

EINIGE EIGENSCHAFTEN  
 DER  
 LINEAREN UND HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN  
 VON  
 E. A. STENBERG  
 in HELSINGFORS.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist einen Satz von LA-GRANGE zu verallgemeinern.

Dieser Satz sagt erstens, dass jeder integrierende Factor der linken Seite einer linearen und homogenen Differentialgleichung ein particuläres Integral einer anderen linearen und homogenen Differentialgleichung von derselben Ordnung ist, deren Coefficienten rationale algebraische Functionen von denen der ersteren und ihren Abgeleiteten sind, und zweitens, dass jeder integrierende Factor der linken Seite dieser neuen Differentialgleichung ein particuläres Integral der ursprünglichen ist. Eine vollständige Entwicklung dieses Satzes befindet sich in einer Abhandlung von FLOQUET: *Sur la théorie des équations différentielles linéaires*. Annales scient. de l'école normale supérieure, Sér. 2, Tome 8, 1879; Suppl.

Es scheint mir dass eine Verallgemeinerung des betreffenden Satzes kaum möglich ist, solange der oben angeführte Wortlaut desselben beibehalten wird, weshalb ich im Folgenden von einem anderen Standpunkte ausgegangen bin, und zwar von demselben, den ich in einem früheren Aufsatz (*En egenskap hos lineära och homogena differentialeqvationer*, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens förhandl. 1884, n:o 5) eingenommen habe.

## I.

1. Es sei

$$L_\nu = y^{(\nu)} + P_{\nu,1}y^{(\nu-1)} + \dots + P_{\nu,\nu}y, \quad (\nu = \mu, \mu+1, \dots, n)$$

eine Reihe von linearen und homogenen Differentialausdrücken, welche so beschaffen sind, dass es möglich ist ein System von Grössen

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_n$$

zu finden, welche

$$(1) \quad z_\nu L_\nu = \frac{d}{dx}(z_\nu L_{\nu-1})$$

machen; dann giebt es immer, wie auch  $\nu$  unter den ganzen Zahlen, die  $> \mu$  sind, gewählt sei, ein System von  $\nu - \mu$  Grössen

$$U_{\nu-\mu,1}, U_{\nu-\mu,2}, \dots, U_{\nu-\mu,\nu-\mu},$$

welche von  $y$  unabhängig sind und der Bedingung genügen, dass in Bezug auf  $y$  die Identität

$$(2) \quad L_\nu \equiv L_\mu^{(\nu-\mu)} + U_{\nu-\mu,1}L_\mu^{(\nu-\mu-1)} + U_{\nu-\mu,2}L_\mu^{(\nu-\mu-2)} + \dots + U_{\nu-\mu,\nu-\mu}L_\mu$$

stattfindet. Hierbei wird  $z_\nu$  ein particuläres Integral der zu der Gleichung

$$(3) \quad y^{(\nu-\mu)} + U_{\nu-\mu,1}y^{(\nu-\mu-1)} + U_{\nu-\mu,2}y^{(\nu-\mu-2)} + \dots + U_{\nu-\mu,\nu-\mu}y = 0$$

adjungirten Differentialgleichung.

Wenn  $\nu = \mu + 1$  ist, gilt dieser Satz; ich brauche nur

$$U_{11} = \frac{z'_{\mu+1}}{z_{\mu+1}}$$

zu setzen.

Es sei nun angenommen, dass die Gültigkeit des Satzes für  $\nu = n - 1$  festgestellt, d. h. dass

$$L_{n-1} \equiv L_\mu^{(n-1-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1-\mu} U_{n-1-\mu,\rho} L_\mu^{(n-1-\mu-\rho)}$$

ist. Dann ergibt sich aus der Bedingung

$$L_n = L'_{n-1} + \frac{z'_n}{z_n} L_{n-1}$$

dass auch

$$L_n = L_\mu^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu, \rho} L_\mu^{(n-\mu-\rho)}$$

ist, wenn

$$(4) \quad \begin{cases} U_{n-\mu, 1} &= U_{n-1-\mu, 1} + \frac{z'_n}{z_n} \\ U_{n-\mu, \rho} &= U_{n-1-\mu, \rho} + U'_{n-1-\mu, \rho-1} + \frac{z'_n}{z_n} U_{n-1-\mu, \rho-1} \quad (\rho=2, 3, \dots, n-\mu-1) \\ U_{n-\mu, n-\mu} &= U'_{n-1-\mu, n-1-\mu} + \frac{z'_n}{z_n} U_{n-1-\mu, n-1-\mu} \end{cases}$$

gesetzt werden. Dieses System (4) sagt mir aber, dass  $z_n$  der Gleichung

$$z_n^{(n-\mu)} - \frac{d^{n-\mu-1}}{dx^{n-\mu-1}} (U_{n-\mu, 1} z_n) + \frac{d^{n-\mu-2}}{dx^{n-\mu-2}} (U_{n-\mu, 2} z_n) + \dots + (-1)^{n-\mu} U_{n-\mu, n-\mu} z_n = 0$$

genügt, d. h. dass  $z_n$  ein Integral der zu (3) adjungirten Differentialgleichung ist. Da nun der Satz für  $\nu = \mu + 1$  gilt, so hat er auch im Allgemeinen Gültigkeit.

Aus der ersten Gleichung des Systems (4) finde ich, wenn ich sie als Recursionsformel ansehe, folgende Eigenschaft

$$(4a) \quad U_{n-\mu, 1} = \frac{z'_n}{z_n} + \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}} + \dots + \frac{z'_{\mu+1}}{z_{\mu+1}} = \frac{d}{dx} \log (z_{\mu+1} z_{\mu+2} \dots z_{n-1} z_n),$$

da ja

$$U_{11} = \frac{z'_{\mu+1}}{z_{\mu+1}}$$

ist.

2. Die Identität (2) giebt mir zur Bestimmung der Grössen  $U_{\nu-\mu, 1}, \dots, U_{\nu-\mu, \nu-\mu}$  das System von  $\nu - \mu$  Gleichungen:

$$(5) \quad P_{\nu, \rho} = S_{\nu-\mu, \rho} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\rho-1} S_{\nu-\mu-\lambda, \rho-\lambda} U_{\nu-\mu, \lambda} + U_{\nu-\mu, \rho} \quad (\rho=1, 2, 3, \dots, \nu-\mu)$$

wo

$$S_{a, \beta} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\beta-1} \frac{|a|}{|a-\sigma|} P_{\mu, \beta-\sigma}^{(\sigma)}$$

wenn  $\beta \leq \mu$  ist, und

$$S_{a, \beta} = \sum_{\sigma=\beta-\mu}^{\sigma=\beta-1} \frac{|a|}{|a-\sigma|} P_{\mu, \beta-\sigma}^{(\sigma)},$$

wenn  $\beta > \mu$  ist, gesetzt wird.

Hieraus ergeben sich die Grössen  $U_{\nu-\mu, 1}, U_{\nu-\mu, 2}, \dots, U_{\nu-\mu, \nu-\mu}$  als lineare algebraische Functionen der Coefficienten  $P_{\nu 1}, P_{\nu 2}, \dots, P_{\nu, \nu-\mu}$  und zwar auf folgende Weise

$$(6) \quad U_{\nu-\mu, \rho} = P_{\nu, \rho} + \overset{\nu}{N}_{\rho, 1} P_{\nu, \rho-1} + \overset{\nu}{N}_{\rho, 2} P_{\nu, \rho-2} + \dots + \overset{\nu}{N}_{\rho, \rho-1} P_{\nu, 1} + \overset{\nu}{N}_{\rho, \rho} \quad (\rho=1, 2, \dots, \nu-\mu)$$

wo die Coefficienten  $\overset{\nu}{N}_{\rho, \sigma}$  ganze algebraische Functionen von  $P_{\mu 1}, P_{\mu 2}, \dots, P_{\mu \mu}$  und ihren Abgeleiteten sind und sich nach der Recursionsformel

$$\overset{\nu}{N}_{\rho, \sigma} = - \sum_{\tau=1}^{\tau=\sigma-1} \overset{\nu}{N}_{\rho-\tau, \sigma-\tau} S_{\nu-\mu-\rho+\tau, \tau} - S_{\nu-\mu-\rho+\sigma, \sigma} \quad (\sigma=1, 2, 3, \dots, \rho)$$

berechnen lassen. Aus dem System (5) finde ich, dass

$$\overset{\nu+1}{N}_{\rho+1, \sigma} = \overset{\nu}{N}_{\rho, \sigma}$$

und im Allgemeinen

$$\overset{\nu+x}{N}_{\rho+x, \sigma} = \overset{\nu}{N}_{\rho, \sigma}$$

ist, wenn  $\sigma \leq \rho$  ist, und  $x$  eine positive ganze Zahl bedeutet.

Ausser dem System (5) giebt mir die Identität (2) noch  $\mu$  Gleichungen, welche gewisse Relationen enthalten, die zwischen den Coefficienten der Differentialgleichungen  $L_{\mu} = 0$  und  $L_{\nu} = 0$  bestehen.

Diese Bedingungsgleichungen sind:

$$(7) \quad P_{\nu, \rho} = T_{\nu-\mu, \rho} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu} T_{\nu-\mu-\lambda, \rho-\lambda} U_{\nu-\mu, \lambda} \quad (\rho=\nu-\mu+1, \nu-\mu+2, \dots, \nu)$$

wo

$$T_{a,\beta} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=a} \frac{|a|}{|a-\sigma|} \sigma P_{\mu,\beta-\sigma}^{(\sigma)}$$

wenn  $\beta \leq \mu$  ist, und

$$T_{a,\beta} = \sum_{\sigma=\beta-\mu}^{\sigma=a} \frac{|a|}{|a-\sigma|} \sigma P_{\mu,\beta-\sigma}^{(\sigma)}$$

wenn  $\beta > \mu$  ist, gesetzt wird.

Wenn ich in die Gleichungen (7) die in (6) gegebenen Ausdrücke einführe, finde ich die  $\mu$  letzten Coefficienten der Differentialgleichung  $L_\nu = 0$  als lineare, algebraische Functionen von den ersten Coefficienten  $P_{\nu 1}, P_{\nu 2}, \dots, P_{\nu, \nu-\mu}$ :

$$(8) \quad P_{\nu, \nu-\mu+\rho} = A_{\rho, 0}^\nu + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu} A_{\rho, \lambda}^\nu P_{\nu, \lambda} \quad (\rho=1, 2, \dots, \mu)$$

wo die  $A_{\rho, \lambda}^\nu$  ganze algebraische Functionen von den Coefficienten der Differentialgleichung  $L_\mu = 0$  und ihren Abgeleiteten und nach der Formel

$$A_{\rho, \lambda}^\nu = T_{\nu-\mu-\lambda, \nu-\mu+\rho-\lambda}^\nu + \sum_{\tau=\lambda+1}^{\tau=\nu-\mu} N_{\tau, \tau-\lambda}^\nu T_{\nu-\mu-\tau, \nu-\mu+\rho-\tau}^\nu$$

gebildet sind.

Diese Formel sagt mir, dass

$$(9) \quad A_{\rho, \lambda+x}^{\nu+x} = A_{\rho, \lambda}^\nu$$

ist, wenn  $x$  eine positive ganze Zahl bedeutet.

3. Wenn zwei lineare und homogene Differentialausdrücke  $L_\mu$  von der Ordnung  $\mu$  und  $L_n$  von der Ordnung  $n$  so beschaffen sind, dass es  $n - \mu$  von  $y$  unabhängige Grössen

$$U_{n-\mu, 1}, U_{n-\mu, 2}, \dots, U_{n-\mu, n-\mu}$$

gibt, welche für jeden Werth von  $y$

$$L_n = L_\mu^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu, \rho} L_\mu^{(n-\mu-\rho)}$$

machen,<sup>1</sup> so ist jedes System

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_n$$

welches den Gleichungen

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} U_{n-\mu, 1} = U_{n-\mu-1, 1} + \frac{z'_n}{z_n}, \quad U_{n-\mu-1, 1} = U_{n-\mu-2, 1} + \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}}, \quad \dots, \quad U_{11} = \frac{z'_{\mu+1}}{z_{\mu+1}} \\ \\ U_{n-\mu-\sigma, \rho_\sigma} = U_{n-\mu-\sigma-1, \rho_\sigma} + U'_{n-\mu-\sigma-1, \rho_\sigma-1} + U_{n-\mu-\sigma-1, \rho_\sigma-1} \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}} \\ \quad (\sigma=0, 1, 2, \dots, n-\mu-3) \quad (\rho_\sigma=2, 3, \dots, n-\mu-\sigma-1) \\ \\ U_{n-\mu-\sigma, n-\mu-\sigma} = U'_{n-\mu-\sigma-1, n-\mu-\sigma-1} + U_{n-\mu-\sigma-1, n-\mu-\sigma-1} \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}} \\ \quad (\sigma=0, 1, 2, \dots, n-\mu-2) \end{array} \right.$$

genügt, von der Beschaffenheit, dass, wenn eine Reihe von Differentialausdrücken

$$\mathfrak{L}_{\mu+1}, \mathfrak{L}_{\mu+2}, \dots, \mathfrak{L}_n$$

nach dem Gesetze

$$z_{\mu+1} \mathfrak{L}_{\mu+1} = \frac{d}{dx} (z_{\mu+1} L_\mu)$$

$$z_\nu \mathfrak{L}_\nu = \frac{d}{dx} (z_\nu \mathfrak{L}_{\nu-1}) \quad (\nu=\mu+2, \mu+3, \dots, n)$$

gebildet wird, wobei die zur Anwendung kommenden

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_n$$

zu demselben System gehören,

$$\mathfrak{L}_n \equiv L_n$$

ist.

Denn nach dem § 1 ist

$$\mathfrak{L}_n \equiv L_\mu^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu, \rho} L_\mu^{(n-\mu-\rho)}$$

und hier ist das rechte Glied der Annahme nach  $\equiv L_n$ .

<sup>1</sup> Oder mit anderen Worten: wenn die Bedingungen (7) oder (8) erfüllt sind.

Sämmtliche Grössen  $z_n$ , wenn überhaupt solche existiren, welche den Gleichungen (10) genügen, integriren sowohl die Adjungirte der Differentialgleichung

$$L_n = 0$$

wie auch die Adjungirte der Gleichung

$$(11) \quad y^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu,\rho} y^{(n-\mu-\rho)} = 0,$$

aber andererseits muss auch jedes Integral der letzteren Adjungirten unter denjenigen Grössen  $z_n$  vorkommen, welche den Gleichungen (10) genügen, da ja die Veränderliche  $z_n$  nur in der Gruppe des Systems (10) eingeht, in der  $\sigma = 0$  ist, und diese Gruppe durch die genannte Adjungirte der Gleichung (11) vollständig ersetzt wird.

4. Hierdurch erhalte ich das Theorem:

*Wenn zwei lineare und homogene Differentialausdrücke*

$$L_\mu = y^{(\mu)} + P_{\mu,1} y^{(\mu-1)} + \dots + P_{\mu,\mu} y$$

und

$$L_n = y^{(n)} + P_{n,1} y^{(n-1)} + \dots + P_{n,n} y$$

so von einander abhängen, dass man mittelst einem System von Grössen

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_n$$

durch eine Reihe von Differentialausdrücken

$$L_{\mu+1}, L_{\mu+2}, \dots, L_{n-1},$$

welche nach dem Gesetze

$$z_\nu L_\nu = \frac{d}{dx} (z_\nu L_{\nu-1}) \quad (\nu = \mu+1, \mu+2, \dots, n-1)$$

gebildet sind, zu der Gleichung

$$z_n L_n = \frac{d}{dx} (z_n L_{n-1})$$

kommen kann, und wenn diejenige Differentialgleichung

$$M_{n-\mu} = 0,$$

deren linke Seite auf folgende Weise mit Hilfe der nach der Formel (6) gebildeten Grössen  $U_{n-\mu,1}, U_{n-\mu,2}, \dots, U_{n-\mu,n-\mu}$ :

$$M_{n-\mu} = y^{(n-\mu)} - \frac{d^{n-\mu-1}}{dx^{n-\mu-1}}(U_{n-\mu,1}y) + \frac{d^{n-\mu-2}}{dx^{n-\mu-2}}(U_{n-\mu,2}y) + \dots \\ \dots + (-1)^{n-\mu} U_{n-\mu,n-\mu}y$$

aufgestellt ist, ein Fundamentalsystem von  $n - \mu$  Integralen besitzt, so giebt es ein System von  $\mu$  Grössen

$$V_{\mu,1}, V_{\mu,2}, \dots, V_{\mu,\mu}$$

welche in Bezug auf  $y$

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} V_{\mu,\rho} M_{n-\mu}^{(\mu-\rho)}$$

machen.

Wende ich hier die erste Gleichung

$$(5^a) \quad P_{\nu,1} = P_{\mu,1} + U_{\nu-\mu,1}$$

des Systems (5) an, indem ich statt  $P_{\nu,1}$  und  $P_{\mu,1}$  die entsprechenden Coefficienten der Ausdrücke  $M_n$  und  $M_{n-\mu}$  und statt  $U_{\nu-\mu,1}, V_{\mu,1}$  einführe, erhalte ich, da  $M_n$  der zu  $L_n$  adjungirte Ausdruck ist, die Gleichung

$$(12) \quad -P_{n,1} = -U_{n-\mu,1} + V_{\mu,1}.$$

5. Bisher habe ich den Differentialausdrücken  $L_\mu, L_{\mu+1}, \dots, L_n$  keine Bedingung hinsichtlich ihres Verschwindens gestellt; diese allgemeine Auffassung der Frage werde ich jetzt einigermaassen einschränken, indem ich den Differentialausdruck  $L_n$  als die linke Seite einer linearen und homogenen Differentialgleichung von der Ordnung  $n$

$$L_n = 0$$

betrachte, welche ein Fundamentalsystem von Integralen

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

besitzt.

Diese Voraussetzung genügt, um auch bei jeder der Gleichungen

$$L_\mu = 0, \quad L_{\mu+1} = 0, \quad \dots, \quad L_{n-1} = 0 \quad \text{und} \quad M_n = 0$$



die Existenz eines Fundamentalsystems von Integralen festzustellen, wie aus meinem in der Einleitung genannten Aufsätze ersichtlich ist.

Ausserdem sagt mir diese Voraussetzung, dass auch  $M_{n-\mu} = 0$  ein Fundamentalsystem von Integralen hat. Denn ist das System

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

so gewählt, dass

$$y_1, y_2, \dots, y_\mu$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung

$$L_\mu = 0$$

bilden, so kann jede lineare und homogene Differentialgleichung, welche eines der  $n - \mu$  Systeme

$$y_1, y_2, \dots, y_\mu, y_{\mu+1}, \dots, y_{\rho-1}, y_{\rho+1}, \dots, y_n \quad (\rho = \mu+1, \mu+2, \dots, n)$$

als Fundamentalsystem von Integralen hat, die Gleichung

$$L_{n-1} = 0$$

repräsentiren, wodurch nach der ersten Gleichung (5a) des Systems (5) die Grösse  $U_{n-1-\mu,1}$  die  $n - \mu$  Werthe

$$\frac{d}{dx} \log \frac{|y_1 y_2 \dots y_\mu|}{|y_1 y_2 \dots y_\mu y_{\mu+1} \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|} \quad (\rho = \mu+1, \mu+2, \dots, n)$$

annehmen kann, wo ich der Kürze wegen mit

$$|y_1 y_2 \dots y_\nu|$$

die Functional-determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_\nu \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(\nu-1)} & y_2^{(\nu-1)} & \dots & y_\nu^{(\nu-1)} \end{vmatrix}$$

bezeichnet habe; folglich wird nach der ersten Gleichung des Systems (4) die Differentialgleichung

$$M_{n-\mu} = 0$$

von den  $n - \mu$  Functionen

$$z_{n,\rho} = \frac{|y_1 y_2 \cdots y_\mu y_{\mu+1} \cdots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \cdots y_n|}{|y_1 y_2 \cdots y_n|} \quad (\lambda = \mu+1, \mu+2, \dots, n)$$

integriert, welche von einander linear unabhängig sind.

Jede lineare und homogene Differentialgleichung, welche ein Fundamentalsystem von Integralen besitzt und die in einem nach dem obigen Gesetze gebildeten System von Gleichungen

$$L_\mu = 0, \quad L_{\mu+1} = 0, \quad \dots, \quad L_n = 0$$

vorkommt, werde ich eine »*Reducirte* derjenigen Differentialgleichung» nennen, welche in dem betreffenden System als die letzte auftritt, d. h. von der höchsten Ordnung ist, und zwar werde ich der Gleichung

$$L_\nu = 0, \quad \mu \leq \nu < n$$

die Benennung: eine » $(n - \nu)$ :*reducirte* der linearen und homogenen Differentialgleichung

$$L_n = 0$$

beilegen.

6. Nach den Auseinandersetzungen des § 5 kann ich, wenn  $L_n = 0$  eine lineare und homogene Differentialgleichung von der Ordnung  $n$  ist, welche ein Fundamentalsystem von Integralen hat, den im § 4 angeführten Satz folgendermaassen aussprechen:

Wenn  $L_\mu = 0$  eine  $(n - \mu)$ :*reducirte* der Differentialgleichung  $L_n = 0$  ist, so ist diejenige Differentialgleichung

$$M_{n-\mu} = 0,$$

deren linke Seite auf folgende Weise mit Hilfe der nach der Formel (6) gebildeten Grössen

$$U_{n-\mu,1}, U_{n-\mu,2}, \dots, U_{n-\mu,n-\mu}$$

$$M_{n-\mu} = y^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} (-1)^\rho \frac{d^{n-\mu-\rho}}{dx^{n-\mu-\rho}} (U_{n-\mu,\rho} y)$$

aufgestellt ist, eine  $\mu$ :*reducirte* der zu  $L_n = 0$  adjungirten Differentialgleichung

$$M_n = 0.$$

Nach der Gleichung (5<sub>a</sub>) ist unter Beibehaltung der im § 5 gegebenen Bezeichnungen

$$U_{n-\mu,1} = \frac{d}{dx} \log \left| \frac{y_1 y_2 \dots y_\mu}{y_1 y_2 \dots y_n} \right|$$

$$V_{\mu,1} = \frac{d}{dx} \log \left| \frac{z_{n,\mu+1} z_{n,\mu+2} \dots z_{n,n}}{z_{n,1} z_{n,2} \dots z_{n,n}} \right| = \frac{d}{dx} \log \left[ \left| z_{n,\mu+1} z_{n,\mu+2} \dots z_{n,n} \right| \left| y_1 y_2 \dots y_n \right| \right]$$

wodurch die Gleichung

$$(12) \quad P_{n,1} = U_{n-\mu,1} - V_{\mu,1}$$

in die folgende übergeht:

$$(12a) \quad \frac{d}{dx} \log \left| \frac{y_1 y_2 \dots y_\mu}{z_{n,\mu+1} z_{n,\mu+2} \dots z_{n,n}} \right| = \frac{d}{dx} \log |y_1 y_2 \dots y_n|$$

d. h.

$$(12b) \quad \frac{|y_1 y_2 \dots y_\mu|}{|z_{n,\mu+1} z_{n,\mu+2} \dots z_{n,n}|} = C |y_1 y_2 \dots y_n|$$

wo  $C$  eine gewisse Constante, und

$$z_{n\rho} = \frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|}$$

ist.

7. Dem letzten Satze zufolge sind die im § 5 angeführten Grössen

$$V_{\mu,1}, V_{\mu,2}, \dots, V_{\mu,\mu},$$

welche der Bedingung

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} V_{\mu,\rho} M_{n-\mu}^{(\mu-\rho)}$$

Genüge leisten, so beschaffen, dass die Gleichung

$$\mathcal{L}_\mu = y^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} (-1)^\rho \frac{d^{\mu-\rho}}{dx^{\mu-\rho}} (V_{\mu,\rho} y) = 0$$

eine  $(n - \mu)$ :reducirte der Differentialgleichung

$$L_n = 0$$

ist.

Der zweite Coefficient der Gleichung  $\mathcal{L}_\mu = 0$  ist die Grösse

$$-V_{\mu,1}$$

und folglich, nach den Formeln (12) und (5<sup>a</sup>) gleich dem zweiten Coefficienten

$$P_{\mu,1}$$

der Gleichung  $L_\mu = 0$ .

Nehme ich jetzt an dass die Differentialgleichung  $L_n = 0$  so gewählt ist, dass sämtliche Functionaldeterminanten

$$|y_1 y_2 \cdots y_\mu|, \quad |y_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_{n+1}|, \quad \cdots, \quad |y_{n-\mu+1} y_{n-\mu+2} \cdots y_n|,$$

welche von  $\mu$  Elementen eines ihrer Fundamentalsysteme von Integralen gebildet werden können, von einander linear unabhängig sind, so folgt aus dem soeben Gesagten, dass in diesem Falle  $L_\mu = 0$  und  $\mathcal{L}_\mu = 0$  dasselbe Fundamentalsystem von Integralen haben müssen, d. h. dass

$$L_\mu \equiv \mathcal{L}_\mu$$

ist.

Wenn ich jetzt in dem System (6)  $V$  statt  $U$ ,  $n$  statt  $\nu$  und  $n - \mu$  statt  $\mu$  schreibe und an Stelle der Grössen  $P_{n,1}, P_{n,2}, \dots, P_{n,\mu}$  die entsprechenden Coefficienten der Gleichung  $M_n = 0$  als Functionen der erstgenannten Grössen setze, sowie auch in die Grössen  $N_{\rho,\sigma}$  statt der Coefficienten  $P_{n-\mu,1}, P_{n-\mu,2}, \dots, P_{n-\mu,n-\mu}$  die entsprechenden der Gleichung  $M_{n-\mu} = 0$  als Functionen der Grössen  $P_{n,1}, P_{n,2}, \dots, P_{n,n-\mu}; P_{\mu,1}, P_{\mu,2}, \dots, P_{\mu,\mu}$  einführe, so müssen in dem vorhandenen Falle die Ausdrücke, welche die rechten Seiten der Gleichungen des Systems (6) bilden, in die Coefficienten der zu

$$L_\mu = 0$$

adjungirten Differentialgleichung übergehen. Da jedoch diese Ausdrücke von der gemachten Bedingungsannahme garnicht abhängig sind, so müssen im Allgemeinen, wie auch die Gleichung  $L_n = 0$  gewählt sei, die genannten Substitutionen das obige Resultat hervorbringen.

Hieraus folgt aber dass im Allgemeinen

$$L_\mu \equiv \mathcal{L}_\mu$$

ist.

Wenn also die lineare und homogene Differentialgleichung  $n^{\text{er}}$  Ordnung

$$L_n = 0$$

ein Fundamentalsystem von Integralen besitzt, und

$$y^{(\mu)} + V_{\mu,1}y^{(\mu-1)} + V_{\mu,2}y^{(\mu-2)} + \dots + V_{\mu,\mu}y = 0$$

die Adjungirte einer ihrer  $(n - \mu)$ :reducirten  $L_n = 0$  darstellt, so findet in Beziehung auf  $y$  die Identität

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} V_{\mu,\rho} M_{n-\mu}^{(\mu-\rho)}$$

statt, wobei  $M_n$  die Adjungirte der Gleichung  $L_n = 0$  und  $M_{n-\mu}$  eine gewisse unter ihren  $\mu$ :reducirten repräsentiren, und umgekehrt ist, wenn ich mit

$$y^{(n-\mu)} + U_{n-\mu,1}y^{(n-\mu-1)} + \dots + U_{n-\mu,n-\mu}y = 0$$

die Adjungirte der Gleichung  $M_{n-\mu} = 0$  bezeichne,

$$L_n \equiv L_n^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu,\rho} L_n^{(n-\mu-\rho)}.$$

Wenn ich andererseits wieder meinen früheren Standpunkt, denjenigen der §§ 1—4, einnehme, berechtigt mich das angedeutete Verhalten des Systems (6) zur folgenden Aussprache:

Es seien die linearen und homogenen Differentialausdrücke  $L_\mu$  und  $L_n$  so von einander abhängig wie im § 4 angegeben ist und  $M_n$  der Adjungirte zu  $L_n$  — dann ist der Adjungirte

$$y^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} V_{\mu,\rho} y^{(\mu-\rho)}$$

des Ausdruckes  $L_n$  so beschaffen dass in Beziehung auf  $y$  die Identität

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} V_{\mu,\rho} M_{n-\mu}^{(\mu-\rho)}$$

stattfindet, wo  $M_{n-\mu}$  der nach Angabe des § 4 gebildete Ausdruck ist.

## II.

8. Bevor ich die Untersuchung über die Eigenschaften der für meine Arbeit wichtigen Functionen

$$U_{n-\mu, 1}, U_{n-\mu, 2}, \dots, U_{n-\mu, n-\mu}$$

weiterführe, sehe ich mich genöthigt Einiges über die Herstellung einer solchen linearen und homogenen Differentialgleichung  $L = 0$  vorauszuschicken, welche von sämmtlichen Integralen jeder einzigen zu einem System von gegebenen linearen und homogenen Differentialgleichungen derselben Ordnung  $\mu$

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad \dots, \quad l_r = 0$$

gehörenden Gleichung integrirt wird, und deren allgemeines Integral die Form

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$$

hat, wo

$$Y_\rho \quad (\rho=1, 2, \dots, r)$$

das allgemeine Integral der Gleichung

$$l_\rho = 0$$

bedeutet.

Es sei also das obige System

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad \dots, \quad l_r = 0$$

gegeben, wo

$$l_\rho = y^{(\mu)} + p_{\rho, 1} y^{(\mu-1)} + \dots + p_{\rho, \mu} y \quad (\rho=1, 2, \dots, r)$$

ist, und die Gleichung

$$l_\rho = 0 \quad (\rho=1, 2, \dots, r)$$

das Fundamentalsystem von Integralen

$$y_{\rho, 1}, y_{\rho, 2}, \dots, y_{\rho, \mu}$$

besitzt. Gibt es dann wirklich eine Differentialgleichung

$$L = y^{(\mu)} + P_1 y^{(\mu-1)} + \dots + P_\nu y = 0$$

von der oben genannten Beschaffenheit, so muss erstens ihre Ordnungszahl  $\nu$  diejenige Zahl sein, welche angiebt wie viele unter den Functionen

$$y_{\rho, \sigma} \quad \left( \begin{matrix} \rho=1, 2, 3, \dots, r \\ \sigma=1, 2, 3, \dots, \mu \end{matrix} \right)$$

von einander linear unabhängig sind<sup>1</sup> und zweitens jede der gegebenen Gleichungen

$$l_{\rho} = 0 \quad (\rho=1, 2, 3, \dots, r)$$

eine  $(\nu - \mu)$ :reducirte der Gleichung  $L = 0$  sein.

Es müssen also die Coefficienten der letztgenannten Gleichung den in der Formel (8) enthaltenen Bedingungen genügen, wenn in dieser Formel die Substitutionen

$$P_{\nu, \lambda} = P_{\lambda}, \quad P_{\mu, x} = p_{\rho, x} \\ (\lambda=1, 2, \dots, \nu) \quad (x=1, 2, \dots, \mu)$$

ausgeführt werden. Bezeichne ich mit

$$A_{\sigma, \lambda}^{\nu}(l_{\rho})$$

das Resultat der Substitutionen

$$P_{\mu, x} = p_{\rho, x} \quad (x=1, 2, \dots, \mu)$$

in die Grösse  $A_{\sigma, \lambda}^{\nu}$ , so sind die genannten Bedingungen in dem System:

$$(13) \quad P_{\nu-\mu+\sigma} = A_{\sigma, 0}^{\nu}(l_{\rho}) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu} A_{\sigma, \lambda}^{\nu}(l_{\rho}) P_{\lambda} \quad (\rho=1, 2, \dots, r; \sigma=1, 2, \dots, \mu)$$

enthalten.

Wie aus dem § 2 ersichtlich ist können aber die Grössen  $A_{\sigma, \lambda}^{\nu}(l_{\rho})$  nur dann gebildet werden, wenn die  $\nu - \mu$  ersten Abgeleiteten von den Coefficienten

$$p_{\rho, x} \quad \left( \begin{matrix} \rho=1, 2, \dots, r \\ x=1, 2, \dots, \mu \end{matrix} \right)$$

existiren. Dieses ist folglich eine nothwendige Bedingung zur Existenz der Differentialgleichung  $L = 0$ . Ist aber diese Bedingung erfüllt, so können auch die  $\nu$  ersten Abgeleiteten einer jeden der Functionen

$$y_{\rho, \sigma}$$

<sup>1</sup> Die Zahl  $\nu$  ist von der Wahl der Fundamentalsysteme unabhängig.

gebildet werden und hierdurch ist das Vorhandensein der Coefficienten  $P_1, P_2, \dots, P_\nu$  vollständig ausser Zweifel gestellt. Da es ausserdem nur eine einzige Differentialgleichung  $L = 0$  geben kann, erhalte ich aus dem Vorhergehenden den Satz:

Wenn ich eine Anzahl von linearen und homogenen Differentialgleichungen

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad \dots, \quad l_r = 0$$

von derselben Ordnung  $\mu$  habe, von denen eine jede ein Fundamentalsystem von Integralen besitzt, und ich mit  $\nu$  die Anzahl der von einander linear unabhängigen unter den Elementen sämtlicher dieser Fundamentalsysteme bezeichne, so giebt es immer, sobald von allen Coefficienten der gegebenen Gleichungen die  $\nu - \mu$  ersten Abgeleiteten gebildet werden können, eine und nur eine einzige Differentialgleichung

$$L = 0,$$

welche so beschaffen ist, dass jedes particuläre Integral einer jeden der Gleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  der Gleichung  $L = 0$  Genüge leistet, und das allgemeine Integral der letzten Gleichung die Form

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$$

hat, wobei

$$Y_\rho \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

das allgemeine Integral der Gleichung

$$l_\rho = 0$$

darstellt.

Dieser Satz giebt mir ein Mittel zu bestimmen wann mehrere lineare und homogene Differentialgleichungen von derselben Ordnung gemeinschaftliche Integrale haben, wie ich im Folgenden zeigen werde.

9. Fürs Erste nehme ich nun an dass es keine Function giebt, die gleichzeitig zwei oder mehrere der gegebenen Differentialgleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  integrirt, d. h. dass

$$\nu = r\mu = n$$

ist. Ausserdem setze ich voraus dass die im § 8 erwähnte Bedingung erfüllt ist.







verschwinden, aber wenigstens eine von den Subdeterminanten

$$D_m$$

von Null verschieden sein.

11. Im § 9 habe ich die nothwendige Bedingung aufgestellt, der die Gleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  genügen müssen wenn nicht zwei oder mehrere unter ihnen von derselben Function integrirt werden, und im § 10 die nothwendige Bedingung, die von den genannten Gleichungen erfüllt werden muss, wenn eine gewisse Anzahl von ihren Integralen linear unabhängig sind. Diese Bedingungen sind aber auch genügend, denn wenn alle Determinanten  $D_{m-1} = 0$  sind, und unter den Determinanten  $D_m$  wenigstens eine nicht  $= 0$  ist, so kann die Anzahl der von einander linear unabhängigen unter den Integralen der Gleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  weder grösser noch kleiner als  $n - m$  sein, folglich ist sie  $= n - m$ .

Schliesslich will ich noch bemerken, dass die Coefficienten der Gleichung

$$L = 0,$$

wie das System (13) ergibt, nur von den Coefficienten der gegebenen Gleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  und ihren  $\nu - \mu$  ersten Abgeleiteten abhängig sind und zwar von den Coefficienten nur derjenigen unter ihnen, deren allgemeine Integrale von einander linear unabhängig sind.

### III.

12. Es sei wieder wie im § 5

$$L_n = 0$$

eine lineare und homogene Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, von der ich jetzt annehme, dass in einem gewissen Gebiete

1° die Functionen

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

ein Fundamentalsystem von Integralen derselben darstellen, und

2° die  $\lambda - 1$  ersten Abgeleiteten einer jeden der Functionen  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , oder, was dasselbe ist, die  $\lambda - n - 1$  ersten Abgeleiteten des Differentialausdruckes  $L_n$  gebildet werden können, wobei  $\lambda$  die grösste unter den Zahlen

$$n + \frac{|n|}{|\mu| |n - \mu|} \quad (\mu=1, 2, \dots, n-1)$$

bedeutet.

Hiermit habe ich gesagt, dass in dem in Frage stehenden Gebiete nicht nur sämtliche Grössen

$$u_{n-\mu} = c_{n-\mu} e^{\int U_{n-\mu,1} dx} \quad (\mu=1, 2, \dots, n-1)$$

$$c_{n-\mu} = \text{Const.}$$

sondern auch ihre

$$\frac{|n|}{|\mu| |n - \mu|}$$

ersten Abgeleiteten gebildet werden können, da nämlich infolge der Gleichung (5<sub>a</sub>) die Grössen  $u_{n-\mu}$  bei geeigneter Wahl der Constanten  $c_{n-\mu}$  das Aussehen

$$(14) \quad u_{n-\mu, \rho} = \frac{|y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_\mu}|}{|y_1 y_2 \dots y_n|}$$

haben, wobei ich mit dem angehängten Zeichen  $\rho$  andeuten will, dass

$$i_1, i_2, \dots, i_\mu$$

die  $\rho^{\text{te}}$  Combination von je  $\mu$  unter den  $n$  Zahlen  $1, 2, \dots, n$  bedeutet, nachdem ich die genannten Combinationen in eine gewisse Reihenfolge geordnet habe.

Unter Beibehaltung der Bezeichnung  $L_\mu = 0$  für eine  $(n - \mu)$ :reducirte der Differentialgleichung  $L_n = 0$  ist  $L_0 = 0$  die lineare und homogene Differentialgleichung von der Ordnung Null

$$y = 0.$$

Bei der Annahme  $\mu = 0$  verschwinden also sämtliche Grössen

$$S_{\alpha, \beta}$$

des § 2, wodurch die Formel (5) in

$$U_{\nu, \rho} = P_{\nu, \rho}, \quad (\rho=1, 2, \dots, \nu)$$

und das System (10) in das folgende übergeht:

$$(15) \left\{ \begin{array}{lll} P_{n,1} = P_{n-1,1} + \frac{z'_n}{z_n}, & P_{n,\rho} = P_{n-1,\rho} + P'_{n-1,\rho-1} & P_{n,n} = P'_{n-1,n-1} \\ & + P_{n-1,\rho-1} \frac{z'_n}{z_n}, & + P_{n-1,n-1} \frac{z'_n}{z_n}, \\ & (\rho=2, 3, \dots, n-1) & \\ P_{n-1,1} = P_{n-2,1} + \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}}, & P_{n-1,\rho} = P_{n-2,\rho} + P'_{n-2,\rho-1} & P_{n-1,n-1} = P'_{n-2,n-2} \\ & + P_{n-2,\rho-1} \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}}, & + P_{n-2,n-2} \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}}, \\ & (\rho=2, 3, \dots, n-2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-\sigma,1} = P_{n-\sigma-1,1} + \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}}, & P_{n-\sigma,\rho} = P_{n-\sigma-1,\rho} + P'_{n-\sigma-1,\rho-1} & P_{n-\sigma,n-\sigma} = P'_{n-\sigma-1,n-\sigma-1} \\ & + P_{n-\sigma-1,\rho-1} \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}}, & + P_{n-\sigma-1,n-\sigma-1} \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}}, \\ & (\rho=2, 3, \dots, n-\sigma-1) & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{3,1} = P_{2,1} + \frac{z'_3}{z_3}, & P_{3,2} = P_{2,2} + P'_{2,1} + P_{2,1} \frac{z'_3}{z_3}, & P_{3,3} = P'_{2,2} + P_{2,2} \frac{z'_3}{z_3}, \\ P_{2,1} = P_{1,1} + \frac{z'_2}{z_2}, & & P_{2,2} = P'_{1,1} + P_{1,1} \frac{z'_2}{z_2}, \\ P_{1,1} = \frac{z'_1}{z_1}. & & \end{array} \right.$$

13. Betrachte ich in diesem System (15) fürs Erste die Gleichungen, welche in der zweiten Horizontalreihe enthalten sind, so weiss ich dass diese bei der Elimination der Grössen

$$P_{n-2,1}, P_{n-2,2}, \dots, P_{n-2,n-2}$$

eine lineare und homogene Differentialgleichung  $(n - 1)^{\text{ter}}$  Ordnung geben, welche die Adjungirte der Gleichung

$$L_{n-1} = 0$$

ist. Betrachte ich aber die zwei ersten Horizontalreihen des Systems (15) und führe ich in die zweite derselben überall (siehe die Formel (4\*))

$$z_{n-1} = \frac{u_2}{z_n}$$

ein, so giebt mir die Elimination der Grössen

$$P_{n-2,1}, P_{n-2,2}, \dots, P_{n-2,n-2}$$

$$P_{n-1,1}, P_{n-1,2}, \dots, P_{n-1,n-1}$$

eine in  $u_2$  lineare und homogene Differentialgleichung  $(n - 1)^{\text{ter}}$  Ordnung

$$l = 0$$

und zwar dieselbe, die ich durch Substitution der aus der ersten Horizontalreihe des Systems (15) abgeleiteten Ausdrücke für  $P_{n-1,1}, P_{n-1,2}, \dots, P_{n-1,n-1}$  und der Grösse  $\frac{u_2}{z_n}$  statt  $z_{n-1}$  in die Adjungirte der Gleichung  $L_{n-1} = 0$  erhalten hätte.

Die Coefficienten der so gebildeten Differentialgleichung  $l = 0$  sind nur von den Grössen  $P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nn}$  und  $z_n$  abhängig, wobei zu bemerken ist dass  $z_n$  dasjenige particuläre Integral der Differentialgleichung  $M_n = 0$ , welches der Bedingung  $z_n L_n = \frac{d}{dx}(z_n L_{n-1})$  genügt, darstellt. Um diese Abhängigkeit von dem particulären Integrale  $z_n$  anzudeuten werde ich statt  $l = 0$

$$l(z_n) = 0$$

schreiben. Unter der Anzahl der Differentialgleichungen  $l(z_n) = 0$ , die ich erhalte, wenn ich das eine particuläre Integral nach dem andern als  $z_n$  benutze, werde ich diejenigen

$$l(z_{n,1}) = 0, \quad l(z_{n,2}) = 0, \quad \dots, \quad l(z_{n,n}) = 0$$

besonders beachten, welche mit Hilfe der Elementen des Fundamentalsystems

$$z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$$

von Integralen der Gleichung  $M_n = 0$  gebildet sind, wobei ich die im § 6 gebrauchten Bezeichnung

$$z_{n\rho} = \frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} \quad (\rho=1, 2, \dots, n)$$

anwende.

Ich werde ausserdem mit

$$L_{n-1,\rho} = 0$$

diejenige unter den irreducirten  $L_{n-1} = 0$  der Gleichung  $L_n = 0$  bezeichnen, welche das Fundamentalsystem von Integralen

$$y_1, y_2, \dots, y_{\rho-1}, y_{\rho+1}, \dots, y_n$$

hat und folglich dem Integrale  $z_{n\rho}$  in der Art entspricht, dass

$$z_{n\rho} L_n = \frac{d}{dx} (z_{n\rho} L_{n-1,\rho})$$

ist.

Die Adjungirte der Differentialgleichung

$$L_{n-1,\rho} = 0$$

hat das Fundamentalsystem von Integralen

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\sigma-1} y_{\sigma+1} \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|} \quad (\sigma=1, 2, \dots, \rho-1)$$

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_{\tau-1} y_{\tau+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|} \quad (\tau=\rho+1, \rho+2, \dots, n)$$

woher, da

$$z_{n\rho} = \frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|}$$

ist, die Differentialgleichung

$$l(z_{n\rho}) = 0$$

das Fundamentalsystem von Integralen

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\sigma-1} y_{\sigma+1} \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} \quad (\sigma=1, 2, \dots, \rho-1)$$

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_{\tau-1} y_{\tau+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} \quad (\tau=\rho+1, \rho+2, \dots, n)$$

hat.

14. Wie ich im Cap. II gezeigt habe ist es mir möglich eine lineare und homogene Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0$$

aufzustellen, welche von sämtlichen Integralen der Gleichungen

$$l(z_{n,1}) = 0, \quad l(z_{n,2}) = 0, \quad \dots, \quad l(z_{n,n}) = 0$$

integriert wird und deren allgemeines Integral das Aussehen

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \Omega_\rho$$

hat, wenn  $\Omega_\rho$  das allgemeine Integral der Gleichung  $l(z_{n,\rho}) = 0$  ist.

Es wird folglich jede Grösse

$$u_{2,\rho} \quad \left( \rho=1, 2, 3, \dots, n_2; n_2 = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n-2} \right)$$

(siehe die Formel (14)) der Gleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0$$

Genüge leisten, und das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n_2} C_\rho u_{2,\rho}$$

sein, wo die  $C_\rho$  beliebige Constanten sind.

15. Es sagt mir der Satz des § 6, dass jeder Differentialgleichung  $L_{n-2} = 0$  und folglich auch jeder Grösse  $u_{2,\rho}$  zwei von einander linear



unabhängige Integrale  $z_n$  der Gleichung  $M_n = 0$  entsprechen, und zwar sind nach dem § 5

$$z_{ni} \quad \text{und} \quad z_{nj}$$

ein Paar solche Integrale, welche der Grösse

$$u_{2,\rho}$$

entsprechen, wenn  $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$  die  $\rho^{\text{te}}$  Combination zu je  $n-2$  von den Zahlen  $1, 2, \dots, n$  ist. Hieraus folgt, dass jede Grösse  $u_{2,\rho}$  wenigstens zwei von den Differentialgleichungen

$$l(z_{n,1}) = 0, \quad l(z_{n,2}) = 0, \quad \dots, \quad l(z_{n,n}) = 0$$

integriert, und dass sämtliche Integrale einer jeden dieser Differentialgleichungen von den Integralen der übrigen linear abhängig ist. Bei der Aufstellung der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0$$

brauche ich folglich nur  $n-1$  unter den genannten Gleichungen zu berücksichtigen, wodurch ihre Coefficienten ausser von den Grössen  $P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nn}$  von nur  $n-1$  unter den Integralen  $z_{n\rho}$  abhängig werden. Es müssen aber andererseits die Coefficienten der Differentialgleichung  $\mathcal{L}_2 = 0$  in Bezug auf  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — und folglich auch in den Grössen  $z_{n1}, z_{n2}, \dots, z_{nn}$  — symmetrisch sein, wie die Beschaffenheit ihrer Integrale lehrt. Eine nothwendige Folge dieser beiden Bedingungen ist die, dass die genannten Coefficienten keine von den Grössen  $z_{n\rho}$  enthalten.<sup>1</sup>

Diejenige Differentialgleichung, welche von sämtlichen Grössen

$$u_{2,\rho}$$

integriert wird, und deren allgemeines Integral die Form

$$\sum c_\rho u_{2,\rho}$$

hat, ist also so beschaffen, dass ihre Coefficienten nur von den Coefficienten der Differentialgleichung

$$I_n = 0$$

abhängig sind.

<sup>1</sup> D. h. dass diese Grössen durch die Gleichung  $M_n = 0$  eliminirt werden können.

Durch die Art, in welcher ich die Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0$$

gebildet habe, ist ersichtlich, dass ihre Coefficienten rationale algebraische Functionen der Coefficienten der Gleichung

$$L_n = 0$$

und ihren Abgeleiteten sind.

Die Ordnungszahl der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0,$$

gleich derjenigen Zahl, welche angiebt wie viele unter den Grössen

$$u_{2,\rho}$$

von einander linear unabhängig sind, ist  $\leq \frac{n(n-1)}{2}$ .

16. Es sei nun angenommen, dass, wenn  $\mu$  eine positive, ganze Zahl, welche  $< n - 1$  ist, bedeutet, zu jeder Gleichung

$$L_{n-1,\rho} = 0$$

eine lineare und homogene Differentialgleichung

$$l_\rho = 0$$

gehört, welche die folgenden Eigenschaften hat:

1° ihre Ordnungszahl ist  $\leq \frac{|n-1|}{|\mu| |n-\mu-1|}$ ,

2° ihre Coefficienten sind von keinen anderen Veränderlichen abhängig als von den Coefficienten der Gleichung  $L_{n-1,\rho}$ , und zwar sind sie rationale, algebraische Functionen dieser Coefficienten und ihrer Abgeleiteten,

3° sie wird von jeder Grösse

$$v_{\rho,\sigma} = \frac{|y_1 y_2 \dots y_{n-\mu-1}|}{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|} \quad \left( \sigma=1, 2, \dots, \frac{|n-1|}{|\mu| |n-\mu-1|} \right)$$

integriert, bei der  $i_1, i_2, \dots, i_{n-\mu-1}$  die  $\sigma^{\text{te}}$  Combination zu je  $n - \mu - 1$  von den Zahlen  $1, 2, \dots, \rho - 1, \rho + 1, \dots, n$  ist, und



eine in  $u$  lineare und homogene Differentialgleichung, die höchstens von der Ordnung  $\frac{n}{\mu+1} \frac{n}{n-\mu-1}$  ist und die Grösse

$$\sum_{\rho} C_{\rho} u_{\mu+1, \rho},$$

wo  $C_{\rho}$  beliebige Constanten sind, als allgemeines Integral hat.

Um dieses zu beweisen brauche ich nur wie im vorigen Falle, wo  $\mu = 1$  war, in jede der gegebenen Gleichungen

$$l_{\rho} = 0$$

statt der abhängig Veränderlichen

$$\frac{u}{z_{n, \rho}}$$

und statt der Coefficienten der Gleichung

$$L_{n-1, \rho} = 0$$

ihre aus der ersten Reihe des Systems (15) abgeleiteten Ausdrücke in  $P_{n, 1}, P_{n, 2}, \dots, P_{n, n}$  und  $z_{n, \rho}$  einzuführen, wobei ich ein System von  $n$  in  $u$  lineare und homogene Differentialgleichungen erhalte, deren Coefficienten ausser von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  nur von je einer der Grössen  $z_{n, \rho}$  abhängen. Um dieses anzudeuten gebe ich diesen Differentialgleichungen die Bezeichnung

$$l_{\rho}(z_{n, \rho}) = 0. \quad (\rho=1, 2, \dots, n)$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer jeden der Gleichungen

$$l_{\rho}(z_{n, \rho}) = 0$$

besteht aus den von einander linear unabhängigen unter denjenigen Grössen

$$u_{\mu+1, \rho},$$

welche dem Werthe  $z_{n, \rho}$  entsprechen. Da aber jedem

$$u_{\mu+1, \rho}$$

$\mu + 1$  unter den Grössen  $z_{n, \rho}$  entsprechen, muss jede Grösse  $u_{\mu+1, \rho}$  wenigstens  $\mu + 1$  der Gleichungen  $l_{\rho}(z_{n, \rho}) = 0$  integrieren, und folglich ist jedes

Integral einer jeden der Gleichungen  $l_\rho(z_{n,\rho}) = 0$  von den Grössen, welche  $n - \mu$  gewisse unter diesen Gleichungen integrieren, linear abhängig. Es können somit die Coefficienten derjenigen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_{\mu+1} = 0,$$

welche von sämtlichen Grössen

$$u_{\mu+1,\rho}$$

integriert wird, und deren allgemeines Integral

$$\sum_\rho c_\rho u_{\mu+1,\rho}$$

ist, ausser von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  von nur  $n - \mu$  der Grössen

$$z_{n,\rho}$$

abhängig sein; andererseits müssen sie aber in den Grössen

$$z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$$

symmetrisch sein, folglich enthalten sie gar nicht diese Grössen und sind nur von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  abhängig, wobei aus der Bildungsart der Gleichung

$$\mathcal{L}_{\mu+1} = 0$$

ersichtlich ist, dass ihre Coefficienten rationale, algebraische Functionen dieser Grössen und ihrer Abgeleiteten sind.

17. Die im § 16 gemachten Voraussetzungen sind erfüllt, wenn  $\mu = 1$  und  $n > 2$  ist, folglich sind sie nach dem soeben Gesagten auch dann erfüllt, wenn  $\mu = 2$  und  $n > 3$  (wie ich auch in den §§ 13—15 besonders dargestellt habe) und überhaupt wenn  $\mu$  eine beliebige, positive ganze Zahl und  $n > \mu + 1$  ist.

Es giebt also immer, wenn  $\mu < n$  ist, eine lineare und homogene Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_{n-\mu} = 0,$$

welche in dem im § 12 genannten Gebiete von den Functionen

$$u_{n-\mu,\rho} \quad \left( \rho = 1, 2, 3, \dots, \frac{\lfloor n \rfloor}{\lfloor \mu \rfloor} \right)$$

integriert wird, und deren allgemeines Integral das Aussehen

$$\sum_{\rho} C_{\rho} u_{n-\mu, \rho}$$

hat, wobei  $C_{\rho}$  beliebige Constanten sind, und sind die Coefficienten dieser Differentialgleichung rationale, algebraische Functionen von den Coefficienten der gegebenen Gleichung

$$L_n = 0$$

und ihren Abgeleiteten.

Dass nur eine einzige solche Differentialgleichung existiren kann, und dass sie von der Wahl des Fundamentalsystems

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

unabhängig ist, leuchtet dadurch ein, dass jede Grösse

$$|\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_{\mu}}|$$

gleich einer Summe

$$\sum_{\rho} c_{\rho} u_{n-\mu, \rho},$$

wo  $c_{\rho}$  gewisse Constanten sind, gesetzt werden kann, wenn die Grössen

$$\eta_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \dots + c_{in} y_n \quad (i=i_1, i_2, \dots, i_{\mu})$$

sind, wo  $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}$  gewisse Constanten bedeuten.

18. Wie aus dem System (15) ersichtlich ist, wird die  $(n - \mu)$ :reducirte  $L_{\mu} = 0$  der Gleichung  $L_n = 0$  durch die Grössen

$$z_n, z_{n-1}, \dots, z_{\mu+1}$$

eindeutig bestimmt. Da aber nach der Formel (4a)

$$u_{\nu} = z_{n-\nu+1} z_{n-\nu+2} \dots z_n \quad (\nu=1, 2, 3, \dots, \mu)$$

und somit

$$z_{n-\nu+1} = \frac{u_{\nu}}{u_{\nu-1}}$$

ist, bestimmen die Grössen

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-\mu}$$

ebenso eindeutig die Coefficienten der  $(n - \mu)$ :reducirten der Gleichung  $L_n = 0$ .

Ich ziehe es vor den letztgenannten Grössen die Benennung »*reducirende Grössen*« der linearen und homogenen Differentialgleichung  $L_n = 0$  beizulegen, und zwar werde ich jede Grösse, die aus  $\mu$  beliebigen Elementen

$$\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_\mu}$$

eines beliebigen Fundamentalsystems

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

von Integralen der Gleichung  $L_n = 0$  nach der Formel

$$\frac{|\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_\mu}|}{|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n|}$$

aufgebaut ist, eine » $(n - \mu)$ :*reducirende Grösse*« der linearen und homogenen Differentialgleichung  $L_n = 0$  benennen.

Diejenige lineare und homogene Differentialgleichung, welche von sämtlichen  $(n - \mu)$ :*reducirenden* Grössen der Gleichung  $L_n = 0$  und von nur solchen Grössen, die von diesen linear abhängig sind, integriert wird, werde ich eine » $(n - \mu)$ :*reducirende*« der linearen und homogenen Differentialgleichung  $L_n = 0$  benennen.

Ist  $\mathcal{L}_\mu = 0$  die  $(n - \mu)$ :*reducirende* der Gleichung  $L_n = 0$ , werde ich sagen, dass die letztere »die zu der  $(n - \mu)$ :*reducirenden*  $\mathcal{L}_\mu = 0$  gehörende *ursprüngliche* Differentialgleichung« ist.

19. Nach dem § 17 sind die Coefficienten einer  $(n - \mu)$ :*reducirenden* Differentialgleichung nur von den Coefficienten der zu dieser gehörenden ursprünglichen Gleichung abhängig, und zwar höchstens von den

$$\frac{\begin{matrix} |n \\ \mu \end{matrix}}{\begin{matrix} |n - \mu \\ \mu \end{matrix}} - 1$$

ersten Abgeleiteten derselben, wie aus dem § 12 ersichtlich ist.

Derselbe § 17 definiert die  $(n - \mu)$ :*reducirende*  $\mathcal{L}_\mu = 0$  der Gleichung  $L_n = 0$  nur für das im § 12 angegebene enge Gebiet. Die Gleichung  $\mathcal{L}_\mu = 0$  kann aber auch ausserhalb dieses Gebietes existiren, nämlich so weit wie die  $n_\mu - 1$  ersten Abgeleiteten der Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  gebildet werden können, wenn  $n_\mu$  die Ordnungszahl der Gleichung  $\mathcal{L}_\mu = 0$  ist. Die angegebene Eigenschaft der Coefficienten der Gleichung  $\mathcal{L}_\mu = 0$  sagt mir aber dass diese Gleichung nicht nur in dem erstgenannten

Gebiete sondern so weit sie überhaupt existirt die Eigenschaft beibehält, eine  $(n - \mu)$ :reducirende der Gleichung  $L_n = 0$  zu sein.

Ich kann also den folgenden Satz aussprechen:

*Wenn eine lineare und homogene Differentialgleichung von der Ordnung  $n$  so beschaffen ist, dass in jedem Punkte eines gewissen Gebietes die*

$$\frac{\begin{array}{|c} n \\ \hline \mu \end{array}}{\begin{array}{|c} n - \mu \\ \hline \mu \end{array}} - 1$$

*ersten Abgeleiteten ihrer sämtlichen Coefficienten gebildet werden können, so existirt in diesem Gebiete eine lineare und homogene Differentialgleichung, deren Coefficienten rationale, algebraische Functionen von den Coefficienten der ursprünglichen Gleichung und ihren genannten Abgeleiteten sind und von keiner anderen Veränderlichen abhängen, und welche in jedem Punkte dieses Gebietes die  $(n - \mu)$ :reducirende der ursprünglichen ist.*

Ich will mit

$$L_{n,\mu} = 0$$

die  $(n - \mu)$ :reducirende der Differentialgleichung

$$L_n = 0$$

bezeichnen, wobei ich noch bemerke, das ich mit den Bezeichnungen

$$L_n(y) = 0, \quad L_{n,\mu}(y) = 0$$

angeben werde, dass in den Differentialgleichungen

$$L_n = 0, \quad L_{n,\mu} = 0$$

$y$  die abhängig Veränderliche ist.

20. Wenn ich in die  $(n - \mu)$ :reducirende  $L_{n,\mu}(y) = 0$  der Differentialgleichung  $L_n(y) = 0$  statt der abhängig Veränderlichen  $y$  die Grösse

$$ye^{\int P_n dx}$$

einführe, wo  $P_n$  der zweite Coefficient der Gleichung  $L_n = 0$  ist, erhalte ich eine lineare und homogene Differentialgleichung

$$\bar{L}_{n,\mu}(y) = 0,$$



deren Coefficienten nur von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  und ihren Abgeleiteten gebildet sind, und deren allgemeines Integral das Aussehen

$$\sum_{\rho} c_{\rho} |y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_{\mu}}|$$

hat, wobei  $i_1, i_2, \dots, i_{\mu}$  die  $\rho^{\text{te}}$  Combination zu je  $\mu$  Elementen von den Zahlen  $1, 2, \dots, n$  repräsentirt und  $c_{\rho}$  beliebige Constanten sind.

Diese Differentialgleichung

$$\bar{L}_{n,\mu} = 0$$

werde ich die »transformirte ( $n - \mu$ ):reducirende der Differentialgleichung  $L_n = 0$ » benennen.

21. Nach dem § 6 (Formel 12b) ist

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\mu}|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} = C |z_{n,\mu+1} z_{n,\mu+2} \dots z_{n,n}|$$

wo  $C$  eine gewisse Constante ist, woraus folgt dass die Differentialgleichungen

$$L_{n,\mu} = 0$$

und

$$\bar{M}_{n,n-\mu} = 0$$

dasselbe allgemeine Integral haben, und somit

$$L_{n,\mu} \equiv \bar{M}_{n,n-\mu}$$

ist.

Da aber auch

$$\frac{|z_{n,\mu+1} z_{n,\mu+2} \dots z_{n,n}|}{|z_{n,1} z_{n,2} \dots z_{n,n}|} = c |y_1 y_2 \dots y_{\mu}|$$

ist, wo  $c$  eine gewisse Constante ist, so erhalte ich ausserdem die Identität

$$M_{n,n-\mu} \equiv \bar{L}_{n,\mu}.$$

Es ist hier, nach den eingeführten Bezeichnungen  $M_{n,n-\mu}$  die  $\mu$ :reducirende und  $\bar{M}_{n,n-\mu}$  die transformirte  $\mu$ :reducirende der zu  $L_n = 0$  adjungirten Differentialgleichung  $M_n = 0$ .

Die obigen Identitäten geben in Worten ausgesprochen den folgenden Satz:

Die  $(n - \mu)$ :reducirende der linearen und homogenen Differentialgleichung von der Ordnung  $n$

$$L_n = 0$$

ist die transformirte  $\mu$ :reducirende der zu dieser Gleichung adjungirten Differentialgleichung

$$M_n = 0$$

und die transformirte  $(n - \mu)$ :reducirende der Gleichung

$$L_n = 0$$

ist die  $\mu$ :reducirende der adjungirten Gleichung

$$M_n = 0,$$

wie auch  $\mu$  unter den Zahlen  $1, 2, \dots, n - 1$  gewählt sei.

Da die transformirte  $(n - 1)$ :reducirende einer linearen und homogenen Differentialgleichung von der Ordnung  $n$  nichts anderes als diese Gleichung selbst ist, und die  $1$ :reducirende einer solchen Gleichung ihre Adjungirte ist, so giebt der obige Satz für den Fall  $\mu = 1$  das Theorem von LAGRANGE:

*Eine lineare und homogene Differentialgleichung ist die Adjungirte ihrer eigenen Adjungirten,*

welches Theorem somit ein Specialfall des obigen Satzes ist.

22. Vergleiche ich das System (10) im § 3 mit dem im § 12 aufgestellten System (15), aus dem die Reducirenden der Gleichung  $L_n = 0$  hervorgegangen sind, finde ich dass

die  $\rho$ :reducirende der Differentialgleichung (11)

$$y^{(n-\rho)} + U_{n-\rho,1}y^{(n-\rho-1)} + \dots + U_{n-\rho,n-\rho}y = 0$$

eine Reducirte der  $\rho$ :reducirenden der Differentialgleichung  $L_n = 0$  ist, wenn die positive ganze Zahl  $\rho < n - \mu$  gesetzt wird.

Denn jeder  $\rho$ :reducirenden Grösse  $\varphi_\rho$  der Gleichung (11) entspricht wenigstens ein System von  $\rho$  Grössen

$$z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_{n-(\rho-1)},$$

deren Product gleich  $\varphi_\rho$  ist, und welche den Gleichungen in den  $\rho$  ersten Verticalreihen des Systems (10) Genüge leisten. Ausserdem ist es immer möglich ein System von  $n - \mu - \rho$  Grössen

$$z_{n-\rho}, z_{n-\rho-1}, \dots, z_{\mu+1},$$

zu finden, welche den übrigen Gleichungen des Systems (10) genügen; zu diesem Zwecke brauche ich nur die Differentialgleichung

$$y^{(n-\mu-\rho)} + U_{n-\mu-\rho,1}y^{(n-\mu-\rho-1)} + \dots + U_{n-\mu-\rho, n-\mu-\rho}y = 0$$

zu reduciren. Hierdurch habe ich aber ein System von Grössen

$$z_n, z_{n-1}, \dots, z_{\mu+1},$$

erhalten, welches dem System (10) Genüge leistet und folglich, nach dem § 3, von der gegebenen Gleichung  $L_\mu = 0$  ausgehend eine Reihe von Differentialgleichungen aufbaut, welche sämmtlich Reducirte der Gleichung  $L_n = 0$  sind.  $\varphi_\rho$  ist also eine  $\rho$ :reducirende Grösse der Gleichung  $L_n = 0$ .

Der oben angeführte Satz sagt mir dass die  $\rho$ :reducirende der Gleichung

$$y^{(\mu)} + V_{\mu,1}y^{(\mu-1)} + \dots + V_{\mu,\mu}y = 0,$$

wobei  $V_{\mu,1}, \dots, V_{\mu,\mu}$  dieselben Grössen, wie in den §§ 5 und 7 darstellen, eine Reducirte der zur Gleichung  $M_n = 0$   $\rho$ :reducirenden ist, woher durch Berücksichtigung des im § 21 ausgesprochenen Satzes die folgende Thatsache hervorgeht:

*Die transformirte  $(\mu - \rho)$ :reducirende der Gleichung  $L_\mu = 0$  ist eine Reducirte der transformirten  $(n - \rho)$ :reducirenden der linearen und homogenen Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $L_n = 0$ , wobei  $L_\mu = 0$  eine  $(n - \mu)$ :reducirte der letztgenannten Gleichung, und die positive, ganze Zahl  $\rho < \mu$  ist.*

Dieser Satz sagt mir dass es im Allgemeinen, d. h. wenn die  $\frac{\begin{array}{c} |n \\ \rho \end{array}}{\begin{array}{c} |n-\rho \end{array}}$  Grössen

$$|y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_\rho}|,$$

in denen

$$i_1, i_2, \dots, i_\rho$$

sämmtliche Combinationen zu je  $\rho$  Elementen von den Zahlen

$$1, 2, \dots, n$$

darstellen, von einander linear unabhängig sind, eine  $\left( \frac{|n}{|\rho| n - \rho} - \frac{|\mu}{|\rho| \mu - \rho} \right)$   
 :reducirte der Gleichung  $\bar{L}_{n,\rho} = 0$  giebt, deren Coefficienten nur von den-  
 jenigen der Gleichung  $L_\mu = 0$  abhängen.

---