INTEGRALE MIT HYPERGEOMETRISCHEN INTEGRANDEN*.

Von

LOTHAR KOSCHMIEDER

in Graz.

1. Abweichend von manchen Strömungen vergangener Jahrzehnte haben einige Zweige der heutigen mathematischen Forschung, z. B. das funktionale Rechnen, die Aufmerksamkeit der Fachwelt wieder auf die Eigenschaften greifbarer Gebilde der Analysis gelenkt. In dieser Richtung liegt auch, was ich Ihnen jetzt vortragen will. Es betrifft die hypergeometrischen Funktionen[1,1], zunächst die Gausssche Reihe

$$(1.1)\qquad F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n}^{0,\,\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n, \quad \text{wo} \quad (\alpha, n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \text{ usw.},$$

$|x| < 1$; α, β, γ sind beliebige komplexe Parameter, von denen nur γ einer Einschränkung unterliegt, nämlich der, weder null noch eine negative ganze Zahl zu sein. Es ist bekannt, dass F sich durch 48 Integrale Eulerscher Art, mit binomischem Kerne, darstellen lässt. Um zwischen ihren beiden Hauptgestalten die Brücke mit einem einfachen bestimmten Integrale zu schlagen, hat vor kurzem Erdélyi[1,2], wie er sagt, eine allgemeinere (weil beide umfassende) Formel aufgestellt — mit hypergeometrischem Kerne; sie lautet[1,3]

$$(1.2)\qquad F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\gamma - \nu)} \int_0^1 s^{\nu-1}(1 - s)^{\gamma-\nu-1} F(\alpha, \beta; \nu; sx)\, ds,$$

$$|x| < 1, \quad 0 < \Re\nu < \Re\gamma.$$

* Vorgetragen am 18.VI.43 in den Mathematischen Besprechungen an der Technischen Hochschule Graz, am 30.VI.43 in der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

[1,1] Ihretwegen verweise ich auf das Werk von P. Appell—J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Paris 1926. Wo ich weniger bekannte ihrer Eigenschaften benutze, führe ich weiterhin deren Fundort in diesem Buche an, das ich kurz mit A.-K. bezeichne.

[1,2] A. Erdélyi, Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 8 (1937), 200—213.

[1,3] Siehe [1,2], S. 203, (2. 1).

In der Besprechung einer Arbeit von Feldheim hat G. Sansone[1,4] die Gleichung (1.2) als »die Integralformel von Erdélyi» bezeichnet; so nennt sie auch Feldheim selbst[1,5], — aber beide nicht mit Recht. Beträchtlich früher hat nämlich Schafheitlin eine allgemeinere Formel angegeben[1,6], die anscheinend später unbeachtet geblieben ist; sie bezieht sich auf die höhere hypergeometrische Funktion

$$G(\alpha, \beta, \nu; \gamma, \varepsilon; x) = \sum_{n}^{0, \infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)(\nu, n)}{(\gamma, n)(\varepsilon, n)(1, n)} x^n$$

und hat die Gestalt

$$G(\alpha, \beta, \nu; \gamma, \varepsilon; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\gamma-\nu)} \int_0^1 s^{\nu-1}(1-s)^{\gamma-\nu-1} F(\alpha, \beta; \varepsilon; sx)\, ds. \tag{1.3}$$

Aus ihr geht (1.2) sogleich hervor, wenn man $\varepsilon = \nu$ setzt.

Allgemeinere und ältere Formeln als (1.2) rühren ferner von Cailler her[1,7], was den jüngeren Bearbeitern des Gebiets gleichfalls entgangen zu sein scheint. Der Name dieses Mathematikers ist auch sonst nicht unbekannt; er war, wie ich einem Vermerke von Doetsch[1,8] entnehme, der erste, der funktionale Beziehungen bei Besselschen Funktionen mit Hilfe der Laplaceschen Abbildung herleitete.

2. Eine der Formeln von Cailler lautet[2,1] in wenig veränderter Schreibweise

$$\int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{\gamma^*-1} F(\alpha, \beta; \gamma; sx)\, F(\alpha^*, \beta^*; \gamma^*; (1-s)u)\, ds \tag{2.1}$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma^*)}{\Gamma(\gamma+\gamma^*)} (1-u)^{\alpha-\beta^*} F(\alpha, \beta; \gamma+\gamma^*; x+u-xu),$$

wobei

$$\alpha + \alpha^* = \beta + \beta^* = \gamma + \gamma^*. \tag{2.2}$$

[1,4] Zentralblatt für Mathematik 27 (1943), S. 102.

[1,5] E. FELDHEIM, Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) 9 (1940), 225—252; siehe dort S. 247, Z. 1.

[1,6] P. SCHAFHEITLIN, S. B. Berliner math. Ges. 11 (1912), 20—25. Siehe dort (7) auf S. 21. Ich berichtige in (1.3) einen Irrtum der Schafheitlinschen Formel: Was dort rechts vor dem Integral steht, ist durch seinen Kehrwert zu ersetzen. — Es tut Schafheitlins Urheberschaft an (1.3) keinen Abbruch, dass Erdélyi 1937 eine allgemeinere Formel aufgestellt hat [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 8, 267—277. Es handelt sich dort um (5.2) auf S. 273; daraus entsteht (1.3), wenn man $p = 3$, $q = 2$, $a_1 = \nu$, $a_2 = \alpha$, $a_3 = \beta$; $c_1 = \gamma$, $c_2 = \varepsilon$; $n = 1$, $\gamma_1 = \nu$ setzt].

[1,7] C. CAILLER, Enseign. math. 21 (1920), 224—225, 255—259; die Kenntnis dieser Arbeiten verdanke ich dem »Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» 47 (1920), S. 330. — Was die Lebensumstände von Charles Cailler angeht, so ersieht man aus der »Minerva» 25 (1921), S. 365, dass er damals Professor der Differential- und Integralrechnung an der Universität in Genf war; der Band 26 (1923) dieses »Jahrbuchs der gelehrten Welt» enthält seinen Namen nicht mehr.

[1,8] G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation 1937, S. 420, [199].

[2,1] Siehe CAILLER [1,7], S. 224, S. 255, (1).

Man erkennt die Formel (1.2) von Erdélyi als Sonderfall der Gleichung (2.1) von Cailler, indem man in dieser $x=0$ setzt; dann erhält man nämlich, weil die erste Funktion F unter dem Integral auf 1 zusammenschrumpft, mit $1-s=\sigma$

$$\int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{\gamma^*-1} F(\alpha^*,\beta^*;\gamma^*;(1-s)u)\,ds = \int_0^1 \sigma^{\gamma^*-1}(1-\sigma)^{\gamma-1} F(\alpha^*,\beta^*;\gamma^*;\sigma u)\,d\sigma$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma^*)}{\Gamma(\gamma+\gamma^*)}(1-u)^{\alpha-\beta^*} F(\alpha,\beta;\gamma+\gamma^*;u).$$

Nun gestattet aber die Gausssche Funktion den Gestaltswandel

$$F(a,b;c;u)=(1-u)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;u);$$

infolgedessen wird mit $a=\alpha^*$, $b=\beta^*$, $c=\gamma+\gamma^*$ wegen (2.2)

$$(1-u)^{\alpha-\beta^*}F(\alpha,\beta;\gamma+\gamma^*;u)=F(\alpha^*,\beta^*;\gamma+\gamma^*;u),$$

und so geht (1.2) aus (2.1) hervor, wenn man noch $\gamma^*,\gamma,\alpha^*,\beta^*$ durch $\nu,\gamma-\nu,\alpha,\beta$ und u durch x ersetzt.

3. Ich kann es mir nicht versagen, zu umreissen, wie Cailler seine Formel (2.1) hergeleitet hat. In der kurzen ersten seiner beiden Abhandlungen[1,7] führt er keinen Beweis, in der zweiten erbringt er (S. 256 f.) sogleich den einer allgemeineren Beziehung, in der auch rechts ein Integral mit hypergeometrischem Integranden auftritt. Er sagt dort aber, dass er sie genau so begründe, wie er früher (2.1) als richtig erkannt habe, und daraus schliesst man, dass er so vorgegangen ist: Bezeichnet man den Unterschied der linken und rechten Seite von (2.1) mit $D(\alpha,\beta,\gamma;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*;x,u)$, so »sieht man leicht» — und das ist (1.2) —, dass

$$D(\alpha,\beta,\gamma;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*;0,u)=0 \tag{3.1}$$

ist. Cailler wird das gewiss gerade so gefunden haben, wie es auch bei Erdélyi herauskommt, nämlich durch Einsetzung der Reihe (1.1) für F unter dem Integral in (1.2) und nachmalige, gliedweise vorgenommene Integration. Ich sehe hier von einer Wiedergabe dieser leichten Rechnung ab und darf das umso eher, als ich sie später (siehe **7.**) in einem höheren Falle ausführe. Jetzt kommen wir zum Kernpunkte des Beweises von Cailler: Bekanntlich ist

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z)=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;z),$$

daher

$$\frac{\partial}{\partial x} D(\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha^*, \beta^*, \gamma^*;\ x, u)$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \int_0^1 s^\gamma (1-s)^{\gamma^*-1} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; sx) F(\alpha^*, \beta^*; \gamma^*; (1-s)u)\, ds$$

$$- \frac{\alpha\beta}{\gamma+\gamma^*} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma^*)}{\Gamma(\gamma+\gamma^*)} (1-u)^{\alpha+1-\beta^*} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1+\gamma^*; x+u-xu)$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\gamma} D(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1;\ \alpha^*, \beta^*, \gamma^*;\ x, u).$$

Somit verschwindet nach (3. 1) auch die soeben ausgerechnete erste Ableitung von D nach x an der Stelle $x=0$, und ebenso dort alle höheren Ableitungen dieser Grösse nach x. Da nun D eine analytische Funktion von x ist, erkennt man den Wert von $D(\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha^*, \beta^*, \gamma^*;\ x, u)$ als 0.

4. Soviel von (1. 2) und Caillers allgemeinerer Formel (2. 1). Es sei bemerkt, dass sich in einer an[1,2] anknüpfenden Arbeit Erdélyis[4,1] eine andre Formel findet, die sich, so wie (1. 2) auf den dritten Parameter der Gaussschen Funktion, auf den ersten bezieht und die Gestalt hat:

$$(4.\ 1) \qquad F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda-\alpha)} \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\lambda-\alpha-1} F(\lambda, \beta; \gamma; sx)\, ds.$$

Erdélyi gibt gleich eine allgemeinere Formel gleicher Bauart für eine höhere hypergeometrische Funktion an[4,2], aus der (4. 1) folgt, wenn man a. a. O.[4,2] $m=1$, $p=2$, $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $q=1$, $c_1=\gamma$, $\alpha_1=\lambda$ setzt. (4. 1) ist, soviel ich sehe, aus den Formeln von Cailler nicht herleitbar.

In einer späteren Arbeit[4,3] stellt übrigens Erdélyi drei Formeln[4,4] auf, in denen, wie in (2. 1), der Malwert *zweier* Gaussscher Funktionen integriert wird. Doch ist in den beiden ersten das Argument der einen Gaussschen Funktion anders gebildet als in Caillers Gleichung (2. 1), und diese überbietet die drei Beziehungen[4,4] in der Hinsicht an Allgemeinheit, dass in ihnen die Argumente der Funktionen F nur *einen* Parameter aufweisen, der dort z heisst, während in (2. 1) hrer *zwei* — x und u — enthalten sind.

[4,1] Erdélyi, a. a. O.[1,2], S. 267—277.
[4,2] Nämlich (2. 6) auf S. 270 a. a. O.[4,1].
[4,3] Erdélyi, a. a. O.[1,2], 10 (1939), 176—189.
[4,4] Dort S. 178, (11); 182, (17); 186, (22).

5. Cailler gibt auch die Formel an, die an Stelle von (2.1) tritt, wenn die Gausssche Funktion F durch den Grenzübergang

$$(5.1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} F\left(a, \frac{1}{\varepsilon}; c; \varepsilon z\right) = \sum_{n}^{0,\infty} \frac{(a,n)}{(c,n)} \frac{z^n}{(1,n)} = \Psi(a; c; z)$$

in die Kummersche Ψ entartet. Sie lautet[5,1], wenn $\alpha + \alpha^* = \gamma + \gamma^*$ ist,

$$(5.2) \quad \int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{\gamma^*-1}\,\Psi(\alpha;\gamma;sx)\,\Psi(\alpha^*;\gamma^*;(1-s)u)\,ds = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma^*)}{\Gamma(\gamma+\gamma^*)} e^x\,\Psi(\alpha^*;\gamma+\gamma^*;u-x).$$

Ein Integral über den Malwert *zweier* Kummerscher Funktionen Ψ gewinnt auch Erdélyi[5,2]; doch hängen darin die Argumente der Ψ wieder nur von *einem* Parameter, z, ab — nicht wie hier, von *zweien*, x und u.

Setzt man in (5.2) $x = 0$, $s = 1 - \sigma$, $\gamma^* = \nu$, ersetzt γ durch $\gamma - \nu$, α^* durch α und schreibt x statt u, s statt σ, so erhält man entsprechend (1.2)

$$(5.3) \qquad \int_0^1 s^{\nu-1}(1-s)^{\gamma-\nu-1}\,\Psi(\alpha;\nu;sx)\,ds = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\gamma-\nu)}{\Gamma(\gamma)}\,\Psi(\alpha;\gamma;x).$$

(5.3) steckt als Sonderfall sowohl in Erdélyis Gleichung[5,2] als auch, ähnlich wie bei (4.1) angegeben, in seiner a. a. O.[4,1], S. 273 mit (5.2) bezeichneten Formel (man setze dort $n = p = q = 1$, $a_1 = \alpha$, $c_1 = \gamma$, $\gamma_1 = \nu$).

6. In den ersten[1,2] der angeführten Arbeiten bemerkt Erdélyi (S. 203), dass er bei hypergeometrischen Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen entsprechende Untersuchungen geführt habe. Da er weder in dieser Abhandlung auf mehr als eine Veränderliche eingegangen noch, soviel mir bekannt, später darauf zurückgekommen ist, will ich heute über meine eigenen Ergebnisse auf diesem Gebiete berichten. Ich zögere damit nicht länger, weil Feldheim a. a. O.[1,5], S. 244, 246 für hypergeometrische Reihen in n Veränderlichen, Lauricellasche Funktionen, schon Integralgleichungen angegeben hat; in ihnen werden diese Gebilde einmal integriert, in meinen Formeln mehrfach. Dass Feldheim in einer jüngst erschienenen Arbeit[6,1] neuerdings »Beiträge zur Lehre von den hypergeometrischen Funktionen mehrerer Veränderlichen» angekündigt hat[6,2], ist mir ein Grund mehr, die folgenden Mitteilungen nicht weiter hinauszuschieben.

[5,1] Siehe [1,7], S. 259.

[5,2] A. a. O. [4,3], S. 183, (19). — ${}_1F_1$ dort ist unser Ψ.

[6,1] E. FELDHEIM, Acta math. 75 (1942), 117—138. Siehe dort die Fussnoten 3 und 5.

[6,2] Zu Gesichte sind sie mir bis heute (10.XII.46) nicht gekommen.

Indem wir uns hier auf *zwei* Unabhängige beschränken, handeln wir von den Appellschen Reihen

$$F_1(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma;x,y)=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n, \tag{6.1}$$

$$F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)}{(\gamma_1,m)(\gamma_2,n)(1,m)(1,n)}x^m y^n, \tag{6.2}$$

$$F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;x,y)=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha_1,m)(\alpha_2,n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n, \tag{6.3}$$

$$F_4(\alpha,\beta;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m+n)}{(\gamma_1,m)(\gamma_2,n)(1,m)(1,n)}x^m y^n, \tag{6.4}$$

in denen $\alpha,\beta,\ldots$ beliebige komplexe Parameter bedeuten; nur werden für γ,γ_1,γ_2 die Werte null und negativer ganzer Zahlen ausgeschlossen. Es konvergieren die Reihen (6.1) und (6.3), wenn $|x|<1$, $|y|<1$; (6.2), wenn $|x|+|y|<1$; (6.4), wenn $|\sqrt{x}|+|\sqrt{y}|<1$. Aus den von Appell dafür erbrachten Beweisen, wie man sie in A.-K.[1,1], S. 15—19 nachlesen kann, geht hervor, dass z. B. (6.2) *gleichmässig* konvergiert, wenn

$$|x|+|y|\leqq\zeta,\quad \text{wo}\quad 0<\zeta<1. \tag{6.21}$$

Für die Appellschen Funktionen fand ich vor vier Jahren zu der Beziehung (1.2) die Seitenstücke

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 s^{\beta_1-1}(1-s)^{\mu_1-\beta_1-1}t^{\beta_2-1}(1-t)^{\mu_2-\beta_2-1}F_1(\alpha,\mu_1,\mu_2;\gamma;sx,ty)\,ds\,dt \tag{6.5}$$
$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\mu_1-\beta_1)}{\Gamma(\mu_1)}\frac{\Gamma(\beta_2)\Gamma(\mu_2-\beta_2)}{\Gamma(\mu_2)}F_1(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma;x,y),$$

(6.51) $|x|<1,\quad |y|<1,$ (6.52) $0<\Re\beta_1<\Re\mu_1,\quad 0<\Re\beta_2<\Re\mu_2;$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 s^{\nu_1-1}(1-s)^{\gamma_1-\nu_1-1}t^{\nu_2-1}(1-t)^{\gamma_2-\nu_2-1}F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;sx,ty)\,ds\,dt \tag{6.6}$$
$$=\frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\gamma_1-\nu_1)}{\Gamma(\gamma_1)}\frac{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\gamma_2-\nu_2)}{\Gamma(\gamma_2)}F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y),$$

(6.61) $|x|+|y|<1,$ (6.62) $0<\Re\nu_1<\Re\gamma_1,\quad 0<\Re\nu_2<\Re\gamma_2;$

$$(6.7)\quad \int_0^1\!\!\int_0^1 s^{\alpha_1-1}(1-s)^{\lambda_1-\alpha_1-1}\,t^{\alpha_2-1}(1-t)^{\lambda_2-\alpha_2-1}\,F_3(\lambda_1,\lambda_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;sx,ty)\,ds\,dt$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\lambda_1-\alpha_1)}{\Gamma(\lambda_1)}\,\frac{\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\lambda_2-\alpha_2)}{\Gamma(\lambda_2)}\,F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;x,y),$$

$$(6.71)\quad |x|<1,\quad |y|<1,\qquad (6.72)\quad 0<\Re\alpha_1<\Re\lambda_1,\quad 0<\Re\alpha_2<\Re\lambda_2;$$

$$(6.8)\quad \int_0^1\!\!\int_0^1 s^{\nu_1-1}(1-s)^{\gamma_1-\nu_1-1}\,t^{\nu_2-1}(1-t)^{\gamma_2-\nu_2-1}\,F_4(\alpha,\beta;\nu_1,\nu_2;sx,ty)\,ds\,dt$$
$$=\frac{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\gamma_1-\nu_1)}{\Gamma(\gamma_1)}\,\frac{\Gamma(\nu_2)\,\Gamma(\gamma_2-\nu_2)}{\Gamma(\gamma_2)}\,F_4(\alpha,\beta;\gamma_1,\gamma_2;x,y),$$

$$(6.81)\quad |\sqrt{x}|+|\sqrt{y}|<1,\qquad (6.82)\quad 0<\Re\nu_1<\Re\gamma_1,\quad 0<\Re\nu_2<\Re\gamma_2.$$

7. Von diesen Formeln werde ich hier (6.6) beweisen; das geschieht, wie schon bei (3.1) angedeutet. Man ersetzt die Funktion F_2 unter dem Integral (6.6) durch ihre Reihe (6.2). Diese konvergiert im Bereiche der Integration gleichmässig, wenn (6.21) gilt, denn dann ist

$$|sx|+|ty|=s|x|+t|y|\leqq|x|+|y|\leqq\zeta;$$

folglich darf man gliedweise integrieren und erhält statt der linken Seite I_2 von (6.6)

$$I_2=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)}{(\nu_1,m)(\nu_2,n)(1,m)(1,n)}\,x^m y^n\int_0^1 s^{\nu_1+m-1}(1-s)^{\gamma_1-\nu_1-1}\,ds\int_0^1 t^{\nu_2+n-1}(1-t)^{\gamma_2-\nu_2-1}\,dt$$

und, wenn man eine bekannte, die Integration binomischer Differentiale betreffende Formel anwendet,

$$I_2=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)}{(\nu_1,m)(\nu_2,n)(1,m)(1,n)}\,\frac{\Gamma(\nu_1+m)\,\Gamma(\gamma_1-\nu_1)}{\Gamma(\gamma_1+m)}\,\frac{\Gamma(\nu_2+n)\,\Gamma(\gamma_2-\nu_2)}{\Gamma(\gamma_2+n)}\,x^m y^n$$
$$=\frac{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\gamma_1-\nu_1)}{\Gamma(\gamma_1)}\,\frac{\Gamma(\nu_2)\,\Gamma(\gamma_2-\nu_2)}{\Gamma(\gamma_2)}\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)}{(\nu_1,m)(\nu_2,n)(1,m)(1,n)}\,\frac{(\nu_1,m)(\nu_2,n)}{(\gamma_1,m)(\gamma_2,n)}\,x^m y^n.$$

Das ist aber nach (6.2) die Behauptung.

8. Wir wollen sie noch auf eine zweite Art beweisen, und zwar mit dem Hilfsmittel der *verallgemeinerten Ableitungen*, deren Ordnung keine natürliche

Zahl zu sein braucht, sondern sogar beliebig komplex sein darf[8,1]. Von den über sie geltenden Aussagen führe ich die folgenden an, — sogleich in der Gestalt, wie sie in den jüngsten mir bekannt gewordenen Abhandlungen dieses Gegenstandes[8,2] erscheinen: Man setzt bei beliebigen ξ und φ die φ-te Ableitung der $(\xi - 1)$-ten Potenz

$$\frac{d^{\varphi}}{d x^{\varphi}} x^{\xi-1} = \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi - \varphi)} x^{\xi-\varphi-1}. \tag{8. 1}$$

Ist eine Funktion $u(x)$ in die Reihe

$$u = \sum_{n}^{0,\,\infty} A_n (x - x_0)^{\xi+n-1} \tag{8. 2}$$

mit festen A_n entwickelbar, so erklärt man ihre φ-te Ableitung, indem man (8. 2) nach der Regel (8. 1) gliedweise ableitet,

$$\frac{d^{\varphi} u}{d(x - x_0)^{\varphi}} = \sum_{n}^{0,\,\infty} A_n \frac{\Gamma(\xi + n)}{\Gamma(\xi + n - \varphi)} (x - x_0)^{\xi+n-\varphi-1}; \tag{8. 3}$$

entsprechend $d^{\varphi} u / d(x_1 - x)^{\varphi}$, wenn $x_1 - x$ in (8. 2) an Stelle von $x - x_0$ rückt. 8. 3) und die eben genannte, ihr zur Seite tretende Formel kommen mit den folgenden Ansätzen überein, die aber $\Re\mathfrak{e}\,\varphi < 0$ voraussetzen:

$$\frac{d^{\varphi} u}{d(x - x_0)^{\varphi}} = \frac{1}{\Gamma(-\varphi)} \int_{x_0}^{x} u(\mathfrak{s}) (x - \mathfrak{s})^{-\varphi-1}\, d\mathfrak{s}, \tag{8. 4}$$

$$\frac{d^{\varphi} u}{d(x_1 - x)^{\varphi}} = \frac{1}{\Gamma(-\varphi)} \int_{x}^{x_1} u(\mathfrak{s}) (\mathfrak{s} - x)^{-\varphi-1}\, d\mathfrak{s}. \tag{8. 5}$$

Im Gefolge des Begriffs der verallgemeinerten Ableitungen erscheint die Gausssche Funktion 1885 in der Doktorschrift von Bochow[8,1] und 1908 in einem Aufsatz

[8,1] Der obige Name scheint mir treffender als der sonst häufig gebrauchte: Ableitungen von nichtganzer Ordnung. — Auf das Wesen des über hundert Jahre alten Begriffs und seine Geschichte, an deren Anfang die Namen Liouvilles und Riemanns stehen, gehe ich hier nicht ein, sondern verweise in dieser Hinsicht auf die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften II. 1. I. (1899—1916), S. 116—119 und, was die ersten vier Jahrzehnte seiner Entwicklung betrifft, auf die Doktorschrift von K. Bochow, Der Differentialquotient zu beliebigem Index. Übersicht über die bisherige Entwickelung dieser Theorie und ausführliche Darstellung der reellen Differentiation zu beliebigem reellem Index, Halle 1885. Den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich Herrn W. Lorey.

[8,2] Erdélyi, Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 10 (1939), a) S. 129—134; b) S. 176—189. — Zum Sachlichen siehe auch J. Kampé de Fériet, Acta math. 43 (1922), 197—207.

von Lindner[8,3]. Ohne auf diese Vorarbeiten zurückzugreifen, hat sie Kampé de Fériet[8,4] durch eine solche Ableitung eines binomischen Ausdrucks[8,5] dargestellt [siehe (10.5)] und diese Darstellung planmässig zum funktionalen Rechnen mit Gaussschen Funktionen benutzt. Er gewinnt so aus ihr deren Differenzen- und Differentialgleichungen, ferner ihre Entwicklung nach gewissen Polynomen.

Der in Rede stehende Ausdruck von $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ begegnet, etwas abgewandelt, schon bei Bochow und Lindner[8,6]; sie tun aber beide noch nicht den Schritt, den Kampé de Fériet vollzieht[8,4] — ihn in das Eulersche Integral für F umzuschreiben. Sie unterlassen das, obwohl sie beide über die dazu geeignete Formel (8.4) verfügen[8,7]. — Auf ähnlichem Wege wie zu den Integralen Eulerscher Art gelangt Erdélyi[8,8] zu (1.2). In seinen Arbeiten[8,2] bedient auch er sich, gleichfalls unabhängig von Vorgängern, der verallgemeinerten Ableitungen zum funktionalen Rechnen mit den hypergeometrischen Funktionen — *einer* Veränderlichen.

9. Wenn wir, seinem Vorgehen bei (1.2) entsprechend, jetzt (6.6) herleiten wollen, so bedarf es dazu und zur Lösung ähnlicher Aufgaben folgender Vorbemerkungen, die sich auf zwei Veränderliche beziehen[9,1]. Wir setzen in leicht verständlicher Schreibweise

$$(9.1) \qquad \frac{\partial^{\varphi+\psi}}{\partial x^{\varphi}\,\partial y^{\psi}}(x^{\xi-1}\,y^{\eta-1}) = \frac{\partial^{\varphi} x^{\xi-1}}{\partial x^{\varphi}}\,\frac{\partial^{\psi} y^{\eta-1}}{\partial y^{\psi}} = \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi-\varphi)}\,\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\eta-\psi)}\,x^{\xi-\varphi-1}\,y^{\eta-\psi-1}.$$

Lässt sich eine Funktion $w(x, y)$ in die Reihe

$$(9.2) \qquad w = \sum_{m,n}^{0,\infty} A_{mn}\,(x-x_0)^{\xi+m-1}\,(y-y_0)^{\eta+n-1}$$

[8,3] P. LINDNER, S. B. Berliner math. Ges. 7 (1908), 77—83.

[8,4] A. a. O. [8,2], S. 200—205. Man vgl. auch seine Mitteilungen in C. R. Acad. Sci., Paris 170 (1920), a) 569—572, b) 1045—1048.

[8,5] So darf ich einen Ausdruck $z^{A}(1-z)^{M}$ in Anlehnung an die bekannte Bezeichnung »binomisches Differential» nennen.

[8,6] Siehe BOCHOW [8,1], S. 29, (71); LINDNER [8,3], S. 80, (2), (3). — Bochow nimmt den Ableitungszeiger reell an.

[8,7] BOCHOW [8,1], S. 12, S. 20, (19); LINDNER [8,3], S. 78.

[8,8] Siehe [8,2] b), S. 178.

[9,1] Die jetzt zu verzeichnenden Formeln (9.1), ..., (9.4) findet man vermutlich auch in der mir zur Zeit nicht zugänglichen Abhandlung von P. MONTEL, Bull. Soc. math. France 46, S. 172, auf die Kampé de Fériet a. a. O. [8,4] b), S. 1047 hinweist.

mit festen A_{mn} entwickeln, so erklärt man ihre $(\varphi+\psi)$-te Teilableitung dadurch, dass man (9.2) nach der Vorschrift (9.1) gliedweise ableitet,

$$(9.3)\quad \frac{\partial^{\varphi+\psi} w}{\partial(x-x_0)^{\varphi}\,\partial(y-y_0)^{\psi}} = \sum_{m,n}^{0,\infty} A_{mn} \frac{\Gamma(\xi+m)}{\Gamma(\xi+m-\varphi)} \frac{\Gamma(\eta+n)}{\Gamma(\eta+n-\psi)} (x-x_0)^{\xi+m-\varphi-1} (y-y_0)^{\eta+n-\psi-1}.$$

Die Konvergenz der Reihen (9.2), (9.3) steht in den von uns zu behandelnden Fällen von vornherein fest, da es sich in ihnen um hypergeometrische Reihen handelt, über die man in dieser Hinsicht unterrichtet ist.

Man kann zeigen, dass, wenn $\Re\varphi < 0$, $\Re\psi < 0$, sich (9.3) auch durch ein Doppelintegral darstellen lässt,

$$(9.4)\quad \frac{\partial^{\varphi+\psi} w}{\partial(x-x_0)^{\varphi}\,\partial(y-y_0)^{\psi}} = \frac{1}{\Gamma(-\varphi)\,\Gamma(-\psi)} \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} w(\mathfrak{s},\mathfrak{t})\,(x-\mathfrak{s})^{-\varphi-1}\,(y-\mathfrak{t})^{-\psi-1}\,d\mathfrak{s}\,dt.$$

Ein Blick auf (8.5) lehrt, wie (9.4) abzuwandeln ist, wenn in (9.2) an Stelle von $x-x_0$, $y-y_0$ oder beider die Unterschiede x_1-x, y_1-y oder beide treten.

Zu dem zweiten Beweise von (6.6) übergehend, berechnen wir unter den Annahmen (6.61), (6.62) mit (6.2) nach dem von (9.1) bis (9.3) Gesagten

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{\nu_1-\gamma_1+\nu_2-\gamma_2}}{\partial x^{\nu_1-\gamma_1}\,\partial y^{\nu_2-\gamma_2}} [x^{\nu_1-1} y^{\nu_2-1} F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x,y)] \\ &\qquad = \frac{\partial^{\nu_1-\gamma_1+\nu_2-\gamma_2}}{\partial x^{\nu_1-\gamma_1}\,\partial y^{\nu_2-\gamma_2}} \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{(\alpha,m+n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)}{(\nu_1,m)(\nu_2,n)(1,m)(1,n)} x^{m+\nu_1-1} y^{n+\nu_2-1} \\ &\qquad = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{(\alpha,m+n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)}{(\nu_1,m)(\nu_2,n)(1,m)(1,n)} \frac{\Gamma(m+\nu_1)}{\Gamma(m+\gamma_1)} \frac{\Gamma(n+\nu_2)}{\Gamma(n+\gamma_2)} x^{m+\gamma_1-1} y^{n+\gamma_2-1} \\ &\qquad = \frac{\Gamma(\nu_1)}{\Gamma(\gamma_1)} \frac{\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\gamma_2)} x^{\gamma_1-1} y^{\gamma_2-1} F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\text{[9,2]}. \end{aligned}$$

Mithin ist nach (9.4)

$$\begin{aligned} F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)\,\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\nu_2)} x^{1-\gamma_1} y^{1-\gamma_2} \frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\nu_1)\,\Gamma(\gamma_2-\nu_2)} \int_0^x\int_0^y d\mathfrak{s}\,dt\,\mathfrak{s}^{\nu_1-1}\mathfrak{t}^{\nu_2-1} \\ F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;\mathfrak{s},\mathfrak{t})\,(x-\mathfrak{s})^{\gamma_1-\nu_1-1}\,(y-\mathfrak{t})^{\gamma_2-\nu_2-1}; \end{aligned}$$

daraus aber entsteht (6.6) bei der Einsetzung $\mathfrak{s}=sx$, $\mathfrak{t}=ty$.

[9,2] F_2 lässt sich nach Kampé de Fériet [6,4] b), S. 1048 auch durch eine verallgemeinerte Teilableitung eines zweifach *binomischen* Ausdrucks darstellen.

Wie neben (1.2) auch (5.3) gilt, so bleibt die Formel (6.6) bestehen, wenn man in ihr an die Stelle der Funktion F_2 ihre von P. Humbert 1920 eingeführten Entartungen[9,3] setzt, nämlich

$$\Psi_1(\alpha,\beta;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}F_2\left(\alpha,\beta,\frac{1}{\varepsilon};\gamma_1,\gamma_2;x,\varepsilon y\right)=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)}{(\gamma_1,m)(\gamma_2,n)(1,m)(1,n)}x^m y^n,$$

$$\Psi_2(\alpha;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}F_2\left(\alpha,\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\gamma_1,\gamma_2;\varepsilon x,\varepsilon y\right)=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)}{(\gamma_1,m)(\gamma_2,n)(1,m)(1,n)}x^m y^n.$$

10. Zu der Formel (2.1) von Cailler habe ich bisher noch kein Seitenstück gefunden, also noch kein Doppelintegral ausgerechnet, unter dem zwei Appellsche Funktionen aufträten, miteinander vervielfacht und jede mit zwei Parametern x, y; u, v behaftet. Wohl aber werde ich hier den Wert eines Doppelintegrals gewinnen, unter dem eine gewisse sogenannte höhere hypergeometrische Funktion zweier Veränderlichen mit zwei Gaussschen Funktionen vervielfacht wird[10,1]. Dabei bediene ich mich ausser den schon benutzten verallgemeinerten Ableitungen eines Hilfsmittels, das Erdélyi a. a. O.[8,2] bei *einer* Veränderlichen angewandt hat: der *verallgemeinerten Teilintegration*, von der noch die Rede sein wird. Jene höheren hypergeometrischen Funktionen hat Kampé de Fériet eingeführt[10,2]; hier gebrauchen wir die folgende:

$$(10.1)\quad \tilde{F}(x,y)=F\left(\begin{matrix}1\\2\\0\\2\end{matrix}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta_1,\beta_2;\ \mu_1,\mu_2\\ \\ \nu_1,\nu_2;\ \tau_1,\tau_2\end{matrix}\right| x,y\right)=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta_1,m)(\beta_2,n)(\mu_1,m)(\mu_2,n)}{(\nu_1,m)(\nu_2,n)(\tau_1,m)(\tau_2,n)(1,m)(1,n)}x^m y^n,$$

— eine vollständige von der Ordnung 2 in dem a. a. O.[10,2], S. 150 erklärten Sinne[10,3]. Sind $\nu_1, \nu_2, \tau_1, \tau_2$ weder null noch negative ganze Zahlen, so konvergiert die Reihe (10.1), wie (6.2), unter der Annahme (6.61); man zeigt das ebenso, wie es in A.-K.[1,1], S. 16 von (6.2) nachgewiesen ist.

[9,3] Vgl. A.-K. [1,1], S. 124—126.

[10,1] Den Anstoss dazu, eine Formel in dieser Richtung zu suchen, gab mir eine die hypergeometrischen Funktionen *einer* Veränderlichen betreffende Arbeit von C. S. MEIJER (Proc. Akad. Wet. Amsterdam 42 (1939), 355—369; siehe dort (9) auf S. 356). Später bemerkte ich, dass mein Ergebnis (10.5) nicht Meijers eben angeführter Gleichung entspricht, sondern einer von Erdélyi a. a. O. [8,2], b) auf S. 185 unter (20) aufgestellten, gleichfalls auf *eine* Veränderliche bezüglichen Formel.

[10,2] Vgl. A.-K. [1,1], S. 149—155.

[10,3] Das Zeichen $\tilde{F}$ in (10.1) dient uns nur zur Abkürzung.

Wir verstehen jetzt unter s und t zwei zwischen 0 und 1 veränderliche Grössen und bilden von der unter der Voraussetzung (6.61) gewiss konvergenten Reihe $\tilde{F}(sx, ty)$ die verallgemeinerte Teilableitung

$$(2)\qquad \frac{\partial^{\tau_1-\mu_1+\tau_2-\mu_2}}{\partial s^{\tau_1-\mu_1}\,\partial t^{\tau_2-\mu_2}}[s^{\tau_1-1}\,t^{\tau_2-1}\,\tilde{F}(sx, ty)] = \frac{\Gamma(\tau_1)\,\Gamma(\tau_2)}{\Gamma(\mu_1)\,\Gamma(\mu_2)}\,s^{\mu_1-1}\,t^{\mu_2-1}\,F_2(\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu_1, \nu_2; sx, ty);$$

die Zwischenrechnung sei unterdrückt, da sie ganz der im dritten Absatz von **9.** ausgeführten entspricht. Setzt man den aus (10.2) sich ergebenden Wert von F_2 in (6.6) unter dem Integralzeichen ein, so erhält man

$$F_2(\alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\gamma_1-\nu_1)}\,\frac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\nu_2)\,\Gamma(\gamma_2-\nu_2)}\,\frac{\Gamma(\mu_1)\,\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\tau_1)\,\Gamma(\tau_2)}$$
$$\cdot\int_0^1\!\!\int_0^1 s^{\nu_1-\mu_1}(1-s)^{\gamma_1-\nu_1-1}\,t^{\nu_2-\mu_2}(1-t)^{\gamma_2-\nu_2-1}\,\frac{\partial^{\tau_1-\mu_1+\tau_2-\mu_2}}{\partial s^{\tau_1-\mu_1}\,\partial t^{\tau_2-\mu_2}}[s^{\tau_1-1}\,t^{\tau_2-1}\,\tilde{F}(sx, ty)]\,ds\,dt.$$

Nun ziehen wir die schon erwähnte Teilintegration von beliebiger Ordnungszahl ω heran, d. h. die Formel[10,4]

$$(10.3)\qquad \int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} U\,\frac{d^\omega V}{d(z-\mathfrak{a})^\omega}\,dz = \int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} V\,\frac{d^\omega U}{d(\mathfrak{b}-z)^\omega}\,dz,$$

in der die Ableitungen der Funktionen U und V von z so zu verstehen sind, wie es in **8.** angegeben ist. Wenn man (10.3) mit $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{b} = 1$ der Reihe nach auf die Veränderlichen $z = s$, $z = t$ anwendet, findet man

$$(10.4)\qquad F_2(\alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\gamma_1-\nu_1)}\,\frac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\nu_2)\,\Gamma(\gamma_2-\nu_2)}\,\frac{\Gamma(\mu_1)\,\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\tau_1)\,\Gamma(\tau_2)}$$
$$\cdot\int_0^1\!\!\int_0^1 s^{\tau_1-1}\,t^{\tau_2-1}\,\tilde{F}(sx, ty)\,\frac{d^{\tau_1-\mu_1}}{d(1-s)^{\tau_1-\mu_1}}[s^{\nu_1-\mu_1}(1-s)^{\gamma_1-\nu_1-1}]$$
$$\cdot\frac{d^{\tau_2-\mu_2}}{d(1-t)^{\tau_2-\mu_2}}[t^{\nu_2-\mu_2}(1-t)^{\gamma_2-\nu_2-1}]\,ds\,dt.$$

Ihr endgültiges Gesicht bekommt diese Gleichung dadurch, dass die Ableitungen unter dem Integral im wesentlichen Gausssche Funktionen sind; nach der Formel von Kampé de Fériet

$$(10.5)\qquad F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,x^{1-c}\,\frac{d^{a-c}}{dx^{a-c}}[x^{a-1}(1 \dot{-} x)^{-b}],$$

[10,4] Siehe E. R. LOVE und L. C. YOUNG, Proc. London Math. Soc. (2) 44 (1938), 1—35; ERDÉLYI [8,2] a), (6) und S. 134. — ω sei so beschaffen, dass die Integrale in (10.3) konvergieren.

wie er sie z. B. a. a. O.[8,2], S. 201 angibt, ist nämlich

$$\frac{d^{\tau_1-\mu_1}}{d(1-s)^{\tau_1-\mu_1}}\left[s^{\nu_1-\mu_1}(1-s)^{\gamma_1-\nu_1-1}\right]=\frac{\Gamma(\gamma_1-\nu_1)}{\Gamma(\gamma_1-\nu_1+\mu_1-\tau_1)}$$
$$\cdot(1-s)^{\gamma_1-\nu_1+\mu_1-\tau_1-1}\,F(\gamma_1-\nu_1,\mu_1-\nu_1;\gamma_1-\nu_1+\mu_1-\tau_1;1-s).$$

Setzt man diesen und den entsprechenden Wert der im Integral (10.4) vorkommenden Ableitung nach $1-t$ dort ein, so ergibt sich schliesslich

$$(10.6)\qquad F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma_1)\,\Gamma(\mu_1)}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\tau_1)}\,\frac{\Gamma(\gamma_2)\,\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\nu_2)\,\Gamma(\tau_2)}$$
$$\cdot\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\nu_1+\mu_1-\tau_1)\,\Gamma(\gamma_2-\nu_2+\mu_2-\tau_2)}$$
$$\cdot\int_0^1\!\!\int_0^1 ds\,dt\,s^{\tau_1-1}(1-s)^{\gamma_1-\nu_1+\mu_1-\tau_1-1}\,t^{\tau_2-1}(1-t)^{\gamma_2-\nu_2+\mu_2-\tau_2-1}$$
$$\cdot F\left(\begin{matrix}1\\2\\0\\2\end{matrix}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta_1,\beta_2;\,\mu_1,\mu_2\\ \\ \nu_1,\nu_2;\,\tau_1,\tau_2\end{matrix}\right|\,sx,ty\right)$$
$$\cdot F(\gamma_1-\nu_1,\mu_1-\nu_1;\gamma_1-\nu_1+\mu_1-\tau_1;1-s)$$
$$\cdot F(\gamma_2-\nu_2,\mu_2-\nu_2;\gamma_2-\nu_2+\mu_2-\tau_2;1-t).$$

Zunächst unter den Annahmen (6.61), (6.62) und

$$(10.7)\qquad 0<\Re\,\tau_1<\Re(\gamma_1-\nu_1+\mu_1)\qquad 0<\Re\,\tau_2<\Re(\gamma_2-\nu_2+\mu_2)$$

bewiesen, bleibt (10.6) nach der Lehre vom Fortbestande funktionaler Beziehungen[10,5] in Kraft, solange (6.61) und (10.7) gelten.

Einige Sonderfälle der Formel (10.6) verdienen angeführt zu werden. Setzt man $\nu_1=\mu_1$ und $\nu_2=\mu_2$, so schrumpfen die beiden Gaussschen Funktionen, deren zweiter Parameter dann 0 wird, auf 1 zusammen, $\tilde{F}$(10.1) vereinfacht sich zu einer Appellschen Funktion F_2, und es erscheint das frühere Ergebnis (6.6), in dem nur ν_1, ν_2 durch τ_1, τ_2 zu ersetzen sind.

Auch wenn $\tau_1=\mu_1$, $\tau_2=\mu_2$ ist, wird $\tilde{F}$ zu F_2; in den Gaussschen Funktionen aber sind dann der erste und der dritte Parameter einander gleich mit der bekannten Folge, dass

$$F(a,b;a;z)=(1-z)^{-b},\qquad F(\gamma_1-\nu_1,\mu_1-\nu_1;\gamma_1-\nu_1;1-s)=s^{\nu_1-\mu_1}$$

wird: es kommt wiederum (6.6) zustande.

[10,5] Vgl. W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1 (1929), S. 80.

Auch der Ansatz $\nu_1 = \beta_1$, $\nu_2 = \beta_2$ lässt $\tilde{F}$ in F_2 übergehen; die Gaussschen Funktionen bleiben dabei jedoch als solche bewahrt. Ich unterlasse es, die entstehende Beziehung ausdrücklich zu verzeichnen und schliesse mit der Bemerkung, dass sich eine andere, gleichfalls die Appellsche und zwei Gausssche Funktionen enthaltende Formel einstellt, wenn man $\tau_1 = \beta_1$, $\tau_2 = \beta_2$ setzt.