
\begin{array}{llll}
-\frac{x'}{2}-\frac{y'\sqrt{3}}{2}, & -\frac{x'\sqrt{3}}{2}+\frac{y'}{2}, & z' & -1 \\[2ex]
-\frac{x'}{2}-\frac{y'\sqrt{3}}{2}, & -\frac{x'\sqrt{3}}{2}+\frac{y'}{2}, & h-z' & +1 \\[2ex]
-\frac{x'}{2}+\frac{y'\sqrt{3}}{2}, & -\frac{x'\sqrt{3}}{2}-\frac{y'}{2}, & z' & +1 \\[2ex]
-\frac{x'}{2}+\frac{y'\sqrt{3}}{2}, & -\frac{x'\sqrt{3}}{2}-\frac{y'}{2}, & h-z' & -1 \\[2ex]
x', & -y', & z' & -1 \\[2ex]
x', & -y', & h-z' & +1\,;
\end{array}
$$

elle aura en outre pour pôles simples avec les mêmes résidus tous les points de l'espace dont les coordonnées se déduisent des précédentes par l'adjonction de multiples des trois groupes de périodes

$$
\begin{array}{lccc}
 & 0, & 0, & 2h \\[1ex]
(8) & \frac{3a}{2}, & \frac{a\sqrt{3}}{2}, & 0 \\[1ex]
 & 0, & a\sqrt{3}, & 0.
\end{array}
$$

Soit alors $Z(x, y, z)$ la fonction Z formée avec ces trois groupes de périodes, c'est à dire obtenue en faisant dans les formules générales

$$
\begin{array}{lll}
a = 0, & b = 0, & c = 2h \\[1ex]
a' = \frac{3a}{2}, & b' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, & c' = 0 \\[1ex]
a'' = 0, & b'' = a\sqrt{3}, & c'' = 0.
\end{array}
$$

La fonction de Green cherchée U sera

$$
\begin{aligned}
U = {} & Z(x - x', y - y', z - z') - Z(x - x', y - y', z - h + z') \\
& - Z\left(x + \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, y - \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}, z - z'\right) \\
& + Z\left(x + \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, y - \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}, z - h + z'\right) \\
& + Z\left(x + \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}, y - \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}, z - z'\right) \\
& - Z\left(x + \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}, y - \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}, z - h + z'\right) \\
& - Z\left(x + \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}, y + \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}, z - z'\right) \\
& + Z\left(x + \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}, y + \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}, z - h + z'\right) \\
& + Z\left(x + \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, y + \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}, z - z'\right) \\
& - Z\left(x + \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, y + \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}, z - h + z'\right). \\
& - Z(x - x', y + y', z - z') + Z(x - x', y + y', z - h + z').
\end{aligned}
$$

Cette fonction U satisfait à l'équation $\Delta U = 0$ et admet les trois groupes de périodes (8); elle a, dans le prisme donné, le seul pôle simple (x', y', z') avec le résidu $+1$; enfin elle s'annule sur toutes les faces du prisme. On vérifie immédiatement cette dernière propriété pour les faces

$$z = \pm \frac{h}{2}, \qquad y = 0$$

en remarquant que la fonction Z formée avec les périodes (8) est paire par rapport à z et par rapport à y; en effet, les quantités désignées dans le cas général par a_ν, b_ν, c_ν (page 267) sont actuellement

$$a_\nu = m'\frac{3a}{2}, \qquad b_\nu = m'\frac{a\sqrt{3}}{2} + m''a\sqrt{3}, \qquad c_\nu = 2mh;$$

en changeant m de signe, c_ν change de signe, a_ν et b_ν ne changent pas; de même, en changeant m'' en $-m' - m''$, b_ν change de signe, a_ν et c_ν

ne changent pas; donc, d'après la forme du terme général de la série qui définit $Z(x, y, z)$, on a, dans le cas actuel

$$Z(x, y, z) = Z(x, y, -z) = Z(x, -y, z).$$

D'après cela, si l'on fait, dans U, $z = \frac{h}{2}$ ou $y = 0$ tous les termes de U sont deux à deux égaux et de signes contraires et U s'annule; quant à la face $z = -\frac{h}{2}$, on a en un point de cette face

$$U = Z\left(x - x', \; y - y', \; -\frac{h}{2} - z'\right) - Z\left(x - x', \; y - y', \; -\frac{3h}{2} + z'\right)$$
$$- \ldots\ldots$$

Comme chaque terme tel que $Z\left(x - x', \; y - y', \; -\frac{3h}{2} + z'\right)$ peut être remplacé par $Z\left(x - x', \; y - y', \frac{3h}{2} - z'\right)$, la seconde fonction Z de chaque ligne se déduit de la première par l'addition aux variables du groupe de périodes 0, 0, $2h$; en appliquant alors les relations fondamentales (2) on trouvera facilement que la valeur de U est nulle. Enfin il resterait à vérifier que la fonction U s'annule sur les deux faces du prisme qui ont pour traces, sur le plan de la section droite OQ et PQ; c'est ce que l'on ferait sans peine en prenant successivement ces droites pour axe des coordonnées x.

Il doit encore arriver ici, d'après un théorème général de RIEMANN, que la fonction U est symétrique par rapport aux deux points (x, y, z) et (x', y', z').

7. Voici maintenant une seconde catégorie de questions dont la solution dépend, dans certains cas particuliers indiqués plus loin, de l'emploi de la fonction $Z(x, y, z)$. Soit une surface fermée S: on se propose de former une fonction $V(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta V = 0$, ayant dans l'intérieur de S des pôles simples donnés

$$(x_1, y_1, z_1), \; (x_2, y_2, z_2), \; \ldots, \; (x_n, y_n, z_n)$$

de résidus donnés

$$R_1, R_2, \ldots, R_n$$

et satisfaisant en tous les points de la surface S à la condition

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

$\frac{\partial V}{\partial n}$ désignant la dérivée de V prise suivant la normale à la surface S; cette dernière condition signifie géométriquement que les surfaces de niveau

$$V = C^{\text{te}}$$

coupent à angle droit la surface S. Le problème ainsi posé n'est possible que si

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n = 0.$$

En effet on a

$$\iint \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)$$

l'intégrale double étant étendue à la surface S: comme $\frac{\partial V}{\partial n}$ est nul sur la surface S, la somme $R_1 + R_2 + \ldots + R_n$ doit être nulle. Supposons cette condition remplie et admettons qu'il y ait une fonction V remplissant les conditions du problème: cette fonction sera unique à une constante additive près.[1] En effet imaginons une seconde fonction V' remplissant les mêmes conditions, la différence

$$U = V - V'$$

sera finie et continue à l'intérieur de S, vérifiera l'équation $\Delta U = 0$ et satisfera en tous les points de S à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$

Alors, d'aprés la relation de Green

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

$$= -\iiint U \Delta U\, dx\, dy\, dz + \iint U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

[1] Voyez Riemann, *Schwere, Electricität und Magnetismus*, page 279.

dans laquelle les intégrales triples sont étendues au volume limité par la surface S et l'intégrale double à la surface S, on a, puisque

$$\Delta U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz = 0$$

d'où

$$U = C^{\text{te}}.$$

La différence $V - V'$ est donc constante et la fonction V' ne diffère de V que par une constante additive.

La détermination de la fonction V qui possède à l'intérieur de S les n pôles simples

$$(x_1, y_1, z_1), \ (x_2, y_2, z_2), \ \ldots, \ (x_n, y_n, z_n)$$

avec les résidus

$$R_1, R_2, \ldots, R_n$$

dont la somme est nulle, et qui satisfait aux autres conditions indiquées précédemment, peut être ramenée à la détermination de $n - 1$ fonctions n'ayant chacune que deux pôles simples dans l'intérieur de S et satisfaisant aux mêmes conditions que V. En effet, appelons V_k, $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$, une fonction qui possède dans l'intérieur de S les deux pôles simples

$$(x_k, y_k, z_k), \ (x_n, y_n, z_n)$$

avec les résidus $+1$ et -1, qui vérifie à l'intérieur de S l'équation $\Delta V_k = 0$ et sur la surface S l'équation $\frac{\partial V_k}{\partial n} = 0$; la fonction V sera

$$R_1 V_1 + R_2 V_2 + \ldots + R_{n-1} V_{n-1}.$$

Ainsi l'on peut ramener le cas général au cas où il y a seulement deux pôles simples à l'intérieur de S. Ce dernier cas se présente dans la question de physique suivante:

La surface S étant remplie d'un liquide conducteur, plaçons en deux points

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2)$$

de ce liquide les deux électrodes d'une pile supposées avoir la forme de sphères de rayon très-petit par rapport aux dimensions de S. Un régime permanent s'établit et le liquide devient le siège d'un courant constant. Appelons $V(x, y, z)$ le potentiel en un point (x, y, z) du liquide: cette fonction V satisfait dans l'intérieur du liquide à l'équation $\Delta V = 0$, elle admet les centres des deux électrodes M_1 et M_2 comme pôles simples de résidus V_0 et $-V_0$, enfin elle vérifie sur la surface S l'équation $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$.

L'on pourra exprimer cette fonction V à l'aide de la fonction $Z(x, y, z)$ toutes les fois que la surface S sera la surface d'un polyèdre satisfaisant à la condition suivante: si l'on construit les symétriques de ce polyèdre par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des polyèdres symétriques par rapport à chacune de leurs faces, et ainsi de suite indéfiniment, *l'on obtient un réseau de polyèdres ne pénétrant pas les uns dans les autres.* Alors, en appliquant le principe des images, on considérera les deux points M_1 et M_2 comme des points lumineux et les faces du polyèdre comme des miroirs, et l'on construira les images des points M_1 et M_2; puis l'on formera une fonction $F_1(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F_1 = 0$, admettant comme pôles simples avec le résidu $+1$ le point M_1 et ses images, une fonction $F_2(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F_2 = 0$, admettant comme pôles simples avec le résidu $+1$ le point M_2 et ses images; le produit

$$V_0[F_1(x, y, z) - F_2(x, y, z)]$$

augmenté d'une fonction entière convenable sera le potentiel cherché. La formation des fonctions F_1 et F_2 résulte de l'extension du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, extension que j'ai indiquée dans mon premier mémoire (Acta Mathematica T. 4).

8. Appliquons cette méthode au cas particulier où le polyèdre S

est un parallélépipède rectangle de dimensions α, β, γ dont les faces ont pour équations

$$x = \pm \frac{\alpha}{2}, \qquad y = \pm \frac{\beta}{2}, \qquad z = \pm \frac{\gamma}{2}.$$

Les images du point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ par rapport aux faces ont pour coordonnées

$$k\alpha + (-1)^k x_1, \qquad m\beta + (-1)^m y_1, \qquad n\gamma + (-1)^n z_1$$

k, m, n étant des entiers quelconques. Si, parmi ces images, nous considérons les huit points ayant pour coordonnées

$$(x_1, y_1, z_1), \qquad (\alpha - x_1, y_1, z_1), \qquad (x_1, \beta - y_1, z_1),$$
$$(x_1, y_1, \gamma - z_1), \qquad (\alpha - x_1, \beta - y_1, z_1), \qquad (\alpha - x_1, y_1, \gamma - z_1),$$
$$(x_1, \beta - y_1, \gamma - z_1), \qquad (\alpha - x_1, \beta - y_1, \gamma - z_1),$$

les coordonnées de toutes les autres images se déduiront de celles des huit points ci-dessus par l'addition d'un multiple de 2α à x, d'un multiple de 2β à y et d'un multiple de 2γ à z. Cela posé, prenons la fonction

$$Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$$

formée avec les groupes de périodes

$$\begin{array}{lll} a = 2\alpha, & b = 0, & c = 0 \\ a' = 0, & b' = 2\beta, & c' = 0 \\ a'' = 0, & b'' = 0, & c'' = 2\gamma. \end{array} \tag{9}$$

Une fonction $F_1(x, y, z)$ ayant pour pôles simples le point M_1 et ses images, avec le résidu $+1$, sera

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= Z(x - x_1, y - y_1, z - z_1; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma) \\ &+ Z(x - \alpha + x_1, y - y_1, z - z_1) + Z(x - x_1, y - \beta + y_1, z - z_1) \\ &+ Z(x - x_1, y - y_1, z - \gamma + z_1) + Z(x - \alpha + x_1, y - \beta + y_1, z - z_1) \\ &+ Z(x - \alpha + x_1, y - y_1, z - \gamma + z_1) + Z(x - x_1, y - \beta + y_1, z - \gamma + z_1) \\ &+ Z(x - \alpha + x_1, y - \beta + y_1, z - \gamma + z_1). \end{aligned}$$

De même la fonction $F_2(x, y, z)$ déduite de la précédente par le changement de l'indice 1 en l'indice 2

$$F_2(x, y, z) = Z(x - x_2, y - y_2, z - z_2) + Z(x - a + x_2, y - y_2, z - z_2) \\ + \text{etc.}$$

a pour pôles de résidus $+1$ le point $M_2(x_2, y_2, z_2)$ et toutes ses images. La fonction

$$(10) \qquad V(x, y, z) = V_0[F_1(x, y, z) - F_2(x, y, z)]$$

ne différera du potentiel cherché que par une fonction entière. Mais il est aisé de voir que *cette fonction est précisément le potentiel cherché,* en vérifiant qu'elle remplit toutes les conditions imposées au potentiel. Il suffit pour cela de vérifier que la dérivée

$$\frac{\partial V}{\partial n}$$

est nulle sur toutes les faces du parallélépipède donné. Sur la face $x = \frac{a}{2}$, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial n}$ est égale à $\frac{\partial V}{\partial x}$, car la normale à cette face est parallèle à l'axe des coordonnées x: or

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = Z'_x(x - x_1, y - y_1, z - z_1) + Z'_x(x - a + x_1, y - y_1, z - z_1) + \ldots;$$

et pour $x = \frac{a}{2}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = Z'_x\left(\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) + Z'_x\left(-\frac{a}{2} + x_1, y - y_1, z - z_1\right) + \ldots;$$

on a vu (page 272) que la fonction

$$Z'_x(x, y, z; a, b', c'')$$

est *impaire* par rapport à x: donc

$$Z'_x\left(\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) + Z'_x\left(-\frac{a}{2} + x_1, y - y_1, z - z_1\right) = 0;$$

les autres termes de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ se détruisent de même deux à deux pour $x = \frac{a}{2}$; donc enfin $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ s'annule pour $x = \frac{a}{2}$. Comme il en est de même de $\frac{\partial F_2}{\partial x}$, on voit que $\frac{\partial V}{\partial x}$ s'annule pour $x = \frac{a}{2}$. Faisons maintenant dans $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $x = -\frac{a}{2}$; nous aurons

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = Z'_x\left(-\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) + Z'_x\left(-\frac{3a}{2} + x_1, y - y_1, z - z_1\right) + \cdots$$

$$= Z'_x\left(-\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) - Z'_x\left(\frac{3a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) + \cdots$$

Mais, on a, d'après les relations fondamentales (5) dans lesquelles $a = 2\alpha$, $b' = 2\beta$, $c'' = 2\gamma$

$$Z'_x(x + 2\alpha, y, z) = Z'_x(x, y, z) + A;$$

donc la différence

$$Z'_x\left(\frac{3a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) - Z'_x\left(-\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right)$$

est égale à A, et l'on a, pour $x = -\frac{a}{2}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -4A;$$

comme dans les mêmes conditions $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ se réduit également à $-4A$, la fonction

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_0\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)$$

s'annule pour $x = -\frac{a}{2}$. On vérifierait de même que $\frac{\partial V}{\partial y}$ s'annule sur les faces

$$y = \pm\frac{\beta}{2}$$

et $\frac{\partial V}{\partial z}$ sur les faces $z = \pm \frac{\gamma}{2}$. Donc la fonction V est bien le potentiel cherché. Cette fonction admet les trois groupes de périodes (9); en effet on déduit immédiatement des relations fondamentales (5) que l'on a

$$V(x + 2\alpha, y, z) = V(x, y + 2\beta, z) = V(x, y, z + 2\gamma) = V(x, y, z).$$

9. Les expressions des fonctions F_1 et F_2 établies dans le numéro précédent se simplifient quand l'un des points M_1 ou M_2 se trouve dans un des plans coordonnés: cette simplification se rattache aux formules de la division par 2 d'un groupe de périodes de la fonction $Z(x, y, z)$.

Supposons, par exemple, que les deux points M_1 et M_2 soient dans le plan xOy, c'est à dire $z_1 = z_2 = 0$. Alors les images du point M_1 ont pour coordonnées

$$k\alpha + (-1)^k x_1, \qquad m\beta + (-1)^m y_1, \qquad n\gamma$$

k, m, n étant des entiers quelconques. Si, parmi ces images, nous considérons les quatre points ayant pour coordonnées

$$(x_1, y_1, 0), \quad (\alpha - x_1, y_1, 0), \quad (x_1, \beta - y_1, 0), \quad (\alpha - x_1, \beta - y_1, 0),$$

les coordonnées de toutes les autres images se déduiront de celles des quatre points ci-dessus par l'addition d'un multiple de 2α à x, d'un multiple de 2β à y et d'un multiple de γ à z; il en sera de même des images du point M_2. Prenons la fonction

$$Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \gamma)$$

formée avec les groupes de périodes

$$\begin{array}{lccc} (11) \qquad & a = 2\alpha, & b = 0, & c = 0, \\ & a' = 0, & b' = 2\beta, & c' = 0, \\ & a'' = 0, & b'' = 0, & c'' = \gamma, \end{array}$$

et désignons cette fonction par $Z_1(x, y, z)$ pour la distinguer de la fonction $Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ employée dans le numéro précédent. Cette fonction Z_1 vérifie les relations fondamentales suivantes:

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
&Z_1(x + 2\alpha, y, z) - Z_1(x, y, z) = A_1 x + E_1 \\
&Z_1(x, y + 2\beta, z) - Z_1(x, y, z) = B_1' y + E_1' \\
&Z_1(x, y, z + \gamma) - Z_1(x, y, z) = C_1'' z + E_1''
\end{aligned}
$$

les constantes A_1, B_1', C_1'', E_1, E_1', E_1'' ayant les valeurs définies dans les n^{os} 1 et 2. L'on aura alors, pour le potentiel cherché V

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
\frac{V}{V_0} = {} & Z_1(x - x_1, y - y_1, z) + Z_1(x - \alpha + x_1, y - y_1, z) \\
& + Z_1(x - x_1, y - \beta + y_1, z) + Z_1(x - \alpha + x_1, y - \beta + y_1, z) \\
& - Z_1(x - x_2, y - y_2, z) - Z_1(x - \alpha + x_2, y - y_2, z) \\
& - Z_1(x - x_2, y - \beta + y_2, z) - Z_1(x - \alpha + x_2, y - \beta + y_2, z).
\end{aligned}
$$

En effet, comme la fonction $Z_1(x, y, z)$ admet pour pôles simples de résidus $+1$ les points de coordonnées

$$
2k\alpha, \qquad 2m\beta, \qquad n\gamma,
$$

la fonction précédente $V(x, y, z)$ admet bien comme pôles de résidus $+V_0$ le point M_1 et ses images, comme pôles de résidus $-V_0$ le point M_2 et ses images. Elle vérifie de plus les équations

$$
(14) \qquad \begin{aligned}
V(x, y, z) &= V(\alpha - x, y, z) = V(x, \beta - y, z) = V(x, y, \gamma - z) \\
&= V(-\alpha - x, y, z) = V(x, -\beta - y, z) = V(x, y, -\gamma - z)
\end{aligned}
$$

comme on le vérifie en s'appuyant sur ce que la fonction Z_1 est paire en x, y, z et en se servant des relations fondamentales (12). Ces équations (14) montrent que $\frac{\partial V}{\partial x}$ s'annule pour $x = \pm \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ pour $y = \pm \frac{\beta}{2}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ pour $z = \pm \frac{\gamma}{2}$. La fonction V possède donc les propriétés caractéristiques du potentiel cherché. Les relations (14) permettent de montrer qu'elle admet en outre les trois groupes de périodes (11).

La formule (13) se simplifie encore davantage si les points M_1 et M_2 sont sur un axe coordonné, par exemple sur Ox: alors

$$
z_1 = y_1 = z_2 = y_2 = 0.
$$

Les images du point M_1 ont pour coordonnées

$$k\alpha + (-1)^k x_1, \qquad m\beta, \qquad n\gamma,$$

celles du point M_2

$$k\beta + (-1)^k x_2, \qquad m\beta, \qquad n\gamma;$$

soit

$$Z(x, y, z;\ 2\alpha, \beta, \gamma) = Z_2(x, y, z)$$

la fonction Z formée avec les périodes

$$\begin{matrix} 2\alpha, & 0, & 0 \\ 0, & \beta, & 0 \\ 0, & 0, & \gamma. \end{matrix}$$

On aura

$$\frac{V}{V_0} = Z_2(x - x_1, y, z) + Z_2(x - \alpha + x_1, y, z) - Z_2(x - x_2, y, z) - Z_2(x - \alpha + x_2, y, z),$$

comme on le vérifie facilement.

Enfin si les points M_1 et M_2 sont au centre de deux faces opposées du parallélépipède c'est à dire si l'on a, par exemple,

$$x_1 = -\frac{\alpha}{2}, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\alpha}{2}, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0,$$

il vient

$$\frac{V}{V_0} = Z_2\left(x + \frac{\alpha}{2}, y, z\right) + Z_2\left(x - \frac{3\alpha}{2}, y, z\right) - Z_2\left(x - \frac{\alpha}{2}, y, z\right) - Z_2\left(x - \frac{\alpha}{2}, y, z\right),$$

ou d'après la relation

$$Z_2(x + 2\alpha, y, z) = Z_2(x, y, z) + A_2 x + E_2$$

dans laquelle on remplace x par $x - \frac{3\alpha}{2}$, et E_2 par sa valeur $A_2\alpha$

$$(15) \qquad \frac{V}{V_0} = 2Z_2\left(x + \frac{\alpha}{2},\ y,\ z\right) - 2Z_2\left(x - \frac{\alpha}{2},\ y,\ z\right) - A_2 x + A_2 \frac{\alpha}{2}.$$

Si, dans cette formule, on suppose

$$2\alpha = \beta = \gamma = 1,$$

on retrouve l'expression que nous avons donnée dans les Comptes Rendus, séance du 28 janvier 1884; A_2 est alors égal à $-\frac{4\pi}{3}$ et E_2 à $-\frac{2\pi}{3}$ (page 274). Comme les pôles se sont superposés deux a deux, il faut pour avoir le potentiel, supprimer le facteur 2 dans le second membre de l'équation (15).

10. L'on pourrait résoudre la même question dans le cas où le polyèdre S serait un prisme droit ayant pour base un triangle équilatéral, un hexagone régulier, etc. La solution étant entièrement semblable à celle du problème précédent, je ne m'y arrêterai pas, et je terminerai ce travail en présentant quelques observations sur un mode d'extension des résultats que l'on vient d'obtenir.

Étant donnée une sphère de rayon a et de centre C, nous dirons que deux points M et M' sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la sphère quand ils sont en ligne droite avec le centre et conjugués harmoniques l''un de l'autre par rapport aux deux extrémités du diamètre $MM'C$; ces deux points sont inverses l'un de l'autre par rapport à la sphère

$$\overline{CM}\,.\,\overline{CM'} = a^2;$$

l'on dit aussi que l'un d'eux est l'image de l'autre par rapport à la sphère.

Considérons un volume fini ou indéfini limité par des portions de surfaces sphériques ou planes: ce volume sera appelé polyèdre fondamental. Construisons les symétriques du polyèdre fondamental par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des nouveaux polyèdres par rapport à chacune de leurs faces et ainsi de suite indéfiniment. Alors deux cas se présenteront: ou bien l'ensemble des polyèdres ainsi construits occupera une portion de l'espace sans que les volumes des polyèdres aient des points communs; ou bien ces polyèdres pénétreront les uns dans les autres.

Nous n'envisagerons que le premier cas et nous dirons dans ce cas que le polyèdre fondamental donne naissance à un groupe discontinu de transformation. Un exemple d'un pareil groupe a été donné par M. PICARD dans le Bulletin de la société mathématique de France T. XII, page 43; ces groupes ont aussi été considérés par M. POINCARÉ dans son *mémoire sur les groupes kleinéens* (Acta Mathematica T. 3, page 66).

Cela posé, on peut se proposer de former une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ partout où elle existe et possédant les propriétés suivantes. Convenons d'écrire, pour simplifier, $F(M)$ au lieu de $F(x, y, z)$, M désignant le point de l'espace dont les coordonnées sont x, y, z. Soit M un point du polyèdre fondamental, M' son image par rapport à une face de ce polyèdre appartenant à une sphère de rayon a': appelons r' la distance du point M au centre de cette sphère. Alors la valeur de la fonction F au point M' sera donnée par

$$F(M') = \frac{r'}{a'} F(M);$$

de sorte que du moment que la fonction F est connue dans le polyèdre fondamental, elle est connue dans le polyèdre symétrique par rapport à la face considérée. Appelons de même M'' l'image du point M par rapport à une seconde face du polyèdre fondamental appartenant à une sphère de rayon a'' et r'' la distance du point M au centre de cette sphère, on aura

$$F(M'') = \frac{r''}{a''} F(M),$$

et ainsi de suite pour toutes les faces. L'on prolongera par le même procédé la fonction F dans tout l'espace occupé par le groupe des polyèdres considérés. Si dans l'intérieur du polyèdre fondamental la fonction F vérifie l'équation

$$\Delta F = 0$$

elle la vérifiera dans tous les autres polyèdres en vertu du théorème de THOMSON (Journal de LIOUVILLE, T. 12, p. 256—264).

L'on pourrait aussi remplacer les équations précédentes par les suivantes:

$$F(M') = -\frac{r'}{a'}F(M)$$

$$F(M'') = -\frac{r''}{a''}F(M)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

en changeant le signe après chaque inversion. La fonction F ainsi déterminée s'annulerait sur la surface du polyèdre fondamental.

Un exemple de l'expression d'une pareille fonction et même d'une fonction plus générale se trouve dans les leçons de RIEMANN »*Schwere, Electricität und Magnetismus,* bearbeitet von HATTENDORF», page 191. Je me propose, dans un autre travail, de donner l'expression analytique d'une telle fonction et d'en faire des applications semblables à celles qui ont été données plus haut pour la fonction $Z(x, y, z)$.

Paris, 23 mars 1886.