ÜBER AREOLÄR-HARMONISCHE FUNKTIONEN.

Von

J. RIDDER

in Groningen.

Einleitung.

Ist $f(z)$ eine in einem beschränkten Bereiche B der z-Ebene stetige, komplexwertige Funktion von $z = x + iy$, so bildet das über den Rand $R(J)$ eines abgeschlossenen, zu B gehörenden Intervalles J erstreckte Integral

$$\int_{R(J)} f(z)\, dz$$

eine in B (beschränkt) additive Intervallfunktion $\Phi_f(J)$. Wird die Ableitung von $\Phi_f(J) \equiv$ *die areoläre Ableitung von* $f(z)$ in einem Punkte $z \in B$, $D_z \Phi_f(J)$, durch den Grenzwert

$$\lim_{Q \to z} \frac{\int_{R(Q)} f(z)\, dz}{m(Q)}$$

definiert, wobei Q ein z enthaltendes, in B liegendes, abgeschlossenes, achsenparalleles Quadrat mit Rand $R(Q)$ und Flächenmass $m(Q)$ ist, das sich in z zusammenzieht, so beweist man leicht, dass aus der Existenz einer (endlichen) Ableitung $f'(z)$ in z die von $D_z \Phi_f(J)$ folgt; und zwar ist dabei immer $D_z \Phi_f(J) = 0$.

Umgekehrt, hat $f(z)$ in jedem Punkte von B eine areoläre Ableitung gleich Null, so ist die additive Intervallfunktion $\Phi_f(J)$ identisch Null, und dadurch auch für jede samt seinem Innern in B liegende, einfache, geschlossene, rektifizierbare Kurve C

$$\int_C f(z)\, dz = 0,$$

somit, nach dem Moreraschen Satze, $f(z)$ analytisch (differenzierbar) in B.

Die Eigenschaft in den Punkten von B eine areoläre Ableitung gleich Null zu haben charakterisiert somit die in B analytischen Funktionen unter den daselbst stetigen, komplexwertigen Funktionen.

Man kann sich nun die Frage vorlegen nachzusehen in wie weit die Eigenschaften der analytischen Funktionen sich auf in B stetige, komplexwertige Funktionen übertragen lassen, die in jedem Punkte von B eine endliche areoläre Ableitung besitzen, ohne dass diese darum immer den Wert Null zu haben braucht. Die ersten Untersuchungen derartiger Funktionen, *areolär-monogene* (areolär-analytische) *oder*, abgekürzt, *α-monogene Funktionen* genannt, rühren von POMPEIU[1] her. Diejenigen in B α-monogenen Funktionen, deren areoläre Ableitung in B stetig ist, werden *α-holomorph* genannt. Die von POMPEIU untersuchten, α-holomorphen Funktionen besitzen in jedem Punkte ihres Existenzbereiches stetige partielle Ableitungen nach x und nach y; E. KASNER führte für sie den Namen von *polygenen Funktionen*[2] ein.

Die Analogie zwischen der Theorie der monogenen Funktionen einerseits und der Theorie der harmonischen Funktionen zweier Veränderlichen andererseits führt naturgemäss zur Frage ob sich neben der Klasse der α-monogenen Funktionen nicht auch eine Klasse von *α-harmonischen Funktionen* einführen lässt, welche die harmonischen Funktionen umfasst, und welche Eigenschaften hat, die in analogem Verhältnis zu denjenigen der Klasse der harmonischen Funktionen stehen wie die der α-monogenen Funktionen zu denen der monogenen Funktionen. Im folgenden wird sich zeigen, dass diese Frage bejahend zu beantworten ist.

Als Analogon zu den Cauchyschen und Moreraschen Sätzen in der Theorie der analytischen Funktionen haben wir bei den harmonischen Funktionen das Theorem: »Ist $u(x,y)$ in dem beschränkten Bereiche B harmonisch, so verschwindet das über eine samt seinem Innern in B liegende, einfache, geschlossene, rektifizierbare Kurve C erstreckte Integral der nach der inneren Normale genommenen Ableitung von u:

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds \equiv \int_C \frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0.$$

---

[1] Siehe D. POMPEIU, Rend. Circolo mat. Palermo *33* (1912), S. 108—113. Eine Übersicht über die Literatur der areolär-monogenen Funktionen findet man in einer Monographie von N. THÉODORESCO: *La dérivée aréolaire*, Ann. Roum. de math., cahier *3* (1936), 62 S.

[2] E. R. HEDRICK gibt in Bull. Amer. Math. Soc. *39* (1933), S. 75—96 eine Übersicht der Eigenschaften dieser Funktionen und der zugehörigen Literatur.

Umgekehrt, verschwindet dieses Integral für jede derartige Kurve C bei einer in B mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ versehenen, reellen Funktion $u(x, y)$, so ist diese in B harmonisch.» Dies führt uns dazu im Punkte $(x, y) \in B$ als *areoläre Ableitung*, $D_{(x,y)}\, \Phi_u(J)$, *einer in B mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ versehenen, reellen Funktion* $u(x, y)$ die Ableitung der Intervallfunktion $\Phi_u(J) \equiv \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$:

$$D_{(x,y)}\, \Phi_u(J) = \lim_{Q \to (x,y)} \frac{\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds}{m(Q)}$$

zu betrachten; Q ist dabei wieder ein (x, y) enthaltendes, abgeschlossenes, achsen paralleles Quadrat.

Dann folgt aus der Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in B, dass in jedem Punkte von B, in welchem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ist, die areoläre Ableitung von u existiert und den Wert Null hat. Gibt es, umgekehrt, für eine in B mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ausgestatteten Funktion u in den Punkten von B eine areoläre Ableitung gleich Null, so ist u harmonisch in B.

Die oben angedeutete Klasse der *in B areolär-harmonischen Funktionen* soll nun von denjenigen in B mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehenen Funktionen gebildet werden, welche in den Punkten von B eine endliche areoläre Ableitung haben. Die harmonischen Funktionen bilden somit die Teilklasse, deren Funktionen eine areoläre Ableitung identisch Null haben. Sie spielen in der Theorie der α-harmonischen Funktionen die Rolle von Konstanten (ebenso wie die monogenen Funktionen in der Theorie der α-monogenen Funktionen); denn die Differenz von zwei in B α-harmonischen Funktionen mit gleicher areolärer Ableitung ist immer eine in B harmonische Funktion.

Wir definieren auch den Begriff von *α-harmonisch in einem Punkte.*

Kapitel I enthält Untersuchungen über α-harmonische und (in einem Bereiche) fast überall α-harmonische Funktionen. Die Sätze I—IV sind als Analoga zu dem oben gegebenen Theorem über harmonische Funktionen zu betrachten.

In Kapitel II werden höhere areoläre Ableitungen eingeführt. Dies ermöglicht die Definition von *α-harmonischen Funktionen n-ter Klasse.* Es lässt sich zeigen, dass diese mit den polyharmonischen Funktionen n-ter Ordnung zusammenfallen.

Kapitel III enthält u. a. eine Behandlung von Randwertproblemen bei α-harmonischen Funktionen mit höheren areolären Ableitungen, welche als Erweiterungen von Randwertaufgaben bei harmonischen und polyharmonischen Funktionen zu betrachten sind.

In dem kurzen Kapitel IV findet man einige Betrachtungen über eine mit der Klasse der fast überall α-harmonischen Funktionen verwandte Funktionenklasse. Zu diesen Betrachtungen führte uns die Lektüre von zwei Arbeiten von EVANS und von BINNEY[3].

Endlich werden in Kapitel V Differentialgleichungen mit areolären Ableitungen ebenso wie eine zugehörige Integralgleichung behandelt. Ausserdem werden zwei Anwendungen in der Theorie der harmonischen Funktionen und in der mathematischen Physik besprochen.

Kapitel I.

Areolär-harmonische Funktionen.

§ 1. Wir beginnen mit der Formulierung eines im folgenden oft angewandten Lemmas.

Lemma 1. Es sei C der Rand eines von endlich vielen, einfachen, rektifizierbaren Kurven begrenzten, beschränkten Bereiches B der xy-Ebene. Wenn die Funktionen $p(x,y)$ und $q(x,y)$ in dem abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ reell und stetig sind, und die im offenen Bereich B definierte, reelle Funktion $f(x,y)$ über B integrierbar (L) ist, und wenn daneben für jedes abgeschlossene, im offenen Bereich B liegende Intervall I, mit dem Rande $R(I)$,

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_{R(I)} p\,dx + q\,dy$$

ist, dann ist auch

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_C p\,dx + q\,dy.^4$$

Eine etwas allgemeinere Fassung dieses Lemmas, deren Beweis sich nach dem gleichen Verfahren geben lässt, ist bisweilen nützlich; sie lautet:

---

[3] Siehe G. C. EVANS, Acta Litt. Sci. Szeged *6* (1932), S. 27—33, und J. H. BINNEY, Trans. Amer. Math. Soc. *37* (1935), S. 254—265.

[4] Siehe J. RIDDER, Nieuw Arch. Wiskde (2) *21*, 1 e. 2 (1941), S. 28—30.

Lemma 1[bis]. Der Rand C eines beschränkten Bereiches B der xy-Ebene sei Summe von endlich vielen, einfachen, rektifizierbaren Kurven; $p(x,y)$ und $q(x,y)$ seien im abgeschlossenen Bereiche $\bar{B}$ definierte, reelle und stetige Funktionen.

E sei eine aus endlich vielen, abgeschlossenen, nicht übereinander greifenden Intervallen (i_k) aufgebaute Teilmenge von B; der Abstand der Ränder von B und von E sei $\delta(E)$. Wenn dann

$$\sum_{(k)} \int_{R(i_k)} p\,dx + q\,dy \tag{1}$$

einem Grenzwert G zustrebt für $\delta(E) \to 0$, so ist

$$\int_C p\,dx + q\,dy = G.$$[5]

§ 2. **Satz 1.** *Es sei C der Rand eines von endlich vielen, einfachen, rektifizierbaren Kurven begrenzten, beschränkten Bereiches B der xy-Ebene. Hat $u(x,y)$ in B stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$, welche auf C (endliche) Grenzwerte annehmen, die wir ebenfalls durch $\frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial y}$ andeuten, existieren in B endliche Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, und sind diese über B integrierbar (L), so ist*

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds \equiv \int_C \frac{\partial u}{\partial y}\,dx - \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -\iint_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy. \tag{2}$$[6]

---

[5] Auch wenn der allgemeine Grenzwert von (1) für $\delta(E) \to 0$ nicht existiert, gibt es doch eine Folge von wie im Texte aufgebauten Mengen (E_p) mit $\delta(E_p) \to 0$ für $p \to \infty$, deren zugehörige Summen (1) mit zunehmendem p nach $\int_C p\,dx + q\,dy$ konvergieren. Auch das folgt mit dem loc. cit. 4) benutzten Beweisverfahren. — *Ist B ein von einer einfachen, geschlossenen, rektifizierbaren Kurve C* [oder von endlich vielen derartigen Kurven] *begrenzter Bereich, so ist das Flächenmass von B gleich $\frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$.* Dieser üblicherweise unter weniger allgemeinen Voraussetzungen bewiesene Satz folgt aus Lemma 1[bis]; man nehme $q(x,y) \equiv \frac{1}{2}x$; $p(x,y) \equiv -\frac{1}{2}y$.

[6] $\frac{\partial u}{\partial n}$ ist die Komponente des zu $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ gehörigen Vektors in der Richtung der inneren Normale in allen denjenigen Punkten von C, in welchen es eine Normale gibt; in den übrigen Punkten von C setze man $\frac{\partial u}{\partial n}$ gleich Null. — Es genügt schon in Satz 1 anzunehmen, *dass es eine abzählbare Teilmenge E von B und zwei über $B-E$ nach Lebesgue integrierbare, endliche Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ gibt, welche in den Punkten von $B-E$ bzw. mit einer der vier extremen Derivierten von $\frac{\partial u}{\partial x}$ nach x und einer der vier extremen Derivierten von $\frac{\partial u}{\partial y}$ nach y zusammenfallen; dabei darf die extreme Derivierte von $\frac{\partial u}{\partial x}$ ebenso wie die von $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf $B-E$ von Punkt zu Punkt wechseln.*

Beweis. Für jedes abgeschlossene, in B liegende Intervall I, mit Rand $R(I)$, ist

$$\int_{R(I)} \frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \iint_I \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx\, dy.$$

Dadurch folgt Satz 1 unmittelbar aus Lemma 1.

Satz 2. *B und C seien definiert wie in Satz 1. Hat $u(x, y)$ in B stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$, welche auf C (endliche) Grenzwerte annehmen, und sind in jedem abgeschlossenen, in B liegenden Intervall $\frac{\partial u}{\partial x}$ totalstetig nach x für fast alle y und $\frac{\partial u}{\partial y}$ totalstetig nach y für fast alle x, während $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ über die Teilmenge*[7] *von B, in deren Punkten beide existieren, integrierbar (L) sind, so ist wieder*

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = - \iint_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx\, dy.^{8}$$

Der Beweis verläuft analog wie der des Satzes 1.

Aus Satz 1 oder Satz 2 folgt, dass für jede in B harmonische Funktion, deren partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf C Grenzwerte annehmen,

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \tag{3}$$

ist. Dasselbe gilt natürlich für jeden von endlich vielen, einfachen, rektifizierbaren Kurven begrenzten Teilbereich von B.

Definition 1. Wenn die (endlichwertige) Intervallfunktion $\Phi(J)$ definiert ist für jedes Intervall J, das samt seinem Rande zu einem Bereiche B gehört, so heisse $\Phi(J)$ *stetig in B*, falls $\Phi(J_n)$ mit zunehmendem n gegen Null konvergiert für jede Folge von in B liegenden, abgeschlossenen Intervallen $\{J_n\}$, deren Masse gleichzeitig gegen Null gehen.

In fast allen Punkten von B existieren dann $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; in denjenigen Punkten, in welchen dies nicht der Fall ist, nehme man nun in (2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ gleich Null.

[7] Man beweist leicht, dass diese Menge das gleiche Mass (L) wie B hat.

[8] In den Punkten von B, in welchen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ nicht beide existieren, nehme man $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ gleich Null an,

Definition 2. *Die obere und untere Derivierte von $\Phi(J)$ in einem Punkte $(x,y) \in B$, $D^{+}_{(x,y)}\,\Phi(J)$ bzw. $D^{-}_{(x,y)}\,\Phi(J)$,* seien definiert als

$$\limsup_{m(J)\to 0} \frac{\Phi(J)}{m(J)} \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{m(J)\to 0} \frac{\Phi(J)}{m(J)},$$

wobei J ein (achsenparalleles) *Quadrat* darstellt, das (x,y) im Innern oder auf dem Rande enthält. Sind sie einander gleich, so definiere ihr gemeinsamer Wert *die Ableitung, $D_{(x,y)}\,\Phi(J)$, von $\Phi(J)$ in (x,y).*

Die zu einer in einem Bereiche B harmonischen Funktion $u(x,y)$ gehörende Intervallfunktion

$$\Phi_u(J) \equiv \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \qquad (\text{wobei } R(J) = \text{Rand von } J)$$

besitzt somit in allen Punkten von B eine Ableitung gleich Null.

Definition 3. Eine in einem Bereiche B definierte Funktion $u(x,y)$, welche daselbst stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ hat, heisse *in einem Punkte $(x,y) \in B$ areolär-harmonisch oder α-harmonisch,* falls die zugehörige Intervallfunktion $\Phi_u(J) \equiv \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$ in (x,y) eine endliche Ableitung $D_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$ besitzt; diese Ableitung nennen wir *die areoläre Ableitung von $u(x,y)$ in (x,y).*

Die Definitionen *der oberen und der unteren areolären Derivierten, $D^{+}_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$ bzw. $D^{-}_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$, von $u(x,y)$ in (x,y)* liegen hiernach auf der Hand.

Aus einer bekannten Eigenschaft des Lebesgueschen Integrals folgt sofort, *dass die in den Sätzen 1 und 2 betrachteten Funktionen $u(x,y)$ in fast allen Punkten ihres Definitionsbereiches α-harmonisch sind;* der Wert der areolären Ableitung ist dabei fast überall im Bereiche gleich $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$.

§ 3. Für diese Funktionen ist $\Phi_u(J) \equiv \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$ im zugehörigen abgeschlossenen Bereiche $\bar{B}$ eine totalstetige Intervallfunktion. Dass hierzu die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ allein nicht genügt, zeigt das folgende Beispiel. In dem abgeschlossenen Quadrat $OABB'$, von der Seitenlänge 1 und mit OA längs der x-Achse, OB' längs der y-Achse, sei eine Funktion $u(x,y) = \int\limits_0^y \varphi(y)\, dy$ definiert, wobei $\varphi(y)$ stetig und monoton nicht-abnehmend, mit $\varphi(0) = 0$,

$\varphi(1)=1$, und konstant in einem jeden der komplementären Intervalle der auf OB' liegenden, durch fortgesetzte Dreiteilung entstehenden, Cantorschen perfekten Menge. Bei Zerlegung von OB' und von AB in drei gleiche Teile durch die Punkte P_1, Q_1 bzw. P_2, Q_2 (wobei $OP_1 < OQ_1$, und P_1P_2 und Q_1Q_2 parallel zu OA) zerfällt auch das Quadrat in drei gleiche Teile. Dabei ist

$$\int\limits_{R(OAP_2P_1)} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int\limits_{R(Q_1Q_2BB')} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -1.$$

Bei einer erneuten Drittelung von OP_1 und Q_1B' und den zugehörigen Drittelungen der zwei benutzten ebenen Intervalle erhält man, bei Fortlassung jedes mittleren Intervalles, durch Integration von $\frac{\partial u}{\partial n}$ über die Ränder der vier übrigbleibenden Intervalle für die Summe der Integrale wieder den Wert -1. Das bleibt so bei wiederholter Fortsetzung des Verfahrens. Da das Lebesguesche Mass der Cantorschen perfekten Menge Null ist, folgt hieraus, dass die Integration von $\frac{\partial u}{\partial n}$ zu einer nicht totalstetigen Intervallfunktion führt, obgleich $\frac{\partial u}{\partial x}$ $(=0)$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ $(=\varphi(y))$ stetig sind.

Diese Intervallfunktion besitzt in fast allen Punkten von $OABB'$ eine Ableitung gleich Null; da sie ausserdem nicht immer Null ist, folgt auch daraus schon, dass sie nicht totalstetig sein kann. (Man vergleiche hiermit das Korollar zu Satz 3.)

Sie ist dagegen wohl von beschränkter Variation; man sieht leicht, dass ihre Totalvariation in $OABB'$ den Wert $\varphi(1)=1$ hat.

Dass es Funktionen $u(x,y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen nach x und nach y gibt, für die die zugehörige Intervallfunktion $\Phi_u(J)$ sogar nicht von beschränkter Variation zu sein braucht, zeigt das folgende Beispiel. In $OABB'$ sei $u(x,y)=\int\limits_0^x \varphi(x)\,dx$, wobei $\varphi(x)$ stetig und nirgends differenzierbar[9].

§ 4. Auch ohne Existenz von partiellen Ableitungen zweiter Ordnung anzunehmen lassen sich einige Klassen von fast überall α-harmonischen Funktionen angeben. Das zeigen die beiden, in diesem Paragraphen folgenden Sätze.

[9] Man vergleiche diese Beispiele mit Beispielen, welche G. BOULIGAND für gleichartige Zwecke in der Theorie der α-monogenen Funktionen konstruierte. Siehe dazu N. THÉODORESCO, *La dérivée aréolaire et ses applications à la physique math.*, Thèse Paris 1931, S. 54—57. — Wir bemerken, dass es im letzten Beispiel in keinem Punkte eine areoläre Ableitung gibt.

Lemma 2. Ist $\Phi(J)$ eine in einem Bereiche B_1 der xy-Ebene stetige, (beschränkt) additive Intervallfunktion, deren obere und untere Derivierte nur in abzählbar vielen Punkten unendlich sein können, und deren obere Derivierte über jedes in B_1 liegende, abgeschlossene Intervall integrierbar (L) ist, so ist für jedes derartige Intervall J

$$\Phi(J) = \iint_J D^+ \Phi \cdot dx\,dy.$$ [10]

Satz 3. *Es sei C der Rand eines von endlich vielen, einfachen, rektifizierbaren Kurven begrenzten, beschränkten Bereiches B der xy-Ebene. Hat $u(x,y)$ in B stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, welche auf C (endliche) Grenzwerte annehmen, und können die oberen und unteren areolären Derivierten von $u(x,y)$ nur in den Punkten einer abzählbaren Teilmenge E von B unendlich werden, während $D^+_{(x,y)}\Phi_u(J)$ über B integrierbar (L) ist, so ist*

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \iint_B D^+_{(x,y)}\Phi_u(J)\,dx\,dy. \tag{4}$$

$u(x,y)$ ist in B fast überall α-harmonisch.

Beweis. Die Intervallfunktion $\Phi_u(J) \equiv \int_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$ genügt in jedem in B liegenden, offenen Intervall I_1 den Bedingungen von Lemma 2. Daraus folgt für jedes in einem solchen I_1 liegende, und somit auch für jedes in B liegende, abgeschlossene Intervall J:

$$\int_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \iint_J D^+_{(x,y)}\Phi_u(J)\,dx\,dy. \tag{5}$$

Anwendung von Lemma 1 führt hieraus zu (4).

Schliesslich folgt aus (5) die Existenz von $D_{(x,y)}\Phi_u(J)$ in fast allen Punkten von B[11].

---

[10] Siehe J. RIDDER, Nieuw Arch. Wiskde (2) *16*, 1 (1929), S. 63 u. 64.

[11] In der Theorie der α-monogenen Funktionen folgt aus Lemma 2: *Wenn B und C die gleiche Bedeutung wie in Satz 3 haben, $f(z)$ eine im abgeschlossenen Bereiche $\overline{B}$ stetige, komplexwertige Funktion von $z = x + iy$ ist, mit $H_f(z) \equiv \limsup_{Q \to z} \frac{\left|\int_{R(Q)} f(z)\,dz\right|}{m(Q)}$ (wobei Q ein z enthaltendes, abgeschlossenes Quadrat) endlich in den inneren Punkten (z) von B, höchstens abzählbar unendlich viele ausgenommen, und wenn $H_f(z)$ über B integrierbar (L) ist, so existiert in fast allen Punkten von B die areoläre Ableitung, $D_z\Phi_f(J)$, von $f(z)$, und es ist*

Korollar. *Hat $u(x,y)$ im beschränkten Bereiche B stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, und können die oberen und unteren areolären Derivierten von $u(x,y)$ nur in den Punkten einer abzählbaren Teilmenge von B unendlich werden, während $D^{+}_{(x,y)}\Phi_u(J)$ fast überall in B den Wert Null hat, so ist $u(x,y)$ in B harmonisch.*

Beweis. Satz 3 lässt sich anwenden auf jeden Kreis K, der samt seinem Innern in B liegt; es ist dadurch

$$\int\limits_K \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0.$$

Nach einem Satze von KOEBE und BÔCHER[12] folgt hieraus, dass u in B harmonisch ist.

Ein etwas allgemeineres Resultat findet man auf S. 281 unserer in Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) 9 (1940) erschienenen Arbeit[13].

Satz 3$^{\text{bis}}$. *Hat $u(x,y)$ im beschränkten Bereiche B stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, können die oberen und unteren areolären Derivierten von $u(x,y)$ nur in den Punkten einer abzählbaren Teilmenge von B unendlich werden, und gibt es eine in B stetige Funktion $\varphi(x,y)$, welche fast überall in B mit $D^{+}_{(x,y)}\Phi_u(J)$ zusammenfällt, so ist $u(x,y)$ in B α-harmonisch; die somit überall in B existierende areoläre Ableitung von $u(x,y)$ fällt mit der stetigen Funktion $\varphi(x,y)$ zusammen.*

Beweis. Aus zwei allgemeinen Sätzen über Intervallfunktionen[14] folgt, dass

---

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \iint\limits_B D_z\,\Phi_f(J)\,dx\,dy.$$

$f(z)$ ist hierbei in B somit fast überall α-monogen.

Anwendung von Lemma 3 zeigt, *dass die Ausnahmemenge allgemeiner eine Summe von abzählbar vielen Mengen, deren jede endliches lineares Mass hat, sein darf.*

Auch zu den Sätzen 1 und 2 gibt es Analoga in der Theorie der α-monogenen Funktionen.

[12] Siehe z. B. O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, Berlin 1929, S. 227.

[13] Siehe auch RIDDER, loc. cit. 10, S. 61 (erster Satz von § 9 und erster Satz von § 10); diese Sätze ermöglichen eine Ableitung des allgemeineren Resultates aus obigem Korollar.

[14] Diese lauten: a) Ist die Intervallfunktion $\Phi(J)$ stetig und additiv im abgeschlossenen Intervall $\bar{I}$, und können ihre extremen Derivierten nur in den Punkten einer abzählbaren Teilmenge unendlich werden, so bleiben obere und untere Grenze einer jeden Derivierten in $\bar{I}$ ungeändert, gleichviel ob man die Mengen vom Mass Null vernachlässigt oder nicht; b) Ist ausserdem in einem Punkte $(x,y)\in I$ etwa $D^{+}_{(x,y)}\Phi(J)$ stetig, so ist $D^{-}_{(x,y)}\Phi(J)$ es auch; die Intervallfunktion hat dann in diesem Punkte eine Ableitung. Siehe RIDDER, loc. cit. 10, S. 61 u. 62. — In der Theorie der α-monogenen Funktionen leitet man aus diesen Sätzen ab: »Ist $f(z)$ im beschränkten Bereiche B

$D^+_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$ in jedem Punkte von B stetig ist und mit $\varphi(x,y)$ zusammenfällt, und dass in einem solchen Punkte $D_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$ existiert. Damit ist der Beweis fertig[15].

Lemma 3. Ist $\Phi(J)$ eine in einem Bereiche B_2 (beschränkt) additive, stetige Intervallfunktion, für die: 1. in jedem Punkte $(x,y)\in B_2$ $\lim\limits_{J\to(x,y)}\dfrac{\Phi(J)}{\delta(J)}=0$ ist, wobei $\delta(J)$ der Diameter eines abgeschlossenen Intervalles J ist, welches (x,y) enthält, und sich in (x,y) zusammenzieht, 2. $D^+\Phi$ und $D^-\Phi$ nur in den Punkten einer Teilmenge $E=\sum\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, wobei jede Menge E_j endliches lineares Mass hat, unendlich sein können, 3. $D^+\Phi$ und $D^-\Phi$ über jedes in B_2 liegende, abgeschlossene Intervall J integrierbar (L) sind, dann ist für jedes derartige J:

$$\Phi(J)=\iint\limits_J D^{\pm}\Phi\cdot dx\,dy^{16}.$$

Satz 4. *B und C seien definiert wie in Satz 3. Hat $u(x,y)$ in B stetige Ableitungen $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, welche auf C (endliche) Grenzwerte annehmen, und können die oberen und unteren areolären Derivierten von $u(x,y)$ nur in den Punkten einer Menge $E=\sum\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, wobei jede Menge E_j endliches lineares Mass hat, unendlich werden, während $D^+_{(x,y)}\Phi_u(J)$ und $D^-_{(x,y)}\Phi_u(J)$ über B integrierbar (L) sind, so ist*

---

der z-Ebene stetig, kann $\limsup\limits_{Q\to z}\dfrac{\left|\int_{R(Q)} f(z)\,dz\right|}{m(Q)}$ (wobei Q ein z enthaltendes, abgeschlossenes Quadrat) nur in den Punkten einer abzählbaren Teilmenge von B unendlich werden, und gibt es in B stetige, reellwertige Funktionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$, welche fast überall in B mit der oberen Derivierten [allgemeiner: mit einer mittleren oder extremen Derivierten] von Real- bzw. Imaginärteil von $\int_{R(J)} f(z)\,dz$ zusammenfallen, so ist $f(z)$ in B α-monogen; ihre areoläre Ableitung ist gleich $\varphi(z)+i\psi(z)$.»

Der Satz folgt auch aus Lemma 2. Spezialfälle findet man bei THÉODORESCO, loc. cit. 9, S. 41 u. 43. Aus Lemma 3 folgt, dass die Ausnahmemenge in unserem Satze allgemeiner Summe von abzählbar vielen Mengen, deren jede endliches lineares Mass hat, sein darf, wenn man daneben annimmt, dass Real- und Imaginärteil von $\int_{R(J)} f(z)\,dz$ fast überall in B eine areoläre Ableitung haben.

[15] Der Satz folgt auch aus Satz 3. — Unter Beachtung von Fussn. 13 (erstes Zitat) lässt sich beweisen, *dass es schon genügt, dass $\varphi(x,y)$ fast überall mit einer mittleren oder extremen Derivierten* (welche von Punkt zu Punkt wechseln darf) *von $\Phi_u(J)$ zusammenfällt.*

[16] Das Lemma folgt leicht aus einem Satze von SAKS und ZYGMUND. Siehe S. SAKS, *Theory of the integral*, Warszawa, Sec. Ed. 1937, S. 193; S. SAKS und A. ZYGMUND, Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) *3* (1934), S. 30, 31 (Th. 5. 1).

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} d s = \iint_B D^{\pm}_{(x,y)} \Phi_u(J)\, d x\, d y. \tag{6}$$

$u(x,y)$ ist in B fast überall α-harmonisch[17].

Beweis. Die Intervallfunktion $\Phi_u(J) \equiv \int_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n} d s$ erfüllt in jedem in B liegenden offenen Intervall die Bedingungen des vorangehenden Lemmas. Dadurch ist für jedes in B liegende, abgeschlossene Intervall J:

$$\int_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n} d s = \iint_J D^{\pm}_{(x,y)} \Phi_u(J)\, d x\, d y. \tag{7}$$

Mit Lemma 1 folgt hieraus die Gleichheit (6).

Aus (7) folgt die Existenz von $D_{(x,y)} \Phi_u(J)$ in fast allen Punkten von B.

§ 5. Satz 1 wird erweitert durch

Satz 5. *B und C seien definiert wie in Satz 1. Haben $u(x,y)$ und $v(x,y)$ in B stetige Ableitungen nach x und nach y, welche auf C, ebenso wie u und v selbst, (endliche) Grenzwerte annehmen, existieren in den Punkten von $B-E$, wobei E eine abzählbare Teilmenge von B, endliche Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, und sind diese über $B(-E)$ integrierbar (L), so ist*

$$\int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d s = - \iint_B (u \Delta v - v \Delta u)\, d x\, d y\text{[18]}. \tag{8}$$

Beweis. Für jedes in B liegende, abgeschlossene Intervall I ist

$$\int_{R(I)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d s = - \iint_I (u \Delta v - v \Delta u)\, d x\, d y.$$

Anwendung von Lemma 1 führt zu (8).

Ohne die Existenz von partiellen Ableitungen zweiter Ordnung vorauszusetzen hat man die folgende Erweiterung der Sätze 3 und 4:

Satz 6. *B und C seien definiert wie in Satz 3. $u(x,y)$ und $v(x,y)$ seien in B stetig differenzierbar nach x und nach y, und die partiellen Ableitungen sollen,*

---

[17] Vergleiche bei harmonischen Funktionen RIDDER, Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) 9 (1940), S. 284 (Satz 5). Der zitierte Satz folgt auch als Korollar aus obigem Satz 4, sogar in leicht verallgemeinerter Form.

[18] Der Satz lässt sich in analoger Weise erweitern wie dies für Satz 1 in Fussn. 6 angegeben wurde.

ebenso wie u und v selbst, auf C (endliche) Grenzwerte annehmen. Erfüllen nun die extremen areolären Derivierten von u und die von v gleichzeitig entweder die für sie in Satz 3 oder die für sie in Satz 4 gemachten Annahmen, so ist

$$\int\limits_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \iint\limits_B \{u\, D^{\pm}_{(x,y)}\,\Phi_v(J) - v\, D^{\pm}_{(x,y)}\,\Phi_u(J)\}\, dx\, dy.$$

$D_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$ und $D_{(x,y)}\,\Phi_v(J)$ existieren in B fast überall.

Beweis. Beschränken wir uns vorerst auf den Fall, dass die extremen areolären Derivierten von u und von v die in Satz 3 gemachten Annahmen erfüllen; E_u und E_v seien die zugehörigen abzählbaren Ausnahmemengen. Zu $(x_0, y_0) \in B - (E_u + E_v)$ sei ein in B liegendes, abgeschlossenes Quadrat Q, mit dem Mittelpunkte (ξ, η), gewählt, das (x_0, y_0) enthält. Dann ist

$$\Psi(Q) \equiv \int\limits_{R(Q)} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \int\limits_{R(Q)} \{u - u(\xi,\eta)\}\frac{\partial v}{\partial n}\, ds - \int\limits_{R(Q)} \{v - v(\xi,\eta)\}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$
$$+ u(\xi,\eta)\int\limits_{R(Q)} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds - v(\xi,\eta)\int\limits_{R(Q)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Die oberen und unteren Grenzwerte von

$$\frac{u(\xi,\eta)\int\limits_{R(Q)} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds}{m(Q)} \quad \text{und von} \quad \frac{v(\xi,\eta)\int\limits_{R(Q)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds}{m(Q)},$$

bei Zusammenziehung von Q auf (x_0, y_0), sind

$$u(x_0, y_0)\, D^{\pm}_{(x_0, y_0)}\,\Phi_v(J) \quad \text{bzw.} \quad v(x_0, y_0)\, D^{\pm}_{(x_0, y_0)}\,\Phi_u(J).$$

Es gibt ein positives T mit

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < T, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < T, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| < T \quad \text{und} \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| < T$$

in jedem Punkte von B. Dadurch ist

$$\left|\int\limits_{R(Q)} \{u - u(\xi,\eta)\}\frac{\partial v}{\partial n}\, ds\right| < T^2\sqrt{2}\int\limits_{R(Q)} \sqrt{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}}\, ds,$$

somit, falls k die Seitenlänge des Quadrates Q ist, umsomehr

$$< T^2\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}k\sqrt{2}\int\limits_{R(Q)} ds = 4\, T^2 m(Q).$$

Auch das Quotient

$$\frac{\int\limits_{R(Q)} \{u - u(\xi, \eta)\} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds}{m(Q)},$$

und ebenso das Quotient

$$\frac{\int\limits_{R(Q)} \{v - v(\xi, \eta)\} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds}{m(Q)},$$

hat endliche extreme Grenzwerte, bei Zusammenziehung von Q auf (x_0, y_0). Somit sind $D^{+}_{(x_0, y_0)} \Psi(J)$ und $D^{-}_{(x_0, y_0)} \Psi(J)$ endlich in jedem Punkte $(x_0, y_0) \in B - (E_u + E_v)$; dabei ist

(9) $$|D^{\pm}_{(x_0, y_0)} \Psi(J)| < |u(x_0, y_0)| \times \text{das Max. von } |D^{+}_{(x_0, y_0)} \Phi_v| \text{ und } |D^{-}_{(x_0, y_0)} \Phi_v| + |v(x_0, y_0)| \times \text{das Max. von } |D^{+}_{(x_0, y_0)} \Phi_u| \text{ und } |D^{-}_{(x_0, y_0)} \Phi_u| + 8\,T^2.$$

Aus Satz 3 folgt, dass nicht nur $D^{+}_{(x, y)} \Phi_u$ und $D^{+}_{(x, y)} \Phi_v$, sondern auch $D^{-}_{(x, y)} \Phi_u$ und $D^{-}_{(x, y)} \Phi_v$, welche ja fast überall in B mit der zugehörigen oberen areolären Derivierten zusammenfallen, über B integrierbar (L) sind. Das letzte gilt, wegen (9), nun auch von $D^{+}_{(x, y)} \Psi(J)$ und $D^{-}_{(x, y)} \Psi(J)$.[19]

$\Psi(J)$ genügt in B den Bedingungen von Lemma 2. Daraus und aus Lemma 1 folgt, dass $D_{(x, y)} \Psi(J)$ in fast allen Punkten von B existiert, und dass

(10) $$\int\limits_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \iint\limits_B D_{(x, y)} \Psi(J)\, dx\, dy$$

ist.

Auch wenn die areolären Derivierten von u und von v die in Satz 4 für sie angegebenen Bedingungen erfüllen, beweist man, unter Zuhilfenahme des Lemmas 3, dass $D_{(x, y)} \Psi(J)$ fast überall in B existiert und die Relation (10) erfüllt.

Um die Behauptung des Satzes in den beiden Fällen bewiesen zu haben brauchen wir, wegen (10), nur noch zu zeigen, dass in fast allen Punkten von B

$$D_{(x, y)} \Psi(J) = u(x, y) \cdot D_{(x, y)} \Phi_v - v(x, y) \cdot D_{(x, y)} \Phi_u$$

ist.

Nach Lemma 2 oder 3 ist $\Psi(J)$ eine in B totalstetige, additive Intervallfunktion. Diese lässt sich zu einer für alle nach Lebesgue messbaren Teilmengen

[19] Ihre Messbarkeit (L) ist eine allgemeine Eigenschaft von Intervallfunktionen. Siehe S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Warszawa 1933, S. 47.

von B definierten, totaladditiven Mengenfunktion $\Psi(M)$ erweitern, deren Wert für jede derartige Menge M durch

$$\iint\limits_M D_{(x,y)}\Psi(J)\,dx\,dy$$

dargestellt wird. Auch für jeden Kreis $K(x_0, y_0; r)$ mit dem Mittelpunkte (x_0, y_0) und dem Radius r, welcher samt seinem Innern $\Gamma(x_0, y_0; r)$ in B liegt, gilt die Relation (10), mit K statt C, Γ statt B. Dadurch wird

$$\Psi(\Gamma) = \iint\limits_K \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$$

sein. Ebenso lassen sich die Intervallfunktionen $\Phi_u(J)$ und $\Phi_v(J)$ zu totalstetigen Mengenfunktionen $\Phi_u(M)$ bzw. $\Phi_v(M)$ erweitern, die für jede nach Lebesgue messbare Teilmenge M von B bzw. gleich $\iint\limits_M D_{(x,y)}\Phi_u(J)\,dx\,dy$ und $\iint\limits_M D_{(x,y)}\Phi_v(J)\,dx\,dy$ sind. Anwendung von Satz 3 und von Satz 4 auf $\Gamma(x_0, y_0; r)$ liefert

$$\int\limits_K \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \Phi_u(\Gamma) \quad \text{und} \quad \int\limits_K \frac{\partial v}{\partial n}\,ds = \Phi_v(\Gamma).$$

In fast jedem Punkte $(x_0, y_0) \in B$ fallen $D_{(x_0,y_0)}\Psi(J)$, $D_{(x_0,y_0)}\Phi_u(J)$ und $D_{(x_0,y_0)}\Phi_v(J)$ mit den Grenzwerten zusammen, zu welchen die Quotienten

$$\frac{\Psi(\Gamma)}{m(\Gamma)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Phi_u(\Gamma)}{m(\Gamma)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Phi_v(\Gamma)}{m(\Gamma)}$$

sich nähern, wenn der Radius r des zugehörigen Kreises $K(x_0, y_0; r)$ nach Null geht. In einem solchen Punkte (x_0, y_0) ist

$$(11)\quad \frac{1}{m(\Gamma)}\int\limits_K\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = \frac{1}{m(\Gamma)}\int\limits_K\left[\{u - u(x_0,y_0)\}\frac{\partial v}{\partial n} - \{v - v(x_0,y_0)\}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds$$
$$+\frac{u(x_0,y_0)}{m(\Gamma)}\int\limits_K\frac{\partial v}{\partial n}\,ds - \frac{v(x_0,y_0)}{m(\Gamma)}\int\limits_K\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster Ordnung von u und von v gibt es zu willkürlich positivem ε ein positives δ derart, dass für jeden Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius $r < \delta$ in jedem Punkte (x', y') einer Verbindungsstrecke von (x_0, y_0) mit einem Punkte (x, y) des Kreisrandes

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}(x', y') - \frac{\partial u}{\partial n}(x, y)\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\frac{\partial v}{\partial n}(x', y') - \frac{\partial v}{\partial n}(x, y)\right| < \varepsilon$$

ist; dabei ist die Differentiation nach n gemeint in der Richtung von (x', y') und von (x, y) nach (x_0, y_0). Dadurch lässt sich schreiben:

$$\frac{1}{m(\Gamma)}\int\limits_K \left[\{u - u(x_0, y_0)\}\frac{\partial v}{\partial n} - \{v - v(x_0, y_0)\}\frac{\partial u}{\partial n}\right] ds =$$

$$\frac{-r}{m(\Gamma)}\int\limits_K \left[\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) + \eta_1(x, y)\right\}\frac{\partial v}{\partial n}(x, y) - \left\{\frac{\partial v}{\partial n}(x, y) + \eta_2(x, y)\right\}\frac{\partial u}{\partial n}(x, y)\right] ds,$$

mit $|\eta_1(x, y)| < \varepsilon$ und $|\eta_2(x, y)| < \varepsilon$. Daraus folgt, dass dieser Quotient für $r \to 0$ nach Null konvergiert. Dies führt mit (11) zu:

$$D_{(x_0, y_0)}\Psi(J) = \lim_{r \to 0}\frac{1}{m(\Gamma)}\int\limits_K \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds =$$

$$u(x_0, y_0)\cdot D_{(x_0, y_0)}\Phi_v(J) - v(x_0, y_0)\cdot D_{(x_0, y_0)}\Phi_u(J).$$

Der Beweis ist damit fertig.

Aus Satz 6 lässt sich nun das folgende Analogon einer bekannten Integraldarstellung harmonischer Funktionen ableiten[20].

Satz 7. *B und C seien definiert wie in Satz 3. $u(x, y)$ sei in B stetig differenzierbar nach x und nach y, und die partiellen Ableitungen sollen, ebenso wie u selbst, auf C (endliche) Grenzwerte annehmen. Erfüllen nun die extremen areolären Derivierten von u entweder die in Satz 3 oder die in Satz 4 gemachten Annahmen, so lässt sich $u(x, y)$ in B in folgender Weise darstellen:*

$$(12)\qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B h(\xi, \eta; x, y)\cdot D_{(\xi, \eta)}\Phi_u(J)\, d\xi\, d\eta;$$

dabei ist

$$h(\xi, \eta; x, y) = \log\frac{1}{\varrho} + \omega(\xi, \eta),$$

wobei $\varrho =$ der Abstand von (ξ, η) zu (x, y), und $\omega(\xi, \eta)$ eine in B harmonische Funktion ist, welche, ebenso wie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung, auf C (endliche) Grenzwerte annimmt.

Beweis. Umgeben wir $(x, y) \in B$ mit einem Kreise $K(x, y; r)$ vom Radius r und heben wir die abgeschlossene Kreisschreibe $\overline{\Gamma}(x, y; r)$ aus B fort, so lässt

---

[20] Man vergleiche auch die Darstellung α-monogener Funktionen durch die Formel von Pompeiu. Siehe Théodoresco, loc. cit. 9, S. 30—33, 57—59. Die loc. cit. angenommenen Bedingungen lassen Erweiterungen zu, die in gleicher Richtung liegen wie die in Satz 7 benutzten Bedingungen. Vergleiche Fussn. 11.

Satz 6 sich auf den neuen Bereich $B-\overline{\Gamma}$ anwenden, wobei h statt v genommen werden soll. Wir erhalten so:

$$(13)\qquad \int_0^{2\pi} r\left(u\frac{\partial h}{\partial n}-h\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\theta+\int_C\left(u\frac{\partial h}{\partial n}-h\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=-\iint_{B-\overline{\Gamma}} h\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta;$$

dabei rührt das erste Integral von $K(x, y; r)$ her.

Am Kreise $K(x, y; r)$ ist

$$\frac{\partial h}{\partial n}=-\frac{1}{r}+\frac{\partial\omega}{\partial n},$$

$$\int_0^{2\pi} ru\frac{\partial h}{\partial n}d\theta=-\int_0^{2\pi} u\,d\theta+\int_0^{2\pi} ru\frac{\partial\omega}{\partial n}d\theta.$$

Wegen der Stetigkeit von u ist

$$\lim_{r\to 0}-\int_0^{2\pi} u\,d\theta=-2\pi u(x,y),$$

und

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} ru\frac{\partial\omega}{\partial n}d\theta=0.$$

Ebenso ist

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} rh\frac{\partial u}{\partial n}d\theta=0.$$

Aus (13) folgt hierdurch:

$$(14)\qquad -2\pi u(x,y)+\int_C\left(u\frac{\partial h}{\partial n}-h\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=-\lim_{r\to 0}\iint_{B-\overline{\Gamma}} h\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta.$$

Das ist (12); *dabei ist das in* (12) *auftretende Doppelintegral im allgemeinen ein uneigentliches Integral einer* (durch den in (14) angegebenen Limes definierten) *speziellen Art.*

Nimmt man insbesondere $h(\xi,\eta; x, y)=\log\frac{1}{\varrho}$, so erhält man als Spezialfall von Satz 7:

Satz 7[bis]. *Unter den in Satz 7 für u angenommenen Bedingungen ist in jedem Punkte* $(x,y) \in B$:

$$(15)\quad u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C u \cdot \frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \log\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,ds + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \log\frac{1}{\varrho}\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta,$$

wobei $\varrho =$ *der Abstand von* (ξ,η) *und* (x,y).

Die fast überall in B α-harmonische Funktion lässt sich somit darstellen als Summe eines Potentials einer Doppelschicht, eines Potentials einer einfachen Schicht (beide harmonisch in B) und eines Doppelintegrals, welches im Falle absoluter Konvergenz (was u. a. der Fall sein wird bei Beschränktheit von $D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)$ auf einer massgleichen Teilmenge von B) ein Flächenpotential ist.

Als Analogon einer Formel von Angelesco bei α-monogenen Funktionen[21] hat man hier:

Satz 8. *Unter den in Satz 7 für u angenommenen Bedingungen ist in jedem Punkte* $(x,y) \notin \bar{B}$:

$$(16)\quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C u \cdot \frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \log\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,ds + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \log\frac{1}{\varrho}\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta,$$

wobei $\varrho =$ *der Abstand von* (ξ,η) *und* (x,y).

Beweis. Man nehme in Satz 6 $v(\xi,\eta) = \log\frac{1}{\varrho}\cdot$

Satz 7[ter]. *B und C seien definiert wie in Satz 3.* $u(x,y)$ *sei eine in B stetig nach x und nach y differenzierbare Funktion, die, ebenso wie* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial u}{\partial y}$, *auf C (endliche) Grenzwerte annimmt. Die extremen areolären Derivierten von u sollen entweder die in Satz 3 oder die in Satz 4 für sie angenommenen Bedingungen erfüllen. Haben dann die Ableitungen nach* ξ *und nach* η *der zum Punkte* (x,y) *als Pol gehörenden Greenschen Funktion* $g(\xi,\eta;\,x,y)$ *des Bereiches, wie auch* $(x,y) \in B$ *gewählt sein mag, auf C (endliche) Grenzwerte*[22], *so gilt in jedem derartigen Punkte die Darstellung:*

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C u\,\frac{\partial g}{\partial n}\,ds + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B g(\xi,\eta;\,x,y)\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta.$$

---

[21] Siehe A. Angelesco, Mathematica, Cluj, I (1929), S. 108 (n° 2), und Théodoresco, loc. cit. 1, S. 16 (Formel 2.32). Die loc. cit. angenommenen Bedingungen lassen sich erweitern. Vergleiche dazu Fussn. 11.

[22] Dies ist u. a. der Fall, wenn der Rand aus analytischen Kurven besteht. Das folgt aus W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* I, Leipzig-Berlin, Fünfte Auflage 1928, S. 703 (Satz 3).

Beweis. Man nehme in Satz 7 für h die Greensche Funktion g.

Das einfache Integral stellt unter näheren Voraussetzungen[23] eine in B harmonische Funktion $w(x, y)$ dar, welche auf C mit $u(x, y)$ zusammenfallende Grenzwerte annimmt.

Ist unter jenen Voraussetzungen ausserdem fast überall in B $D_{(\xi, \eta)} \Phi_u(J) \leqq 0$, so ist in jedem Punkte $(x, y) \in B$

$$u(x, y) \leqq w(x, y).$$

Dies führt naturgemäss zur Frage, wann eine in B fast überall α-harmonische Funktion daselbst subharmonisch ist. Darauf antwortet der

Satz 9. *Hat $u(x, y)$ in einem beschränkten Bereiche B der xy-Ebene stetige partielle Ableitungen nach x und nach y, und genügen ihre extremen areolären Derivierten entweder den in Satz 3 oder den in Satz 4 für sie angegebenen Bedingungen,*

Auch genügt schon, dass jede Randkurve endliche und stetige Krümmung besitzt. Das lässt sich ableiten aus einem durch M. BRELOT, Ann. École norm. (3) *48* (1931), S. 177 von $n=3$ auf $n=2$ übertragenen Satz von J. SCHAUDER, Math. Ztschr. *33* (1931), welcher lautet: »Hat die Randkurve C eines beschränkten, einfach zusammenhängenden Bereiches B endliche und stetige Krümmung, und gibt es auf C eine stetige Funktion $u(s)$, welche auf einem Teilbogen C' eine Ableitung in bezug auf die Bogenlänge s hat, die dort einer Hölderschen Bedingung genügt:

$$|u'(s_1) - u'(s_2)| < M \cdot |s_1 - s_2|^\alpha \text{ für jedes Wertepaar } \{s_1, s_2\} \text{ auf } C', \text{ mit } |s_1 - s_2| < c$$
$$(M, \alpha \text{ und } c \text{ positiv und fest}),$$

so hat die eindeutig bestimmte, in B harmonische Funktion, welche auf C Grenzwerte gleich $u(s)$ hat, in B stetige, partielle Ableitungen nach x und nach y, welche in den inneren Punkten des Bogens C' (endliche) Grenzwerte annehmen.» Ein weitgehend mit dem SCHAUDERschen Satze zusammenfallendes Resultat, welches für unser Ziel ebenfalls genügt hätte, rührt, nach dem Enzyklopaedieartikel von L. LICHTENSTEIN, II C. 3, S. 243, schon von A. KORN her.

[23] Siehe z. B. R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin 1936, S. 28 (Fussn. 2), wo die Randkurven analytisch und die Randfunktion $u(s)$ in bezug auf die Bogenlänge der Randkurven stetig differenzierbar angenommen werden; dann nehmen die partiellen Ableitungen nach x und nach y der in B harmonischen Funktion $w(x, y)$, welche auf C Grenzwerte gleich $u(s)$ hat, ebenfalls auf C (endliche) Grenzwerte an. Anwendung von Satz 7^{ter} auf $w(x, y)$, $u(s)$ in B liefert:

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(s) \frac{\partial g}{\partial n} ds.$$

Diese Relation lässt sich auch ableiten, wenn die Randkurven endliche und stetige Krümmung haben, und die Randfunktion $u(s)$ eine Ableitung $u'(s)$ hat, welche auf jeder Randkurve einer Hölderschen Bedingung genügt. Der Beweis folgt sofort mit dem in Fussn. 22 gegebenen Satze von SCHAUDER und BRELOT und Satz 7^{ter}.

Da jede stetige Randfunktion $u(s)$ sich gleichmässig annähern lässt durch Randfunktionen, welche eine Ableitung nach s haben, die einer Hölderschen Bedingung genügt, gilt die Relation ebenfalls, wenn nur Stetigkeit von $u(s)$ und endliche, stetige Krümmung einer jeden Randkurve vorausgesetzt wird.

so ist $u(x,y)$ dann und nur dann in B subharmonisch, wenn $D_{(x,y)}\Phi_u(J)$ in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\leqq 0$ ist.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge von RIDDER, loc. cit. 17, S. 282 (Satz 3), 284 (Satz 7) und 279 (Drittes Korollar).

Beispiel: $-1+(x^2+y^2)$ im Innern des Kreises vom Radius 1 um den Ursprung des Koordinatensystems.

Bemerkung zu Satz 7$^{\text{ter}}$. *B sei ein beschränkter Dirichletscher Bereich, mit Rand C; $u(x,y)$ sei eine in B stetig nach x und nach y differenzierbare Funktion, die auf C Grenzwerte $u(t)$ annimmt, und in B beschränkte areoläre Derivierte hat.* Dann gibt es eine Folge von Bereichen (B_n) mit

$$B_1 < B_2 < \cdots < B_n < \cdots < B,$$

deren jeder von endlich vielen, in B liegenden, einfachen Kurven, mit endlicher und stetiger Krümmung, begrenzt wird, und mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt $(x,y)\in B$ von einem gewissen Index $n(x,y)$ an zu allen Bereichen (B_n) gehört. In jedem Bereiche B_n von genügend hohem Index gibt es eine harmonische Funktion $w_n(x,y;x_0,y_0)$, welche auf dem Rand C_n von B_n die durch $\log\frac{1}{\varrho}$, mit $\varrho=\sqrt{\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}}$, $(x_0,y_0)\in B$ und fest, angegebenen Grenzwerte hat. Die Greensche Funktion von B_n und (x_0,y_0) ist dann gleich $\log\frac{1}{\varrho}-w_n(x,y;x_0,y_0)$; sie genügt nach Fussn. 22 den Bedingungen von Satz 7$^{\text{ter}}$. Mit Fussn. 23 folgt, dass $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_n} u\frac{\partial}{\partial n}\left[\log\frac{1}{\varrho}-w_n(x,y;x_0,y_0)\right]ds$ eine in B_n harmonische Funktion $v_n(x,y)$ ist, welche auf C_n Grenzwerte gleich $u(x,y)$ hat. $u(x,y)$ genügt in B_n den Bedingungen von Satz 7$^{\text{ter}}$. Nach diesem Satze ist somit für genügend hohem n:

$$(17)\quad u(x_0,y_0)=v_n(x_0,y_0)+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B_n}\left[\log\frac{1}{\varrho}-w_n(x,y;x_0,y_0)\right]D_{(x,y)}\Phi_u(J)\,dx\,dy;$$

das Integral ist dabei ein gewöhnliches Lebesguesches. *Ist $v(x,y)$ die in B harmonische Funktion, welche auf C Grenzwerte gleich $u(t)$ hat,* und ist $w(x,y;x_0,y_0)$ die in B harmonische Funktion, deren Grenzwerte auf C gleich $\log\frac{1}{\varrho}$ sind, so gibt es zu willkürlich positivem ε ein $N(\varepsilon)$ derart, dass für jedes $n\geqq N(\varepsilon)$ in jedem Punkte $(x,y)\in B_n+C_n$

$$(18)\quad |v(x,y)-v_n(x,y)|<\varepsilon \quad\text{und}\quad |w(x,y;x_0,y_0)-w_n(x,y;x_0,y_0)|<\varepsilon$$

ist[24]. Aus (17) und (18) folgt:

$$u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B g(x, y; x_0, y_0)\, D_{(x,y)}\, \Phi_u(J)\, dx\, dy, \tag{19}$$

wobei $g(x,y;\, x_0, y_0)$ *die Greensche Funktion von B und* (x_0, y_0) ist.

Die Darstellung (19) *gilt für jeden Punkt von* B[25].

Als Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes bei harmonischen Funktionen haben wir

Satz 10. *Im beschränkten Bereiche B der xy-Ebene sei* $u(x, y)$ *stetig differenzierbar nach x und nach y. Ihre extremen areolären Derivierten sollen die in Satz 3 oder die in Satz 4 für sie angenommenen Bedingungen erfüllen. Umgeben wir dann* $(x, y) \in B$ *mit einem Kreise* $K(x, y;\, r)$ *vom Radius r, welcher samt seinem Innern* $\Gamma(x, y; r)$ *in B liegt, so ist*

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta,\ y + r\sin\theta)\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{r}\frac{d\varrho}{\varrho}\iint\limits_{\Gamma(x,y;\varrho)} D_{(\xi,\eta)}\, \Phi_u(J)\, d\xi\, d\eta. \tag{20}$$

In dem in Satz 9 betrachteten Spezialfall der subharmonischen Funktionen folgt hieraus die bekannte Eigenschaft der subharmonischen Funktionen:

$$u(x, y) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta,\ y + r\sin\theta)\, d\theta;$$ [26]

ebenso die Eigenschaft, dass $u(x, y)$ dann in keinem inneren Punkte von B ein Maximum haben kann ohne in genügend kleiner Umgebung dieses Punktes konstant zu sein[26].

Beweis. Nach Satz 3 oder Satz 4 ist

$$\int\limits_{K(x,y;\varrho)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \iint\limits_{\Gamma(x,y;\varrho)} D_{(\xi,\eta)}\, \Phi_u(J)\, d\xi\, d\eta,$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \varrho}\, d\theta = -\frac{1}{\varrho}\iint\limits_{\Gamma(x,y;\varrho)} D_{(\xi,\eta)}\, \Phi_u(J)\, d\xi\, d\eta.$$

---

[24] Nach T. RADO, *Subharmonic functions*, Berlin 1937, S. 37 (n° 5.23).

[25] Mit Hilfe der WIENERschen Konstruktion lässt sich ableiten, dass Formel (19) für jeden willkürlichen, beschränkten Bereich B gilt, wenn $v(x,y)$ die Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems für die Randwerte $u(t)$, und g die zugehörige generalisierte Greensche Funktion ist.

[26] Siehe RADO, loc. cit. 24, S. 3, 6.

Integration auf beiden Seiten von o bis r liefert

$$(21)\qquad \int_0^r d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \varrho}\, d\theta = -\int_0^r \frac{d\varrho}{\varrho} \int\int_{\Gamma(x,y;\varrho)} D_{(\xi,\eta)}\, \Phi_u(J)\, d\xi\, d\eta.$$

Das erste Glied von (21) lässt sich schreiben

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{\partial u}{\partial \varrho}\, d\varrho \quad \text{oder} \quad \int_0^{2\pi} d\theta\, \{u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) - u(x,y)\}$$

$$\text{oder} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) - 2\pi u(x,y).$$

Damit folgt (20) aus (21).

Satz 11. *Der Rand C eines beschränkten Bereiches B der xy-Ebene bestehe aus endlich vielen, einfachen Kurven mit endlicher und stetiger Krümmung. $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ seien in B stetig differenzierbar nach x und nach y. Die extremen areolären Derivierten beider Funktionen sollen entweder die in Satz 3 oder die in Satz 4 für sie angenommenen Bedingungen erfüllen. Nehmen nun u_1 und u_2, ebenso wie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung, auf C (endliche) Grenzwerte an, sind diese Grenzwerte für u_1 und u_2 dieselben, und ist in fast allen Punkten, in welchen beide existieren,*

$$D_{(\xi,\eta)}\, \Phi_{u_1}(J) = D_{(\xi,\eta)}\, \Phi_{u_2}(J),$$

so sind die Funktionen $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ einander gleich (Eindeutigkeitstheorem).

Beweis. Man wende Satz 7^{ter} auf die Funktion $u_1 - u_2$ an (siehe auch Fussn. 22)[27].

Satz 12. *Im beschränkten Bereich B sei jedes Glied der Funktionenfolge $\{u_k(x,y)\}$ stetig differenzierbar nach x und nach y. Die Folge konvergiere in einem Punkte $(x_0, y_0) \in B$; die Folgen $\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x}\right\}$ und $\left\{\frac{\partial u_k}{\partial y}\right\}$ seien in jedem abgeschlossenen Teilbereich T von B gleichmässig konvergent. Die extremen areolären Derivierten einer jeden Funktion $u_k(x,y)$ sollen in B entweder die in Satz 3 oder die in Satz 4 für sie angenommenen Bedingungen erfüllen. Ist dann weiter in jedem abgeschlossenen Teil-*

[27] In dem Fall, dass die in Satz 3 gemachten Annahmen durch die extremen areolären Derivierten erfüllt werden, braucht der Rand nicht stetig gekrümmt zu sein, und können die Grenzwertbedingungen für die partiellen Ableitungen von u_1 und u_2 fortbleiben. Der Satz folgt dann durch Anwendung von Satz a aus Fussn. 14 auf $u_1 - u_2$ und des Eindeutigkeitstheorems bei harmonischen Funktionen.

gebiet T die Folge der areolären Ableitungen $\{D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_{u_k}(J)\}$ gleichmässig konvergent auf der Teilmenge von T, in deren Punkten sie alle existieren, so konvergiert

$$u(x,y) \equiv \lim_{k\to\infty} u_k(x,y)$$

gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche von B, ist in B stetig differenzierbar nach x und nach y, und dort fast überall α-harmonisch, wobei in fast jedem Punkte $(x,y)\in B$

$$D_{(x,y)}\,\Phi_u(J) = \lim_{k\to\infty} D_{(x,y)}\,\Phi_{u_k}(J) \tag{22}$$

ist (Satz über gliedweise Differentiation von Reihen).

Beweis. Nach Verbindung von (x_0,y_0) mit einem willkürlichen Punkte $(x,y)\in B$ durch eine ganz in B verlaufende, gebrochene Linie $\sigma(x_0,y_0;\,x,y)$ folgt durch gliedweise Integration längs σ[28]

$$\begin{aligned}\int\limits_{\sigma(x_0,y_0;\,x,y)} \lim_{k\to\infty}\frac{\partial u_k}{\partial s}\,ds &= \lim_{k\to\infty}\int\limits_{\sigma(x_0,y_0;\,x,y)}\frac{\partial u_k}{\partial s}\,ds\\ &= \lim_{k\to\infty}\{u_k(x,y)-u_k(x_0,y_0)\}.\end{aligned}\tag{23}$$

Aus (23) und der Existenz von $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x_0,y_0)$ folgt, dass auch in jedem weiteren Punkt $(x,y)\in B$ $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,y)$ $(\equiv u(x,y))$ existiert, und überdies die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ in jedem Punkte $(x,y)\in B$, mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{k\to\infty}\frac{\partial u_k}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{k\to\infty}\frac{\partial u_k}{\partial y}.$$

Die gleichmässige Konvergenz von $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,y)$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiete von B ist ebenfalls eine Folge von (23).

Für jedes abgeschlossene, in B liegende Intervall J ist wegen Satz 3 oder Satz 4

$$\int\limits_{R(J)}\frac{\partial u_k}{\partial n}\,ds = \iint\limits_{J} D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_{u_k}(J)\,d\xi\,d\eta,$$

also, wegen der gleichmässigen Konvergenz der Folgen $\left\{\frac{\partial u_k}{\partial n}\right\}$ und $\{D_{(x,y)}\,\Phi_{u_k}(J)\}$,

$$\int\limits_{R(J)}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \iint\limits_{J} \lim_{k\to\infty} D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_{u_k}(J)\,d\xi\,d\eta. \tag{24}$$

---

[28] Die Differentiation ist gemeint längs σ in der Richtung von (x_0,y_0) nach (x,y).

Daraus folgt, dass $u(x, y)$ fast überall in B α-harmonisch ist, mit

$$D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J) = \lim_{k\to\infty} D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_{u_k}(J)$$

in fast allen Punkten von B.

Ergänzung. *Ist ausserdem bekannt, dass die Funktionen der Folge in B α-harmonisch sind, mit* s t e t i g e r *areolärer Ableitung, so ist auch $u(x, y)$ in B α-harmonisch, wobei in* j e d e m *Punkte von B die Relation* (22) *gilt.*

Das folgt sofort aus (24).

§ 6. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels betrachten wir Klassen von Funktionen, welche unter den in Satz 3 und in Satz 4 eingeführten Klassen von in ihrem Existenzbereich fast überall α-harmonischen Funktionen[29] fallen.

Lemma 4. $\varphi(x, y)$ sei in einem beschränkten Bereiche B der xy-Ebene messbar (L) und beschränkt. Dann existiert in B die Funktion $\Big($ein logarithmisches Potential multipliziert mit $\frac{1}{2\pi}\Big)$

$$(25) \quad g(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \varphi(\xi, \eta)\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta, \quad \text{mit } (x, y)\in B,\ \varrho = \sqrt{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}},$$

und es ist für jedes in B liegende, abgeschlossene Intervall J:

$$\int\limits_{R(J)} \frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \iint\limits_J \varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.\text{[30]}$$

Beweis. J_1 und J_2 seien in B liegende, abgeschlossene Intervalle, mit

$$J_1 < J < J_2.$$

Zu willkürlich positivem ε gibt es eine feste positive Zahl $r < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, so dass jeder Kreis $K(x, y; r)$, mit Mittelpunkt $(x, y) \in R(J)$ und Radius r, samt seinem Innern $\Gamma(x, y; r)$ in B liegt, und dass

---

[29] Wie man leicht sieht, ist die in Satz 3 eingeführte Klasse Teilklasse der in Satz 4 eingeführten.

[30] Da, bekanntlich, $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ in B existieren und stetig sind (wegen der Beschränktheit von $\varphi(x, y)$), gilt diese Relation nach Lemma 1 auch für abgeschlossene Teilbereiche von B, welche von endlich vielen rektifizierbaren Kurven begrenzt werden. — Das Doppelintegral (25) spielt hier die gleiche Rolle wie das Integral $-\frac{1}{\pi}\iint\limits_B \frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\,dx\,dy$, mit $z = x + iy$, $\zeta = \bar{x} + i\bar{y}$, in der Theorie der α-monogenen Funktionen. Man vergleiche Lemma 4 mit einem Theorem von N. Théodoresco, Ann. Mat. pura appl. (4) *11* (1933), S. 330.

$$(26)\quad \iint\limits_{\Gamma(x,y;r)} \left|\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho(x,y;\xi,\eta)}\right| d\xi\, d\eta^{31} < \iint\limits_{\Gamma(x,y;r)} \frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{\Gamma(x,y;r)} \frac{1}{\varrho}\cdot\varrho\, d\varrho\, d\varphi = 2\pi r < \varepsilon$$

ist; die gleiche Abschätzung gilt gleichmässig für jeden Punkt $(x, y) \in R(J)$ und jeden Teilbereich von $\Gamma(x, y; r)$. Ist in B $|\varphi(x, y)| < M$, so hat man weiter

$$(27)\quad \left|\iint\limits_{\substack{J_2-J_1-(J_2-J_1)\cdot\\ \cdot\Gamma(x,y;r)}} \varphi(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta\right|^{31} < \iint\limits_{\substack{J_2-J_1-(J_2-J_1)\cdot\\ \cdot\Gamma(x,y;r)}} M\cdot\frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta < M\cdot\frac{1}{r}\cdot m(J_2-J_1) < \varepsilon\cdot M,$$

wenn nur, was wir annehmen wollen, $m(J_2 - J_1) < \varepsilon \cdot r$ ist.

Aus (26) und (27) folgt dann

$$(28)\quad \left|\int\limits_{R(J)} ds\,\frac{\partial}{\partial n}\iint\limits_{J_2-J_1}\log\frac{1}{\varrho}\cdot\varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{R(J)} ds\iint\limits_{J_2-J_1}\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\cdot\varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\right| < s[R(J)]\cdot 2M\varepsilon,$$

wobei $s[R(J)]$ die Länge von $R(J)$ darstellt.

Nun ist

$$(29)\quad \int\limits_{R(J)}\frac{\partial g}{\partial n}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R(J)} ds\iint\limits_{J_2-J_1}\varphi(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R(J)} ds\iint\limits_{B-J_2}\varphi(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R(J)} ds\iint\limits_{J_1}\varphi(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta.^{31}$$

Für die beiden letzten Integrale lässt sich schreiben

$$(30)\quad \iint\limits_{B-J_2} d\xi\, d\eta\cdot\varphi(\xi,\eta)\int\limits_{R(J)} ds\cdot\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}$$

bzw.

$$(31)\quad \iint\limits_{J_1} d\xi\, d\eta\cdot\varphi(\xi,\eta)\int\limits_{R(J)} ds\cdot\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\cdot$$

[31] Die hier auftretende Normalableitung ist die Ableitung im Punkte (x, y) in der Richtung der inneren Normale von J; in den vier Eckpunkten von J nehmen wir diese Normalableitung gleich Null an.

Betrachtet man eine Funktion $u(x,y)$ mit dem festen Werte 1 in allen Punkten von J, so liefert Anwendung der Formeln (15) und (16), dass das in (30) vorkommende Integral $\int\limits_{R(J)} ds \cdot \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{\varrho}$ immer den Wert Null, dasselbe in (31) vorkommende Integral immer den Wert 2π hat. Dadurch ist das Integral (30) gleich Null, das Integral (31) gleich $2\pi \iint\limits_{J_1} \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$. Damit folgt aus (28) und (29)

$$\int\limits_{R(J)} \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint\limits_{J} \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Das Lemma ist bewiesen.

Satz 13. *Jede in einem beschränkten Bereiche B der xy-Ebene beschränkte, nach Lebesgue messbare Funktion $\varphi(x,y)$ ist in fast allen Punkten des Bereiches areoläre Ableitung einer somit fast überall α-harmonischen Funktion, deren extreme areoläre Derivierte in B beschränkt sind. Alle in B fast überall α-harmonischen Funktionen, deren areoläre Ableitung fast überall in B gleich $\varphi(x,y)$ ist, und deren extreme areoläre Derivierte in B beschränkt sind, werden aus einer von ihnen durch Addition der in B harmonischen Funktionen erhalten.*

Beweis. Aus Lemma 4 folgt, dass die dort definierte Funktion $g(x,y)$ fast überall in B eine areoläre Ableitung gleich $\varphi(x,y)$ hat, und dass ihre extremen areolären Derivierten in B beschränkt sind.

Ist $h(x,y)$ eine zweite in B fast überall α-harmonische Funktion, mit in B beschränkten areolären Derivierten, deren areoläre Ableitung in B fast überall gleich $\varphi(x,y)$ ist, so wird die Differenz $h(x,y) - g(x,y)$ in B fast überall eine areoläre Ableitung gleich Null haben, während ihre extremen areolären Derivierten daselbst beschränkt sind. Nach Fussn. 14 (Satz a) hat die Differenz in allen Punkten von B eine areoläre Ableitung gleich Null. Sie ist somit in B harmonisch.[32] Hieraus folgt leicht die letzte Behauptung des Satzes.

Satz 14. *In einem beschränkten, Dirichletschen Bereiche B sei $\varphi(x,y)$ beschränkt und messbar (L); $u(t)$ sei eine auf dem Rande C von B stetige Funktion. Dann gibt es in B eine und nur eine fast überall α-harmonische Funktion, mit beschränkten extremen areolären Derivierten, deren areoläre Ableitung in B fast überall gleich $\varphi(x,y)$ ist, und welche auf C mit $u(t)$ zusammenfallende Grenzwerte hat* (Lösung eines Randwertproblems).

[32] Nach dem Korollar zu Satz 3.

Beweis. Die durch (25) definierte Funktion $g(x, y)$ hat in B beschränkte extreme areoläre Derivierte, fast überall eine mit $\varphi(x, y)$ zusammenfallende areoläre Ableitung, und besitzt auf C (endliche) Grenzwerte $g(t)$, da sie nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie in der ganzen (endlichen) Ebene stetig ist. Somit muss eine Funktion $h(x, y)$ gesucht werden, welche in B harmonisch ist (vergleiche den Beweis von Satz 13) und auf C Grenzwerte gleich $u(t) - g(t)$ hat; dann ist $g(x, y) + h(x, y)$ die gesuchte Funktion. Da es nun immer möglich ist, und zwar nur auf eine Weise, eine diesen Bedingungen genügende Funktion $h(x, y)$ zu finden (Lösung eines Dirichletschen Problems), gibt es auch immer eine und nur eine den Bedingungen des Satzes genügende Funktion.

§ 7. Neben den α-holomorphen Funktionen (siehe die Einleitung) haben wir hier die α-harmonischen Funktionen, welche in ihrem Existenzbereiche stetige areoläre Ableitungen haben; wir wollen sie *α_s-harmonisch* nennen. Sodann haben wir den

Satz 15. *Jede in einem beschränkten Bereiche B der xy-Ebene beschränkte, stetige Funktion $\varphi(x, y)$ ist in den Punkten von B areoläre Ableitung einer daselbst α_s-harmonischen Funktion. Alle in B α_s-harmonischen Funktionen, deren areoläre Ableitung in den Punkten von B mit $\varphi(x, y)$ zusammenfällt, werden aus einer von ihnen durch Addition der in B harmonischen Funktionen erhalten.*

Der Beweis verläuft wie der des Satzes 13.

Satz 16. *In einem beschränkten, Dirichletschen Bereiche B sei $\varphi(x, y)$ beschränkt und stetig; $u(t)$ sei eine auf dem Rande C von B stetige Funktion. Dann gibt es in B eine und nur eine α_s-harmonische Funktion, deren areoläre Ableitung in B mit $\varphi(x, y)$ zusammenfällt, und welche auf C mit $u(t)$ zusammenfallende Grenzwerte hat* (Lösung eines Randwertproblems).

Der Beweis verläuft wie der des Satzes 14.

Neben Satz 3^{bis} haben wir bei α_s-harmonischen Funktionen noch den

Satz 4^{bis}. *Hat $u(x, y)$ im beschränkten Bereiche B stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, können die oberen und unteren areolären Derivierten von $u(x, y)$ nur in den Punkten einer Teilmenge $E = \sum_{j=1}^{\infty} E_j$, wobei jedes E_j endliches lineares Mass hat, unendlich werden, und gibt es eine in B stetige Funktion $\varphi(x, y)$, welche fast überall in B gleich $D_{(x,y)}\, \Phi_u(J)$ ist, so ist $u(x, y)$ in B α_s-harmonisch; $\varphi(x, y)$ ist in jedem Punkte von B gleich $D_{(x,y)}\, \Phi_u(J)$.*

Das folgt aus Satz 4 und Definition 3.

Spezialfall. Der beschränkte Bereich B sei Summe von einer rektifizierbaren Kurve L und zwei Bereichen B_1 und B_2, welche L zur gemeinsamen Grenze haben. Ist $u(x,y)$ in B stetig differenzierbar nach x und nach y, ist u in B_1 und in B_2 α_s-harmonisch, und nehmen die areolären Ableitungen von u in B_1 und die in B_2 auf L dieselben Grenzwerte an, so ist u auch α_s-harmonisch in B.

Ist u in B_1 und in B_2 harmonisch, so sind die Annahmen über die areolären Ableitungen von selbst erfüllt, und folgt somit schon aus der Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in B allein die Harmonizität von u in B.

Dass die von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ geforderten Bedingungen sehr wohl erfüllt sein können, ohne dass dies für die areolären Derivierten und Ableitungen der Fall zu sein braucht, zeigt folgendes Beispiel. B_1 sei ein Quadrat, dessen Punkte (x, y) den Bedingungen $-1 < x < 0$, $0 < y < 1$ genügen, B_2 ein Quadrat, für dessen Punkte (x,y) $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ gilt, während L aus den Punkten (x,y) mit $x = 0$, $0 < y < 1$ bestehen soll. In B_1 sei $u(x,y) = 1 + x$, in $B_2 = e^x$, auf $L = 1$. Dann sind $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in B stetig, während in B_1 $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, in $B_2 = e^x$ ist. Die in B_1 und in B_2 mit $-\Delta u$ zusammenfallende areoläre Ableitung genügt somit den Bedingungen von Satz 4^{bis} und des Spezialfalles nicht. $u(x,y)$ ist in B sogar nicht einmal α-harmonisch.

Ein zweites Beispiel erhält man wie folgt. Auf dem linearen abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ der x-Achse sei eine perfekte, nirgends dichte Menge P, mit $m(P) = 0$, gegeben. Dann lässt sich eine auf $[0, 1]$ monotone, stetige Funktion $g(x)$ konstruieren, welche in jedem der zu P komplementären Teilintervalle von $[0, 1]$ konstant ist, mit $g(0) = 0$; $g(1) = 1$. Im abgeschlossenen Intervall $I[0 \leqq x \leqq 1;\ 0 \leqq y \leqq 1]$ sei $u(x,y) = \int\limits_0^x g(x)\,dx$. Dann ist $u(x,y)$ in I stetig differenzierbar nach x und nach y, und die Punkte, die Umgebungen haben, in welchen $u(x,y)$ harmonisch ist, liegen in I überall dicht. Wäre Satz 4^{bis} hier anwendbar, so müsste $\varphi(x,y)$ in I identisch Null sein. $u(x,y)$ selbst wäre dort somit konstant. Das ist jedoch nicht der Fall, woraus folgt, dass die Unendlichkeitsbedingung für die areolären Derivierten hier nicht erfüllt sein kann.

§ 8. Diejenigen Funktionen $u(x,y)$, welche in einem beschränkten Bereiche B stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzen, sind in B α_s-harmonisch, und es ist in jedem Punkte $(x,y) \in B$

$$(32) \qquad D_{(x,y)}\,\Phi_u(J) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Nicht jede in B beschränkte und stetige Funktion $\varphi(x,y)$ kann als areoläre Ableitung einer in B α_s-harmonischen Funktion $u(x,y)$ mit partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ aufgefasst werden. Denn nach Lemma 4 und Satz 15 ist jede in B α_s-harmonische Funktion $u(x,y)$ mit der areolären Ableitung $\varphi(x,y)$ als Summe einer in B harmonischen Funktion und der Funktion $g(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \varphi(\xi,\eta)\cdot\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta$, mit $(x,y)\in B$, $\varrho = \sqrt{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}}$, darstellbar; existierten in B $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, so müsste somit dasselbe von $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ gelten. Aus der Potentialtheorie ist jedoch bekannt, dass dies nicht immer der Fall zu sein braucht.[33]

Eine von Petrini herrührende, notwendige und hinreichende Bedingung zur Existenz von $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$[34] gibt sofort *eine notwendige und hinreichende Bedingung zur Existenz einer in B α_s-harmonischen Funktion u, welche in B Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ hat, und für die dort $D_{(x,y)}\,\Phi_u(J) = \varphi(x,y)$ ist;* sie lautet: *für jeden Punkt $(x,y)\in B$ existiert*

$$\lim_{r\to 0}\iint\limits_{B-\Gamma(x,y;r)} \varphi(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \log\frac{1}{\varrho}}{\partial \xi^2}\,d\xi\,d\eta, \quad \textit{wobei} \quad \varrho = \sqrt{\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\}}$$

und $\Gamma(x,y;r)$ = das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt (x,y) und Radius r.[35]

Die Klasse der in einem beschränkten Bereiche α_s-harmonischen Funktionen $u(x,y)$ mit *stetigen* Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist als Analogon zu der Klasse der von Pompeiu herrührenden, in dem Bereiche polygenen Funktionen zu betrachten (vergleiche die Einleitung).

Eine Funktion $\varphi(x,y)$ sei in einem beschränkten Bereiche B beschränkt, und genüge dort der Hölderschen Bedingung:

$$|\varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_2,y_2)| < M\cdot\sqrt{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}^{\alpha}}$$

---

[33] Siehe H. Petrini, Journal Math. pures appl. (6) 5 (1909), S. 137, 138.

[34] Siehe Petrini, loc. cit. 33, S. 132—134.

[35] Auch ist dann in jedem Punkte $(x,y)\in B$ die Relation (32) erfüllt.

für jedes Paar $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ von Punkten von B, deren Verbindungsstrecke ganz zu B gehört, und eine Länge $<c$ hat (M, α und c positiv und fest). Dann hat das Integral $g(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \varphi(\xi,\eta) \log\frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta$, mit $\varrho = \sqrt{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}}$, in B stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.[36] *Die Höldersche Bedingung ist somit hinreichend zur Existenz von in B α_s-harmonischen Funktionen $u(x,y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ und einer areolären Ableitung gleich $\varphi(x,y)$.*

Kapitel II.

Höhere areoläre Ableitungen.

§ 9. Wichtige Klassen von areolär-harmonischen Funktionen erhält man in folgender Weise.

Definition 4. $u(x,y)$ sei im beschränkten Bereiche B stetig differenzierbar nach x und nach y. Die extremen areolären Derivierten existieren somit in jedem Punkte $(x,y) \in B$.

Ausserdem können wir fordern:

I. in jedem Punkte $(x,y) \in B$ existiere die areoläre Ableitung von u und sei Null; nach dem Korollar zu Satz 3 ist $u(x,y)$ dann in B harmonisch; die Klasse derartiger Funktionen nennen wir die Klasse 1, und sprechen daher von Funktionen, welche *in B α-harmonisch von erster Klasse oder $\alpha^{(1)}$-harmonisch* sind;

II. die in jedem Punkte $(x,y) \in B$ existierend angenommene areoläre Ableitung $D_{(x,y)}\Phi_u(J)$ besitze selbst in den Punkten von B stetige partielle Ableitungen nach x und nach y, und eine areoläre Ableitung gleich Null, m. a. W. $D_{(x,y)}\Phi_u(J) \equiv u^{(1)}(x,y)$ sei in B $\alpha^{(1)}$-harmonisch (oder harmonisch); wir nennen $u(x,y)$ dann *in B α-harmonisch von zweiter Klasse oder $\alpha^{(2)}$-harmonisch;*

III. $u(x,y)$ habe in jedem Punkte $(x,y) \in B$ eine areoläre Ableitung $D_{(x,y)}\Phi_u(J) \equiv u^{(1)}(x,y)$; $u^{(1)}(x,y)$ besitze ebenso in einem solchen Punkte eine areoläre Ableitung $D_{(x,y)}\Phi_{u^{(1)}}(J) \equiv u^{(2)}(x,y)$; diese sei in B $\alpha^{(1)}$-harmonisch, $u^{(1)}$ somit (nach II) $\alpha^{(2)}$-harmonisch; wir nennen nun $u(x,y)$ *$\alpha^{(3)}$-harmonisch in B;*

---

[36] Vergleiche THÉODORESCO, loc. cit. 9, S. 69 u. 75. Indirekt folgt obiger potentialtheoretischer Satz aus dem Theorem von THÉODORESCO; man beachte nur, dass

$$\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta,$$

mit $\zeta = \xi + i\eta$ und $z = x + iy$, ist.

IV. $u(x,y)$ sei *in* B $a^{(4)}$*-harmonisch*, wenn ihre areoläre Ableitung $u^{(1)}$ in B existiert und $a^{(3)}$-harmonisch ist;

allgemein: $u(x,y)$ sei *in* B $a^{(p)}$*-harmonisch* $(p \geqq 2)$, wenn ihre areoläre Ableitung $u^{(1)}$ in B $a^{(p-1)}$-harmonisch ist; dann existieren somit in B eine erste, zweite, bis p-te areoläre Ableitung von $u(x,y)$:

$$D_{(x,y)}\,\Phi_u(J) \equiv u^{(1)}(x,y),\; D^{(2)}_{(x,y)}\,\Phi_u(J) \equiv u^{(2)}(x,y), \ldots, D^{(p)}_{(x,y)}\,\Phi_u(J) \equiv u^{(p)}(x,y),$$

und die letztgenannte hat den Wert Null.

Lemma 5. Besitzt $u(x,y)$ im beschränkten Bereiche B eine areoläre Ableitung $u^{(1)}(x,y)$,[37] welche daselbst beschränkte partielle Ableitungen $(p-1)$-ter Ordnung hat, so hat $u(x,y)$ in B stetige Ableitungen erster bis p-ter Ordnung $(p > 1)$.

Beweis. Nehmen wir $p = 2$. Für jeden samt seinem Innern $\Gamma(\bar{x},\bar{y};r)$ in B liegenden Kreis $K(\bar{x},\bar{y};r)$ ist, nach Satz 7^{bis}, in jedem Punkte $(x,y) \in \Gamma(\bar{x},\bar{y};r)$

$$(33)\quad u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K(\bar{x},\,\bar{y};\,r)} u \cdot \frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K(\bar{x},\,\bar{y};\,r)} \log\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,ds + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma(\bar{x},\,\bar{y};\,r)} \log\frac{1}{\varrho}\cdot u^{(1)}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

wobei $\varrho =$ der Abstand von (ξ,η) und (x,y).

Die beiden einfachen Integrale in (33) liefern in $\Gamma(\bar{x},\bar{y};r)$ harmonische Funktionen; sie besitzen somit stetige partielle Ableitungen aller Ordnungen. Aus der Existenz und Beschränktheit von $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}$ und $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}$ in B, somit auch in $\Gamma(\bar{x},\bar{y};r)$ folgt nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie, dass das Doppelintegral

$$(34)\qquad v(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma(\bar{x},\,\bar{y};\,r)} \log\frac{1}{\varrho}\cdot u^{(1)}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

in $\Gamma(\bar{x},\bar{y};r)$ alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, und dass diese daselbst stetig sind.[38] Daraus folgt das Lemma sofort für diesen Fall.

Nehmen wir nun $p = 3$. Wieder existieren die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von u in $\Gamma(\bar{x},\bar{y};r)$. Wegen der Harmonizität der einfachen Integrale in (33) genügt es für diesen Fall zu beweisen, dass das Doppelintegral (34) stetige partielle Ableitungen dritter Ordnung hat.

---

[37] Dies impliziert die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ in B. Siehe die Definition 3.

[38] Siehe den letzten Absatz von § 8.

In $\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)$ ist

(35) $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)} u^{(1)}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{\varrho} \, d\xi \, d\eta$$

oder, wegen eines Greenschen Integralsatzes,[39]

$$= \frac{-1}{2\pi} \iint\limits_{\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \cdot \log \frac{1}{\varrho} \, d\xi \, d\eta + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K(\bar{x}, \bar{y}; r)} u^{(1)} \cdot \log \frac{1}{\varrho} \, dy.$$

Wegen der Harmonizität des letzten Integrals brauchen wir nur das Integral

$$w(x, y) \equiv \frac{-1}{2\pi} \iint\limits_{\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \cdot \log \frac{1}{\varrho} \, dx \, d\eta$$

näher auf seine Differentiationseigenschaften hin zu untersuchen. Aus dem scho benutzten potentialtheoretischen Satz folgt, wegen der Existenz und Beschränk heit der partiellen Ableitungen von $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}$, dass w in $\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)$ stetige partiel Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat. Dasselbe gilt somit von $\frac{\partial v}{\partial x}$. I derselben Weise beweist man diese Eigenschaft für $\frac{\partial v}{\partial y}$. Daraus folgt das Lem für $p = 3$.

Nehmen wir den Fall $p = 4$. Jede Ableitung zweiter Ordnung von u $\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)$ ist, nach dem Vorigen, Summe eines Doppelintegrals und einig einfacher Integrale, welche in $\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)$ harmonisch sind. Das Doppelintegr welches dieselbe Form wie (35) hat, lässt sich, wieder mit Hilfe des Greensch Integralsatzes, umformen in die Summe eines eine in $\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)$ harmonisc Funktion darstellenden, einfachen Integrals und eines Doppelintegrals, desse Integrand das Produkt von $\frac{\pm 1}{2\pi} \log \frac{1}{\varrho}$ und einer Ableitung zweiter Ordnung vo $u^{(1)}$ ist. Da $u^{(1)}$ beschränkte partielle Ableitungen dritter Ordnung hat, hat da Doppelintegral nach dem eher benutzten potentialtheoretischen Satz in $\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Das liefert das Lemma für $p = 4$

Es wird deutlich sein, dass dieses Verfahren sich zu jeder willkürlich ge wählten natürlichen Zahl $p (> 2)$ fortsetzen lässt. —

---

[39] Siehe RIDDER, loc. cit. 4, S. 30 u. 28 (Fussn. 1). In der anzuwendenden Formel

$$\int p\,dx + q\,dy = \iint \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy$$

nehme man $p \equiv 0$, $q \equiv u^{(1)} \log \frac{1}{\varrho}$.

Wir erinnern hier an die Definition *der in einem beschränkten Bereiche B polyharmonischen Funktionen p-ter Ordnung* als die in B definierten Funktionen, welche daselbst stetige partielle Ableitungen bis zur $2p$-ten Ordnung haben, für die in jedem Punkte $(x, y) \in B$

$$\Delta^p u(x, y) = 0$$

ist $(p \geqq 1)$. Dabei ist $\Delta^p \equiv \Delta\Delta^{p-1}$ $(p > 1)$, $\Delta^1 \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Nun haben wir den

Satz 17. *Die Klasse der in einem beschränkten Bereiche B $\alpha^{(p)}$-harmonischen Funktionen fällt mit der Klasse der in B polyharmonischen Funktionen p-ter Ordnung zusammen* $(p \geqq 1)$.

Beweis. Der Fall $p = 1$ ist schon erledigt.[40]

Für $p = 2$ hat $u(x, y)$ in B, nach Lemma 5, stetige partielle Ableitungen aller Ordnungen, falls sie dort $\alpha^{(2)}$-harmonisch ist. Es ist in B

$$\Delta u = -u^{(1)},^{41} \qquad \Delta^2 u \equiv \Delta\Delta u = -\Delta u^{(1)} = 0.$$

$u(x, y)$ ist in B somit polyharmonisch zweiter Ordnung.

Dass, umgekehrt, eine in B polyharmonische Funktion u zweiter Ordnung dort $\alpha^{(2)}$-harmonisch ist mit einer areolären Ableitung gleich $-\Delta u$, folgt sofort mit Satz 1.

Ist u in B $\alpha^{(3)}$-harmonisch, so ist $u^{(1)}$ dort $\alpha^{(2)}$-harmonisch, und diese besitzt in B, nach dem Vorigen, stetige partielle Ableitungen aller Ordnungen. Nach Lemma 5 folgt daraus dieselbe Eigenschaft für u. Nun ist in B[41]

$$\Delta u = -u^{(1)}, \quad \Delta^2 u = -\Delta u^{(1)}, \quad \Delta^3 u = -\Delta^2 u^{(1)} = 0.$$

u ist in B polyharmonisch dritter Ordnung.

Umgekehrt folgt aus der letztgenannten Eigenschaft wieder, dass u in B $\alpha^{(3)}$-harmonisch ist mit der areolären Ableitung $-\Delta u$.

Vollständige Induktion zeigt die Gültigkeit der Behauptung für jedes ganze $p \geqq 1$. —

Die Definition der $\alpha^{(p)}$-harmonischen Funktionen ist ganz analog der Definition der areolären Polynome in der Theorie der α-monogenen Funktionen.[42] Man

---

[40] Siehe das Korollar zu Satz 3.

[41] Siehe Satz 1.

[42] Siehe THÉODORESCO, loc. cit. 9, S. 13—20. Real- und Imaginärteil eines areolären Polynoms sind $\alpha^{(p)}$-harmonisch.

wird daher auch analoge Eigenschaften erwarten dürfen. Aus Satz 17 folgt, dass die Entwicklung von ALMANSI der polyharmonischen Funktionen p-ter Ordnung[43] als eine Entwicklung von $\alpha^{(p)}$-harmonischen Funktionen zu betrachten ist; sie ist das Analogon der von THÉODORESCO gegebenen Darstellung der areolären Polynome als Polynome in $\bar{z}$ mit Koeffizienten, welche holomorphe Funktionen (in z) sind.[42]

§ 10. **Satz 10$^{\text{bis}}$.** *Im beschränkten Bereiche B der xy-Ebene sei $u(x, y)$ stetig differenzierbar nach x und nach y. Erfüllen die areolären Derivierten von u entweder die in Satz 3 oder die in Satz 4 für sie gemachten Annahmen, so ist für jeden Kreis $K(x, y; r)$, mit Mittelpunkt (x, y) und Radius r, welcher samt seinem Innern $\Gamma(x, y; r)$ in B liegt,*

$$(36)\qquad u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x+r\cos\theta,\, y+r\sin\theta)\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma(x,y;r)}\log\frac{r}{\varrho}\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\text{mit } \varrho=\sqrt{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}}.$$

Beweis. Nach Satz 7^{bis}, angewandt auf $\Gamma(x, y; r)$, ist in diesem Bereiche

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{K(x,y;r)} u\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\varrho}\,ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{K(x,y;r)}\log\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,ds+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma(x,y;r)}\log\frac{1}{\varrho}\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta,\text{[44]}$$

oder

$$=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{K(x,y;r)} u\,ds-\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\int\limits_{K(x,y;r)}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma(x,y;r)}\log\frac{1}{\varrho}\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta.$$

Nun ist, nach Satz 3 oder Satz 4,

$$\int\limits_{K(x,y;r)}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=\iint\limits_{\Gamma(x,y;r)} D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta.$$

Dadurch wird

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x+r\cos\theta,\, y+r\sin\theta)\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma(x,y;r)}\log\frac{r}{\varrho}\cdot D_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)\,d\xi\,d\eta.\text{[44]}$$

---

[43] Siehe M. NICOLESCO, Ann. École norm. (3) *52* (1935), S. 185—192.

[44] Für die Art des Doppelintegrals vergleiche das Ende des Beweises von Satz 7. Sind die extremen areolären Derivierten von u in B beschränkt, so ist das Doppelintegral ein gewöhnliches Lebesguesches, und folgt Satz 10$^{\text{bis}}$ auch leicht aus Satz 10.

Definition 5. Wir setzen

$$\mu_0(u; x, y; r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta,\ y + r\sin\theta)\, d\theta,$$

$$\mu_1(u; x, y; r) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\Gamma(x,y;r)} u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{2}{r^2}\int_0^r \mu_0(u; x, y; \varrho)\cdot\varrho\, d\varrho$$

im allgemeinen (für $p \geqq 1$)

$$\mu_p(u; x, y; r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r \mu_{p-1}(u; x, y; \varrho)\cdot\varrho\, d\varrho.$$

Definition 6. Es sei

$$J_0[\varphi(r)] = \int_0^r \log\frac{r}{\varrho}\cdot\varrho\,\varphi(\varrho)\, d\varrho,$$

$$J_0^{(1)} = J_0, \quad J_0^{(i)}[\varphi(r)] = J_0[J_0^{(i-1)}] \qquad (i = 2, 3, \ldots);$$

ausserdem sei

$$J_s^{(p)}[\varphi(r)] = \frac{2}{r^2}\int_0^r J_{s-1}^{(p)}[\varphi(\varrho)]\cdot\varrho\, d\varrho \quad (p = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots).$$

Bemerkung. Sind $\bar{D}_{(\xi,\eta)}\Phi_u(J)$ und $\underline{D}_{(\xi,\eta)}\Phi_u(J)$ in B beschränkt, so lässt sich (36) schreiben:

$$u(x, y) = \mu_0(u; x, y; r) + \int_0^r d\varrho\cdot\log\frac{r}{\varrho}\cdot\varrho\,\mu_0\{D_{(\xi,\eta)}\Phi_u(J); x, y; \varrho\}$$

$$= \mu_0(u; x, y; r) + J_0[\mu_0\{D_{(\xi,\eta)}\Phi_u(J); x, y; r\}],$$

oder

$$\mu_0(u; x, y; r) = u(x, y) - J_0[\mu_0\{D_{(\xi,\eta)}\Phi_u(J); x, y; r\}]. \tag{37}$$

Satz 18. *In einem beschränkten Bereiche B besitze eine Funktion $u(x,y)$ erste bis $(p-1)$-te areoläre Ableitungen, während ihre p-ten areolären Derivierten dort existieren und beschränkt sein sollen ($p \geqq 1$). Dann ist für jeden Kreis $K(x, y; r)$, welcher samt seinem Innern $\Gamma(x, y; r)$ in B liegt,*

$$(38) \quad \mu_0(u; x, y; r) = u(x, y) - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot D_{(x,y)}\,\Phi_u(J) + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^4 \cdot D^{(2)}_{(x,y)}\,\Phi_u(J) + \cdots$$

$$+ (-1)^{p-1}\frac{1}{((p-1)!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2(p-1)} \cdot D^{(p-1)}_{(x,y)}\,\Phi_u(J) + (-1)^p J^{(p)}_0\left[\mu_0\{D^{(p)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J); x, y; r\}\right]$$

(verallgemeinerte Formel von Pizzetti).[45]

Beweis. Da Formel (38) für $p = 1$ mit (37) zusammenfällt, brauchen wir nur noch aus ihrer Gültigkeit für $p = \nu$ die für $p = \nu + 1$ abzuleiten.

Wir nehmen dazu die $(\nu + 1)$-ten areolären Derivierten in B beschränkt an. Dann darf in (37) $u(\xi, \eta)$ durch $D^{(\nu)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)$ ersetzt werden; das gibt

$$\mu_0(D^{(\nu)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u; x, y; r) = D^{(\nu)}_{(x,y)}\,\Phi_u - J_0\left[\mu_0\{D^{(\nu+1)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u; x, y; r\}\right].$$

Hieraus und aus (38), mit $p = \nu$, folgt:

$$\mu_0(u; x, y; r) = u(x, y) - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot D_{(x,y)}\,\Phi_u(J) + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{1}{((\nu-1)!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-1} \cdot D^{(\nu-1)}_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$$

$$+ (-1)^\nu J^{(\nu)}_0\left[D^{(\nu)}_{(x,y)}\,\Phi_u - J_0(\mu_0\{D^{(\nu+1)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u; x, y; r\})\right],$$

oder, da $J^{(\nu)}_0(1) = \frac{1}{(\nu!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2\nu}$ ist,

$$\mu_0(u; x, y; r) = u(x, y) + \cdots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{1}{(\nu!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2\nu} \cdot D^{(\nu)}_{(x,y)}\,\Phi_u + (-1)^{\nu+1} J^{(\nu+1)}_0\left[\mu_0\{D^{(\nu+1)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u; x, y; r\}\right].$$

Das ist Formel (38) mit $p = \nu + 1$.

Satz 19. *Unter den gleichen Bedingungen wie in Satz 18 gilt für jede natürliche Zahl s:*

---

[45] Vgl. M. Nicolesco, Bull. Soc. Math. France *59* (1931), S. 78—80, und *60* (1932), S. 130—133. — Da $J^{(p)}_0(1) = \frac{1}{(p!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2p}$ ist, lässt sich in Formel (38) statt $(-1)^p J^{(p)}_0[\cdots]$ auch schreiben: $(-1)^p \frac{1}{(p!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2p} \cdot A^{(p)}(u; x, y; r)$, wobei $A^{(p)}(u; x, y; r)$ zwischen oberer und unterer Grenze von $D^{(p)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)$ in $\Gamma(x, y; r)$ liegt.

(39) $\mu_s(u; x, y; r) = u(x, y) +$

$$+\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \frac{1}{(i+1)^s}\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2i}\cdot D^{(i)}_{(x,y)}\,\Phi_u(J) + (-1)^p J^{(p)}_s\,[\mu_0\,\{D^{(p)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J); x, y; r\}].$$

(verallgemeinerte Formel von Pizzetti-Nicolesco)[46].

Beweis. Für $s = 0$ fällt (39) mit (38) zusammen. Wir brauchen also nur die Gültigkeit für $s = \nu + 1$ aus der für $s = \nu$ abzuleiten.

Nehmen wir darum die p-ten areolären Derivierten von u in B beschränkt an, und setzen wir die Gültigkeit von (39) mit $s = \nu$ voraus. Integration liefert:

$$\mu_{\nu+1}(u; x, y; r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r \mu_\nu(u; x, y; \varrho)\cdot\varrho\, d\varrho$$

$$= u(x, y) + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \frac{1}{(i+1)^\nu}\frac{1}{(i!)^2} D^{(i)}_{(x,y)}\,\Phi_u\cdot\frac{2}{r^2}\int_0^r\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2i}\cdot\varrho\, d\varrho +$$

$$+ (-1)^p\frac{2}{r^2}\int_0^r J^{(p)}_\nu\,[\mu_0\,\{D^{(p)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u; x, y; \varrho\}]\cdot\varrho\, d\varrho,$$

oder

$\mu_{\nu+1}(u; x, y; r) = u(x, y) +$

$$+\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \frac{1}{(i+1)^{\nu+1}}\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2i} D^{(i)}_{(x,y)}\,\Phi_u + (-1)^p J^{(p)}_{\nu+1}\,[\mu_0\,\{D^{(p)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u; x, y; r\}].$$

Das ist Formel (39) mit $s = \nu + 1$.

Satz 20. *In einem beschränkten Bereiche B sei $u(x, y)$ $\alpha^{(p)}$-harmonisch ($p \geqq 1$). Dann ist für jeden samt seinem Innern in B liegenden Kreis $K(x, y; r)$*

(40) $$\mu_s(u; x, y; r) = u(x, y) + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \frac{1}{(i+1)^s}\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2i}\cdot D^{(i)}_{(x,y)}\,\Phi_u(J).$$

Hat, umgekehrt, $u(x, y)$ in B areoläre Ableitungen erster bis $(p-1)$-ter Ordnung, und sind die $(p-1)$-ter Ordnung dort endlich ($p \geqq 2$),[47] so ist $u(x, y)$ in B $\alpha^{(p)}$-harmonisch, wenn (40) für jeden wie oben gewählten Kreis gilt.

---

[46] Vgl. M. Nicolesco, loc. cit. 45. — Da $J^{(p)}_s(1) = \frac{1}{(p+1)^s}\cdot\frac{1}{(p!)^2}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^{2p}$ ist, lässt sich in Formel (39) statt $(-1)^p J^{(p)}_s[\cdots]$ auch schreiben: $\frac{(-1)^p}{(p+1)^s}\cdot\frac{1}{(p!)^2}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^{2p}\cdot B^{(p)}_s(u; x, y; r)$, wobei $B^{(p)}_s(u; x, y; r)$ zwischen oberer und unterer Grenze von $D^{(p)}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_u(J)$ in $\Gamma(x, y; r)$ liegt.

[47] Für $p = 1$ soll Beschränktheit und Integrierbarkeit (L) von $u(x, y)$ in B und auf jedem Kreis, der samt seinem Innern in B liegt, vorausgesetzt werden. Daraus und aus der Relation

Beweis. Anwendung von (39) liefert unmittelbar die erste Hälfte des Satzes Beweisen wir nun die Umkehrung.

Aus der Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ folgt, dass in jedem Punkte $(x, y) \in B$, in welchem $\mu_s(u; x, y; r)$ existiert $(s \geqq 1)$,

$$\int_0^r \mu_s(u; x, y; \varrho_0) \cdot \varrho_0 \, d\varrho_0 = \int_0^r d\varrho_0 \cdot \frac{2}{\varrho_0} \int_0^{\varrho_0} d\varrho_1 \cdot \frac{2}{\varrho_1} \cdots \int_0^{\varrho_{s-2}} d\varrho_{s-1} \cdot \frac{1}{\pi \varrho_{s-1}} \iint\limits_{\Gamma(x, y; \varrho_{s-1})} u(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^r \mu_s(u; x, y; \varrho) \cdot \varrho \, d\varrho\right\} = \int_0^r d\varrho_0 \cdot \frac{2}{\varrho_0} \int_0^{\varrho_0} d\varrho_1 \cdot \frac{2}{\varrho_1} \cdots$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \varrho_{s-1} \cos \theta, \, y + \varrho_{s-1} \sin \theta) \cdot \cos \theta \, d\theta$$ [48]

und

$$(42) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\int_0^r \mu_s(u; x, y; \varrho) \cdot \varrho \, d\varrho\right\} = \int_0^r d\varrho_0 \cdot \frac{2}{\varrho_0} \int_0^{\varrho_0} d\varrho_1 \cdot \frac{2}{\varrho_1} \cdots$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \{u(x + \varrho_{s-1} \cos \theta, \, y + \varrho_{s-1} \sin \theta)\} \cdot \cos \theta \, d\theta$$

ist; beide partielle Ableitungen sind somit stetig in (x, y). Für $s = 0$ erhält man

$$\int_0^r \mu_0(u; x, y; \varrho) \cdot \varrho \, d\varrho = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\Gamma(x, y; r)} u(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

$$(43) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^r \mu_0(u; x, y; \varrho) \cdot \varrho \, d\varrho\right\} = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) \cdot \cos \theta \, d\theta$$

und

$$(44) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\int_0^r \mu_0(u; x, y; \varrho) \cdot \varrho \, d\varrho\right\} = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \{u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)\} \cdot \cos \theta \, d\theta;$$

wieder sind beide partielle Ableitungen stetig in (x, y).

$\mu_s(u; x, y; r) = u(x, y)$ folgt dann die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in B (nach Nicolesco, loc. cit. 45, S. 77 u. 78 (lemme fondamental)), so dass auch für diesen Fall der Beweis des Textes in seinem zweiten Teil gültig bleibt.

[48] Vgl. Kellogg, loc. cit. 12, S. 224—226, und J. Hadamard, Princeton Un. Bulletin *13* (1902), S. 49—52.

In derselben Weise beweist man die Stetigkeit in (x, y) der aus (41) bis (44) durch Ersetzung von x durch y entstehenden partiellen Ableitungen.

Aus der Existenz und Stetigkeit von (41) und (43) in (x, y) folgt mit (40) dasselbe von

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^r u^{(p-1)}(x, y) \cdot \varrho^{2p-1} d\varrho\right\} = \frac{\partial}{\partial x} u^{(p-1)}(x, y) \cdot \int_0^r \varrho^{2p-1} d\varrho,$$

$$\text{also auch von } \frac{\partial}{\partial x} u^{(p-1)}(x, y).$$

Ebenso beweist man die Existenz und Stetigkeit in (x, y) von $\frac{\partial}{\partial y} u^{(p-1)}(x, y)$.

Da die areoläre Ableitung

$$w^{(1)}(x, y) = -\varDelta\left\{\int_0^r \mu_s(u; x, y; \varrho) \cdot \varrho\, d\varrho\right\}, \quad \text{mit} \quad w(x, y) \equiv \int_0^r \mu_s(u; x, y; \varrho) \cdot \varrho\, d\varrho,$$

in (x, y) stetig ist $(s \geqq 0)$, folgt mit (40), dass auch $u^{(p)}(x, y)$ in (x, y) existiert und stetig ist.

Aus (39), mit Fussn. 46, und (40) folgt

$$B_s^{(p)}(u; x, y; r) = 0,$$

wobei $B_s^{(p)}(u; x, y; r)$ zwischen oberer und unterer Grenze von $u^{(p)}$ in $\Gamma(x, y; r)$ liegt. Daraus und aus der Stetigkeit von $u^{(p)}$ in (x, y) folgt

$$u^{(p)}(x, y) = 0;$$

$u(x, y)$ ist in B $\alpha^{(p)}$-harmonisch. —

Der zweite Teil dieses Satzes ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von F. SBRANA.[49]

§ 11. **Satz 21.** *$E = \sum_{j=1}^{\infty} E_j$, wobei jede Menge E_j endliches lineares Mass hat, sei Teilmenge eines beschränkten Bereiches B. $u(x, y)$, $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_{n-1}(x, y)$ seien in B stetig differenzierbar nach x und nach y; ihre extremen areolären Derivierten sollen nur in den Punkten von E unendlich sein können, während fast überall in B die areolären Ableitungen von $u, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}$ bzw. gleich $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ und Null seien. Dann ist $u(x, y)$ in B $\alpha^{(n)}$-harmonisch; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sind dann in jedem Punkte von B bzw. gleich der ersten, zweiten, ..., und $(n-1)$-ten areolären Ableitung von u.*

[49] Siehe F. SBRANA, Rend. Lincei (6) *2* (1925, 1^es^ Sem.), S. 369, 370. — Das von SBRANA benutzte Verfahren lässt sich hier nur für den Fall $s = 0$ anwenden.

Beweis. Aus Satz 4^{bis} folgt nacheinander: φ_{n-1} ist in B harmonisch; φ_{n-2} ist in B α_s-harmonisch mit einer areolären Ableitung gleich φ_{n-1}; φ_{n-3} ist in B α_s-harmonisch mit einer areolären Ableitung gleich φ_{n-2}; . . .; u ist in B α_s-harmonisch mit einer areolären Ableitung gleich φ_1. Daraus folgt der Satz.

Spezialfall. Der beschränkte Bereich B sei Summe von einer rektifizierbaren Kurve L und zwei Bereichen B_1 und B_2, welche L zur gemeinsamen Grenze haben. Ist u $\alpha^{(n)}$-harmonisch in B_1 und in B_2, und sind $u, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ in B stetig differenzierbar nach x und nach y, während $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ in B_1 und in B_2 bzw. mit der dort existierenden ersten, zweiten, . . ., $(n-1)$-ten areolären Ableitung von u zusammenfallen, so ist u auch $\alpha^{(n)}$-harmonisch in B.[50]

Die durch die Werte von u in B_2 definierte Funktion ist als eine Fortsetzung der durch die Werte von u in B_1 definierten Funktion zu betrachten. Wir bemerken, dass es nicht möglich ist zwei voneinander verschiedene derartige Fortsetzungen zu finden. Das soll heissen: Gibt es Funktionen $\bar{u}, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_{n-1}$, welche untereinander in gleichen Relationen wie die Funktionen im Spezialfall stehen, und fallen u und $\bar{u}$ in B_1 zusammen, so tun sie dies notwendig auch in B_2.

Zum Beweise betrachte man die Differenzen $u - \bar{u}$, $\varphi_j - \bar{\varphi}_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. Die Differenz $\varphi_{n-1} - \bar{\varphi}_{n-1}$ ist harmonisch in B, und identisch Null in B_1, also auch in B. $\varphi_{n-2} - \bar{\varphi}_{n-2}$ ist in B α_s-harmonisch mit areolärer Ableitung $\varphi_{n-1} - \bar{\varphi}_{n-1} \equiv 0$, also harmonisch; sie ist identisch Null in B_1, also auch in B. So fortfahrend finden wir nach endlich vielen Schritten: $u - \bar{u} \equiv 0$ in B.[51]

Kapitel III.

Randwertprobleme.

§ 12. **Satz 22.** *B und C seien definiert wie in Satz 3. $u(x,y)$ und $v(x,y)$ sollen in B erste bis $(p-1)$-te areoläre Ableitungen, $u^{(1)}, \ldots, u^{(p-1)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(p-1)}$ besitzen $(p > 1)$; die in B somit existierenden und stetigen partiellen Ableitungen von $u, u^{(1)}, \ldots, u^{(p-2)}$ und von $v, v^{(1)}, \ldots, v^{(p-2)}$ nach x und nach y sollen, ebenso wie u und v und die areolären Ableitungen $u^{(1)}, \ldots, u^{(p-2)}, u^{(p-1)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(p-2)}, v^{(p-1)}$ in jedem Punkte von C (endliche) Grenzwerte haben.*

---

[50] Für den Fall der Ebene umfasst dieser Spezialfall ein Theorem von M. NICOLESCO, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. *37*, 2 (1936), S. 87. Siehe weiter § 21.

[51] Man vergleiche den Inhalt dieses Paragraphen mit THÉODORESCO, loc. cit. 9, S. 24, 25.

Daneben nehmen wir an: $u^{(p-1)}$ *und* $v^{(p-1)}$ *besitzen in* B *stetige partielle Ableitungen nach* x *und nach* y, *welche auf* C *(endliche) Grenzwerte annehmen; und ausserdem entweder:*

I. *die oberen und unteren areolären Derivierten von* $u^{(p-1)}$ *und von* $v^{(p-1)}$ *können nur in den Punkten einer abzählbaren Teilmenge* E *unendlich werden, während* $D^{+}_{(x,y)}\,\Phi_{u^{(p-1)}}(J)$ *und* $D^{+}_{(x,y)}\,\Phi_{v^{(p-1)}}(J)$ *über* B *integrierbar* (L) *sind, oder:*

II. *die oberen und unteren areolären Derivierten von* $u^{(p-1)}$ *und von* $v^{(p-1)}$ *können nur in den Punkten einer Menge* $E=\sum_{j=1}^{\infty}E_j$, *wobei jede Menge* E_j *endliches lineares Mass hat, unendlich werden, während* $D^{+}_{(x,y)}\,\Phi_{u^{(p-1)}}(J)$, $D^{-}_{(x,y)}\,\Phi_{u^{(p-1)}}(J)$, $D^{+}_{(x,y)}\,\Phi_{v^{(p-1)}}(J)$ *und* $D^{-}_{(x,y)}\,\Phi_{v^{(p-1)}}(J)$ *über* B *integrierbar* (L) *sind.*

Dann ist

$$(45)\quad \sum_{j=0}^{p-1}\int_C\left\{u^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}v^{(p-j-1)}-v^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}u^{(p-j-1)}\right\}ds=$$
$$=\iint_B\left[u\cdot D^{\pm}_{(x,y)}\,\Phi_{v^{(p-1)}}(J)-v\cdot D^{\pm}_{(x,y)}\,\Phi_{u^{(p-1)}}(J)\right]dx\,dy.\text{[52]}$$

Die p-ten areolären Ableitungen $u^{(p)}$ *und* $v^{(p)}$ *existieren fast überall in* B.

(verallgemeinerte Formel von Mathieu-Gutzmer).

Beweis. Nach Satz 6 ist

$$\int_C\left\{u\frac{\partial}{\partial n}v-v\frac{\partial}{\partial n}u\right\}ds=\iint_B\left[u\,v^{(1)}-v\,u^{(1)}\right]dx\,dy.$$

Ersetzt man in dieser Formel das eine Mal u durch $u^{(1)}$, das andere Mal v durch $v^{(1)}$, so folgt:

$$\int_C\left\{u^{(1)}\frac{\partial}{\partial n}v-v\frac{\partial}{\partial n}u^{(1)}\right\}ds=\iint_B\left[u^{(1)}v^{(1)}-v\,u^{(2)}\right]dx\,dy,$$

und

$$\int_C\left\{u\frac{\partial}{\partial n}v^{(1)}-v^{(1)}\frac{\partial}{\partial n}u\right\}ds=\iint_B\left[u\,v^{(2)}-v^{(1)}u^{(1)}\right]dx\,dy.$$

[52] $u^{(0)}(x,y)$ bedeute immer dasselbe wie $u(x,y)$. — Vgl. Satz 22 mit Nicolesco, loc. cit. 50, S. 84.

Addition liefert

$$\sum_{j=0}^{1} \int_C \left\{ u^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} v^{(1-j)} - v^{(1-j)} \frac{\partial}{\partial n} u^{(j)} \right\} ds = \iint_B [u v^{(2)} - v u^{(2)}]\, dx\, dy.$$

Fortgesetzte Wiederholung des Verfahrens[58] liefert schliesslich (45).

Satz 23. *B und C seien definiert wie in Satz 3. $u(x,y)$ und die aus ihr abzuleitenden Funktionen sollen den gleichen Bedingungen wie in Satz 22 genügen ($p \geqq 2$). Dann ist in jedem Punkte $(x,y) \in B$*

$$(46)\qquad u(x,y) = \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \sum_{j=0}^{p-1} \int_C \left\{ u^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} h_p^{(p-j-1)} - h_p^{(p-j-1)} \frac{\partial}{\partial n} u^{(j)} \right\} ds + \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint_B h_p u^{(p)}\, d\xi\, d\eta;$$

dabei ist

$$h_p(\xi,\eta;x,y) \equiv \varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho} + \omega_p(\xi,\eta),$$

mit $\varrho =$ der Abstand von (ξ,η) und (x,y), und $\omega_p(\xi,\eta)$ eine in B $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion, welche mit den aus ihr abzuleitenden Funktionen dieselben Grenzbedingungen wie u und die aus dieser abgeleiteten Funktionen erfüllt; es ist

$$(47)\qquad a_p = 2^{2(p-1)} \cdot \{(p-1)!\}^2.$$

Beweis. Ist eine Funktion $f(x,y)$ in einem Bereiche T polyharmonisch k-ter Ordnung, und ist ϱ der Abstand eines Punktes von T zu einem ausserhalb T liegenden, festgewählten Punkt, so ist $\varrho^2 \cdot f(x,y)$ in T polyharmonisch $(k+1)$-ter Ordnung. Umgeben wir den Punkt $(x,y) \in B$ mit einem Kreise $K(x,y;r)$, und heben die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\Gamma}(x,y;r)$ aus B fort, so ist in dem neuen Bereich $B - \overline{\Gamma}$ $\log \frac{1}{\varrho}$ harmonisch, wenn ϱ der Abstand zu (x,y) andeutet, und somit $\varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho}$ polyharmonisch p-ter Ordnung (oder $\alpha^{(p)}$-harmonisch). Das gleiche gilt nun auch von der im Satze eingeführten Funktion $h_p(\xi,\eta;x,y)$.

In $B - \overline{\Gamma}$ ist

$$(48)\qquad (-1)^{p-1} \left[\varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho} \right]^{(p-1)} = \Delta^{p-1} \left[\varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho} \right] = a_p \log \frac{1}{\varrho} + b_p,$$

wobei a_p und b_p Konstanten sind; der Wert von a_p wird durch (47) gegeben.

---

[58] Bei der Summation von 0 bis 2 z. B. gehört die Zerlegung $u v^{(3)} - v u^{(3)} = (u v^{(3)} - v^{(2)} u^{(1)}) + (u^{(1)} v^{(2)} - v^{(1)} u^{(2)}) + (u^{(2)} v^{(1)} - v u^{(3)})$.

In $B-\overline{\Gamma}$ lässt sich Satz 22 auf u und h_p (statt v) anwenden. Das liefert

$$(49)\qquad \sum_{j=0}^{p-1}\int_0^{2\pi} r\left\{u^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}h_p^{(p-j-1)}-h_p^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}u^{(p-j-1)}\right\}d\theta+$$

$$+\sum_{j=0}^{p-1}\int_C\left\{u^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}h_p^{(p-j-1)}-h_p^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}u^{(p-j-1)}\right\}ds=-\iint_{B-\overline{\Gamma}} h_p\cdot D^{+}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_{u^{(p-1)}}(J)\,d\xi\,d\eta;$$

dabei rührt die erste Summe vom Kreisrande her.

Wegen (48) ist

$$\int_0^{2\pi} ru\frac{\partial}{\partial n}h_p^{(p-1)}\,d\theta=\int_0^{2\pi} ru\left[(-1)^{p-1}a_p\cdot-\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial n}\omega^{(p-1)}\right]d\theta$$

$$=(-1)^{p-2}a_p\int_0^{2\pi}u\,d\theta+r\int_0^{2\pi}u\frac{\partial}{\partial n}\omega^{(p-1)}\,d\theta.$$

Aus der Stetigkeit von u und $\frac{\partial}{\partial n}\omega^{(p-1)}$ in B folgt nun

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} ru\frac{\partial}{\partial n}h_p^{(p-1)}\,d\theta=(-1)^{p-2}\,2\pi a_p u(x,y);$$

daneben ist

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} rh_p\frac{\partial}{\partial n}u^{(p-1)}\,d\theta=0,$$

also der Grenzwert der Differenz dieser beiden Integrale gleich $(-1)^{p-2}\,2\pi a_p u(x,y)$. Die übrigen, in der ersten Summe von (49) auftretenden Integrale haben für $r\to 0$ den Grenzwert Null.

Aus (49) folgt hierdurch:

$$(50)\qquad (-1)^{p-2}\,2\pi a_p u(x,y)+\sum_{j=0}^{p-1}\int_C\left\{u^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}h_p^{(p-j-1)}-h_p^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}u^{(p-j-1)}\right\}ds=$$

$$=-\lim_{r\to 0}\iint_{B-\overline{\Gamma}} h_p\cdot D^{+}_{(\xi,\eta)}\,\Phi_{u^{(p-1)}}(J)\,d\xi\,d\eta.$$

Das liefert (46); *dabei ist das in* (46) *vorkommende Doppelintegral im allgemeinen ein uneigentliches Integral einer* (durch den in (50) angegebenen Limes definierten) *speziellen Art.*

(46) ist eine Verallgemeinerung einer Formel von Boggio.[54]

[54] Siehe Nicolesco, loc. cit. 50, S. 86, 87. Vergleiche die Darstellungen von α-holomorphen Funktionen bestimmter Klassen bei Théodoresco, loc. cit. 9, S. 23.

Nimmt man in Satz 23 $\omega(\xi,\eta)\equiv 0$, so folgt:

Satz 23^bis^. *Unter den in Satz 23 für u gemachten Annahmen ist in jedem Punkte* $(x,y)\in B$

$$(51)\qquad u(x,y)=\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\sum_{j=0}^{p-1}\int_C\left\{u^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}t_p^{(p-j-1)}-t_p^{(p-j-1)}\frac{\partial}{\partial n}u^{(j)}\right\}ds+ \\ +\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint_B t_p\cdot u^{(p)}\,d\xi\,d\eta,$$

wobei

$$(52)\qquad t_p(\xi,\eta;x,y)\equiv\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho},\quad mit\quad \varrho=\sqrt{\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\}}.$$

a_p wird durch (47) gegeben.

Satz 24. *Unter den in Satz 23 für u gemachten Annahmen ist in jedem Punkte* $(x,y)\notin\bar{B}$

$$(3)\quad 0=\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\sum_{j=0}^{p-1}\int_C\left\{u^{(j)}\frac{\partial}{\partial n}t_p^{(p-j-1)}-t_p^{(p-j-1)}\frac{\partial}{\partial n}u^{(j)}\right\}ds+\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint_B t_p\cdot u^{(p)}\,d\xi\,d\eta;$$

dabei hat t_p die gleiche Bedeutung wie in Satz 23^bis^.

Beweis. Man nehme in Satz 22 für $v(\xi,\eta)$ die Funktion $t_p(\xi,\eta;x,y)$.

Satz 25. *Wenn in einem beschränkten Bereiche B_1 $u(x,y)$ areoläre Ableitungen aller Ordnungen besitzt, so hat sie dort auch stetige partielle Ableitungen aller Ordnungen.*

Genügt ein samt seinem Rande C in B_1 liegender Bereich B den Bedingungen von Satz 3, und gibt es eine Zahl $M\geqq 1$ derart, dass

$$\lim_{p\to\infty}\left[\text{obere Grenze aller }\frac{|u^{(j)}|}{M^{2j}}\text{ für } j\geqq p\right]\equiv\limsup_{p\to\infty}\frac{|u^{(p)}|}{M^{2p}}$$

(mit $u^{(p)}=p$-te areoläre Ableitung von u)

in B gleichmässig gegen eine dort beschränkte Grenzfunktion konvergiert, so ist in jedem Punkte $(x,y)\in B$

$$(54)\qquad u(x,y)=\lim_{p\to\infty}\frac{+1}{2\pi a_p}\sum_{j=0}^{p-1}\int_C\left\{\Delta^j u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{p-j-1}t_p-\Delta^{p-j-1}t_p\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Delta^j u\right\}ds;$$

dabei wird der Wert von a_p durch (47), und t_p $(\xi,\eta;x,y)$ durch (52) gegeben.

Beweis. Aus der Existenz der p-ten areolären Ableitung $u^{(p)}$ von u in B_1 folgt, dass $u^{(p-1)}$ daselbst stetige partielle Ableitungen erster Ordnung (Def. 3), und somit, nach Lemma 5, $u^{(p-2)}$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat; so fortfahrend findet man, durch wiederholte Anwendung von Lemma 5, dass u selbst in B_1 stetige partielle Ableitungen erster bis p-ter Ordnung hat. Da p willkürlich ist, ist der erste Teil des Satzes hiermit bewiesen.

In B hat man für $u(x,y)$ die Darstellung (51).

Es gibt natürliche Zahlen N und P, so dass für $p \geqq P$ und jeden Punkt $(\xi, \eta) \in B$

$$|u^{(p)}| < M^{2p} \cdot N$$

ist. Dies und (47) liefern für das in (51) vorkommende Doppelintegral die Abschätzung:

$$\left| \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint\limits_B t_p \cdot u^{(p)} \, d\xi \, d\eta \right| < \frac{N M^2}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{\left(\frac{dM}{2}\right)^{p-1}}{(p-1)!} \right\}^2 \iint\limits_B \left| \log \frac{1}{\varrho} \right| d\xi \, d\eta,$$

falls $p \geqq P$ ist; d ist der Diameter von B. Das rechte Glied ist für genügend grosses p kleiner als ein willkürlich positives ε, unabhängig von der Lage von (x, y) im Bereiche B. Daraus folgt (54) für jeden Punkt $(x, y) \in B$.[55]

§ 13. **Satz 26.** *Jede in einem beschränkten Bereiche B beschränkte, nach Lebesgue messbare Funktion $\varphi(x, y)$ ist in fast allen Punkten des Bereiches zweite areoläre Ableitung einer in B α_8-harmonischen Funktion. Alle in B α-harmonischen Funktionen, deren zweite areoläre Ableitung fast überall in B gleich $\varphi(x, y)$ ist, und deren extreme areoläre Derivierte zweiter Ordnung in B beschränkt sind, werden aus einer von ihnen* $\left[\text{etwa } \frac{-1}{8\pi} \iint\limits_B \varphi(\xi, \eta) \cdot \varrho^2 \log \frac{1}{\varrho} \, d\xi \, d\eta, \text{ mit } \varrho = \sqrt{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}}\right]$ *durch Addition der in B polyharmonischen Funktionen zweiter Ordnung erhalten.*

Beweis. Aus der Potentialtheorie ist bekannt, dass

$$\iint\limits_B \varphi(\xi, \eta) \cdot \log \frac{1}{\varrho} \, d\xi \, d\eta \quad \text{und} \quad \iint\limits_B \varphi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{\varrho} \, d\xi \, d\eta$$

---

[55] Die Konvergenz in B ist sogar gleichmässig. Die in (54) auftretende Summe ist in B $\alpha^{(p)}$-harmonisch.

unter den Bedingungen des Satzes in der ganzen xy-Ebene stetige Funktionen darstellen. Das Verfahren, das dazu führt[56], lässt sich ebenfalls zum Beweise der Stetigkeit in jedem Punkte (x,y) der nachfolgenden Integrale anwenden:

$$(55)\quad U \equiv \frac{-1}{8\pi}\iint_B \varphi\cdot\varrho^2\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta,\qquad U_x \equiv \frac{-1}{8\pi}\iint_B \varphi\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho^2\log\frac{1}{\varrho}\right)d\xi\,d\eta,$$

$$U_y \equiv \frac{-1}{8\pi}\iint_B \varphi\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho^2\log\frac{1}{\varrho}\right)d\xi\,d\eta,\quad U_{xx} \equiv \frac{-1}{8\pi}\iint_B \varphi\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varrho^2\log\frac{1}{\varrho}\right)d\xi\,d\eta,$$

$$U_{yy} \equiv \frac{-1}{8\pi}\iint_B \varphi\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varrho^2\log\frac{1}{\varrho}\right)d\xi\,d\eta,$$

und

$$V_x \equiv \frac{1}{8\pi}\iint_B \varphi\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left\{\Delta\left(\varrho^2\log\frac{1}{\varrho}\right)\right\}d\xi\,d\eta,\qquad V_y \equiv \frac{1}{8\pi}\iint_B \varphi\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left\{\Delta\left(\varrho^2\log\frac{1}{\varrho}\right)\right\}d\xi\,d\eta.$$

Man beweist in der Potentialtheorie, dass unter den Bedingungen des Satzes in jedem Punkte (x,y)

$$\frac{\partial}{\partial x}\iint_B \varphi\cdot\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta = \iint_B \varphi\cdot\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta$$

ist. Das dabei benutzte Verfahren[57] führt ebenso in jedem Punkte (x,y) zu folgenden Relationen:

$$\frac{\partial}{\partial x}U = U_x,\quad \frac{\partial}{\partial y}U = U_y,\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}U = U_{xx},\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}U = U_{yy},$$

schliesslich zu

$$\frac{\partial}{\partial x}V = V_x \quad\text{und}\quad \frac{\partial}{\partial y}V = V_y,$$

mit

$$(56)\qquad V(x,y) \equiv \frac{1}{8\pi}\iint_B \varphi\cdot\Delta\left(\varrho^2\log\frac{1}{\varrho}\right)d\xi\,d\eta.$$

U ist somit in B α_s-harmonisch mit der areolären Ableitung gleich $V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint_B \varphi\cdot\left[\log\frac{1}{\varrho}-1\right]d\xi\,d\eta$. Da die areolüre Ableitung von $\frac{1}{2\pi}\iint_B \varphi\cdot d\xi\,d\eta$

[56] Siehe W. STERNBERG, *Potentialtheorie* I, Berlin-Leipzig 1925, S. 96—102, 127.

[57] Siehe STERNBERG, loc. cit. 56, S. 102, 103 u. 127.

in B identisch Null ist, und da, nach Lemma 4, die areoläre Ableitung von $\frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \varphi \cdot \log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta$ fast überall in B gleich φ ist, ist in fast jedem Punkte $(x, y) \in B$

$$D_{(x,y)}\,\Phi_V(J) = \varphi(x, y).$$

Ausserdem folgt aus Lemma 4, dass die extremen areolären Derivierten von $V(x, y)$ in B beschränkt sind. U besitzt hierdurch die durch Satz 26 verlangten Eigenschaften.

Hat U_1 die gleichen Eigenschaften, so wird die Differenz $U(x, y) - U_1(x, y)$ fast überall in B eine zweite areoläre Ableitung gleich Null haben, während ihre extremen areolären Derivierten zweiter Ordnung daselbst beschränkt sind. Nach Fussn. 14 (Satz a) hat die Differenz in allen Punkten von B eine zweite areoläre Ableitung gleich Null. Sie ist somit in B $\alpha^{(2)}$-harmonisch oder, was nach Satz 17 auf dasselbe hinauskommt, polyharmonisch zweiter Ordnung. Umgekehrt gibt Addition einer derartigen Funktion zu U wieder eine Funktion mit den im Satze verlangten Eigenschaften.

Satz 27. *In einem beschränkten, Dirichletschen Bereiche B sei $\varphi(x, y)$ beschränkt und messbar (L); $u(t)$ und $v(t)$ seien auf dem Rande C von B stetige Funktionen. Dann gibt es in B eine und nur eine α-harmonische Funktion mit beschränkten extremen areolären Derivierten zweiter Ordnung, deren zweite areoläre Ableitung fast überall in B gleich $\varphi(x, y)$ ist, welche selbst auf C mit $u(t)$ zusammenfallende Grenzwerte, und deren erste areoläre Ableitung auf C mit $v(t)$ zusammenfallende Grenzwerte hat* (Lösung eines Randwertproblems).

Beweis. Die in (55) eingeführte Funktion $U(x, y)$ hat (siehe den Beweis des vorigen Satzes) in B beschränkte extreme areoläre Derivierte zweiter Ordnung, fast überall eine mit $\varphi(x, y)$ zusammenfallende zweite areoläre Ableitung, und besitzt auf C Grenzwerte $g_1(t)$, da sie in der ganzen Ebene stetig ist; auch ihre durch (56) dargestellte, areoläre Ableitung $V(x, y)$ hat auf C Grenzwerte $g_2(t)$. Somit muss eine Funktion $H(x, y)$ gesucht werden, welche in B polyharmonisch zweiter Ordnung ist (vergleiche den Beweis von Satz 26), auf C Grenzwerte gleich $u(t) - g_1(t)$ hat, und deren areoläre Ableitung $K(x, y)$ auf C Grenzwerte gleich $v(t) - g_2(t)$ hat. Die in B harmonische Funktion $K(x, y)$ ist hierdurch eindeutig bestimmt (Lösung des Dirichletschen Problems). Nach Satz 16 gilt das nun auch von $H(x, y)$, welche ja $K(x, y)$ als areoläre Ableitung, und $u(t) - g_1(t)$ als Grenzwertfunktion hat.

Es wird deutlich sein *wie sich die beiden vorigen Sätze auf den Fall von p-ten areolären Ableitungen, mit $p > 2$, ausbreiten lassen.*[58] Das hiermit, auch für $p > 2$, gelöste Randwertproblem ist eine Verallgemeinerung eines von RIQUIER herrührenden und von NICOLESCC[59] in etwas allgemeinerer Form behandelten Randwertproblems.

§ 14. Die Beweise der beiden folgenden Sätze verlaufen wie die der beiden vorigen.

Satz 28. *Jede in einem beschränkten Bereiche B beschränkte, stetige Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ ist in den Punkten des Bereiches zweite areoläre Ableitung einer daselbst α_s-harmonischen Funktion. Alle in B α-harmonischen Funktionen dieser Art werden aus einer von ihnen durch Addition der in B polyharmonischen Funktionen zweiter Ordnung erhalten.*

Satz 29 *geht aus Satz 27 durch Änderung von »messbar (L)« in »stetig«, und von »fast überall« in »überall« hervor.*

Auch hier wird es deutlich sein *wie sich die Sätze auf den Fall von p-ten areolären Ableitungen, mit $p > 2$, ausbreiten lassen.*

Schliesslich weisen wir noch auf die Möglichkeit einer hierher gehörenden Erweiterung von Satz 21 hin, bei der die letzte φ-Funktion in B nicht identisch Null, sondern stetig angenommen werden soll.

§ 14[bis]. Das Problem von Dirichlet lässt bekanntlich Generalisierungen zu, welche von N. WIENER, O. D. KELLOG, O. PERRON u. a. behandelt wurden. Es ist möglich die in den §§ 6, 7 und 13, 14 behandelten Randwertprobleme in gleichartiger Weise zu verallgemeinern. So haben wir als Analogon zu einem WIENERschen Satze bei harmonischen Funktionen[60] den

Satz 30. *C sei der Rand eines beschränkten Bereiches B. $u(t), u^{(1)}(t), \ldots, u^{(p-1)}(t)$ seien auf C definierte, stetige Funktionen $(p \geqq 1)$; $\varphi(x, y)$ sei in B beschränkt und*

---

[58] Als Beispiel einer in B α_s-harmonischen Funktion, deren p-te areoläre Ableitung fast überall in B existiert und gleich $\varphi(\xi, \eta)$ (beschränkt in B) ist, und deren extreme areoläre Derivierte p-ter Ordnung in B beschränkt sind, hat man:

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint\limits_B \varphi(\xi, \eta) \cdot \varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho} \, d\xi \, d\eta,$$

wobei a_p durch (47) gegeben wird.

[59] Siehe M. NICOLESCO, C. R. Acad. Sci. Paris *194* (1932), S. 682, 683.

[60] Siehe N. WIENER, J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. *3* (1924), S. 25, oder G. BOULIGAND, Ann. Soc. Polon. math. *4* (1925), S. 74, 75.

messbar (L). Wir konstruieren in $B + C$ stetige Funktionen $v(x, y)$, $v_1(x, y), \ldots$, $v_{p-1}(x, y)$, welche auf C bzw. mit $u(t)$, $u^{(1)}(t), \ldots, u^{(p-1)}(t)$ zusammenfallen; daneben eine Folge von Dirichletschen Bereichen $(B^{(n)})$, mit den Rändern $(C^{(n)})$, und mit $B^{(n)} < B$, $B^{(n)} + C^{(n)} < B^{(n+1)}$, welche jeden Punkt $(x, y) \in B$ von einem gewissen Index $n(x, y)$ an enthalten. Zu jedem $B^{(n)}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $u_n(x, y)$, welche in $B^{(n)}$ beschränkte, fast überall mit $\varphi(x, y)$ zusammenfallende, extreme areoläre Derivierte p-ter Ordnung hat, welche selbst auf $C^{(n)}$ mit $v(x, y)$, und deren erste bis $(p-1)$-te areoläre Ableitungen dort bzw. mit $v_1(x, y)$ bis $v_{p-1}(x, y)$ zusammenfallende Grenzwerte haben (nach Satz 27 mit $p \geqq 2$, und Satz 14).

In B existiert der Grenzwert $u(x, y) \equiv \lim\limits_{n \to \infty} u_n(x, y)$. Sein Wert ist von der besonderen Wahl der Funktionen $v(x, y)$, $v_1(x, y), \ldots, v_{p-1}(x, y)$ und der approximierenden Bereiche $(B^{(n)})$ unabhängig; er hat in B beschränkte, fast überall mit $\varphi(x, y)$ zusammenfallende, extreme areoläre Derivierte p-ter Ordnung.

Wir nennen $u(x, y)$ *Wienersche Lösung* des *verallgemeinerten* Randwertproblems für den Bereich B.

Beweis. Beschränken wir uns auf den Fall $p = 2$; für $p > 2$ verläuft der Beweis ganz analog, für $p = 1$ sogar einfacher.

Denken wir uns eine bestimmte Wahl der $B^{(n)}$ und der Funktionen $v(x, y)$, $v_1(x, y)$ getroffen. Die Funktion

$$g_n(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B^{(n)}} \log \frac{1}{\varrho} \cdot \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad \text{mit} \quad \varrho = \sqrt{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}},$$

konvergiert in $B + C$ mit zunehmendem n gleichmässig gegen

$$g(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B} \log \frac{1}{\varrho} \cdot \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Jede Funktion $u_n^{(1)}(x, y)$ hat in $B^{(n)}$ beschränkte, fast überall mit $\varphi(x, y)$ zusammenfallende, extreme areoläre Derivierte, und nimmt auf $C^{(n)}$ Grenzwerte $= v_1(x, y)$ an. Die Differenz $u_n^{(1)}(x, y) - g_n(x, y)$ ist, nach Lemma 4 und Fussn. 14, Satz a, in $B^{(n)}$ harmonisch; ihre Grenzwerte auf $C^{(n)}$ sind gleich $v_1(x, y) - g_n(x, y)$. Nach einem Satze von Lebesgue[61] lässt sich die durch die Differenz $v_1(x, y) - g_n(x, y)$ auf den $C^{(n)}$ definierte, stetige Funktion erweitern zu einer in B stetigen Funktion, welche auf C Grenzwerte gleich $u^{(1)}(t) - g(t)$ hat. Nach dem Wienerschen

[61] Siehe Bouligand, loc. cit. 60, S. 74, oder C. Carathéodory, *Reelle Funktionen* I, Leipzig-Berlin 1939, S. 155.

Satz hat $u_n^{(1)}(x,y) - g_n(x,y)$ für $n \to \infty$ eine in B harmonische Grenzfunktion. Somit existiert in B auch $u^{(1)}(x,y) \equiv \lim_{n\to\infty} u_n^{(1)}(x,y)$; sie hat dort beschränkte extreme areoläre Derivierte, welche fast überall gleich $\varphi(x,y)$ sind; die Funktionen $u_n^{(1)}(x,y) - g_n(x,y)$, und somit auch die Funktionen $u_n^{(1)}(x,y)$, sind in B gleichmässig beschränkt. Ausserdem geht aus dem Wienerschen Satze hervor, dass bei einer anderen Wahl von $(B^{(n)})$ und $v_1(x,y)$ dieselbe Funktion $u^{(1)}(x,y)$ erhalten wäre.

Die Funktion $h_n(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B^{(n)}} \log\frac{1}{\varrho}\cdot u_n^{(1)}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$ konvergiert in $B+C$ mit zunehmendem n gleichmässig gegen $\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B} \log\frac{1}{\varrho}\cdot u^{(1)}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$. Jede Funktion $u_n(x,y)$ hat in $B^{(n)}$ die areoläre Ableitung $u_n^{(1)}(x,y)$, und nimmt auf $C^{(n)}$ Grenzwerte $= v(x,y)$ an. Die Differenz $u_n(x,y) - h_n(x,y)$ ist in $B^{(n)}$ harmonisch; ihre Grenzwerte auf $C^{(n)}$ sind gleich $v(x,y) - h_n(x,y)$. Nach dem Wienerschen Satz hat $u_n(x,y) - h_n(x,y)$ für $n \to \infty$ eine in B harmonische Grenzfunktion. Somit existiert in B auch $u(x,y) \equiv \lim_{n\to\infty} u_n(x,y)$; sie hat dort eine areoläre Ableitung gleich $u^{(1)}(x,y)$, und besitzt somit in B beschränkte, fast überall mit $\varphi(x,y)$ zusammenfallende, extreme areoläre Derivierte zweiter Ordnung. Auch hier geht aus dem Wienerschen Satz hervor, dass eine andere Wahl von $(B^{(n)})$ und $v(x,y)$, $v_1(x,y)$ dieselbe Funktion $u(x,y)$ gegeben hätte. —

Aus der Konstruktion der Wienerschen Lösung folgt, dass diese für jeden Dirichletschen Bereich mit der durch die Sätze 27 (mit $p \geqq 2$) und 14 festgelegten Lösung des zugehörigen (beschränkten) Randwertproblems zusammenfällt; man nehme nur $v(x,y) \equiv u(x,y)$, $v_j(x,y) \equiv u^{(j)}(x,y)$ $(j = 1, \ldots, p-1)$, wobei $u(x,y)$ die Lösung dieses Randwertproblems ist.

Aus dem Beweise von Satz 30 geht hervor, dass jede Wienersche Lösung unseres verallgemeinerten Randwertproblems Summe eines in der ganzen Ebene definierten und stetigen Doppelintegrals und einer Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems ist. Daraus folgt unmittelbar, dass das Verhalten unserer Lösung am Rande C von B weitgehend mit dem der Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems übereinstimmen wird.

Definition 7. Ein Punkt t des Randes C eines beschränkten Bereiches B heisse *regulärer Punkt p-ter Ordnung* $(p \geqq 1)$, wenn bei jeder Wahl der stetigen

Randfunktionen $u(t)$, $u^{(1)}(t), \ldots, u^{(p-1)}(t)$ und jeder Wahl der in B beschränkten, nach Lebesgue messbaren Funktion $\varphi(x, y)$ für die Wienersche Lösung $u(x, y)$ des zugehörigen verallgemeinerten Randwertproblems immer

$$\lim_{\substack{(x,y)\to t;\\ (x,y)\in B}} u(x,y) = u(t), \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to t;\\ (x,y)\in B}} u^{(j)}(x,y) = u^{(j)}(t) \qquad (j = 1, \ldots, p-1)$$

ist.

Dann hat man den

Satz 31. *Die regulären Punkte p-ter Ordnung fallen für jede Wahl von p mit den regulären Punkten beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem zusammen.*

Daraus folgt der

Satz 32. *Die irregulären Punkte p-ter Ordnung* (d. h. die nicht-regulären Punkte p-ter Ordnung) *des Randes C eines beschränkten Bereiches B bilden eine Menge von der Kapazität Null* (im Sinne von DE LA VALLÉE POUSSIN), *dieselbe für jede Wahl von p.*

§ 15. **Definition 8.** B sei ein beschränkter, Dirichletscher Bereich. Als *Greensche Funktion p-ter Ordnung von B für den Punkt* $(x, y) \in B$ $(p \geqq 1)$ definieren wir eine Funktion $g_p(\xi, \eta; x, y)$, welche sich in B als Summe von $\varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho}$, mit $\varrho = \sqrt{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}}$, und einer $\alpha^{(p)}$-harmonischen Funktion $\omega_p(\xi, \eta; x, y)$ schreiben lässt, und welche, ebenso wie ihre ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen, auf C mit Null zusammenfallende Grenzwerte hat.[62]

Satz 33. *Zu jedem beschränkten, Dirichletschen Bereiche B gibt es eine eindeutig bestimmte Greensche Funktion p-ter Ordnung* $(p \geqq 1)$.

Beweis. Es genügt $p \geqq 2$ anzunehmen.

Es muss eine in B $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion $\omega_p(\xi, \eta; x, y)$ bestimmt werden, welche selbst und deren erste bis $(p-1)$-te areoläre Ableitungen auf C Grenzwerte annehmen, bzw. gleich

$$-\varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho}, \quad -\left[\varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho}\right]^{(1)}, \ldots, \quad -\left[\varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho}\right]^{(p-1)}.$$

Nach Satz 29 (für $p \geqq 2$, und mit $\varphi \equiv 0$ in B) wird $\omega_p(\xi, \eta; x, y)$ durch diese

[62] Für $p = 1$ erhält man die Definition der gewöhnlichen Greenschen Funktion zurück. — Für $p \geqq 2$ ist die areoläre Ableitung von $g_p(\xi, \eta; x, y)$ gleich $-2^2(p-1)^2 \cdot g_{p-1}(\xi, \eta; x, y)$.

Bedingungen eindeutig festgelegt. Die Summe $\varrho^{2(p-1)} \log \frac{1}{\varrho} + \omega_p(\xi, \eta; x, y)$ liefert die somit ebenfalls eindeutig bestimmte Greensche Funktion p ter Ordnung.[63]

Satz 23$^{\text{ter}}$. *B und C seien definiert wie in Satz 3. Unter den in Satz 23 für u angenommenen Bedingungen $(p \geqq 2)$ gilt, wenn die (immer existierende) Greensche Funktion, $g_p(\xi, \eta; x, y)$, p-ter Ordnung von B, unabhängig von der Lage von $(x, y) \in B$, mit den aus ihr abzuleitenden Funktionen dieselben Randbedingungen wie u und die aus dieser abgeleiteten Funktionen erfüllt, für jeden Punkt $(x, y) \in B$ die Formel*

$$(57) \quad u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} \int_C u^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1}\, ds + \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint_B g_p(\xi, \eta; x, y) \cdot u^{(p)}\, d\xi\, d\eta;$$

a_p wird durch (47) gegeben.[64]

---

[63] Es gibt eine Folge von Bereichen (B_n) mit

$$B_1 < B_2 < \cdots < B_n < \cdots < B,$$

deren jeder von endlich vielen, in B liegenden, einfachen Kurven, mit endlicher und stetiger Krümmung, begrenzt wird, und welche die Eigenschaft haben, dass jeder Punkt $(x_0, y_0) \in B$ von einem gewissen Index $n(x_0, y_0)$ an zu jedem Bereiche B_n gehört. Ist $g(x, y; C_n; x_0, y_0)$ die Greensche Funktion von B_n und (x_0, y_0), so gilt in jedem Punkte $(x, y) \in B_n$ die Darstellung

$$\text{(a)} \quad g_p(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_n} g_p(s; x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g(s; C_n; x, y)}{\partial n}\, ds + \frac{1}{2\pi} \iint_{B_n} g(\xi, \eta; C_n; x, y) \cdot -2^2(p-1)^2 \cdot g_{p-1}(\xi, \eta; x_0, y_0)\, d\xi\, d\eta \qquad (p \geqq 2).$$

Das folgt aus Satz 7$^{\text{ter}}$, mit Fussn. 22, und einer Bemerkung in Fussn. 62.

Das einfache Integral stellt eine in B_n harmonische Funktion $w(x, y; C_n; x_0, y_0)$ dar, welche auf C_n mit $g_p(s; x_0, y_0)$ zusammenfallende Grenzwerte hat, wie aus dem im letzten Absatz von Fussn. 23 abgeleiteten Satz folgt. Mit zunehmendem n konvergiert ihr Wert in B gleichmässig gegen Null. Ebenso konvergiert $g(\xi, \eta; C_n; x, y)$ in B gleichmässig gegen die Greensche Funktion von B und (x, y), $g_1(\xi, \eta; x, y)$; man lege dabei $g(\xi, \eta; C_n; x, y)$ in den Punkten von $B - \overline{B}_n$ den Wert Null bei.

Für $n \to \infty$ folgt dadurch für jeden Punkt $(x, y) \in B$ aus (a):

$$g_p(x, y; x_0, y_0) = \frac{-2(p-1)^2}{\pi} \iint_B g_1(\xi, \eta; x, y) \cdot g_{p-1}(\xi, \eta; x_0, y_0)\, d\xi\, d\eta;$$

der Integrand ist in B entweder nicht-negativ oder nicht-positiv, das Doppelintegral somit ein Integral im Lebesgueschen Sinne.

Vergleiche auch NICOLESCO, loc. cit. 59.

[64] Hat der beschränkte Bereich B endlich viele analytische Randkurven, gibt es in B eine Funktion $u(x, y)$ mit ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen, $u^{(1)}, \ldots, u^{(p-1)}$, welche auf dem Rande C von B ebenfalls durch u, bzw. $u^{(1)}, \ldots$, bzw. $u^{(p-1)}$ darzustellende Grenzwerte annehmen, die in bezug auf die Bogenlänge stetig differenzierbare Funktionen bilden, und sind die extremen areolären Derivierten p-ter Ordnung von u in B beschränkt, so folgt schon daraus allein, dass u und die aus ihr abgeleiteten Funktionen alle in Satz 23 für u gemachten Annahmen erfüllen.

Beweis. Man nehme in Satz 23 für h_p die Greensche Funktion g_p, und beachte, dass

$$g_p^{(j)} = g_{p-j} \cdot (-1)^j\, 2^{2j} \{(p-1)(p-2)\cdots(p-j)\}^2$$

ist $(j < p)$.

Bemerkung I zu Satz 23$^{\text{ter}}$. Aus der zweiten Hälfte von Fussn. 64 und Satz 23$^{\text{ter}}$ folgt: »Hat der beschränkte Bereich B endlich viele Randkurven mit endlicher und stetiger Krümmung, und gibt es in B eine $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion $u(x,y)$ $(p \geqq 2)$, welche, ebenso wie ihre ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen, auf dem Rande C von B Grenzwerte annimmt, bzw. gleich $u(s)$, $u^{(1)}(s), \ldots, u^{(p-1)}(s)$, die in bezug auf die Bogenlänge Ableitungen haben, welche einer Hölderschen Bedingung genügen, so ist in B

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} \int\limits_C u^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1}\, ds.\text{«} \tag{58}$$

Da jede stetige Randfunktion sich gleichmässig annähern lässt durch Randfunktionen, welche eine Ableitung nach s haben, die einer Hölderschen Bedingung genügt, lässt obiger Satz sich verallgemeinern zu: »Die Relation (58) gilt in B

Zum Beweise vergleiche man die Beweise von Satz 27 (mit $p \geqq 2$) und Satz 14, und die Bemerkung in Fussn. 23, erster Absatz. Dasselbe Verfahren zeigt, dass die Greenschen Funktionen p-ter Ordnung eines derartig begrenzten Bereiches und die zugehörigen ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen im Bereiche partielle Ableitungen nach x und nach y haben, welche auf dem Rande Grenzwerte annehmen, wodurch die Greenschen Funktionen die Bedingungen von Satz 23$^{\text{ter}}$ erfüllen.

Das Verfahren zeigt ebenso: 1. Hat der beschränkte Bereich B endlich viele Randkurven mit endlicher und stetiger Krümmung, gibt es in B eine Funktion $u(x,y)$ mit ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen, $u^{(1)}, \ldots, u^{(p-1)}$, welche auf dem Rande C von B ebenfalls durch u, bzw. $u^{(1)}, \ldots$, bzw. $u^{(p-1)}$ darzustellende Grenzwerte annehmen, die in bezug auf die Bogenlänge Ableitungen haben, welche einer Hölderschen Bedingung genügen, und sind die extremen areolären Derivierten p-ter Ordnung von u in B beschränkt, so genügen u und die aus ihr abgeleiteten Funktionen alle in Satz 23 für u gemachten Annahmen. 2. Hat der beschränkte Bereich B endlich viele Randkurven mit endlicher und stetiger Krümmung, so haben die Greenschen Funktionen p-ter Ordnung von B und die zugehörigen ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen in B partielle Ableitungen nach x und nach y, welche auf dem Rande Grenzwerte annehmen.

Bei der Anwendung des Beweisverfahrens beachte man: a. die im Beweise von Satz 26 abgeleiteten Stetigkeitseigenschaften einiger Integrale; b. den DINIschen Satz [siehe U. DINI, Acta math. *25* (1902), S. 191—197]: »$\varphi(x,y)$ sei im beschränkten Bereiche B beschränkt und messbar (L). Dann besitzt die Funktion

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \varphi(\xi,\eta) \log\frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta, \quad \text{mit } \varrho = \sqrt{\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\}}, \ (x,y) \text{ willkürlich,}$$

in allen Punkten der Ebene stetige partielle Ableitungen nach x und nach y, welche in jedem abgeschlossenen Bereiche einer Hölderschen Bedingung genügen«; c. den in Fussn. 22 besprochenen Satz von SCHAUDER und BRELOT.

ebenfalls, wenn man nur fordert, dass auf jeder der endlich vielen Randkurven, mit endlicher und stetiger Krümmung, eine in B $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion $u(x,y)$ und ihre ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen (endliche) Grenzwerte $u^{(j)}(s)$ annehmen $(p \geqq 2)$.» Vergleiche auch die zweite Hälfte der nachfolgenden Bemerkung.

Bemerkung II zu Satz 23$^{\text{ter}}$. *$u(x,y)$ besitze im beschränkten, Dirichletschen Bereiche B beschränkte areoläre Derivierte zweiter Ordnung* (also $p=2$); *$u(x,y)$ und $u^{(1)}(x,y)$ sollen auf dem Rande C von B Grenzwerte $u(t)$ bzw. $u^{(1)}(t)$ annehmen.* Es gibt eine Folge von Bereichen (B_k) mit

$$B_1 < B_2 < \cdots < B_k < \cdots < B,$$

deren jeder von endlich vielen, in B liegenden, einfachen Kurven, mit endlicher und stetiger Krümmung, begrenzt wird, und welche jeden Punkt $(x,y)\in B$ von einem gewissen Index $k(x,y)$ an enthalten. In jedem Bereiche B_k von genügend hohem Index gibt es, nach Satz 29, eine $\alpha^{(2)}$-harmonische Funktion $w_k(x,y;x_0,y_0)$, welche auf dem Rand C_k von B_k die durch $\varrho^2 \log \frac{1}{\varrho}$, mit $\varrho = \sqrt{\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}}$, $(x_0,y_0)\in B$ und fest, angegebenen Grenzwerte, und deren erste areoläre Ableitung auf C_k Grenzwerte gleich $\left[\varrho^2 \log \frac{1}{\varrho}\right]^{(1)}$ hat. Die Greensche Funktion zweiter Ordnung von B_k und (x_0,y_0), $g_{2;k}(x,y;x_0,y_0)$, ist dann gleich $\varrho^2 \log \frac{1}{\varrho} - w_k(x,y;x_0,y_0)$. Nach Bemerkung I gilt in B_k für die nach Satz 29 eindeutig bestimmte, in B_k $\alpha^{(2)}$-harmonische Funktion $v_k(x,y)$, welche auf C_k Grenzwerte gleich u, und deren erste areoläre Ableitung dort Grenzwerte gleich $u^{(1)}$ hat, die Formel:

$$v_k(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{1} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} \int\limits_{C_k} u^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1;k}\, ds.$$

Da (57) sich in B_k auch auf die Funktion $u(x,y)$ selbst anwenden lässt, muss

$$(59) \qquad u(x_0,y_0) = v_k(x_0,y_0) + \frac{-1}{2\pi a_2} \iint\limits_{B_k} \left[\varrho^2 \log \frac{1}{\varrho} - w_k(x,y;x_0,y_0)\right] u^{(2)}(x,y)\, dx\, dy$$

sein; das Integral ist ein gewöhnliches Lebesguesches.

$v(x,y)$ sei die in B $\alpha^{(2)}$-harmonische Funktion, welche auf C Grenzwerte $u(t)$, und deren erste areoläre Ableitung dort Grenzwerte gleich $u^{(1)}(t)$ hat. Dann gibt

es zu willkürlich positivem ε ein $K(\varepsilon)$ derart, dass für jedes $k \geqq K(\varepsilon)$ in jedem Punkte $(x, y) \in B_k + C_k$

$$|v^{(1)}(x,y) - v_k^{(1)}(x,y)| < \varepsilon \tag{60}$$

ist.[24]

In jedem Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ sei:

$$h(\bar{x},\bar{y}) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B} v^{(1)}(x,y) \log \frac{1}{\varrho}\, dx\, dy,$$

und

$$h_k(\bar{x},\bar{y}) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B_k} v_k^{(1)}(x,y) \log \frac{1}{\varrho}\, dx\, dy,$$

mit

$$\varrho = \sqrt{\{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2\}}.$$

Dann folgt mit (60), dass zu willkürlich positivem η ein $K_0(\eta)$ existiert, so dass für $k \geqq K_0(\eta)$ in jedem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}) \in B_k + C_k$

$$|h(\bar{x},\bar{y}) - h_k(\bar{x},\bar{y})| < \eta \tag{61}$$

ist.

Die in B definierte Funktion $v(\bar{x},\bar{y}) - h(\bar{x},\bar{y})$ und die in B_k definierte Funktion $v_k(\bar{x},\bar{y}) - h_k(\bar{x},\bar{y})$ sind harmonisch, und ihre Grenzwerte auf C bzw. C_k sind $u - h$ bzw. $u - h_k$. Zu willkürlich positivem θ gibt es somit ein $K_1(\theta)$, so dass für jedes $k \geqq K_1(\theta)$ in jedem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}) \in B_k + C_k$

$$|\{v(\bar{x},\bar{y}) - h(\bar{x},\bar{y})\} - \{v_k(\bar{x},\bar{y}) - h_k(\bar{x},\bar{y})\}| < \theta \tag{62}$$

ist.[24]

Aus (61) und (62) folgt, dass für genügend hohem Index k die Differenz

$$v_k(\bar{x},\bar{y}) - v(\bar{x},\bar{y})$$

für alle Punkte $(\bar{x},\bar{y}) \in B_k + C_k$, absolut genommen, unter dieselbe positive Zahl herabgedrückt werden kann.

Dasselbe gilt für

$$w_k(\bar{x},\bar{y}; x_0, y_0) - w(\bar{x},\bar{y}; x_0, y_0),$$

wobei $g_2(\bar{x},\bar{y}; x_0, y_0) \equiv \varrho^2 \log \frac{1}{\varrho} - w(\bar{x},\bar{y}; x_0, y_0)$ *die Greensche Funktion zweiter Ordnung von B und dem festen Punkte* $(x_0, y_0) \in B$ ist $[\varrho = \sqrt{\{(\bar{x}-x_0)^2 + (\bar{y}-y_0)^2\}}]$.

Aber dadurch lässt sich statt (59) schreiben:

(63)
$$u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0) + \frac{-1}{2\pi a_2} \iint_B g_2(x, y; x_0, y_0) \cdot u^{(2)}(x, y)\, dx\, dy.$$

Die Darstellung (63) *gilt in jedem Punkt* $(x_0, y_0) \in B$.

Es wird deutlich sein, *wie sich die hier für* $p = 2$ *abgeleitete Relation* (63) *auf den Fall einer natürlichen Zahl* $p > 2$ *übertragen lässt.*[65]

Neben Satz 25 haben wir hier:

Satz 34. $u(x, y)$ *besitze im beschränkten Bereiche* B_1 *areoläre Ableitungen aller Ordnungen.*

Genügt ein samt seinem Rande C *in* B_1 *liegender Bereich* B *den Bedingungen von Satz 3, hat* B *für jede natürliche Zahl* p *eine den Bedingungen des vorangehenden Satzes genügende Greensche Funktion* p*-ter Ordnung für jeden Punkt* $(x, y) \in B$,[66] *und gibt es eine positive Zahl* $M \geqq 1$ *derart, dass für jeden derartigen Punkt* (x, y)

$$\lim_{p \to \infty} \left[\text{obere Grenze aller } \frac{|g_j \cdot u^{(j)}|}{M^{2j}} \text{ für } j \geqq p \right] \equiv \lim_{p \to \infty} \sup \frac{|g_p \cdot u^{(p)}|}{M^{2p}}$$

$$(\textit{mit } u^{(p)} = p\textit{-te areol. Abl. von } u)$$

in B *gleichmässig gegen eine in* B *beschränkte Grenzfunktion konvergiert, so ist in* B

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}(j!)^2} \int_C \Delta^j u \cdot \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1}\, ds;$$

dabei ist $g_{j+1}(\xi, \eta; x, y)$ *die Greensche Funktion* $(j + 1)$*-ter Ordnung von* B *für den Punkt* (x, y).

Der Beweis verläuft, unter Anwendung des vorigen Satzes, wie der des Satzes 25.

§ 16. **Satz 35.** *Im beschränkten Bereiche* B *sei* $\{u_k(x, y)\}$ *eine Folge von Funktionen, welche dort erste bis* p*-te areoläre Ableitungen haben. Die Folge der* p*-ten areolären Ableitungen* $\{u_k^{(p)}(x, y)\}$ *sei in* B *gleichmässig beschränkt, und konvergiere*

---

[65] Auch für jeden beschränkten, übrigens willkürlichen Bereich lassen sich (63) und die analogen Formeln mit $p > 2$ beweisen; nur sollen dabei g_p eine »generalisierte» Greensche Funktion p-ter Ordnung (im Sinne der Betrachtungen von § 14[bis]), und v eine WIENERsche Lösung eines zugehörigen »verallgemeinerten» Randwertproblems sein. Vergleiche Fussn. 25.

[66] Nach Fussn. 64 ist dies der Fall, wenn der Rand C aus Kurven mit endlicher und stetiger Krümmung besteht.

fast überall gegen die Funktion $U(x,y)$; die Folge $\{u_k(x,y)\}$ sei in B gleichmässig beschränkt, und konvergent in einer überall dichten, abzählbaren Teilmenge E von B. Dann konvergiert $\{u_k(x,y)\}$ gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche von B gegen eine Funktion $u(x,y)$, welche in B stetige partielle Ableitungen erster bis $(2p-1)$-ter Ordnung hat, wobei in jedem Punkte $(x,y)\in B$

$$\frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j\,\partial y^l}u(x,y)=\lim_{k\to\infty}\frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j\,\partial y^l}u_k(x,y) \qquad (j+l\leqq 2p-1) \tag{64}$$

ist; auch die in (64) auftretende Folge von partiellen Ableitungen konvergiert gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B. Ausserdem existiert fast überall in B die p-te areoläre Ableitung $u^{(p)}(x,y)$, mit

$$u^{(p)}(x,y)=\lim_{k\to\infty}u_k^{(p)}(x,y)=U(x,y). \tag{65}$$

Die letzte Relation gilt in jedem Punkte von B, wenn wir noch fordern, dass die Folge $\{u_k^{(p)}(x,y)\}$ in jedem Punkte von B konvergent, und die zugehörige Grenzfunktion $U(x,y)$ in B stetig ist.

Beweis. Aus den Bedingungen des Satzes folgt, mit Fussn. 58 und Fussn. 14 (Satz a), dass die Funktionen

$$v_k(x,y)\equiv u_k(x,y)-\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint\limits_B u_k^{(p)}(\xi,\eta)\cdot\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta$$
$$\left[\varrho=\sqrt{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}}\right]$$

in B $\alpha^{(p)}$-harmonisch und gleichmässig beschränkt sind, und dass die Folge $\{v_k(x,y)\}$ in E konvergent ist.

Nach Nicolesco[67] folgt hieraus, dass $\{v_k(x,y)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B gleichmässig gegen eine in B $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion $v(x,y)$ konvergiert; ausserdem dass jede Folge $\left\{\frac{\partial^{s+t}}{\partial x^s\,\partial y^t}v_k(x,y)\right\}$ in jedem derartigen Teilbereich gleichmässig gegen die zugehörige Ableitung $\frac{\partial^{s+t}}{\partial x^s\,\partial y^t}v(x,y)$ konvergiert.

Für $0<j+l\leqq 2p-1$ sind in B für jede Funktion $u_k(x,y)$ die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j\,\partial y^l}\left\{\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint\limits_B u_k^{(p)}(\xi,\eta)\cdot\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta\right\}\text{ stetig, und} \tag{66}$$
$$=\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint\limits_B u_k^{(p)}(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j\,\partial y^l}\left\{\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\right\}d\xi\,d\eta,$$

---

[67] Siehe Nicolesco, loc. cit. 45 (erstes Zitat), S. 86.

wie man einsieht durch Betrachtungen analog denen am Anfang des Beweises von Satz 26[68]. Die Funktion $\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint\limits_B U(\xi,\eta)\cdot\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta$ hat, nach Fussn. 58, in B gleichmässig beschränkte areoläre Derivierte p-ter Ordnung, welche fast überall gleich $U(x,y)$ sind, während für ihre partiellen Ableitungen aller Ordnungen $\leqq 2p-1$ in jedem Punkte von B Relationen wie (66) gelten.

Wegen der gleichmässigen Beschränktheit der Folge $\{u_k^{(p)}(x,y)\}$ und ihrer Konvergenz gegen $U(x,y)$ in fast allen Punkten von B folgt, mit (66), für $0\leqq j+l\leqq 2p-1$ in jedem Punkte $(x,y)\in B$:

$$(67)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j\,\partial y^l}\left\{\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint\limits_B u_k^{(p)}(\xi,\eta)\cdot\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta\right\}=$$

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint\limits_B U(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j\,\partial y^l}\left\{\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\right\}d\xi\,d\eta=$$

$$\frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j\,\partial y^l}\iint\limits_B U(\xi,\eta)\cdot\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta;$$

die Konvergenz in B der durch (67) gegebenen Folge ist gleichmässig. Hieraus und aus den Eigenschaften von $v_k(x,y)$ folgen in jedem Punkte von B die Relation

$$u(x,y)=\lim_{k\to\infty}u_k(x,y),\quad\text{mit}\quad u(x,y)\equiv v(x,y)+\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint\limits_B U(\xi,\eta)\cdot\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta,$$

und die Relationen (64); die Konvergenz ist jedesmal gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B. Die in (64) auftretenden partiellen Ableitungen sind in B stetig.

Auch (65) folgt nun leicht in fast allen Punkten von B.

Mit Lemma 4 folgt, dass, falls $U(x,y)$ in B stetig ist,

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}\iint\limits_B U(\xi,\eta)\cdot\varrho^{2(p-1)}\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta$$

in jedem Punkte von B eine areoläre Ableitung p-ter Ordnung gleich $U(x,y)$

[68] Wir bemerken nebenbei, dass sich hier zeigt, *dass jede Funktion, welche in B beschränkte areoläre Derivierte p-ter Ordnung hat, dort stetige partielle Ableitungen erster bis $(2p-1)$-ter Ordnung hat, so dass sich dann in B auch schreiben lässt: $u^{(j)}(x,y)=(-1)^j\Delta^j u(x,y)$, für jedes $j\leqq p-1$.*

hat. Da auch $v^{(p)}(x,y)$ in jedem Punkte von B existiert, und gleich Null ist, existiert dann in jedem derartigen Punkt $u^{(p)}(x,y)$, mit

$$u^{(p)}(x,y) = v^{(p)}(x,y) + U(x,y) = U(x,y).^{69}$$

Satz 35 ist als eine Übertragung eines Montelschen Reihensatzes bei harmonischen Funktionen zu betrachten; die beiden folgenden Sätze sind als Übertragungen der beiden Reihensätze von Harnack bei diesen Funktionen aufzufassen.

Satz 36. *Im beschränkten, Dirichletschen Bereiche B sei eine Folge von Funktionen $\{u_k(x,y)\}$ gegeben, welche dort endliche p-te areoläre Ableitungen haben. Jede Funktion $u_k(x,y)$ und ihre areolären Ableitungen $u_k^{(1)}(x,y)$ bis $u_k^{(p-1)}(x,y)$ sollen auf dem Rande C von B Grenzwerte haben, die wir bzw. durch $u_k(t)$, $u_k^{(1)}(t)$ bis $u_k^{(p-1)}(t)$ darstellen. Die Folgen $\{u_k(t)\}$, $\{u_k^{(1)}(t)\}$ bis $\{u_k^{(p-1)}(t)\}$ seien auf C gleichmässig konvergent, während $\{u_k^{(p)}(x,y)\}$ in B gleichmässig beschränkt sei, und dort gegen eine stetige Funktion konvergiere.*[70]

Dann konvergieren die Folgen $\{u_k(x,y)\}$, $\{u_k^{(1)}(x,y)\}$ bis $\{u_k^{(p-1)}(x,y)\}$ in B (dabei gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich), bzw. gegen eine Funktion $u(x,y)$ und ihre ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen, während $\{u_k^{(p)}(x,y)\}$ dort gegen die ebenfalls existierende p-te areoläre Ableitung $u^{(p)}(x,y)$ konvergiert.[71]

Beweis. Nach der Bemerkung zu Satz 7^{ter} ist in jedem Punkte $(x,y) \in B$:

$$u_k^{(p-1)}(x,y) = v_{k;\,p-1}(x,y) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B g(\xi,\eta;x,y)\cdot u_k^{(p)}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{68}$$

wobei $g(\xi,\eta;x,y)$ die Greensche Funktion von B für den Pol (x,y) ist, und $v_{k;\,p-1}(x,y)$ die in B harmonische Funktion darstellt, welche auf C dieselben Grenzwerte wie $u_k^{(p-1)}(x,y)$ hat. Aus der gleichmässigen Konvergenz der Folge $\{u_k^{(p-1)}(t)\}$ auf C folgt, dass $\{v_{k;\,p-1}(x,y)\}$ in B gleichmässig gegen eine harmonische Funktion $v_{p-1}(x,y)$ konvergiert. Daraus und aus der Konvergenz und gleichmässigen Beschränktheit der Folge $\{u_k^{(p)}(x,y)\}$ in B folgt mit (68), dass

[69] Man sieht leicht, dass es zum Beweise dieser Gleichheit in jedem Punkte von B schon genügt anzunehmen, dass die fast überall in B existierende Grenzfunktion $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^{(p)}(x,y)$ sich zu einer im ganzen Bereiche B stetigen Funktion $U(x,y)$ erweitern lässt.

[70] Dies ist der Fall, wenn $\{u_k^{(p)}(x,y)\}$ in B gleichmässig konvergiert, und jede Funktion $u_k^{(p)}(x,y)$ dort stetig ist.

[71] Vergleiche Satz 36 mit Nicolesco, loc. cit. 43, S. 198 (Th. IV) u. 195 (Th. II).

$\{u_k^{(p-1)}(x,y)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B gleichmässig konvergiert, mit

$$\lim_{k\to\infty} u_k^{(p-1)}(x,y) = v_{p-1}(x,y) + \frac{1}{2\pi}\iint_B g(\xi,\eta;x,y)\cdot \lim_{k\to\infty} u_k^{(p)}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{69}$$

Anwendung von (19) auf die nach Satz 16 eindeutig bestimmte Funktion, welche auf C Grenzwerte gleich Null hat, und deren areoläre Ableitung in B gleich $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^{(p)}(x,y)$ ist, zeigt, dass das in (69) vorkommende Doppelintegral in allen Punkten von B eine areoläre Ableitung gleich $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^{(p)}(x,y)$ hat; dasselbe gilt somit, wegen der Harmonizität von $v_{p-1}(x,y)$ in B, von $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^{(p-1)}(x,y)$.

Die im Vorigen angewandten Betrachtungen lassen sich nun auch auf die Folge $\{u_k^{(p-2)}(x,y)\}$, statt $\{u_k^{(p-1)}(x,y)\}$, anwenden; dass die dabei anzuwendende Bedingung der gleichmässigen Beschränktheit der Folge $\{u_k^{(p-1)}(x,y)\}$ in B erfüllt ist, folgt aus der Darstellung

$$u_k^{(p-1)}(x,y) = w_{k;\,p-1}(x,y) + \frac{1}{2\pi}\iint_B \log\frac{1}{\varrho}\cdot u_k^{(p)}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

einer jeden Funktion $u_k^{(p-1)}(x,y)$ als Summe eines Doppelintegrals und einer in B harmonischen Funktion, welche in jedem Punkte t von C einen Grenzwert hat gleich der Differenz von $u_k^{(p-1)}(t)$ und dem Werte dieses Doppelintegrals in t. Man leitet so die gleichmässige Konvergenz von $\{u_k^{(p-2)}(x,y)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B ab, und ausserdem dass $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^{(p-2)}(x,y)$ in B eine areoläre Ableitung gleich $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^{(p-1)}(x,y)$ hat.

So fortfahrend erhält man nach endlich vielen Schritten alle Behauptungen des Satzes.

Satz 37. *Ein beschränkter Bereich B enthalte einen abgeschlossenen, konvexen Teilbereich $\mathfrak{T}$, in dessen Innerem die Punkte $\{(x_\tau, y_\tau)\}$ $(\tau = 1, 2, \ldots, p)$ liegen. Für jede Funktion der Folge $\{u_k(x,y)\}$ existiere in B die p-te areoläre Ableitung, wobei in jedem Punkte $(x,y)\in B$ für jede natürliche Zahl k:*

$$u_{k+1}(x,y) \leqq u_k(x,y),\quad u_{k+1}^{(j)}(x,y) \leqq u_k^{(j)}(x,y)\ \ (j = 1,\ldots,p-1),\quad u_{k+1}^{(p)}(x,y) \geqq u_k^{(p)}(x,y)$$

sei; die Folge $\{u_k^{(p)}(x,y)\}$ sei in B gleichmässig beschränkt und fast überall konvergent.

Konvergiert nun $\{u_k(x,y)\}$ in jedem Punkte (x_τ, y_τ) $(\tau = 1, 2, \ldots, p)$, so konvergiert sie gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche von B gegen eine Funktion $u(x,y)$; dabei wird in allen Punkten von B (64), und in fast allen Punkten von B (65) erfüllt.

Beweis. In jedem abgeschlossenen, Dirichletschen Teilbereich B_1 von B, welcher $\mathfrak{T}$ enthält, lässt sich, nach der Bemerkung zu Satz 7^{ter} und Bemerkung II zu Satz 23^{ter}, schreiben:

$$u_k(x,y) = v_k(x,y) + \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint_{B_1} g_p(\xi,\eta;x,y) \cdot u_k^{(p)}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$u_k^{(j)}(x,y) = v_k^{(j)}(x,y) + \frac{(-1)^{p-j-1}}{2\pi a_{p-j}} \iint_{B_1} g_{p-j}(\xi,\eta;x,y) \cdot u_k^{(p)}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \quad (j = 1, \ldots, p-1);$$

hierbei ist $v_k(x,y)$ die in B_1 $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion, welche mit ihren ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen auf dem Rande von B_1 Grenzwerte, bzw. gleich $u(x,y)$, $u^{(1)}(x,y)$ bis $u^{(p-1)}(x,y)$, annimmt, und $g_{p-j}(\xi,\eta;x,y)$ die Greensche Funktion $(p-j)$-ter Ordnung von B_1 für den Punkt (x,y).

Da $g_{p-j}(\xi,\eta;x,y)$ in B_1 das Zeichen von $(-1)^{p-j-1}$ hat, und in B $u_{k+1} \leqq u_k$, $u_{k+1}^{(j)} \leqq u_k^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, p-1)$, dagegen $u_{k+1}^{(p)} \geqq u_k^{(p)}$ ist, hat man in jedem Punkte $(x,y) \in B_1$

$$v_{k+1}(x,y) \leqq v_k(x,y), \qquad v_{k+1}^{(j)}(x,y) \leqq v_k^{(j)}(x,y) \qquad (j = 1, \ldots, p-1).$$

Ausserdem konvergiert die Folge von $\alpha^{(p)}$-harmonischen Funktionen $\{v_k(x,y)\}$ in jedem Punkte (x_τ, y_τ) $(\tau = 1, \ldots, p)$. Nach Nicolesco[72] folgt hieraus die gleichmässige Konvergenz von $\{v_k(x,y)\}$ in B_1, und somit auch von $\{u_k(x,y)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B_1. Mit Satz 35 führt das zu den Behauptungen unseres Satzes.

§ 17. Der in (57) vorkommende Ausdruck

$$w(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} \int_C u^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1}\, ds \tag{70}$$

ist eine im zugehörigen Bereich B polyharmonische Funktion p-ter Ordnung. Unter näheren Voraussetzungen *hat $w(x,y)$ mit ihren ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen, $w^{(1)}$ bis $w^{(p-1)}$, auf C bzw. mit u, $u^{(1)}$ bis $u^{(p-1)}$ zusammenfallende Grenzwerte*; dies ist u. a. der Fall, wenn der Rand aus endlich vielen einfachen Kurven mit endlicher und stetiger Krümmung besteht.[73] Da das Zeichen von $g_p(\xi,\eta;x,y)$ in allen Punkten von B mit dem von $(-1)^{p-1}$ zusammenfällt,[74] ist dann wegen (57) *in allen Punkten von B*

---

[72] Siehe Nicolesco, loc. cit. 43, S. 201, 202 (Th. VI).

[73] Das folgt aus der Bemerkung I zu Satz 23^{ter} und Satz 29 (mit $p \geqq 2$).

[74] Dies folgt aus den in Fussn. 63 gegebenen Integraldarstellungen der Greenschen Funktionen p-ter Ordnung.

$$u(x,y) \leqq w(x,y),$$

wenn nur fast überall in B $u^{(p)} \leqq 0$ ist.

Für $p = 1$ finden wir eine schon früher gemachte Bemerkung zurück (§ 5). Dies führt uns dazu in Analogie zu der von F. Riesz herrührenden Definition der subharmonischen Funktionen[75] einzuführen die

Definition 9. Hat die in einem beschränkten Bereiche B_1 definierte Funktion $u(x,y)$ daselbst erste bis $(p-1)$-te areoläre Ableitungen $(p \geqq 2)$, und sind ihre extremen areolären Derivierten p-ter Ordnung beschränkt in jedem in B_1 liegenden, abgeschlossenen Teilbereich,[76] so heisst *u in B_1 subharmonisch p-ter Ordnung*, wenn folgende Bedingung erfüllt wird:

B sei ein samt seinem aus endlich vielen einfachen Kurven, mit endlicher und stetiger Krümmung, bestehenden Rande C in B_1 liegender Bereich. Ist dann $w(x,y)$ die immer existierende, eindeutig bestimmte, $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion, welche mit ihren ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen auf C Grenzwerte hat, die bzw. mit u, $u^{(1)}$ bis $u^{(p-1)}$ zusammenfallen (siehe den Anfang dieses §), so soll in jedem Punkte $(x,y) \in B$

$$u(x,y) \leqq w(x,y)$$

sein.

u heisst *in B_1 superharmonisch p-ter Ordnung*, wenn $-u$ dort subharmonisch p-ter Ordnung ist.

Ist u in B_1 sub- und superharmonisch p-ter Ordnung, so ist sie dort $\alpha^{(p)}$-harmonisch, und umgekehrt.

Als Analogon zu Satz 9 haben wir:

Satz 38^a. *Hat $u(x,y)$ in einem beschränkten Bereiche B_1 erste bis $(p-1)$-te areoläre Ableitungen $(p \geqq 2)$, und sind ihre p-ten extremen areolären Derivierten in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B_1 beschränkt, so ist $u(x,y)$ in B_1 dann und nur dann subharmonisch p-ter Ordnung, wenn die p-te areoläre Ableitung von $u(x,y)$ in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\leqq 0$ ist.*[77]

---

[75] Siehe Rado, loc. cit. 24, S. 1.

[76] Diese Bedingung lässt sich in verschiedener Weise verallgemeinern.

[77] Ist $u(x,y)$ im beschränkten Bereiche B subharmonisch p-ter Ordnung, und sind ihre extremen areolären Derivierten p-ter Ordnung dort beschränkt, so gilt in B, nach Fussn. 65 und Satz 32, die Darstellung:

$$u(x,y) = v(x,y) + \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint_B g_p(\xi,\eta;x,y) \cdot \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

mit φ beschränkt und $\leqq 0$, $v(x,y)$ $\alpha^{(p)}$-harmonisch in B. Fussn. 58 führt zu einer gleichartigen Formel. Vgl. die Rieszsche Darstellung subharmonischer Funktionen mittels einer Potentialfunktion von nicht-negativen Massen und einer harmonischen Funktion in Rado, loc. cit. 24, S. 42 (n° 6. 15).

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend (siehe den Anfang dieses §).

Sie ist auch notwendig. Da die p-ten extremen areolären Derivierten von u in jedem abgeschlossenen Teilbereich B beschränkt und messbar (L)[19] sind, folgt aus Lemma 2, dass $u^{(p)}$ fast überall in B_1 existiert. Wir wollen voraussetzen, dass die Teilmenge $E(u^{(p)} > 0)$ von B_1 positives Mass hat. Dann gibt es einen Punkt $(x_1, y_1) \in B_1$ mit

$$(71) \qquad u^{(p)}(x_1, y_1) > 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \frac{\iint\limits_{\Gamma(x_1, y_1; r)} g_p(\xi, \eta; x_1, y_1) \cdot u^{(p)} d\xi\, d\eta}{\pi r^2} = \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} g_p(x_1, y_1; x_1, y_1) \cdot u^{(p)}(x_1, y_1),$$

somit[78] ebenfalls > 0;

dabei ist g_p die Greensche Funktion p-ter Ordnung der Kreisfläche $\Gamma(x_1, y_1; r)$ für den Mittelpunkt (x_1, y_1). Nach Satz 23^{ter} gilt (57) für jedes $\Gamma(x_1, y_1; r)$ von genügend kleinem Radius. Wegen (71) kann der Radius $\bar{r}$ so klein gewählt werden, dass

$$u(x_1, y_1) > \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} \int\limits_{K(x_1, y_1; \bar{r})} u^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1}\, ds$$

ist; falls $w(x, y)$ die gemäss Definition 9 zu $\Gamma(x_1, y_1; \bar{r})$ gehörende $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion darstellt, folgt hieraus und aus der Darstellung (70), bezogen auf $\Gamma(x_1, y_1; \bar{r})$,

$$u(x_1, y_1) > w(x_1, y_1).$$

Wir gelangen zu einem Widerspruch.

Bemerkung zu Definition 9 und Satz 38ᵃ. Betrachtungen analog (sogar teilweise identisch mit) denen im Beweise von Satz 38^a lassen sich, unter Benutzung der Bemerkung II zu Satz 23^{ter}, leicht dazu anwenden zu zeigen, *dass eine mit Definition 9 völlig aequivalente Definition der in B_1 subharmonischen Funktionen p-ter Ordnung erhalten wird, wenn man als Bereiche B alle Dirichletschen Teilbereiche von B_1 zulässt.* Ebenso erhält man eine aequivalente Definition, wenn man nur durch endlich viele einfache analytische Kurven begrenzte Teilbereiche als Bereiche B benutzt.

Satz 38ᵇ. *Hat $u(x, y)$ im beschränkten Bereiche B_1 erste bis $(p-1)$-te areoläre Ableitungen $(p \geqq 2)$, und sind ihre p-ten extremen areolären Derivierten in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B_1 beschränkt, so ist $u(x, y)$ in B_1 dann und nur dann subharmonisch p-ter Ordnung, wenn folgende Bedingung erfüllt wird:*

[78] Siehe den Text bei Fussn. 74.

B sei ein samt seinem aus endlich vielen einfachen Kurven, mit endlicher und stetiger Krümmung, bestehenden Rande C in B_1 liegender Bereich. Ist dann $v(x,y)$ in B $\alpha^{(p)}$-harmonisch, haben v, $v^{(1)}$ bis $v^{(p-1)}$ auf C Grenzwerte, bzw. gleich $v(s)$, $v^{(1)}(s)$ bis $v^{(p-1)}(s)$, und ist auf C

$$u(s) \leqq v(s), \qquad u^{(j)}(s) \leqq v^{(j)}(s) \qquad (j = 1, \ldots, p-1), \tag{72}$$

so soll in jedem Punkte $(x,y) \in B$

$$u(x,y) \leqq v(x,y)$$

sein.

Beweis. Dass die Bedingung hinreichend ist, folgt unmittelbar aus der Definition 9.

Sie ist auch notwendig. $w(x,y)$ sei die in Definition 9 im Bereiche B zu u konstruierte, $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion. Dann ist somit auf dem Rande C von B

$$u(s) = w(s), \qquad u^{(j)}(s) = w^{(j)}(s) \qquad (j = 1, \ldots, p-1). \tag{73}$$

Nun sind die Greenschen Funktionen erster bis p-ter Ordnung von B für einen Punkt $(x,y) \in B$ auf C Null, und haben in B positive oder negative Werte, je nachdem ihre Ordnung ungerade oder gerade ist.[74] Daraus und aus (72) und (73) folgt:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} \int_C \{v^{(j)} - w^{(j)}\} \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1}\, ds \geqq 0. \tag{74}$$

Durch Anwendung der Bemerkung I zu Satz 23^{ter} bei den in B $\alpha^{(p)}$-harmonischen Funktionen $w(x,y)$ und $v(x,y)$ folgt, dass (74) sich schreiben lässt:

$$v(x,y) - w(x,y) \geqq 0 \quad \text{für} \quad (x,y) \in B.$$

Nach Definition 9 ist in jedem derartigen Punkte

$$u(x,y) \leqq w(x,y),$$

also auch

$$u(x,y) \leqq v(x,y).$$

Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen.

Bemerkung zu Satz 38$^{\text{b}}$. *Die in Satz 38^b gegebene, notwendige und hinreichende Bedingung lässt sich ersetzen durch:*

B sei ein samt seinem Rande C in B_1 liegender, Dirichletscher Bereich. Ist dann $v(x,y)$ in B $\alpha^{(p)}$-harmonisch, haben v, $v^{(1)}$ bis $v^{(p-1)}$ auf C (endliche) Grenzwerte $v(t)$, $v^{(1)}(t)$ bis $v^{(p-1)}(t)$, und ist auf C

$$(75) \qquad u(t) \leqq v(t), \qquad u^{(j)}(t) \leqq v^{(j)}(t) \qquad (j = 1, \ldots, p-1),$$

so soll in jedem Punkte $(x, y) \in B$

$$u(x, y) \leqq v(x, y)$$

sein.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend.

Sie ist auch notwendig. Nehmen wir u in B_1 subharmonisch p-ter Ordnung an. Für den Dirichletschen Teilbereich B seien auf dem Rande C die Relationen (75) erfüllt. Es gibt eine Folge von Bereichen $(B^{(n)})$ mit

$$B^{(1)} < B^{(2)} < \cdots < B^{(n)} < \cdots B,$$

deren jeder von endlich vielen einfachen Kurven mit endlicher und stetiger Krümmung begrenzt wird, und welche jeden Punkt $(x, y) \in B$ von einem gewissen Index $n(x, y)$ an enthalten. Zu willkürlich positivem ε gibt es ein $N(\varepsilon)$ derart, dass für jedes $n \geqq N(\varepsilon)$ auf dem zugehörigen Rande $C^{(n)}$

$$u(x, y) \leqq v(x, y) + \varepsilon, \qquad u^{(j)}(x, y) \leqq v^{(j)}(x, y) + \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, p-1)$$

ist.

Sei nun $w_n(x, y)$ die in $B^{(n)}$ $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion, welche, ebenso wie ihre areolären Ableitungen erster bis $(p-1)$-ter Ordnung, auf $C^{(n)}$ Grenzwerte hat, die $\equiv \varepsilon$ sind; zu willkürlich positivem η lässt sich die positive Zahl ε so bestimmen, dass in jedem $B^{(n)}$

$$|w_n(x, y)| < \eta$$

ist.[79]

Aus Satz 38^b folgt in jedem $B^{(n)}$ mit $n \geqq N(\varepsilon)$:

$$u(x, y) \leqq v(x, y) + w_n(x, y) < v(x, y) + \eta.$$

Somit muss in B

$$u(x, y) \leqq v(x, y)$$

sein.

Definition 10. Es sei

$$V\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{p}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2^0} & \cdots & \frac{1}{p^0} \\ 1 & \frac{1}{2^1} & \cdots & \frac{1}{p^1} \\ 1 & \frac{1}{2^2} & \cdots & \frac{1}{p^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2^{p-1}} & \cdots & \frac{1}{p^{p-1}} \end{vmatrix}$$

[79] Zum Beweise vergleiche man die zweite Hälfte der Bemerkung II zu Satz 23^{ter}.

und

$$V\left[\mu(u;x,y;r),\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{p}\right]=\begin{vmatrix}\mu_0(u;x,y;r) & \frac{1}{2^0} & \cdots & \frac{1}{p^0}\\ \mu_1(u;x,y;r) & \frac{1}{2^1} & \cdots & \frac{1}{p^1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mu_{p-1}(u;x,y;r) & \frac{1}{2^{p-1}} & \cdots & \frac{1}{p^{p-1}}\end{vmatrix},$$

wobei $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ die in Definition 5 angegebene Bedeutung haben.

Satz 38^c^. *Hat $u(x,y)$ in einem beschränkten Bereiche B_1 erste bis p-te areoläre Ableitungen ($p \geqq 2$), und ist auch ihre p-te areoläre Ableitung dort stetig, so ist $u(x,y)$ in B_1 dann und nur dann subharmonisch p-ter Ordnung, wenn in jedem Punkte $(x,y)\in B_1$*

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r^{2p}}\left[\frac{V\left[\mu(u;x,y;r),\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{p}\right]}{V\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{p}\right)}-u(x,y)\right]\geqq 0$$

ist.

Beweis. Nach Formel (39)[80] hat man für (x,y) und r fest, und $s = 0, 1, \ldots,$ oder $p-1$:

$$(76)\quad \mu_s(u;x,y;r)=u(x,y)+\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i\frac{1}{(i+1)^s}\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2i}u^{(i)}(x,y)+$$
$$+(-1)^p\frac{1}{(p+1)^s}\frac{1}{(p!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2p}\{u^{(p)}(x,y)+\varepsilon_s^{(p)}(x,y;r)\}.$$

Wegen der Stetigkeit von $u^{(p)}$ in (x,y) ist dabei

$$\lim_{r\to 0}\varepsilon_s^{(p)}(x,y;r)=0 \qquad (s=0,1,\ldots,p-1).$$

Elimination von $u^{(1)}(x,y)$ bis $u^{(p-1)}(x,y)$ aus den p Gleichungen (76) liefert:

$$0=-V\left[\mu(u;x,y;r),\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{p}\right]+u(x,y)\cdot V\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{p}\right)+$$
$$+(-1)^p\frac{1}{(p!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2p}\left\{u^{(p)}(x,y)\cdot V\left(\frac{1}{p+1},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)+\eta^{(p)}(x,y;r)\right\},$$

mit

$$(77)\qquad \lim_{r\to 0}\eta^{(p)}(x,y;r)=0;$$

die Bedeutung von $V\left(\frac{1}{p+1},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)$ wird dabei deutlich sein (vergleiche Def. 10).

---

[80] Siehe auch Fussn. 46.

Man erhält

$$(78)\qquad \frac{V\left[\mu(u;x,y;r),\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right]}{V\left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)}-u(x,y)=$$

$$=(-1)^p\frac{1}{(p!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2p}\frac{u^{(p)}(x,y)\cdot V\left(\frac{1}{p+1},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)+\eta^{(p)}(x,y;r)}{V\left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)}.$$

Das Zeichen des Quotienten der Vandermondeschen Determinanten

$$V\left(\frac{1}{p+1},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)\quad\text{und}\quad V\left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)$$

ist dasselbe wie von $(-1)^{p-1}$. Das hintere Glied von (78) lässt sich dadurch schreiben:

$$r^{2p}\left(A_p u^{(p)}(x,y)+B_p\eta^{(p)}(x,y;r)\right),\quad\text{mit}\quad A_p<0.$$

Aus (77) und (78) folgt hiermit:

$$(79)\qquad \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{2p}}\left[\frac{V\left[\mu(u;x,y;r),\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right]}{V\left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)}-u(x,y)\right]$$

existiert, und ist $=A_p u^{(p)}(x,y)$.

Aus der Bedingung des Satzes folgt nun, da $A_p<0$ ist, dass in jedem Punkte $(x,y)\in B_1$

$$(80)\qquad u^{(p)}(x,y)\leqq 0$$

ist. Nach Satz 38^a ist u dann in B_1 subharmonisch p-ter Ordnung.

Hat, umgekehrt, u diese Eigenschaft, so gilt, nach Satz 38^a, die Ungleichung (80) in fast allen Punkten von B_1, also, wegen der Stetigkeit von $u^{(p)}$, in jedem Punkte von B_1. Mit (79) folgt daraus die Bedingung unseres Satzes.[81]

Der Satz ist ein Analogon eines Satzes von Saks bei subharmonischen Funktionen.[82]

---

[81] Das durch Nicolesco, loc. cit. 45 (zweites Zitat), S. 137, 138, mit der auch hier benutzten Methode untersuchte Theorem scheint uns in seinem zweiten Teil nicht bewiesen zu sein; der erste Teil ist eine unmittelbare Folge unserer Sätze 38^a und 38^c.

[82] Siehe Rado, loc. cit. 24, S. 14.

Korollar. *Hat $u(x,y)$ in einem beschränkten Bereiche B_1 erste bis p-te areoläre Ableitungen ($p \geqq 2$), und ist auch $u^{(p)}$ stetig, so ist $u(x,y)$ in B_1 dann und nur dann $a^{(p)}$-harmonisch, wenn zu jedem Punkte $(x,y) \in B_1$ eine Folge von Kreisen mit Mittelpunkt (x,y) und Radien $\{r_n(x,y)\}$ gehört, für die*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x,y) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\{r_n(x,y)\}^{2p}} \left[\frac{V\left[\mu(u;x,y;r_n(x,y)),\ \frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right]}{V\left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p}\right)} - u(x,y) \right] = 0$$

ist.

Das Korollar ist ein Analogon eines Satzes von BLASCHKE in der Theorie der harmonischen Funktionen.[83]

Satz 39. *Im beschränkten Bereiche B_1 sei eine Funktionenfolge $\{u_k(x,y)\}$ gegeben, deren jedes Glied in B_1 eine stetige p-te areoläre Ableitung hat ($p \geqq 2$).*

Wir fordern weiter:

1° die Folge konvergiert in einem einzelnen Punkte von B_1; das gleiche gilt für die Folgen $\{u_k^{(1)}(x,y)\}$ bis $\{u_k^{(p-1)}(x,y)\}$;

2° die Folgen $\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_k}{\partial y}\right\}$ und $\left\{\frac{\partial u_k^{(j)}}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_k^{(j)}}{\partial y}\right\}$ $(j = 1,\ldots,p-1)$ sind in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B_1 gleichmässig konvergent; und:

3° in jedem derartigen Teilbereich ist die Folge $\{u_k^{(p)}(x,y)\}$ gleichmässig konvergent.

Dann existiert in B_1

$$v_0(x,y) \equiv \lim_{k\to\infty} u_k(x,y), \tag{81}$$

und hat dort eine stetige p-te areoläre Ableitung. Dabei ist

$$v_0^{(j)}(x,y) = \lim_{k\to\infty} u_k^{(j)}(x,y) \qquad (j = 1,\ldots,p); \tag{82}$$

die Konvergenz der Folgen (81) und (82) ist gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B_1.[84]

Ist jede Funktion $u_k(x,y)$ ausserdem in B_1 subharmonisch p-ter Ordnung, so gilt dasselbe von $v_0(x,y)$.[85]

---

[83] Siehe W. BLASCHKE, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., Leipziger, *68* (1916), S. 3—7.

[84] Anwendung von Satz 35 führt zu weiteren Folgerungen.

[85] Analoge Erweiterungen der Sätze 35, 36 u. 37 liegen auf der Hand.

Beweis. Anwendung von Satz 12 mit Ergänzung liefert in B_1 die Existenz der dort α-harmonischen Funktion $v_{p-1}(x,y) \equiv \lim_{k\to\infty} u_k^{(p-1)}(x,y)$, daneben die Gleichmässigkeit der Konvergenz dieser Folge in jedem abgeschlossenen Teilbereich T; es ist $v_{p-1}^{(1)}(x,y) = \lim_{k\to\infty} u_k^{(p)}(x,y)$, mit in T gleichmässiger Konvergenz, und somit Stetigkeit von $v_{p-1}^{(1)}$ in B_1.

In derselben Weise beweist man die Existenz und gleichmässige Konvergenz in jedem derartigen T von $v_{p-2}(x,y) \equiv \lim_{k\to\infty} u_k^{(p-2)}(x,y)$; dabei ist $v_{p-2}^{(1)}(x,y) = v_{p-1}(x,y)$.

So fortfahrend gelangt man nach endlich vielen Schritten zur Existenz und gleichmässigen Konvergenz in jedem T von $v_0(x,y) \equiv \lim_{k\to\infty} u_k(x,y)$; dabei ist $v_0^{(1)}(x,y) = v_1(x,y)$.

In jedem Punkte $(x,y) \in B_1$ gilt somit (82).

Dass aus der Subharmonizität p-ter Ordnung der u_k die Subharmonizität von $v_0(x,y)$ folgt, sieht man durch Anwendung von Satz 38^a leicht ein.

Lemma 6. Der Rand C eines beschränkten Bereiches B sei Summe von endlich vielen, einfachen, analytischen Kurven. Dann existiert in jedem Punkte $(\bar{x},\bar{y}) \in C$ die Normalableitung der Greenschen Funktion p-ter Ordnung $(p \geqq 1)$, $g_p(x,y;x_0,y_0)$, von B in bezug auf den willkürlichen Punkt $(x_0,y_0) \in B$ und hat einen von Null verschiedenen Wert mit dem Zeichen von $(-1)^{p-1}$.

Beweis. Der Fall $p = 1$ ist bekannt.[86]

Für $p \geqq 2$ ist, nach Fussn. 63, in jedem Punkte $(x,y) \in B$:

$$g_p(x,y;x_0,y_0) = \frac{-2(p-1)^2}{\pi} \iint_B g_1(\xi,\eta;x,y) \cdot g_{p-1}(\xi,\eta;x_0,y_0)\, d\xi\, d\eta;$$

der Integrand hat immer einerlei Vorzeichen. Da die Randkurve durch $(\bar{x},\bar{y})$ analytisch ist, und jede Greensche Funktion $g_1(\xi,\eta;x,y) = g_1(x,y;\xi,\eta)$, mit $(\xi,\eta) \in B$ und fest, auf dem Rande Grenzwerte $\equiv 0$ hat, gibt es eine offene Kreisfläche $\Gamma\left(\bar{x},\bar{y};\frac{r}{2}\right)$, mit Mittelpunkt $(\bar{x},\bar{y})$ und Radius $\frac{r}{2}$, in welcher jede Funktion $g_1(\bar{x},\bar{y};\xi,\eta)$, mit $(\xi,\eta) \in B - B\cdot\bar{\Gamma}(\bar{x},\bar{y};r)$, sich zu einer dort harmonischen Funktion von x und y erweitern lässt,[87] welche ausserdem stetig ist in x,y,ξ,η, für $(x,y) \in \Gamma\left(\bar{x},\bar{y};\frac{r}{2}\right)$ und $(\xi,\eta) \in B - B\cdot\bar{\Gamma}(\bar{x},\bar{y};r)$.[88]

[86] Siehe BRELOT, loc. cit. 22, S. 180 (man nehme $c \equiv 0$) und 161.

[87] Siehe OSGOOD, loc. cit. 22, S. 700 u. 703.

[88] Man beachte die Darstellung von g_1 als Summe eines Logarithmus und einer harmonischen Funktion und die Maximum-Minimum-Eigenschaft der harmonischen Funktionen; ausserdem die Art der hier auftretenden harmonischen Fortsetzung.

Die Funktion $g_1(x, y; \xi, \eta) \cdot g_{p-1}(\xi, \eta; x_0, y_0)$[89] ist eine stetige Funktion von ξ, η, x, y, falls (x, y) in $\Gamma\left(\bar{x}, \bar{y}; \frac{r}{2}\right)$ und (ξ, η) in $B - B \cdot \bar{\Gamma}(\bar{x}, \bar{y}; r) - \{(x_0, y_0)\}$[90] liegt; sie ist harmonisch in $\Gamma\left(\bar{x}, \bar{y}; \frac{r}{2}\right)$. Wenn $\bar{G}$ ein willkürlicher, abgeschlossener Teilbereich von $B - B \cdot \bar{\Gamma}(\bar{x}, \bar{y}; r) - \{(x_0, y_0)\}$ ist, gilt, nach einem Satze aus der Theorie der harmonischen Funktionen,[91] für die Normalableitung in bezug auf C in $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\frac{\partial}{\partial n} \iint\limits_{\bar{G}} g_1(\bar{x}, \bar{y}; \xi, \eta) \cdot g_{p-1}(\xi, \eta; x_0, y_0)\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{\bar{G}} \frac{\partial}{\partial n} g_1(\bar{x}, \bar{y}; \xi, \eta) \cdot g_{p-1}(\xi, \eta; x_0, y_0)\, d\xi\, d\eta.$$

Da auch $g_p(x, y; x_0, y_0)$ im Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ eine Normalableitung hat,[92] ist

$$(83) \quad \frac{\partial}{\partial n} g_p(\bar{x}, \bar{y}; x_0, y_0) = \frac{-2(p-1)^2}{\pi} \iint\limits_{\bar{G}} \frac{\partial}{\partial n} g_1(\bar{x}, \bar{y}; \xi, \eta) \cdot g_{p-1}(\xi, \eta; x_0, y_0)\, d\xi\, d\eta +$$
$$\lim_{(X, Y) \to (\bar{x}, \bar{y})} \frac{-2(p-1)^2}{\pi \sqrt{\{(X-\bar{x})^2 + (Y-\bar{y})^2\}}} \iint\limits_{B-\bar{G}} g_1(X, Y; \xi, \eta) \cdot g_{p-1}(\xi, \eta; x_0, y_0)\, d\xi\, d\eta;$$

dabei soll (X, Y) ein in $B \cdot \Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)$ auf der Normale in $(\bar{x}, \bar{y})$ liegender Punkt sein.

g_{p-1} hat das Zeichen von $(-1)^{p-2}$, $\frac{\partial}{\partial n} g_1(\bar{x}, \bar{y}; \xi, \eta)$ ist positiv. Dadurch folgt aus (83), dass $\frac{\partial}{\partial n} g_p(\bar{x}, \bar{y}; x_0, y_0)$ das Zeichen von $(-1)^{p-1}$ haben muss.

Satz 40. *$u(x, y)$ sei im beschränkten Bereiche B_1 subharmonisch p-ter Ordnung $(p \geqq 2)$; B sei ein samt seinem aus endlich vielen, einfachen, analytischen Kurven gebildeten Rande C in B_1 liegender Bereich. Die in B $\alpha^{(p)}$-harmonische Funktion*

---

[89] Die oben definierte Erweiterung von $g_1(x, y; \xi, \eta)$ deuten wir hier ebenfalls durch $g_1(x, y; \xi, \eta)$ an.

[90] Wir dürfen uns r so klein gewählt denken, dass (x_0, y_0) ausserhalb $\bar{\Gamma}(\bar{x}, \bar{y}; r)$ liegt.

[91] Vergleiche Osgood, loc. cit. 22, S. 684, 685, wo eine Variable t an Stelle von ξ und η auftritt.

[92] Man beweist dies wie folgt. Für g_1 ist die Eigenschaft bekannt (siehe Fussn. 22). Für $p \geqq 2$ hat $g_p(x, y; x_0, y_0)$ in $B \cdot \Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)$ eine beschränkte areoläre Ableitung (siehe Fussn. 62). Die Differenz $g_p(x, y; x_0, y_0) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B \cdot \Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)} g_p^{(1)}(\xi, \eta; x_0, y_0) \cdot \log \frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta$, mit $\varrho = \sqrt{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}}$, ist in $B \cdot \Gamma(\bar{x}, \bar{y}; r)$ harmonisch; sie hat, ebenso wie das in ihr vorkommende Doppelintegral, auf einem $(\bar{x}, \bar{y})$ im Innern enthaltenden Randbogen Grenzwerte, deren Ableitung in bezug auf die Bogenlänge dort einer Hölderschen Bedingung genügt (siehe den Dinischen Satz in Fussn. 64). Daraus folgt (nach dem Schauderschen Satze in Fussn. 22), dass die Differenz, und somit auch $g_p(x, y; x_0, y_0)$ selbst, in $(\bar{x}, \bar{y})$ eine stetige Normalableitung hat.

$v(x, y)$ soll mit ihren ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen auf C Grenzwerte $v(s)$, $v^{(1)}(s)$ bis $v^{(p-1)}(s)$ haben, welche bzw. grösser als oder gleich $u(s)$, $u^{(1)}(s)$ bis $u^{(p-1)}(s)$ sind. Gibt es nun einen Punkt $(x_0, y_0) \in B$ mit

$$v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0), \tag{84}$$

so ist auch u in B $a^{(p)}$-harmonisch; u fällt dort sogar mit v zusammen.

Beweis. Nach Bemerkung I zu Satz 23[ter] ist in B

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} \int_C v^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1}\, ds.$$

Daraus und aus der für u geltenden Formel (57) folgt, mit (72) bis (74), in jedem Punkte $(x, y) \in B$:

$$u(x, y) - v(x, y) \leqq \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint_B g_p(\xi, \eta; x, y) \cdot u^{(p)}\, d\xi\, d\eta. \tag{85}$$

Wegen (84) ist somit das hintere Glied von (85) $\geqq$ Null in (x_0, y_0). Da $g_p(\xi, \eta; x_0, y_0)$ in B dasselbe Zeichen wie $\dfrac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p}$ hat,[74] und, nach Satz 38[a], fast überall in B $u^{(p)} \leqq 0$ ist, muss fast überall in B

$$u^{(p)}(x, y) = 0$$

sein; wegen der Beschränktheit der p-ten areolären Derivierten von u in B gilt diese Relation, nach Satz a in Fussn. 14, in jedem Punkte von B. $u(x, y)$ ist in B somit $a^{(p)}$-harmonisch.

Da nun

$$0 = u(x_0, y_0) - v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} \int_C \{u^{(j)} - v^{(j)}\} \frac{\partial}{\partial n} g_{j+1}\, ds, \tag{86}$$

und auf C $u^{(j)}(s) \leqq v^{(j)}(s)$ ist $(j = 0, 1, \ldots, p-1)$, während dort nach Lemma 6 $(-1)^j \dfrac{\partial}{\partial n} g_{j+1} > 0$ ist, muss jedes Paar von Grenzwertfunktionen, $u^{(j)}(s)$ und $v^{(j)}(s)$, zusammenfallen. Und da die in (86) vorkommende Summe auch für jeden von (x_0, y_0) verschiedenen Punkt (x, y) von B die Differenz $u(x, y) - v(x, y)$ darstellt, fallen u und v ebenfalls in einem solchen Punkte zusammen.

Bemerkung. *Die in Satz 40 gezogene Folgerung, dass u in B $a^{(p)}$-harmonisch ist, bleibt gültig, wenn B ein Dirichletscher Bereich ist.*

Beweis. Es gibt eine Folge von Bereichen $(B^{(n)})$ mit

$$B^{(1)} < B^{(2)} < \cdots < B^{(n)} < \cdots < B,$$

deren jeder von endlich vielen, einfachen, analytischen Kurven begrenzt wird, und welche jeden Punkt $(x, y) \in B$ von einem gewissen Index $n(x, y)$ an enthalten.[93]

Unter Benutzung der im Beweise der Bemerkung zu Satz 38[b] angewandten Bezeichnungen haben wir auch hier in jedem $B^{(n)}$:

$$|w_n(x, y)| < \eta, \tag{87}$$

und in jedem $B^{(n)}$ mit $n \geqq N(\varepsilon)$:

$$u(x, y) \leqq v(x, y) + \varepsilon, \quad u^{(j)}(x, y) \leqq v^{(j)}(x, y) + \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, p-1). \tag{88}$$

In derselben Weise wie (85) leitet man hier, aus (88), ab, dass in jedem Punkte $(x, y) \in B^{(n)}$, mit $n \geqq N(\varepsilon)$,

$$u(x, y) - [v(x, y) + w_n(x, y)] \leqq \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint\limits_{B^{(n)}} g_{p;n}(\xi, \eta; x, y) \cdot u^{(p)} \, d\xi \, d\eta$$

ist; dabei ist $g_{p;n}$ die Greensche Funktion p-ter Ordnung von $B^{(n)}$.

In B folgt daraus und aus (87):

$$u(x, y) - [v(x, y) + \eta] \leqq \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi a_p} \iint\limits_{B} g_p(\xi, \eta; x, y) \cdot u^{(p)} \, d\xi \, d\eta.$$

Da η willkürlich positiv ist, führt dies für jeden Punkt von B zu (85). Daraus leitet man dann wieder, wie im Beweise von Satz 40, die $\alpha^{(p)}$-Harmonizität von u in B ab.

§ 17[bis]. **Definition 11.** Auf dem Rande C eines beschränkten Bereiches B seien stetige Funktionen $u(t)$, $u^{(1)}(t)$ bis $u^{(p-1)}(t)$ definiert $(p \geqq 2)$. Dann ist eine in B, ebenso wie ihre ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen, nach oben beschränkte Funktion $\Phi(x, y)$ dort *eine Minorante p-ter Ordnung in bezug auf die Randwerte $u(t)$, $u^{(1)}(t)$ bis $u^{(p-1)}(t)$*, wenn sie in B subharmonisch p-ter Ordnung, und in jedem Randpunkte t, die Punkte einer Teilmenge von C von der Kapazität Null (im Sinne von DE LA VALLÉE POUSSIN) ausgenommen,

$$\limsup_{\substack{(x,y) \to t;\\ (x,y) \in B}} \Phi(x, y) \leqq u(t), \qquad \limsup_{\substack{(x,y) \to t;\\ (x,y) \in B}} \Phi^{(j)}(x, y) \leqq u^{(j)}(t) \qquad (j = 1, \ldots, p-1)$$

ist; hierbei deutet, wie üblich, $\Phi^{(j)}(x, y)$ die j-te areoläre Ableitung von $\Phi(x, y)$ an.

[93] Das folgt durch Anwendung von OSGOOD, loc. cit. 22, S. 708 (Theorem). Vergleiche die Ableitung eines analogen Satzes im dreidimensionalen Raum bei KELLOGG, loc. cit. 12, S. 318, 319.

Definition 12. Eine in B, ebenso wie ihre ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen, nach unten beschränkte Funktion $\Psi(x,y)$ ist, unter den gleichen Annahmen wie in Def. 11, in B *eine Majorante p-ter Ordnung in bezug auf* $u(t)$, $u^{(1)}(t)$ *bis* $u^{(p-1)}(t)$, wenn sie dort superharmonisch p-ter Ordnung, und in jedem Randpunkte t, die Punkte einer Teilmenge von der Kapazität Null ausgenommen,

$$\liminf_{\substack{(x,y)\to t;\\(x,y)\in B}} \Psi(x,y) \geqq u(t), \quad \liminf_{\substack{(x,y)\to t;\\(x,y)\in B}} \Psi^{(j)}(x,y) \geqq u^{(j)}(t) \qquad (j=1,\ldots,p-1)$$

ist.

Als Analogon eines PERRON-WIENERschen Satzes in der Theorie des verallgemeinerten Dirichletschen Problems[94] haben wir hier den

Satz 41. *Die Wienersche Lösung des in Satz 30 formulierten verallgemeinerten Randwertproblems ist in allen Fällen, in welchen* $\varphi(x,y)\equiv 0$ *ist, und somit nach einer* $\alpha^{(p)}$*-harmonischen Funktion gesucht wird, gleich der unteren Grenze aller Majoranten und der oberen Grenze aller Minoranten p-ter Ordnung in bezug auf die Randwerte* $u(t)$, $u^{(1)}(t)$ *bis* $u^{(p-1)}(t)$.[95]

Beweis. Es wird genügen den Beweis für den Fall $p=2$ zu liefern.

Die areoläre Ableitung $u^{(1)}(x,y)$ der Wienerschen Lösung $u(x,y)$ ist, da $\varphi\equiv 0$ ist, in B harmonisch. Ausserdem geht aus dem Beweise von Satz 30 hervor, dass sie in B beschränkt ist.

Ist $\Phi(x,y)$ eine Minorante im Sinne der Definition 11, so wird die Differenz $\Phi^{(1)}(x,y)-u^{(1)}(x,y)$ in B nach oben beschränkt und subharmonisch[96] sein; in den Randpunkten (t) von B, die Punkte einer Teilmenge von der Kapazität Null ausgenommen, ist

$$\limsup_{(x,y)\to t;\,(x,y)\in B} [\Phi^{(1)}(x,y)-u^{(1)}(x,y)]^{(1)} \leqq 0.$$

Nach einem Satze von FROSTMAN[97] folgt hieraus in jedem Punkte $(x,y)\in B$:

$$\Phi^{(1)}(x,y)-u^{(1)}(x,y)\leqq 0.$$

---

94 Siehe N. WIENER, J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. *4* (1925), S. 23 u. 24.

95 Eine weitere Anwendung der sub- und superharmonischen Funktionen p-ter Ordnung findet man bei NICOLESCO, loc. cit. 43, S. 199—204.

96 Siehe Satz 38ᵃ und die Bemerkung zu Def. 9 und Satz 38ᵃ.

97 Dieser lautet: »Ist $u(x,y)$ im beschränkten Bereiche B subharmonisch und nach oben beschränkt, und ist in den Randpunkten (t) von B, die Punkte einer Teilmenge des Randes von der Kapazität Null ausgenommen, $\limsup_{(x,y)\to t;\,(x,y)\in B} u(x,y)\leqq M$, so ist in jedem Punkte $(x,y)\in B$ $u(x,y)\leqq M$«. Siehe O. FROSTMAN, Acta Litt. Sci. Szeged *8* (1937), S. 149—159, insbes. S. 158.

Nun ist auch $\Phi(x,y) - u(x,y)$ in B subharmonisch,[96] während aus dem Beweise von Satz 30 hervorgeht, dass $u(x,y)$ in B beschränkt, somit $\Phi(x,y) - u(x,y)$ dort nach oben beschränkt ist. In den Randpunkten (t) von B, die Punkte einer Teilmenge von der Kapazität Null ausgenommen, ist

$$\limsup_{(x,y)\to t;\,(x,y)\in B} \{\Phi(x,y) - u(x,y)\} \leqq 0.$$

Nach dem Frostmanschen Satze muss somit in jedem Punkte $(x,y) \in B$ auch

$$\Phi(x,y) - u(x,y) \leqq 0, \quad \text{oder} \quad \Phi(x,y) \leqq u(x,y) \tag{89}$$

sein.

Ebenso beweist man für jede Majorante $\Psi(x,y)$, dass in den Punkten von B

$$\Psi(x,y) \geqq u(x,y) \tag{90}$$

ist.

$u(x,y)$ und $u^{(1)}(x,y)$ sind in B beschränkt; $u(x,y)$ ist dort $\alpha^{(2)}$-harmonisch. Nach Satz 32 ist in den Randpunkten (t) von B, diejenigen einer Teilmenge von der Kapazität Null ausgenommen,

$$\lim_{(x,y)\to t;\,(x,y)\in B} u(x,y) = u(t),$$

und

$$\lim_{(x,y)\to t;\,(x,y)\in B} u^{(1)}(x,y) = u^{(1)}(t).$$

$u(x,y)$ ist somit sowohl Majorante wie Minorante im Sinne von Definition 12 bzw. 11. Daraus und aus (89) und (90) folgt der Satz.

Kapitel IV.

Eine mit der Klasse der fast überall α-harmonischen Funktionen verwandte Funktionenklasse.

§ 18. Während in den Sätzen 1 und 2 die fast überall in B existierende areoläre Ableitung in fast allen Punkten ihres Existenzbereiches gleich $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ ist, ist unter den Bedingungen der Sätze 3 und 4 keine derartige Relation bekannt. Doch ist $\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$ in allen diesen Sätzen eine in B totalstetige Intervallfunktion; ist nun bekannt, dass die beiden Summanden des rechten Gliedes von

$$\Phi_u(J) \equiv \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

in B totalstetig sind, so gelangt man wieder zum gleichen Resultat wie unter den Bedingungen der Sätze 1 und 2. Wir haben also:

Satz 42. *Die partiellen Ableitungen nach x und nach y einer im beschränkten Bereiche B definierte Funktion $u(x, y)$ seien daselbst stetig. Sind nun*

$$\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \quad \textit{und} \quad \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

in B totalstetige Intervallfunktionen, so existieren in fast allen Punkten von B die areoläre Ableitung von u, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, mit:

$$D_{(x,y)}\, \Phi_u(J) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Beweis. Aus der Totalstetigkeit der beiden Intervallfunktionen und den Differentiationseigenschaften der Doppelintegrale als Punktfunktionen[98] folgt, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ fast überall in B existieren und über B integrierbar (L) sind, und dass in jedem in B liegenden, abgeschlossenen Intervall $\frac{\partial u}{\partial x}$ totalstetig nach x für fast alle y und $\frac{\partial u}{\partial y}$ totalstetig nach y für fast alle x ist. Anwendung von Satz 2 führt zu der gesuchten Relation in fast allen Punkten von B[99].

Korollar. *Im beschränkten Bereiche B sei $\varphi(x, y)$ beschränkt und messbar (L). Hat dann die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\varphi(x, y) \tag{91}$$

---

[98] Siehe z. B. L. SCHLESINGER u. A. PLESSNER, *Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen*, Berlin-Leipzig 1926, S. 180—185.

[99] Bei komplexwertigen Funktionen hat man den Satz: Ist $f(z) \equiv u(x, y) + i\, v(x, y)$ im beschränkten Bereiche B stetig, und sind $\int\limits_{R(J)} (u + i\, v)\, dx$ und $\int\limits_{R(J)} (-v + i\, u)\, dy$ in B totalstetige Intervallfunktionen, so existieren in fast allen Punkten von B die areoläre Ableitung von $f(z)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, mit:

$$D_z\, \Phi f(z) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

In anderer Fassung findet man dieses Resultat bei EVANS, loc. cit. 3, S. 33.

in B eine Lösung $u_1(x, y)$, *für die dort* $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}$ *stetig,* $\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u_1}{\partial y} dx$ *und* $\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u_1}{\partial x} dy$ *totalstetige Intervallfunktionen sind, so ist auch*

$$u_2(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \varphi(\xi, \eta) \log \frac{1}{\varrho} d\xi\, d\eta, \quad mit \quad \varrho = \sqrt{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}},$$

in B eine Lösung von (91).

Beweis. Nach Satz 42 ist für jedes abgeschlossene, in B liegende Intervall J

$$\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u_1}{\partial n} ds = \iint\limits_J \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Auch ist, nach Lemma 4,

$$\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u_2}{\partial n} ds = \iint\limits_J \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Die Differenz $u_1 - u_2$ hat in B stetige partielle Ableitungen nach x und nach y, und es ist

$$\int\limits_{R(J)} \frac{\partial}{\partial n}(u_1 - u_2)\, ds = 0.$$

Nach dem Korollar zu Satz 3 ist $u_1 - u_2$ in B harmonisch. Daraus und aus (91) für u_1 folgt in jedem Punkte $(x, y) \in B$ die gleiche Relation für u_2.

§ 19. Unter den Bedingungen der Sätze 1 bis 4 und 42 fällt $\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n} ds$ mit einer in B additiven und totalstetigen Intervallfunktion zusammen. In diesem Paragraphen wollen wir diese Intervallfunktion nur noch als total-additiv betrachten (vgl. § 3).

Ein Analogon von Lemma 4 ist der

Satz 43. *Im beschränkten Bereiche B sei* $f(e)$ *eine für die nach* Borel *messbaren Teilmengen definierte, total-additive Mengenfunktion. Dann ist die (fast überall endliche) Potentialfunktion*

$$U(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \log \frac{1}{\varrho}\, df(e), \tag{92}$$

wobei $\varrho = \sqrt{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}}$, $(\xi, \eta) \in B$, *fast überall in B linear totalstetig nach x und nach y*[100]. *In fast allen Punkten von B ist*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \frac{x-\xi}{\varrho^2}\, d f(e), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \frac{y-\eta}{\varrho^2}\, d f(e),$$

und für fast alle[101] *in B liegenden, abgeschlossenen Intervalle (J) gilt*

$$\Phi_U(J) \equiv \int\limits_{R(J)} \frac{\partial U}{\partial n}\, d s = f(J).$$

$\frac{\partial U}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial U}{\partial y}$ *sind über jedes abgeschlossene Teilintervall von B integrierbar (L).*

Der Satz folgt aus G. C. Evans, Trans. Amer. Math. Soc. *37* (1935), S. 233 u. 234 (übertragen auf $\Re_2$) und Binney, loc. cit. 3, S. 261 (Corollary; man nehme dort $A(e) \equiv 0$, $B(e) \equiv f(e)$).

Lemma 7. Im beschränkten Bereiche B sei $u(x,y)$ fast überall totalstetig nach x und nach y. Die sodann in B fast überall existierenden Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ seien über jedes zu B gehörende, abgeschlossene Intervall integrierbar (L); für fast alle abgeschlossenen Teilintervalle von B sei das Linienintegral $\int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$ gleich Null. Dann gibt es eine in B harmonische Funktion $\Psi(x,y)$, welche daselbst fast überall mit $u(x,y)$ zusammenfällt.

Das Lemma folgt aus einem Satze von V. S. Fedoroff. Man sehe Binney, loc. cit. 3, S. 262 (Theorem III), und nehme dort $\varphi \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$, $\theta \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$.

Aus Satz 43 und Lemma 7 folgt nun sofort:

Satz 44. *Im beschränkten Bereiche B sei f(e) eine für die nach Borel messbaren Teilmengen total-additive Mengenfunktion. Dann hat jede Funktion*

$$w(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \log\frac{1}{\varrho}\, d f(e) + u(x,y), \tag{93}$$

[100] Das soll heissen: diejenigen Parallelen zur x- und y-Achse, die Punkte mit B gemein haben, und deren Projektion auf y- bzw. x-Achse nicht zu zwei Mengen E_y bzw. E_x vom (linearen) Masse Null gehört, enthalten nur solche zu B gehörenden Liniensegmente, auf welchen U linear totalstetig ist.

[101] Das soll heissen: alle Intervalle, deren Seiten sich auf x- und y-Achse projizieren ausserhalb bestimmte Mengen vom Masse Null.

wobei $u(x,y)$ eine in B harmonische Funktion ist, die Eigenschaft, dass für fast alle in B liegenden, abgeschlossenen Intervalle (J)

$$(94) \qquad \Phi_w(J) \equiv \int\limits_{R(J)} \frac{\partial w}{\partial n}\, ds = f(J)$$

ist; die partiellen Ableitungen von $w(x,y)$ sind über jedes abgeschlossene Teilintervall von B integrierbar (L), und $w(x,y)$ ist in B fast überall totalstetig nach x und nach y.

Umgekehrt, ist $w(x,y)$ eine in B fast überall nach x und nach y totalstetige Funktion, deren partielle Ableitungen über jedes in B liegende, abgeschlossene Intervall integrierbar (L) sind, und welche in fast allen abgeschlossenen Teilintervallen von B die Relation (94) erfüllt, so gibt es eine in B harmonische Funktion $u(x,y)$ und eine Teilmenge E von B vom Masse Null derart, dass $w(x,y)$ in den Punkten von $B-E$ die Darstellung (93) zulässt.

Man vergleiche hiermit Satz 13.

Man erhält einen Spezialfall von Satz 44 (zweite Hälfte), wenn dort »fast überall total stetig nach x und nach y» durch »nur in abzählbar vielen Punkten im Besitze einer unendlichen extremen Derivierten nach x oder nach y» ersetzt wird.

Kapitel V.

Anwendungen.

§ 20. In diesem Paragraphen fangen wir an mit einer einfachen Anwendung der Integraldarstellung (25) in der Theorie der harmonischen Funktionen.

Ist $\varphi(x,y)$ im beschränkten Bereiche B beschränkt, integrierbar (L) und fast überall $\neq 0$, so folgt aus Lemma 4, dass das Integral (25) in allen endlichen Punkten ausserhalb $\bar{B}$ harmonisch ist, während es in den Punkten von $\bar{B}$ nicht harmonisch ist, da in fast allen Punkten von B seine areoläre Ableitung $\neq 0$ ist. Dass darum noch nicht alle Punkte von $\bar{B}$ singuläre Punkte derjenigen Funktion zu sein brauchen, welche durch harmonische Fortsetzung der durch (25) in $C(\bar{B})$ definierten Funktion entsteht, zeigt folgendes Beispiel.

B sei die Kreisfläche mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r=1$. Zwischen den Kreisen $K(0,0;1)$ und $K(0,0;{}^1\!/\!_2\sqrt{2})$ sei $\varphi=-1$, im Innern von $K(0,0;{}^1\!/\!_2\sqrt{2})$ sei $\varphi=+1$. Dann ist $g(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \varphi\cdot\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta$, mit $\varrho = \sqrt{\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\}}$

und $B =$ das Kreisinnere $\Gamma(0, 0; 1)$, in allen Punkten ausserhalb $K(0, 0; 1)$ gleich Null. Die harmonische Fortsetzung führt somit zu einer in allen Punkten der Ebene harmonischen Funktion, welche identisch Null ist; keiner der Punkte von $\bar{B}$ ist singulärer Punkt.

Es gibt Fälle, in welchen sich diejenigen Punkte von $\bar{B}$, die singuläre Punkte der durch harmonische Fortsetzung entstehenden Funktion sind, genau angeben lassen. E sei Summe von zwei einander fremden und kongruenten, im beschränkten Bereiche B liegenden, perfekten, in jedem ihrer Punkte masshaltigen[102], und diskontinuierlichen[103] Punktmengen E_1 und E_2. Wir nehmen $\varphi = +1$ in den Punkten von E_1, $= -1$ in den Punkten von E_2, $= 0$ in den Punkten von $B - E$. Da $C(E)$ ein Bereich ist, ist die Funktion $g(x, y)$ dann nicht nur in $C(\bar{B})$ harmonisch, sondern sogar in $C(E)$, den unendlich fernen Punkt mit einbegriffen[104]. Bekanntlich ist sie in der ganzen Ebene stetig; sie ist als harmonische Fortsetzung der Funktion zu betrachten, welche in $C(\bar{B})$ durch die Werte von $g(x, y)$ selbst definiert wird. Jede Umgebung eines Punktes $(x_0, y_0) \in E$ enthält eine Teilmenge von E von positivem Masse (L), somit, nach Lemma 4, auch Punkte von E, in welchen die areoläre Ableitung von g existiert, und gleich φ, also $\neq 0$ ist. Ein solcher Punkt (x_0, y_0) ist somit singulärer Punkt von g; die Menge der (zu $\bar{B}$ gehörenden) singulären Punkte von g fällt hier mit E zusammen.

Diese Funktion g liefert uns gleichzeitig ein Beispiel einer in der ganzen Ebene definierten, eindeutigen, harmonischen Funktion, welche auf der Menge ihrer singulären Punkte stetig ist.[105]

---

[102] Das soll heissen: jede Umgebung eines solchen Punktes enthält eine Teilmenge von $E_1(E_2)$ von positivem Masse (L).

[103] Das soll heissen: keine der Teilmengen von $E_1(E_2)$ ist ein Kontinuum (E_1 und E_2 sind dann auch nirgends dicht).

[104] Man wende Lemma 4 an.

[105] Vergleiche bei analytischen Funktionen ein gleichartiges Beispiel von D. POMPEIU, Annaes scient. acc. pol. Porto 8 (1913), S. 234—236, konstruiert mittels des Integrals

$$\frac{-1}{\pi} \iint\limits_B \frac{\varphi(z)}{z - \zeta}\, dx\, dy$$

(vgl. Fussn. 30). — Man hätte für E auch *ein nirgends dichtes und in jedem seiner Punkte masshaltiges Kontinuum* nehmen können, wenn $C(E)$ dabei nur *ein Bereich* wäre. Das Verfahren des Textes hätte auch dann ohne mehr benutzt werden können, und *die Existenz einer in der ganzen Ebene stetigen, nur im Bereiche $C(E)$ harmonischen Funktion* geliefert. Im Gegensatz zu dem im Texte behandelten Fall ist hier jedoch nicht bewiesen, dass E die Menge der Singularitätspunkte der aus den Werten von g in $C(\overline{B})$ durch harmonische Fortsetzung entstehenden, ein- oder mehrdeutigen Funktion ist.

§ 21. Areoläre Ableitungen und der generalisierte Laplacesche Operator. In der mathematischen Physik werden generalisierte Laplacesche Operatoren benutzt; man kann einem derartigen Operator Δ_g die folgenden Bedingungen auferlegen:

1° existieren im Bereiche B stetige Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, so existiert in jedem Punkte $(x, y) \in B$ $\Delta_g u$, und hat den Wert $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

2° existieren in B für die stetigen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ $\Delta_g u$ und $\Delta_g v$, so existiert dort auch $\Delta_g[hu + kv]$ (h und k Konstanten), und hat den Wert $h \Delta_g u + k \Delta_g v$;

3° hat die stetige Funktion $u(x, y)$ in B ein stetiges $\Delta_g u$, und gibt es in $(x_0, y_0) \in B$ ein relatives Maximum von u, so ist $\Delta_g u(x_0, y_0) \leqq 0$;

4° ist $\varphi(x, y)$ in B stetig, und liegt ein Kreis K samt seinem Innern Γ in B, so ist in jedem Punkte $(x, y) \in \Gamma$

$$\Delta_g \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \varphi(\xi, \eta) \cdot \log \frac{1}{\varrho} \, d\xi \, d\eta \right\} = -\varphi(x, y), \quad \text{mit} \quad \varrho = \sqrt{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}}.$$

Für jedes derartige Δ_g lässt sich mit einem Beweisverfahren von Zaremba[106] zeigen:

A. *Die in B stetige Funktion $u(x, y)$ ist dort harmonisch, falls in jedem Punkte $(x, y) \in B$*

$$\Delta_g u(x, y) \text{ existiert, und } = 0$$

ist.

Nach Brelot[107] hat man weiter:

B. *Existiert für eine in B stetige Funktion $u(x, y)$ und einen bestimmten, den Bedingungen 1°, 2°, 3°, 4° genügenden Laplaceschen Operator Δ_g in allen Punkten von B $\Delta_g u$, und ist diese dort stetig, so existiert auch für jeden weiteren derartigen Operator Δ_g^0 in den Punkten von B $\Delta_g^0 u$, und hat denselben Wert wie $\Delta_g u$.*

Denn für jeden wie unter 4° definierten Kreis K ist, nach 2° und 4°, in seinem Innern Γ:

$$\Delta_g \left\{ u(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \Delta_g u \cdot \log \frac{1}{\varrho} \, d\xi \, d\eta \right\} = 0.$$

---

[106] Siehe G. Bouligand, *Fonctions harmoniques, Principes de Picard et de Dirichlet*, Mémorial 1926, S. 13.

[107] Siehe Brelot, loc. cit. 22, S. 161.

Nach A ist somit

$$u(x,y) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\Gamma} \Delta_g u \cdot \log\frac{1}{\varrho}\, d\xi\, d\eta$$

dort harmonisch. Daraus folgt, mit 1°, 2° und 4°, in jedem Punkte $(x,y) \in \Gamma$:

$$0 = \Delta_g^0 u(x,y) - \Delta_g u(x,y) \quad \text{oder} \quad \Delta_g^0 u(x,y) = \Delta_g u(x,y).$$

Das gilt nun auch in jedem Punkte von B.

Aus der Definition der areolären Ableitung (Def. 3), Satz 1, Satz 10 und Lemma 4 folgt, dass die mit -1 multiplizierte areoläre Ableitung einen den Bedingungen 1°—4° genügenden Operator liefert.[108] Nun setzt die Existenz der areolären Ableitung von u in einem Bereiche die Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ voraus. Dadurch folgt aus B sofort:

C. *Existiert für die im Bereiche B stetige Funktion $u(x,y)$, bei Benutzung eines den Bedingungen 1°—4° genügenden Operators Δ_g^0, in den Punkten von B $\Delta_g^0 u$, und ist diese dort stetig, so hat $u(x,y)$ in B stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.*

Ein zweites Beispiel eines derartigen Operators wird durch den Grenzwert

$$\lim_{r \to 0} \frac{2^2}{r^2}\left[\mu_0(u; x, y; r) - u(x,y)\right]$$

geliefert, wobei μ_0 durch die Definition 5 gegeben wird; Bedingung 1° ist erfüllt (wegen Satz 1 und Satz 18); das gleiche gilt von 2°—4°.[109]

Dadurch folgt mit B, *dass die Definition 4 der $\alpha^{(p)}$-harmonischen Funktionen sich derartig abändern lässt, dass keine expliziten Annahmen über Existenz (und Stetigkeit) von partiellen Ableitungen darin mehr vorkommen.*

§ 22. Neben den gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich auch Differentialgleichungen mit areolären Ableitungen bilden. In den vorangehenden Paragraphen wurden derartige Gleichungen schon implizite an mehreren Stellen betrachtet. Wir nennen:

1° $D^{(p)}_{(x,y)}\, \Phi_u(J)$ oder $u^{(p)}(x,y) = 0$ $(p \geqq 1)$. Diese Gleichung führte in § 9 zur Definition der mit den polyharmonischen Funktionen p-ter Ordnung zusammenfallenden $\alpha^{(p)}$-harmonischen Funktionen.

---

[108] Weder BOULIGAND noch BRELOT nennen die mit -1 multiplizierte areoläre Ableitung als Beispiel eines generalisierten Laplaceschen Operators.

[109] Siehe auch BOULIGAND, loc. cit. 106, S. 13.

2° $D_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$ oder $u^{(1)}(x,y) = \varphi(x,y)$. Im Falle einer in einem beschränkten Dirichletschen Bereiche stetigen und beschränkten Funktion $\varphi(x,y)$ liefert Satz 16 (§ 7) die Lösung eines zugehörigen Randwertproblems.

3° $D^{(p)}_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$ oder $u^{(p)}(x,y) = \varphi(x,y)$ $(p \geqq 2)$. Hier liefert Satz 29 (für $p \geqq 2$) (§ 14) bei φ wie unter 2° die Lösung eines zugehörigen Randwertproblems.

4° $D_{(x,y)}\,\Phi_u(J)$ oder $u^{(1)}(x,y) = -c(x,y)\cdot u(x,y)$. In seiner schon mehrmals zitierten Arbeit: *Étude sur l'équation de la chaleur* $\Delta u = c(M)\cdot u(M)$, $c(M) \geqq 0$, *au voisinage d'un point singulier du coefficient*. Ann. École norm. (3) *48* (1931), S. 153—246, liefert Brelot eine ausführliche Behandlung von stetigen Lösungen der Gleichung $\Delta u = c(M)\cdot u(M)$, unter der Annahme der Stetigkeit von $c(M)$ ($\geqq 0$) im zugehörigen Definitionsbereich (ev. mit Ausnahme eines singulären Punktes), und unter Benutzung eines den Bedingungen 1°—4° von § 21 genügenden, generalisierten Laplaceschen Operators Δ. Nach § 21 fällt die von Brelot benutzte stetige Funktion Δu mit der zugehörigen, mit -1 multiplizierten areolären Ableitung $u^{(1)}(x,y)$ zusammen. *Somit sind seine Untersuchungen als sich auf die areoläre Differentialgleichung* $u^{(1)}(x,y) = -c(x,y)\cdot u(x,y)$ *beziehend zu betrachten.*[110]

§ 23. Auch eine Klasse von Funktionalgleichungen ist im Vorigen schon gelöst.

$\varphi(x,y)$ *sei im beschränkten Bereiche B beschränkt und messbar* (L). *Es wird gefragt diejenigen in B stetig nach x und nach y differenzierbaren Funktionen $u(x,y)$ aufzufinden, für die zu jedem samt seinem aus einer einfachen rektifizierbaren Kurve bestehenden Rande C_1 in B liegenden Bereiche B_1*

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \iint_{B_1} \varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0$$

ist.

Nach Lemma 4 (mit Fussn. 30) und Satz 13 wird die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint_B \varphi(\xi,\eta)\cdot\log\frac{1}{\varrho}\,d\xi\,d\eta + w(x,y)$$

wobei $w(x,y)$ eine in B harmonische, übrigens willkürliche Funktion ist.

Verlangt man überdies, dass die Funktion $u(x,y)$ auf dem Rande des beschränkten Bereiches, welcher nun ein Dirichletscher sein soll, bestimmte Grenzwerte annimmt, so ist sie, nach Satz 14, *eindeutig bestimmt.*

---

110 In Rend. Ist. Lombardo *63* (1930) u. *65* (1932) untersucht er eine noch allgemeinere Gleichung, welche sich schreiben lässt: $u^{(1)}(x,y) = -c(x,y)\cdot u(x,y) + f(x,y)$.

§ 24. **Satz 45.** *Im beschränkten Bereiche B sei eine »Elektrizitäts»-Menge $\mu(e)$ verteilt; $\mu(e)$ ist dabei als eine total-additive Mengenfunktion aufzufassen, welche für die nach Borel messbaren Teilmengen von B definiert ist, und die für jene Mengen nicht notwendig von einerlei Vorzeichen zu sein braucht. Die Potentialfunktion* $\left(\text{multipliziert mit } \frac{1}{2\pi}\right)$

$$u(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint_B \log \frac{1}{\varrho}\, d\mu(e), \quad mit \quad \varrho = \sqrt{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}}, \quad (\xi, \eta) \in B,$$

sei in B stetig differenzierbar nach x und nach y, und ihre (in B somit existierenden) extremen areolären Derivierten seien daselbst beschränkt.

Dann lässt $\mu(e)$ in fast allen Punkten von B eine Dichte zu, welche dort mit der fast überall in B existierenden, areolären Ableitung $u^{(1)}(x, y)$ zusammenfällt; für jede nach Borel messbare Teilmenge e von B ist

$$\mu(e) = \iint_e u^{(1)}(x, y)\, dx\, dy. \tag{95}$$

Daneben lässt sich schreiben:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_B \log \frac{1}{\varrho} \cdot u^{(1)}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.\text{[111]} \tag{96}$$

Beweis. Die Funktion

$$g(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint_B \log \frac{1}{\varrho} \cdot u^{(1)}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ist eine $\left(\text{mit } \frac{1}{2\pi} \text{ multiplizierte}\right)$ Potentialfunktion, welche nach Lemma 4 in B beschränkte extreme areoläre Derivierte hat, die dort fast überall gleich $u^{(1)}(x, y)$ sind. Die Differenz $u(x, y) - g(x, y)$ hat in B beschränkte extreme areoläre Derivierte und fast überall eine areoläre Ableitung gleich Null. Nach Fussn. 14, Satz a ist diese areoläre Ableitung in B identisch Null; $u(x, y) - g(x, y)$ ist somit in B harmonisch.

---

[111] Nach Lemma 4, mit Fussn. 30, liefert nun das Integral $\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds$ für jedes abgeschlossene, von einer rektifizierbaren Kurve C_1 begrenzte Teilgebiet B_1 von B die in B_1 enthaltene »Elektrizitäts»-Menge. Vgl. Satz 44.

Es lässt sich schreiben:

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_B \log\frac{1}{\varrho}\, d\mu_0(e), \quad \text{mit} \quad \mu_0(e) \equiv \iint\limits_e u^{(1)}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

für alle nach Borel messbaren Teilmengen (e) von B.[112] $u(x,y) - g(x,y)$ ist somit als eine Potentialfunktion einer durch $\mu_1(e) \equiv \mu(e) - \mu_0(e)$ definierte »Elektrizitäts»-Verteilung zu betrachten.

Es lässt sich $\mu_1(e)$ in B als Differenz von zwei nicht-negativen, total-additiven Mengenfunktionen darstellen:

$$\mu_1(e) = \mu_1^+(e) - \mu_1^-(e).$$

Somit ist die Differenz der Funktionen

$$\iint\limits_B \log\frac{1}{\varrho}\, d\mu_1^+(e) \quad \text{und} \quad \iint\limits_B \log\frac{1}{\varrho}\, d\mu_1^-(e)$$

in B harmonisch. Mittels eines Rieszschen Verfahrens[113] folgt hieraus:

$$\mu_1^+(e) \equiv \mu_1^-(e).$$

Da B sich bekanntlich in zwei Mengen E_1 und E_2 $(E_1 \cdot E_2 = 0)$ zerlegen lässt derart, dass μ_1^+ nur für Teilmengen von E_1, und μ_1^- nur für Teilmengen von E_2 von Null verschieden sein kann,[114] müssen beide Mengenfunktionen, und somit auch μ_1, in B identisch Null sein.

$\mu(e)$ und $\mu_0(e)$ fallen zusammen; $u(x,y)$ und $g(x,y)$ sind dadurch in jedem Punkte der Ebene einander gleich. Die Darstellung (96) ist damit bewiesen.

Es ist weiter für jede nach Borel messbare Teilmenge e von B

$$\mu(e) = \mu_0(e) = \iint\limits_e u^{(1)}(x,y)\, dx\, dy.$$

Das gibt (95).

---

[112] Die Ableitung folgt leicht unter Benutzung der Stetigkeit von $\log\frac{1}{\varrho}$.

[113] Siehe Rado, loc. cit. 24, S. 36, 37 (n° 5.18—5.22). Dort wird der Fall behandelt, in welchem bekannt ist, dass die beiden Integrale in B einander gleich sind.

[114] Siehe Saks, loc. cit. 16, S. 32 (Th. 14.1).

Schlussbemerkung.

Die in den Kapiteln 1—3 und 5 gegebenen Betrachtungen lassen sich in auf der Hand liegender Weise auf Funktionen in einem Raume mit $n \geqq 3$ Dimensionen übertragen. Nur werden dabei die in Satz 1 gemachten und in verschiedenen weiteren Sätzen sich wiederholenden Voraussetzungen über den Gebietsrand weniger allgemein sein müssen; die Rolle des Integrals $\iint\limits_B \log \frac{1}{\varrho} \cdot \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ wird vom Integral $\iint \cdots \int\limits_B \frac{1}{\varrho^{n-2}} \cdot \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$ übernommen.