ÜBER DEN RANG VON KURVEN
$y^2 = x(x + a)(x + b)$.

Von

A. WIMAN
in LUND.

I.

1. Wenn man die rationalen Punkte auf einer kubischen Kurve vom Geschlechte $p = 1$ mit rationalen Koeffizienten aufsuchen will, so spielt es eine Hauptrolle, dass auch der dritte Punkt, der auf der Verbindungslinie von zwei rationalen Punkten liegt, rational sein muss. Insbesondere gilt dies für die Tangente in einem rationalen Punkte. In solcher Weise führt die Existenz eines einzigen rationalen Punktes, wenn dieser kein Wendepunkt ist, mit sich die Existenz anderer rationalen Punkte in endlicher oder unendlicher Anzahl, für welche der Punkt als Basispunkt bezeichnet werden kann. Als Rang der Kurve bezeichnete nun H. POINCARÉ[1] die Minimalzahl von Basispunkten, welche nötig sind, um aus denselben sämtliche rationale Punkte der Kurve abzuleiten. Ohne Beweis nahm POINCARÉ den Rang als stets endlich an. Den wichtigsten Fortschritt in dieser Theorie ist L. J. MORDELL[2] zu verdanken, indem es 1922 diesem Verfasser gelang einen Beweis für die obige Annahme aufzufinden. Aus der Endlichkeit des Ranges folgt aber keineswegs die Existenz einer oberen Grenze für ihn, und eine solche Grenze kennt man noch nicht. Später sind wohl die wichtigsten Arbeiten, welche diese Frage betreffen, diejenigen von WEIL, in denen Verallgemeinerungen von MORDELLS Satz gegeben werden, und überdies der Beweis für diesen Satz vereinfacht wird.[3]

---

[1] Journal de Mathématiques, Ser. 5, Bd. 7 (1901).

[2] Proc. of the Cambridge Philos. Society, Bd. 21.

[3] Sieh hierzu das eingehende Referat von G. BILLING in seiner Inauguraldissertation, »*Beiträge zur arithmetischen Theorie der ebenen kubischen Kurven vom Geschlechte eins*» (Königl. Sozietät der Wissenschaften zu Uppsala, 1938). Diese Arbeit enthält eine Einleitung, welche zur Einführung in die Theorie wohl geeignet sein dürfte.

Bei mangelnder Kenntniss einer oberen Grenze für den Rang bleibt noch der Ausweg übrig, dass man das Problem von der anderen Seite angrifft, indem man Kurven von möglichst hohem Range darzustellen sucht. Das wichtigste Ergebniss in dieser Richtung hat man von BILLING, welcher in der Kurve

$$y^2 = x(x^2 - 82)$$

das erste Beispiel einer Kurve vom Range 4 gegeben hat. Die vorliegende Arbeit stellt sich das Ziel zu zeigen, wie sich von jedem Range $\leqq 6$ Kurven in unbegrenzter Anzahl darzustellen lassen. Hierbei beschränke ich mich ausschliesslich auf Kurven vom Typus

$$y^2 = x(x + a)(x + b), \tag{1}$$

wo a und b (oder, was hiermit äquivalent ist, die Grössen e_1, e_2 und e_3 bei der üblichen Bezeichnung) rationale Zahlen bedeuten. Dieser Spezialfall scheint mir nämlich besondere Erleichterungen für die Behandlung darzubieten. Wenn man andererseits nicht länger sämtliche drei Grössen e_1, e_2 und e_3 rational annimmt, so kenne ich nur das Beispiel von BILLING von so hohem Range als vier.

2. Es verhält sich ja so, dass hier die rationalen Punkte einer Kurve sich in Klassen verteilen, welche als Elemente einer Abelschen Gruppe betrachtet werden können. Abgesehen vom Einheitselemente, hat jedes Element dieser Gruppe den Grad zwei. Die Basiselemente für die rationalen Punkte müssen nun zu solchen Klassen gehören, welche die Rolle von erzeugenden Elementen der Abelschen Gruppe übernehmen können. Jede Klasse wird durch diejenigen Faktoren charakterisiert, welche in $x - e_1$, $x - e_2$ und $x - e_3$ eingehen, oder im vorliegenden Falle, in x, $x + a$ und $x + b$. Hier, wo wir im rationalen Zahlenbereiche bleiben, tritt nun die Vereinfachung ein, dass es sich bei der Auflösung der fraglichen Grössen in Primfaktoren um rationale Primzahlen handelt. Es involviert natürlich keine Beschränkung, wenn wir a und b als rationale ganze Zahlen annehmen. Die Primfaktoren, welche hier von Bedeutung sind, besitzen die Eigenschaft, dass dieselben in ungerader Potenz auftreten, und dann selbstverständlich in zwei von den Grössen x, $x + a$ und $x + b$. Wie unmittelbar zu ersehen ist, können als derartige Primzahlen nur Faktoren des Produktes $ab(a - b)$ auftreten. Am einfachsten verfahren wir jetzt, wenn wir eine solche Primzahl als charakteristisch für die dritte Grösse betrachten, welche dieselbe gar nicht oder in gerader Potenz enthält. Eine Klasse von rationalen Punkten auf der Kurve charakterisiert sich also durch die in solcher Weise den Grössen x,

$x+a$ und $x+b$ zugeordneten Primzahlen, wozu noch unter Umständen der Faktor -1 für die Grössen, welche etwa negativ sind, hinzukommt. Bei der Zusammensetzung von zwei Klassen multiplizieren wir für jede der Grössen x, $x+a$ und $x+b$ die charakteristischen Faktoren und verfahren dann wie vorhin mit den Primzahlen, welche in ungerader Potenz vorkommen. Wenn man eine Klasse mit sich selbst zusammensetzt, so erhält man also die Einheitsklasse, wo die drei Grössen x, $x+a$ und $x+b$ Quadrate sind, wie es ja nach den Eigenschaften der oben besprochenen Abelschen Gruppe sein muss.

Diese Verhältnisse wollen wir durch Beispiele beleuchten, in denen es sich um die spezielle Art von Kurven

$$y^2 = x(x^2 - c^2) \tag{2}$$

handelt. Dabei führt die Annahme, dass c ein Produkt von lauter verschiedenen Primzahlen ist, keine Beschränkung mit sich. Zunächst sei

$$c = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7. \tag{3}$$

Ohne Schwierigkeit finden wir auf dieser Kurve den rationalen Punkt

$$x - c = 1050, \quad x = 1260, \quad x + c = 1470.$$

Wie in anderen derartigen Fällen halten wir es für zwecklos die zugehörigen beiden y-Werte niederzuschreiben. Wir schreiben den gemeinsamen Faktor 210 für sich, so dass der Punkt (eigentlich das Punktpaar) durch

$$(5,\ 6,\ 7)\ 210 \tag{P_1}$$

bezeichnet wird. Wenn K_1 die zugehörige Klasse von rationalen Punkten bedeutet, so wird dieselbe durch

$$5,\ 2\cdot 3,\ 7 \tag{K_1}$$

charakterisiert. In gleicher Weise führt

$$x - c = 315, \quad x = 525, \quad x + c = 735$$

auf rationale Punkte, für welche wir die Bezeichnung

$$(3,\ 5,\ 7)\ 105 \tag{P_2}$$

erhalten. Für die zugehörige Klasse K_2 bekommen wir

$$3,\ 5,\ 7. \tag{K_2}$$

Die Zusammensetzung der Klassen K_1 und K_2 führt zu einer neuen Klasse

$(K_{1,2})$ $$1, 2, 3 \cdot 5.$$

Hier kommt man unmittelbar auf

$(P_{1,2})$ $$(1, 8, 15) 30.$$

Betreffend die Klassen, zu denen die drei Punkte auf der Linie $y=0$ gehören, scheint eine Schwierigkeit vorzuliegen, da für diese Punkte eine von den drei Grössen $x-c$, x und $x+c$ verschwindet. Was soll man nämlich damit meinen, dass eine gerade oder ungerade Potenz einer Primzahl in Null aufgeht, und welches von den Zeichen + oder — soll dabei für Null das richtige sein? Was das Zeichen betrifft, gilt natürlich die Regel, dass das Produkt der drei Grössen als positiv betrachtet werden muss. Also soll das Zeichen — entweder nicht oder zweimal vorkommen. Betreffend die andere Frage, so gilt die analoge Regel, dass, wenn eine Primzahl überhaupt in ungerader Potenz auftritt, dies zweimal geschehen muss.

Um diese Verhältnisse zu beleuchten, setzen wir mit dem Beispiel (3) fort. Da haben wir erstens den Punkt

(P_3) $$(0, 210, 420).$$

Wir sehen, dass hier die Primzahl 2, deren zweite Potenz in 420 aufgeht, sich in anderer Weise verhält als die übrigen Primzahlen 3, 5 und 7. Für die entsprechende Klasse K_3 bekommt man

(K_3) $$3 \cdot 5 \cdot 7, 1, 2.$$

Wir betrachten zweitens den Punkt

(P_4) $$(-210, 0, 210).$$

Hier sind die Verhältnisse für 2 und 3, 5, 7 gleichartig, und wir bekommen für die Klasse

(K_4) $$-1, -2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, 1.$$

Setzen wir die Klassen K_3 und K_4 zusammen, so ergibt sich die Klasse

$(K_{3,4})$ $$-2, -1, 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Zu dieser Klasse gehört offensichtlich der dritte Punkt

$(P_{3,4})$ $$(-420, -210, 0)$$

auf der Linie $y=0$.

Nicht völlig in derselben Weise gestalten sich hier die Verhältnisse, wenn c nicht länger eine gerade Zahl bedeutet. Wir nehmen etwa

$$c = 1155 = 3.5.7.11.$$

Als Punkte auf $y = 0$ haben wir

$$(0, 1155, 2310); \quad (-1155, 0, 1155); \quad (-2310, -1155, 0).$$

Die zugehörigen Klassen bekommen die Charakteristiken

$$3.5.7.11, 2, 1; \quad -1, -3.5.7.11, 1; \quad -1, -2, 3.5.7.11.$$

Wie wir sehen, kommt hier in der Bezeichnung für die zweite Klasse 2 gar nicht vor, und für die beiden übrigen Klassen hat diese Primzahl den mittleren Platz erhalten.

3. Es ist jetzt leicht zu sehen, dass für $c = 210$ die Kurve (2) mindestens den Rang 4 besitzt. Die Klassen K_1, K_2 einerseits und K_3, K_4 andererseits können ja als Basiselemente für Vierergruppen betrachtet werden. Da diesen Vierergruppen nur das Einheitselement, d. h. die Einheitsklasse, gemeinsam ist, so muss man, wenn man dieselben kombiniert, eine Abelsche Gruppe der Ordnung 2^4 bekommen. Von den sechszehn Klassen, welche die Bedeutung von Elementen dieser Gruppe haben, kennen wir bereits K_1, K_2, $K_{1,2}$, K_3, K_4, $K_{3,4}$ und die Einheitsklasse. Durch die Zusammensetzung von K_1, K_2, $K_{1,2}$ einerseits mit K_3, K_4, $K_{3,4}$ andererseits erhalten wir die neun restierenden Klassen. Diese lassen sich in der folgenden Weise charakterisieren.

$(K_{1,3})$	$2, 7, 3.$
$(K_{1,4})$	$-7, -1, 5;$
$(K_{1,3,4})$	$-3, -5, 2;$
$(K_{2,3})$	$1, 7, 2.5;$
$(K_{2,4})$	$-7, -2, 3;$
$(K_{2,3,4})$	$-2.5, -3, 1;$
$(K_{1,2,3})$	$2.7, 3.5, 1;$
$(K_{1,2,4})$	$-3.5, -7, 1;$
$(K_{1,2,3,4})$	$-1, -1, 2.7.$

Wenn wir als Repräsentanten für diese Klassen Punkte angeben wollen, so hat dies gar keine Schwierigkeit. Wir erhalten unmittelbar

$(P_{1,3})$	$(2, 7, 12)\ 42;$
$(P_{1,4})$	$(-7, -1, 5)\ 35;$
$(P_{1,3,4})$	$(-12, -5, 2)\ 30;$
$(P_{2,3})$	$(4, 7, 10)\ 70;$
$(P_{2,4})$	$(-7, -2, 3)\ 42;$
$(P_{2,3,4})$	$(-10, -3, 4)\ 30;$
$(P_{1,2,3})$	$(14, 15, 16)\ 210;$
$(P_{1,2,4})$	$(-15, -7, 1)\ \frac{105}{4};$
$(P_{1,2,3,4})$	$(-16, -1, 14)\ 14.$

Wir haben also für sämtliche Klassen, mit Ausnahme von $K_{1,2,4}$, Repräsentanten mit ganzzahligen Koordinaten bekommen. Für die Einheitsklasse ist es am einfachsten den unendlich entfernten Punkt als Repräsentanten zu wählen. Als erzeugende Klassen kann man K_3, K_4 und zwei beliebige andere Klassen mit Ausnahme von $K_{3,4}$ nehmen; doch dürfen bei den beiden letzteren Klassen die Indizes 1 und 2 nicht in gleicher Weise auftreten. Als Basispunkte können wir die oben angegebenen Repräsentanten für diese Klassen wählen, wobei wir für die beiden letzteren Klassen die Wahl zwischen zwei y-Werten haben. Hiermit ist aber nicht bewiesen, dass man von einer solchen Basis zu *sämtlichen* rationalen Punkten auf der Kurve gelangen kann, auch nicht, dass der Rang der Kurve nicht grösser als vier sein kann. Es ist wohl zu erwarten, dass ein Beweis hierfür nicht ohne umständliche Rechnungen gegeben werden kann.[1]

Wenn wir P_1, $P_{1,3}$, $P_{1,4}$, $P_{1,3,4}$ und in gleicher Weise P_2, $P_{2,3}$, $P_{2,4}$, $P_{2,3,4}$. sowie $P_{1,2}$, $P_{1,2,3}$, $P_{1,2,4}$, $P_{1,2,3,4}$ zusammenstellen, wobei wir die bez. gemeinsamen Faktoren weglassen, so erhalten wir die Folgen

$$(5, 6, 7),\quad (2, 7, 12),\quad (-7, -1, 5),\quad (-12, -5, 2);$$
$$(3, 5, 7),\quad (4, 7, 10),\quad (-7, -2, 3),\quad (-10, -3, 4);$$
$$(1, 8, 15),\quad (14, 15, 16),\quad (-15, -7, 1),\quad (-16, -1, 14).$$

[1] Wie sich ein solcher Beweis ausführen lässt, findet man in den bei BILLING (S. 149—158 seiner Dissertation) behandelten Beispielen.

Man sieht unmittelbar, dass hier Gesetzmässigkeit herrscht. Sämtlichen drei Folgen kann man ja die Gestalt

$$(4)\qquad (a,\ a+h,\ a+2h),\quad (2h,\ a+2h,\ 2a+2h),\quad (-(a+2h),\ -h,\ a),\quad (-(2a+2h),\ -a,\ 2h)$$

geben. Hierbei ist es von Bedeutung, dass die Bezeichnungen so gewählt sind, dass in den drei Folgen a eine ungerade Zahl ist. Ohne weiteres versteht man, dass diese Gesetzmässigkeit ihren Grund in einer besonderen Wahl der repräsentierenden Punkte für die Klassen hat. Es handelt sich in der Tat um Beziehungen, welche zwischen den beiden übrigen Schnittpunkten einer geraden Linie mit der Kurve bestehen, falls die Linie durch einen der drei Punkte der Kurve auf $y = 0$ geht. Diese Beziehungen lassen sich übrigens leicht direkt ausrechnen. Je nachdem die Linie durch $x = 0,\ -c,\ +c$ geht, erhalten wir bzw.

$$(5)\qquad x_1 x_2 = -c^2;\quad (x_1+c)(x_2+c) = -2c^2;\quad (x_1-c)(x_2-c) = 2c^2.$$

Hierin steckt eine sehr grosse Menge von Relationen zwischen den Grössen, die in den Ausdrücken für die gewählten repräsentierenden Punkte auftreten, wobei hier natürlich die gemeinsamen Faktoren für $x-c$, x und $x+c$ mitgenommen werden müssen. Um die Lageverhältnisse hier klar zu überschauen, kann man die Parameterdarstellung benutzen. Man sieht dann leichter, wie die Punkte zu je dreien in gerader Linie liegen.

4. Bei Behandlung von neuen Beispielen können wir stets zwei Basispunkte mit $y = 0$ annehmen. Bei der Festsetzung von neuen Basispunkten sind dann zweierlei Vorsichtsmassregeln in Acht zu nehmen. Ein neu hinzukommender Basispunkt darf zu keiner von den Klassen gehören, welche durch die bereits vorhandenen bestimmt werden. Man darf auch nie zu einer von den drei Klassen gelangen, zu denen die drei Punkte auf der Geraden $y = 0$ gehören. Gelingt es unter diesen Bedingungen ν neue Basispunkte einzuführen, so ist der Rang der Kurve wenigstens $2+\nu$. Wir geben in dieser Nummer einige Beispiele mit einem Range $\geqq 4$. Dabei lassen sich die Angaben über die repräsentierenden Punkte mit Leichtigkeit durch Benutzung der Bemerkungen am Ende der vorhergehenden Nummer vervollständigen.

1) $c = 330 = 2.3.5.11$.

(P_1) $(1, 6, 11)\ 66$;

(P_2) $(5, 8, 11)\ 110$;

(K_1)	$1, 2.3, 11$;
(K_2)	$5, 2, 11$;
$(K_{1,2})$	$5, 3, 1$;
$(P_{1,2})$	$(5, 27, 49)\, 15$.

2) $c = 2730 = 2.3.5.7.13$.

(P_1)	$(7, 10, 13)\, 910$;
(P_2)	$(5, 13, 21)\, \frac{1365}{4}$
(K_1)	$7, 2.5, 13$;
(K_2)	$5, 13, 3.7$;
$(K_{1,2})$	$13, 2.7, 3.5$;
$(P_{1,2})$	$(13, 14, 15)\, 2730$.

3) $c = 3570 = 2.3.5.7.17$.

(P_1)	$(3, 10, 17)\, 510$;
(P_2)	$(7, 17, 27)\, 357$;
(K_1)	$3, 2.5, 17$;
(K_2)	$7, 17, 3$;
$(K_{1,2})$	$7.17, 2.3.5, 1$;
$(P_{1,2})$	$(119, 120, 121)\, 2730$.

Wir nehmen noch zwei Beispiele, in denen c ungerade ist. Dabei wird man finden, dass die Primzahl 2 hier in etwas anderer Weise auftritt.

4) $c = 1155 = 3.5.7.11$.

(P_1)	$(8, 15, 22)\, 165$;
(P_2)	$(10, 21, 32)\, 105$;
(K_1)	$1, 2.3.5, 11$;
(K_2)	$5, 2.3.7, 1$;
$(K_{1,2})$	$1, 7, 5.11$;
$(P_{1,2})$	$(1, 28, 55)\, \frac{385}{9}$.

5) $c = 12155 = 5.11.13.17$.

(P_1)	$(26, 81, 136)\, 221$;
(P_2)	$(1, 221, 441)\, \frac{221}{4}$;
(K_1)	$13, 2, 17$;
(K_2)	$1, 13.17, 1$:
$(K_{1,2})$	$17, 2, 13$;
$(P_{1,2})$	$(306, 361, 416)\, 221$.

5. Bei diesen Untersuchungen war das Hauptziel eine Kurve von höherem Range als vier zu entdecken. Dies ist uns auch gelungen und zwar für

$$c = 510510 = 2.3.5.7.11.13.17, \tag{6}$$

also bei einem so grossen c-Wert, dass es zweifelhaft erscheinen könnte, in wie weit die Eigenschaften der Kurve sich überschauen lassen. Doch waren einige Augenblicke genug, um die Überzeugung zu gewinnen, dass *diese Kurve nicht von niedrigerem Range als fünf sein kann.* Ich fand nämlich unmittelbar die drei rationalen Punkte:

$$(42, 55, 68)\, 39270;$$
$$(80, 91, 102)\, 46410;$$
$$(11, 65, 119)\frac{85085}{9}.$$

Man nehme je dabei eine beliebige von den beiden zugehörigen y-Werten. Hier haben sämtliche drei Ausdrücke zwischen den Klammern die Eigenschaft, dass das letzte Glied den Faktor 17 besitzt. Hieraus sieht man sofort, dass die zugehörigen Klassen von einander unabhängig sind, so dass die Punkte eine Basis für ein System rationaler Punkte vom Range drei darbieten. In den Charakteristiken der Klassen dieses Systems tritt offensichtlich 17 entweder gar nicht oder bei dem letzten Gliede auf, und das Zeichen — ist bei denselben gar nicht vertreten. Es sind dies Eigenschaften, welche, wie wir aus der 2. Nummer wissen, keiner von denjenigen Klassen zukommen, zu denen die drei Punkte auf $y = 0$ gehören. Der Rang der Kurve muss mithin $\geqq 5$ sein.

Um hier die Zusammenstellung (4) direkt benutzen zu können, muss für die Basispunkte das erste Glied in den Klammern eine ungerade Zahl sein, und es ist dies der Grund, warum wir in der folgenden Zusammenstellung nicht das obige Punkttripel als Basis gewählt haben. Wir ersetzen also dieses Tripel mit einem anderen Tripel, bei welchem die oben besprochene Bedingung für das erste Glied erfüllt wird und verfahren dann wie bei dem Falle $c = 210$. Die zwei Basispunkte auf $y = 0$ mögen hier mit P_4 und P_5 bezeichnet werden. Die gemeinsamen Faktoren für $x - c$, x und $x + c$ werden mitgenommen.

(P_1)	$(13, 34, 55)\ 24310;$
(P_2)	$(11, 51, 91)\ \frac{51051}{4};$
(P_3)	$(11, 65, 119)\ \frac{85085}{9};$
(K_1)	$13,\ 2.17,\ 5 \cdot 11;$
(K_2)	$11,\ 3 \cdot 17,\ 7 \cdot 13;$
$(K_3$	$11,\ 5 \cdot 13,\ 7 \cdot 17;$
$(K_{1,2})$	$1,\ 2.3.11.13,\ 5 \cdot 7;$
$(K_{1,3})$	$5 \cdot 17,\ 2.11,\ 7.13;$
$(K_{2,3})$	$13 \cdot 17,\ 3 \cdot 5,\ 1;$
$(K_{1,2,3})$	$5,\ 2.3,\ 11.17;$
$(P_{1,2})$	$(841, 858, 875)\ 30030;$
$(P_{1,3})$	$(85, 88, 91)\ 170170;$
$(P_{2,3})$	$(221, 375, 529)\ 3315;$
$(P_{1,2,3})$	$(5, 96, 187)\ 5610.$

Hier folgen nun sieben Zusammenstellungen nach dem Typus (4) von repräsentierenden Punkten der Klassen zu je vier. Ausgangspunkte sind dabei die oben angegebenen Punkte P_1, P_2, P_3, $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, $P_{2,3}$ und $P_{1,2,3}$.

$$(13, 34, 55)\ 24310; \quad (42, 55, 68)\ 39270;$$
$$(-55, -21, 13)\ 15015; \quad (-68, -13, 42)\ 9282.$$

$$(11, 51, 91)\ \frac{51051}{4}; \quad (80, 91, 102)\ 46410;$$
$$(-91, -40, 11)\ 10010; \quad (-102, -11, 80)\ 5610.$$

$(11, 65, 119)\ \frac{85085}{9}$; $(108, 119, 130)\ 46410$;

$(-119, -54, 11)\ 7854$; $(-130, -11, 108)\ 4290$.

$(841, 858, 875)\ 30030$; $(34, 875, 1716)\ \frac{510510}{841}$;

$(-875, -17, 841)\ 595$; $(-1716, -841, 34)\ \frac{14586}{25}$.

$(85, 88, 91)\ 170170$; $(6, 91, 176)\ 6006$;

$(-91, -3, 85)\ \frac{23205}{4}$; $(-176, -85, 6)\ 5610$.

$(221, 375, 529)\ 3315$; $(308, 529, 750)\ 2310$;

$(-529, -154, 221)\ \frac{34034}{25}$; $(-750, -221, 308)\ \frac{510510}{529}$.

$(5, 96, 187)\ 5610$; $(182, 187, 192)\ 102102$;

$(-187, -91, 5)\ \frac{85085}{16}$; $(-192, -5, 182)\ 2730$.

Wie man sieht, sind von diesen 28 Repräsentanten 20 mit ganzzahligen Koordinaten. Den nahen Zusammenhang zwischen den Ausdrücken für je vier zusammengehörige Punkte ist hier nicht zu verkennen. So etwa wenn für einen Punkt ein Quadrat wie 841 im Nenner auftritt. Für die drei anderen Punkte in demselben Quadrupel ist dann 841 Faktor eines Gliedes zwischen den Klammern, und zwar jedesmal an einer anderen Stelle.

6. Vermutlich existiert es Kurven (2) in unbegrenzter Anzahl vom Range fünf und vielleicht auch solche von höherem Range. Doch dürfte ein mehr methodisches Verfahren erforderlich sein, wenn man hierüber Klarheit zu schaffen wünscht. Nimmt man an, dass c Produkt von r verschiedenen Primzahlen ist, so lässt sich leicht in $2r+1$ bzw. $2r+2$ eine obere Grenze des Ranges ermitteln, je nachdem 2 eine von diesen Primzahlen ist oder nicht.[1] Diese Grenze lässt sich doch wohl nur in dem Falle erreichen, wo $r=1$ ist. Es gibt also Fälle, wo $c=$ eine Primzahl p und der Rang vier ist. Als erste Bedingung hierfür findet man leicht $p \equiv 1 \pmod 8$. Hierzu kommen noch weitere Bedingungen.

[1] Diese Grenze findet man S. 56 in der Abhandlung von Billing in Zusammenhang mit Untersuchungen über die obere Grenze in allgemeineren Fällen.

Da wir aber vielleicht ein anderes mal auf unsere diesbezüglichen Untersuchungen zurückkommen, so wollen wir hier nicht näher auf dieselben eingehen.[1] Die drei ersten Fälle mit dem Range vier hat man für

$$p = 41, 137, 761.$$

Wir begnügen uns mit einer Zusammenstellung in analoger Weise wie in den vorhergehenden Nummern von Repräsentanten für die Klassen im Falle $c = 41$. Dabei werden die drei Klassen mit Repräsentanten auf der Geraden $y = 0$ sowie die Einheitsklasse ausser Acht gelassen.

$$(9, 25, 41)\frac{41}{16}; \quad (32, 41, 50)\frac{41}{9};$$

$$(-41, -16, 9)\frac{41}{25}; \quad (-50, -9, 32).$$

$$(961, 1025, 1089)\frac{41}{64}; \quad (128, 1089, 2050)\frac{41}{961};$$

$$(-1089, -64, 961)\frac{1}{25}; \quad (-2050, -961, 128)\frac{41}{1089}.$$

$$(41, 441, 841)\frac{41}{400}; \quad (800, 841, 882);$$

$$(-841, -400, 41)\frac{41}{441}; \quad (-882, -41, 800)\frac{41}{841}.$$

Ich habe auch den Fall in Betracht gezogen, wo c Produkt von zwei Primzahlen ist. Doch ist es mir dabei nicht gelungen eine Kurve mit einem Range > 4 zu finden. Den Rang 4 bekommt man beispielsweise für $c=34$ und $c=65$.

II.

7. Wir gehen jetzt zur Behandlung der allgemeineren Kurve

$$y^2 = x(x + a)(x + b) \tag{1}$$

über. Eben auf Grund der grösseren Allgemeinheit dieser Kurve scheint hier die in der vorhergehenden Abteilung benutzte Methode weniger anwendbar. Wir nehmen unseren Ausgangspunkt von dem Umstande, dass, wenn man für einen rationalen Punkt

---

[1] Man vergleiche die eingehende Behandlung der Fälle $y^2 = x(x^2 \pm p)$ und $y^2 = x(x^2 \pm 2p)$ in der Abhandlung (S. 105—116) von BILLING.

$$x = ka \tag{7}$$

setzt, k immer eine rationale Zahl bedeutet. Es ergibt sich die Bedingung, dass

$$k(k+1)(ka+b)$$

Quadrat einer rationalen Zahl sein muss. Man erhält hieraus

$$b = -ka + k(k+1)\varkappa^2, \tag{8}$$

wo $\varkappa$ eine rationale Zahl bezeichnet. Wünscht man als Ausdruck für b eine ganze Zahl, so kann nachher eine leichte Transformation erforderlich sein. Wenn also die Kurve (1) einen rationalen Punkt, für welchen (7) gilt, enthalten soll, so muss ihre Gleichung auf die Gestalt

$$y^2 = x(x+a)(x - ka + k(k+1)\varkappa^2) \tag{9}$$

gebracht werden können. Wie man leicht sieht, sind hier die Werte $k=0$ und -1 auszuschliessen. Für $\varkappa^2$ gilt, dass die Relationen $a = (k+1)\varkappa^2$ und $a = k\varkappa^2$ zu vermeiden sind. In allen diesen Fällen erhält man ja entweder $b = 0$ oder $b = a$. Da wir voraussetzen, dass es sich in (7) um einen neuen rationalen Punkt handeln soll, der also nicht auf der Achse $y = 0$ liegt, so muss $\varkappa \neq 0$ sein.

Geben wir jetzt k in (9) einen bestimmten Wert, so bekommen wir ein System von Kurven, welches wir eine *Familie* nennen. In einer Familie sind mithin a und $\varkappa^2$ veränderliche Parameter. Da man in (7) von einem beliebigen rationalen Punkte ausgehen kann, so gehört eine und dieselbe Kurve zu mehreren Familien. Hierzu kommt noch, dass die Gleichung einer Kurve in sechs verschiedenen Weisen die Gestalt (1) nehmen kann, da man ja freie Wahl hat, welche von den drei Faktoren man als x, $x+a$ und $x+b$ bezeichnen will. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass k durch $-(k+1)$ ersetzt wird, wenn x und $x+a$ mit einander vertauscht werden. Die Parameter k und k' bestimmen mithin dieselbe Familie, wenn zwischen ihnen die Relation

$$k + k' + 1 = 0 \tag{10}$$

besteht.

In einer Familie besitzt jede Kurve rationale Punkte ausserhalb der Achse $y = 0$. Es ist grosse Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig aus der Familie herausgegriffene Kurve den Rang drei besitzt. Doch existieren, wie wir sehen werden, in jeder Familie auch Kurven vom Range vier oder noch höherem Range, und sogar in unbegrenzter Anzahl. Es gibt aber auch Familien, in denen Kurven auftreten, welche bloss vom Range zwei sind. Dies wird dann zutreffen, wenn die Anzahl der rationalen Punkte einer Kurve eine endliche ist. Man hat hier die Möglichkeiten von acht, zwölf oder sechszehn rationalen Punkten.[1]

Bei zwölf rationalen Punkten müssen sowohl die drei reellen Wendepunkte als auch die von diesen Punkten ausgehenden je drei Tangenten rational sein. In den beiden Fällen mit acht oder sechszehn rationalen Punkten müssen rationale Tangenten von demjenigen Punkte der Achse ausgehen, der auf dem unpaaren Teile der Kurve liegt. Wählt man diesen Punkt als $x = 0$, so hat man a und $b > 0$, und wir können schreiben $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$. Für die Winkelkoeffizienten der vier Tangenten bekommen wir dann $\pm \alpha \pm \beta$. Sind a und b Quadrate von rationalen Zahlen, so erhalten wir also in den Berührungspunkten vier neue rationale Punkte. Für diese Punkte hat man $x = \pm \alpha\beta$. Nehmen wir α und $\beta > 0$, so liegen die beiden Punkte mit $x = \alpha\beta$ auf dem unpaaren Teile der Kurve. Die Möglichkeit liegt vor, dass auch die Berührungspunkte der Tangenten von diesen beiden letzteren Punkten rational sind. Hierfür hat man die Bedingung, dass für diese Punkte die Grössen x, $x + a$ und $x + b$ Quadrate von rationalen Zahlen sein und also zur Einheitsklasse gehören sollen. Für die fraglichen Grössen bekommt man die Ausdrücke $\alpha\beta$, $\alpha(\alpha + \beta)$, $\beta(\alpha + \beta)$, wobei man $\alpha, \beta > 0$ annehmen kann. Hieraus lässt sich leicht erschliessen, dass, falls die Kurve sechszehn rationale Punkte besitzen soll, so müssen α, β und $\alpha + \beta$, wenn man von einem gemeinsamen Faktor absieht, Quadrate von rationalen Zahlen sein.

Man bemerke, dass bei acht rationalen Punkten der Punkt $x = 0$ zur Einheitsklasse gehört. Der unendlich entfernte Punkt und die drei Punkte auf der Achse $y = 0$ repräsentieren dann nur zwei Klassen und gehören also nicht länger zu vier verschiedenen Klassen. Ebenso ist ersichtlich, dass in dem Falle, wo man von acht zu sechszehn rationalen Punkten steigt, von den acht Punkten diejenigen auf dem paaren und unpaaren Zuge der Kurve zu je einer und derselben Klasse gehören.

Bei dem speziellen Falle (2) ist die Möglichkeit mit acht, zwölf oder sechszehn rationalen Punkten ausgeschlossen. Für acht rationale Punkte lässt sich ja die Bedingung, dass $2c^2$ Quadrat einer rationalen Zahl sein soll, nicht erfüllen. Behufs der Bestimmung der Wendepunkte erhält man die Gleichung

$$3x^4 - 6c^2x^2 - c^4 = 0.$$

---

[1] B. Levi, »*Saggio per una teorie aritmetica delle forme cubiche ternarie*« (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 41, 1906).

Hieraus ergibt sich

$$3\left(\frac{x^2}{c^2} - 1\right)^2 = 4.$$

Wie man sieht, ist also $\frac{x^2}{c^2} - 1$ keine rationale Zahl. Selbstverständlich gilt dies dann auch für x. Auch der Bedingung für zwölf rationale Punkte lässt sich mithin in diesem Falle nicht genügen.

8. Findet man, dass eine Kurve zu zwei verschiedenen Familien (9) gehört, so darf man erwarten, dass die Kurve einen höheren Rang als drei besitzt. Dabei ist selbstverständlich vorauszusetzen, dass die Wahl der Kurve und diejenige der Familien unabhängig von einander gemacht worden sind. Ohne Schwierigkeit lassen sich die zwei Familien gemeinsamen Kurven durch eine Gleichung zusammenfassen. Sind k und k_1 die bestimmenden Parameter, so ist ja für b ausser der Relation (8) noch

$$(8_1) \qquad b = -k_1 a + k_1(k_1+1)x_1^2$$

zu erfüllen. Für a und b bekommen wir jetzt die Ausdrücke:

$$(11) \qquad a = \frac{k(k+1)x^2 - k_1(k_1+1)x_1^2}{k-k_1};$$

$$(12) \qquad b = \frac{kk_1[(k_1+1)x_1^2 - (k+1)x^2]}{k-k_1}.$$

Für das gesuchte Kurvensystem gilt mithin die Gleichung

$$(13) \qquad y^2 = x\left(x + \frac{k(k+1)x^2 - k_1(k_1+1)x_1^2}{k-k_1}\right)\left(x + \frac{kk_1((k_1+1)x_1^2 - (k+1)x^2)}{k-k_1}\right).$$

In (13) haben wir eine Unterfamilie von (9), die wir wohl auch als eine *Familie zweiter Stufe* bezeichnen können. In einer derartigen Unterfamilie sind Kurven vom Range 3 (oder 2) Ausnahmen und können wohl nur in begrenzter Anzahl vorkommen. Als der normale Rang kann vier betrachtet werden. Doch gibt es in einer Unterfamilie auch Kurven von höherem Range in unbegrenzter Anzahl.

Als erstes Beispiel nehmen wir $k = 1$, $k_1 = -2$. Es geht dann (13) in

$$(14) \qquad y^2 = x\left(x + \frac{2}{3}(x^2 - x_1^2)\right)\left(x + \frac{2}{3}(2x^2 + x_1^2)\right)$$

über. Da nach (10) $k = 1$ und $k_1 = -2$ dieselbe Familie bestimmen, so ist (14) nicht in eigentlichem Sinne als gemeinsame Unterfamilie von zwei verschiedenen Familien zu betrachten. Nun ändert sich die Gleichung einer Kurve, wenn man von dem Parameter k zu dem Parameter $-(k+1)$ übergeht. Die Relationen zwischen den eingehenden Konstanten a, b bzw. $\bar{a}$, $\bar{b}$ sind dabei

$$(15) \qquad a+\bar{a}=0, \quad \bar{b}=b-a, \quad b=\bar{b}-\bar{a}.$$

Wenn jetzt eine Kurve die Eigenschaft besitzt, dass dieselbe zwei mal bei dem Parameter k und also auch bei dem Parameter $-(k+1)$ auftritt, wobei zwischen den Konstanten der betreffenden Gleichungen die Relationen (15) gelten, so wird dadurch eine Unterfamilie definiert, und von dieser Art ist (14). Da wir also dieselbe Kurve, nur mit einer anderen Gleichung, erhalten, wenn wir die Werte der Parameter $\varkappa$ und $\varkappa_1$ vertauschen, so können wir in (14) $\varkappa > \varkappa_1$ setzen.

Bei der Untersuchung einzelner Kurven (14) habe ich bloss einen einzelnen Fall mit dem Range drei gefunden, und zwar für $\varkappa=2$, $\varkappa_1=1$. Die Gleichung dieser Kurve ist

$$y^2=x(x+2)(x+6).$$

Für alle anderen von mir behandelten Kurven (14) ist der Rang $\geqq 4$. Wir geben hier einige Beispiele.

$\varkappa=4,\ \varkappa_1=1.$	$y^2=x(x+10)(x+22);$
$\varkappa=5,\ \varkappa_1=1.$	$y^2=x(x+16)(x+34);$
$\varkappa=7,\ \varkappa_1=1.$	$y^2=x(x+32)(x+66);$
$\varkappa=5,\ \varkappa_1=2.$	$y^2=x(x+14)(x+36).$

Wir betrachten auch den Fall $k=1$, $k_2=2$. Es ergibt sich dann aus (13), wenn wir k_1 und $\varkappa_1$ durch k_2 bzw. $\varkappa_2$ ersetzen,

$$(16) \qquad y^2=x(x-2\varkappa^2+6\varkappa_2^2)(x+4\varkappa^2-6\varkappa_2^2).$$

Die folgenden drei Kurven (16) haben nur den Rang drei.

$\varkappa=1,\ \varkappa_2=1.$	$y^2=x(x+4)(x-2);$
$\varkappa=2,\ \varkappa_2=1.$	$y^2=x(x-2)(x+10);$
$\varkappa=3,\ \varkappa_2=2.$	$y^2=x(x+6)(x+12).$

Auf die erste Kurve, doch in einer anderen Form der Gleichung, sind wir bereits für $k=1$, $k_1=-2$ und $\varkappa=2$, $\varkappa_1=1$ gestossen. Die Gleichung der dritten Kurve lässt sich in

$$y^2 = x(x^2 - 36)$$

überführen und kommt in dieser Gestalt in der Tabelle am Ende der Abhandlung von BILLING vor. Es seien noch zwei Kurven (16) mit dem Range vier angeführt.

$\varkappa = 1,\ \varkappa_2 = 2.$ $\qquad y^2 = x(x+22)(x-20);$

$\varkappa = 3,\ \varkappa_2 = 1.$ $\qquad y^2 = x(x-12)(x+30).$

Die fraglichen Verhältnisse mögen durch besondere Behandlung der Kurve

$$y^2 = x(x+10)(x+22)$$

beleuchtet werden. Nach den bereits bekannten Eigenschaften muss die Kurve die rationalen Punkte

(P_1) $\qquad (10,\ 20,\ 32);$

(P_2) $\qquad (-20,\ -10,\ 2)$

enthalten. Die zugehörigen Klassen K_1 und K_2 lassen sich so charakterisieren:

(K_1) $\qquad 1,\ 2,\ 5;$

(K_2) $\qquad -2,\ -1,\ 5.$

Für die zusammengesetzte Klasse $K_{1,2}$ ergibt sich

$(K_{1,2})$ $\qquad -1,\ -1,\ 2.$

Ohne Schwierigkeit findet man für diese Klasse den repräsentierenden Punkt

$(P_{1,2})$ $\qquad (-18,\ -8,\ 4).$

Für die Punkte auf der Achse erhält man

(P_3) $\qquad (0,\ 10,\ 22);$

(K_3) $\qquad 2,\ 11,\ 5;$

(P_4) $\qquad (-10,\ 0,\ 12);$

(K_4) $\qquad -3,\ -1,\ 2\cdot 5;$

$(P_{3,4})$ $\qquad (-22,\ -12,\ 0);$

$(K_{3,4})$ $\qquad -3,\ -2\cdot 11,\ 1.$

Da also keine der Klassen K_1, K_2 und $K_{1,2}$ mit einer der Klassen K_3, K_4 und $K_{3,4}$ zusammenfällt, so kann der Rang nicht kleiner als vier sein. Wenn wir von der Einheitsklasse absehen, so gibt es noch neun Klassen rationaler Punkte. Diese entstehen durch Kombination von K_1, K_2, $K_{1,2}$ einerseits mit

K_3, K_4, $K_{3,4}$ andererseits. Wenn wir Repräsentanten für diese Klassen angeben wollen, so gelingt dies am leichtesten in der folgenden Weise. Wenn für die beiden übrigen Schnittpunkte einer Geraden durch $x = y = 0$ mit der Kurve die Abszissen mit x_1 und x_2 bezeichnet werden, so suchen wir die Relation, welche zwischen x_1 und x_2 besteht. Ist nun x_1 bereits bekannt, so findet man hieraus x_2 und natürlich auch $x_2 + a$ und $x_2 + b$. In gleicher Weise suchen wir für eine Gerade durch $x + a = y = 0$ die Relation zwischen $x_1 + a$ und $x_2 + a$ und für eine Gerade durch $x + b = y = 0$ die Relation zwischen $x_1 + b$ und $x_2 + b$. Es handelt sich hier um Verallgemeinerungen von (5). Als Resultate bekommen wir für die allgemeine Kurve (1)

$$(17) \qquad x_1 x_2 = ab; \quad (x_1 + a)(x_2 + a) = -a(b - a); \quad (x_1 + b)(x_2 + b) = -b(a - b)$$

und für die behandelte spezielle Kurve

$$(18) \qquad x_1 x_2 = 220; \quad (x_1 + 10)(x_2 + 10) = -120; \quad (x_1 + 22)(x_2 + 22) = 264.$$

Mit Benutzung der obigen Angaben finden wir leicht die folgenden repräsentierenden Punkte:

$(P_{1,3})$	$(22, 32, 44)$;
$(P_{2,3})$	$(-11, -1, 11)$;
$(P_{1,2,3})$	$\left(\frac{-110}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{88}{9}\right)$;
$(P_{1,4})$	$(-16, -6, 6)$;
$(P_{2,4})$	$(2, 12, 24)$;
$(P_{1,2,4})$	$(5, 15, 27)$;
$(P_{1,3,4})$	$\left(\frac{-55}{4}, \frac{-15}{4}, \frac{33}{4}\right)$;
$(P_{2,3,4})$	$(110, 120, 132)$;
$(P_{1,2,3,4})$	$(44, 54, 66)$.

In ganz ähnlicher Weise würden sich die Verhältnisse gestaltet haben, wenn wir als Beispiel eine andere Kurve gewählt hätten.

9. Wenn wir den vorangehenden Gedankengang einen Schritt weiter entwickeln, so gilt es Kurven vom Range fünf in den gemeinsamen Kurven von drei verschiedenen Familien (9) aufzusuchen. Bedeutet k_2 einen neuen rationalen Parameter, so fragen wir also nach der Bedingung, welche (13) mit

$$y^2 = x(x+a)(x - k_2 a + k_2(k_2+1)\varkappa_2^2) \tag{19}$$

identisch macht. Wir gelangen so zu den Gleichungen:

$$a = \frac{k(k+1)\varkappa^2 - k_1(k_1+1)\varkappa_1^2}{k - k_1}; \tag{20}$$

$$-k_2 a + k_2(k_2+1)\varkappa_2 = \frac{k k_1((k_1+1)\varkappa_1^2 - (k+1)\varkappa^2)}{k - k_1}. \tag{21}$$

Durch Elimination von a bekommen wir die gesuchte Bedingung

$$(k_1 - k_2)k(k+1)\varkappa^2 + (k_2 - k)k_1(k_1+1)\varkappa_1^2 + (k - k_1)k_2(k_2+1)\varkappa_2^2 = 0. \tag{22}$$

Es existieren also keine derartige gemeinsame Kurven bei solchen Kombinationen von k, k_1 und k_2, für welche die ternäre Quadratische Form (22) keine *Nullform* bedeutet, und man überzeugt sich leicht, dass, falls man etwa k, k_1 und k_2 beliebig als ganze Zahlen wählt, die Nullformen verhältnismässig selten sind. In den von uns in der vorhergehenden Nummer betrachteten Beispielen hatten wir $k = 1$, $k_1 = -2$ und $k_2 = 2$, und für diese Parameterwerte bekommen wir die Nullform

$$4\varkappa^2 - \varkappa_1^2 - 9\varkappa_2^2 = 0. \tag{23}$$

Die Lösungen von (23) lassen sich unmittelbar aus denjenigen von

$$x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

herleiten. Wenn wir Lösungen mit einem gemeinsamen Faktor für x, y und z wegwerfen, so haben wir bekanntlich für diese letztere Gleichung die allgemeine ganzzahlige Lösung

$$x = m^2 + n^2, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = 2mn.$$

Dabei sind m und n ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, und von diesen Zahlen muss eine ungerade und die andere gerade sein. Mit Rücksicht auf die vorliegende Frage sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem eine von den Zahlen m und n durch 3 teilbar ist oder nicht. Es ist ja im ersten Falle 3 Teiler von $2mn$ und im zweiten von $m^2 - n^2$. Wir können jetzt die ganzzahligen Lösungen von (23) angeben.

1) mn hat 3 als Teiler.

$$\varkappa = m^2 + n^2, \quad \varkappa_1 = 2(m^2 - n^2), \quad \varkappa_2 = \frac{4mn}{3}. \tag{24}$$

2) mn ist durch 3 nicht teilbar.

$$(25) \qquad x = m^2 + n^2, \quad x_1 = 4mn, \quad x_2 = \frac{2(m^2 - n^2)}{3}.$$

Als Beispiele geben wir die drei ersten Fälle.

1) $m = 2$, $n = 1$, $x = 5$, $x_1 = 8$, $x_2 = 2$;

2) $m = 3$, $n = 2$, $x = 13$, $x_1 = 10$, $x_2 = 8$;

3) $m = 4$, $n = 1$, $x = 17$, $x_1 = 16$, $x_2 = 10$.

Führt man diese Werte von x und x_1 in (14) ein, so bekommt man die Kurven

1) $y^2 = x(x - 26)(x + 76)$;

2) $y^2 = x(x + 46)(x + 292)$;

3) $y^2 = x(x + 22)(x + 556)$.

Diese Kurven kann man auch durch Einführung der Werte von x und x_2 in (15) erhalten. Dasselbe gilt, wenn man in

$$(26) \qquad y^2 = x\left[x + \frac{3x_2^2 - x_1^2}{2}\right](x + 3x_2^2 + x_1^2)$$

die Werte von x_1 und x_2 einführt, wobei wir in (26) die Gleichung haben, in welche (13) für die Parameterwerte 2 und -2 übergeht. Wünscht man für die erste Kurve die Grösse $a > 0$, so ist $x - 26$ durch x zu ersetzen. Die Gleichung der Kurve wird dann

$$y^2 = x(x + 26)(x + 102).$$

Es tritt hier nach (10) eine Umänderung der Parameterwerte ein, und zwar erhält man $k = -2$, $k_1 = 1$, $k_2 = -3$.

Man findet leicht, dass keine von den drei oben angeführten Kurven einen niedrigeren Rang als fünf haben kann. Dieselbe Eigenschaft wird sich für andere Kurven bestätigen, welche man aus der durch (23) definierten Schar beliebig herausnimmt. Man hat also guten Grund zu der Vermutung, dass *sämtliche Kurven dieser Schar den Rang fünf oder einen noch höheren Rang besitzen.* Doch scheint ein strenger Beweis hierfür mit gewissen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Es ist nämlich für den Beweis wesentlich, dass gewisse binäre biquadratische Formen, welche bei den drei vorliegenden Kurven Primzahlen 17, 19, 41, 73, 89 und 139 bedeuten, keine Quadrate darstellen können, und die Feststellung von derartigen Eigenschaften ist ja im allgemeinen keine leichte Aufgabe. Die Nullform (23) scheint in dieser Hinsicht eine ausgezeichnete Stellung einzunehmen. Für alle anderen von mir untersuchten Nullformen (22) gibt es nämlich in der zugehörigen Schar von Kurven Ausnahmen, für welche der Rang < 5 ist.

10. Der nächste Schritt wäre nun zu Kurven vom Range sechs aufzusteigen. Hier kommt uns nun eine Zufälligkeit zu Hilfe, indem die Kurve

$$y^2 = x(x+46)(x+292), \tag{27}$$

mit welcher wir bereits in der vorhergehenden Nummer Bekanntschaft gemacht haben, diesen Rang besitzt. Zur Vermutung, dass diese Kurve einen höheren Rang als fünf hat, wurde ich durch Umstände geführt, welche aus den folgenden Entwicklungen verständlich sein dürften.

Variiert man in (22) k, k_1 und k_2 und kombiniert man die so entstehenden Formen zu einem linearen System, so dass jedesmal demselben Parameter k dieselbe Veränderliche $\mathfrak{x}$ zugeordnet wird, so treten in diesem System keine anderen ternären Formen auf als eben die Grundglieder (22). Fixiert man nämlich neben k, k_1 und k_2 noch einen vierten Parameter k_3, und kombiniert man dann (22) mit

$$(k_1 - k_3)k(k+1)\mathfrak{x}^2 + (k_3 - k)k_1(k_1+1)\mathfrak{x}_1^2 + (k - k_1)k_3(k_3+1)\mathfrak{x}_3^2 = 0, \tag{28}$$

indem man (22) mit $k_3 - k$ und (28) mit $k_2 - k$ multipliziert, so erhält man nach Wegschaffung des Faktors $k - k_1$ als Differenz der so erhaltenen Ausdrücke

$$(k_2 - k_3)k(k+1)\mathfrak{x}^2 + (k_3 - k)k_2(k_2+1)\mathfrak{x}_2^2 + (k - k_2)k_3(k_3+1)\mathfrak{x}_3^2 = 0. \tag{29}$$

In entsprechender Weise bekommt man

$$(k_2 - k_3)k_1(k_1+1)\mathfrak{x}_1^2 + (k_3 - k_1)k_2(k_2+1)\mathfrak{x}_2^2 + (k_1 - k_2)k_3(k_3+1)\mathfrak{x}_3^2 = 0. \tag{30}$$

Man versteht jetzt, dass es zulässig ist für die Grundglieder des in Rede stehenden linearen Systems die Beschränkung einzuführen, dass k und k_1 feste Werte annehmen sollen, so dass nur k_2 variiert.

Hat man in (1) $b > a > 0$, so findet man, wenn man einen rationalen Punkt durch (7) definiert, dass k entweder > 1 oder < -1 sein muss. Im ersten Falle sind sämtliche drei Faktoren x, $x+a$ und $x+b > 0$, im zweiten Falle nur der letzte Faktor. Für $0 > k > -1$ bekommt man ein negatives Produkt. Kommen b, a und 0 in anderer Reihenfolge bezüglich der Grösse, so tritt hierin eine Änderung ein. Nur kann es für keine Gestalt der Kurvengleichung eintreffen, dass man rationale Punkte mit k-Werten in allen drei Intervallen $k > 0$, $0 > k > -1$, $k < -1$ erhält. Hiermit stimmt es überein, dass nur dann, wenn von den Parametern k, k_1 und k_2 je einer in jedem von diesen Intervallen liegt, die ternäre Form (22) definit wird.

Wir führen jetzt neben den Parametern $k = 1$, $k_1 = -2$ und $k_2 = 2$ noch einen vierten Parameter $k_3 = -4$ mit der zugehörigen Veränderlichen x_3 ein. Durch Kombination der vier Parameter zu je drei bekommen wir vier quadratische Formen, welche demselben Büschel angehören. Von diesen Formen kennen wir bereits eine aus (23). Die drei übrigen werden hier angegeben.

$$2x^2 - 5x_1^2 + 18x_3^2 = 0; \tag{31}$$

$$2x^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2 = 0; \tag{32}$$

$$x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 = 0. \tag{33}$$

Ohne Mühe erkennt man auch in diesen letzteren Formen Nullformen. Aus ihren rationalen Nullstellen lassen sich drei neue Kurvenscharen vom Range fünf herleiten. Hier treten jedoch nicht nur Ausnahmen von höherem Range sondern auch solche von niedrigerem Range auf.

Unter den Lösungen von (31) bemerken wir

$$x = 1 = x_3,\ x_1 = 2;\quad x = 9,\ x_1 = 6,\ x_3 = 1;\quad x = 13,\ x_1 = 10,\ x_3 = 3.$$

Als Gleichungen der zugehörigen Kurven erhält man

$$y^2 = x(x-2)(x+4);$$
$$y^2 = x(x+30)(x+132);$$
$$y^2 = x(x+46)(x+292).$$

Die erste von diesen Kurven ist uns schon bekannt und hat nur den Rang drei.

Für (32) haben wir als die niedrigsten Lösungen

$$x = 7,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3;\quad x = 13,\ x_2 = 8,\ x_3 = 3.$$

Die Gleichungen der entsprechenden Kurven sind

$$y^2 = x(x-2)(x+100);$$
$$y^2 = x(x+46)(x+292).$$

Von diesen Kurven hat die erste nur den Rang vier.

Zuletzt betrachten wir für (33) die Lösungen

$$x_1 = 5,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2;\quad x_1 = 10,\ x_2 = 8,\ x_3 = 3;\quad x_1 = 13,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6.$$

Nach (26) erhalten wir für dieselben die Kurven

$$y^2 = x(x + 1)(x + 52);$$
$$y^2 = x(x + 47)(x + 244);$$
$$y^2 = x(x + 46)(x + 292).$$

Auch hier hat die erste Kurve nur den Rang vier.

Hier verdient die Tatsache besondere Aufmerksamkeit, dass, wie wir sehen, die Kurve (27) gemeinsames Glied der vier Kurvenscharen ist. Jeder der Veränderlichen $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ tritt dabei drei mal auf, aber *immer mit demselben Wert*, und zwar hat man

$$\varkappa = 13, \ \varkappa_1 = 10, \ \varkappa_2 = 8, \ \varkappa_3 = 3. \tag{34}$$

Es lässt sich demnach (34) als Nullstelle des Büschels betrachten, in welchem (23), (31), (32) und (33) eingehen. Dieses Büschel können wir als ein *Nullbüschel* bezeichnen. Für die Kurve (27) können wir mithin in (7) $k = 1$, -2, 2 und -4 setzen und bekommen in dieser Weise vier rationale Punkte. Die Frage ist nun, ob man in diesen Punkten nebst zwei Punkten auf der Achse $y = 0$ sechs unabhängige Basispunkte hat, so dass der Rang der Kurve mindestens sechs ist.

Stellen wir zusammen die Werte, welche x, $x + 46$ und $x + 292$ für die Punkte der Achse annehmen, so bekommen wir

$$0, 46, 292; \quad -46, 0, 246; \quad -292, -246, 0.$$

Diese Punkte gehören zu drei verschiedenen Klassen, und in den charakteristischen Primzahlen für jede von diesen Klassen tritt mindestens eine von den Primzahlen 41 und 73 auf. Da, wie wir sehen werden, diese Primzahlen gar nicht bei den vier auf der Achse nicht liegenden Basispunkten auftreten, so sind die Basispunkte auf der Achse von den vier anderen unabhängig.

Es bleibt noch übrig nachzuweisen, dass die vier letzteren Basispunkte von einander unabhängig sind. Wie in früher behandelten Beispielen geben wir zuerst die Folgen x, $x + 46$ und $x + 292$.

(P_1) $\quad (46, 92, 338);$

(P_2) $\quad (-92, -46, 200);$

(P_3) $\quad (92, 138, 384);$

(P_4) $\quad (-184, -138, 108).$

Die entsprechenden Klassen lassen sich in der folgenden Weise charakterisieren.

(K_1)	1, 2, 23;
(K_2)	-2, -1, 23;
(K_3)	$2 \cdot 3$, 1, 23;
(K_4)	-3, -1, $2 \cdot 23$.

Wie wir bereits bemerkt haben, kommen hierbei die Primzahlen 41 und 73 nicht vor. Indem wir die obigen vier Klassen mit einander kombinieren, bekommen wir ausser der Einheitsklasse die folgenden 11 neuen Klassen.

$(K_{1,2})$	-1, -1, 2;
$(K_{1,3})$	3, 1, 2;
$(K_{1,4})$	$-2 \cdot 3$, -1, 1;
$(K_{2,3})$	-3, -1, 1;
$(K_{2,4})$	3, 2, 1;
$(K_{3,4})$	-1, -2, 1;
$(K_{1,2,3})$	-3, -2, 23;
$(K_{1,2,4})$	3, 1, 23;
$(K_{1,3,4})$	-1, -1, 23;
$(K_{2,3,4})$	1, 1, $2 \cdot 23$;
$(K_{1,2,3,4})$	2, 1, 1.

Hieraus ist ersichtlich, dass die vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 Basispunkte für ein System rationaler Punkte vom Range vier sind. *Der Rang der Kurve* (27) *ist also mindestens sechs.*

Ohne grosse Mühe können wir Repräsentanten auch für die 11 Klassen $K_{1,2}, \ldots K_{1,2,3,4}$ bestimmen. Wo es der Deutlichkeit halber wünschenswert erscheint, wird dabei Faktorenzerlegung vorgenommen.

$(P_{1,2})$	$(-288, -242, 4)$;
$(P_{1,3})$	$(8, 54, 300)$;
$(P_{1,4})$	$(-196, -150, 96)$;
$(P_{2,3})$	$(-49, -3, 243)$;
$(P_{2,4})$	$(2, 48, 294)$;

$(P_{3,4})$ $\quad (-50, -4, 242);$

$(P_{1,2,3})$ $\quad \left(\frac{-49.46}{25}, \frac{-24.46}{25}, \frac{6.841}{25}\right);$

$(P_{1,2,4})$ $\quad (25.23, 27.23, 3.289);$

$(P_{1,3,4})$ $\quad \left(\frac{-9.23}{4}, \frac{-23}{4}, \frac{961}{4}\right);$

$(P_{2,3,4})$ $\quad \left(\frac{16.46}{9}, \frac{25.46}{9}, \frac{4.841}{9}\right);$

$(P_{1,2,3,4})$ $\quad (676, 2.361, 2.484).$

Man bekommt 45 neue Klassen durch Kombination der 15 Klassen $K_1, \ldots K_{1,2,3,4}$ mit den drei Klassen, für welche die Punkte der Achse Repräsentanten sind. Für diese Klassen findet man sofort Repräsentanten, wenn man noch auf (17) Rücksicht nimmt. Hier erhält (17) die Gestalt

$$x_1 x_2 = 46.292, \quad (x_1 + 46)(x_2 + 46) = -46.246, \quad (x_1 + 292)(x_2 + 292) = 246.292.$$

In den Ausdrücken rechts kommt hier kein anderer Quadrat als vier vor. Man ersieht hieraus, dass Quadrate wie 9, 25, 49, 81, 121, 169, 289, 361, 841, 961, welche oben in den Zählern auftreten, bei den neuen Repräsentanten ihren Platz in den Nennern haben. Für die Quadrate 16 und 64 erhält man dagegen in den entsprechenden Nennern nur 4 bzw. 16.

11. Nach geometrischer Betrachtungsweise hat das Büschel, zu welchem (23), (31), (32) und (33) gehören, eine Durchschnittskurve vierter Ordnung vom Geschlechte eins. Dabei bezeichnen x, x_1, x_2 und x_3 homogene unabhängige Veränderliche, und der Punkt (34) bedeutet einen rationalen Punkt dieser Kurve. Gibt es nun bereits drei rationale Punkte auf der Kurve, so hat die durch diese Punkte bestimmte Ebene noch einen vierten rationalen Schnittpunkt mit der Kurve. Insbesondere gilt dies für die Schmiegungsebene in einem rationalen Punkt wie (34). Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Schmiegungsebene für einen Punkt in einer Koordinatenebene stationär ist und also keinen neuen Punkt ausschneidet. Es ist kaum zweifelhaft, obwohl nicht streng bewiesen, dass wir in solcher Weise mit Ausgangspunkt von (34) eine *unbegrenzte* Menge von rationalen Punkten erhalten können, und diese Punkte geben Anlass zu Kurven, für welche wir den Rang sechs erwarten dürfen.

Von der hier betrachteten Kurve kennen wir aber von vornherein in der Ebene $x_2 = 0$ noch vier andere rationale Punkte, und zwar hat man dabei

$$x_1 = \pm 2x = \pm 2x_3.$$

Bei Einführung des gewöhnlichen Parameters u für elliptische Kurven können wir $u = 0$ für einen von diesen Punkten setzen. Die drei anderen Punkte bekommen dann die Parameterwerte $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega_1}{2}$ und $\frac{\omega+\omega_1}{2}$, wo ω und ω_1 die Grundperioden bezeichnen. Es ist weiter zu bemerken, dass ein rationaler Punkt wie (34) sieben andere rationale Punkte mit sich führt, welche man durch Zeichenänderung der Grössen x_i erhält. Für acht so zusammengehörige Punkte bekommt man, wie leicht zu beweisen ist, die Parameterwerte

$$\pm u,\quad \pm u + \frac{\omega}{2},\quad \pm u + \frac{\omega_1}{2},\quad \pm u + \frac{\omega+\omega_1}{2}.$$

Da in den Koeffizienten von (13) die Grössen x_i nur in Quadraten auftreten, so führen sämtliche diese acht Punkte zu derselben Kurve.

Wir können jetzt den Punkt $u = 0$ als einen neuen Basispunkt für rationale Punkte annehmen. Wir bezeichnen das Argument im Punkte (34) mit v und legen eine Ebene durch die Tangente in diesem Punkte und den Punkt $u = 0$. Der vierte Schnittpunkt mit der Kurve bekommt dann das Argument $-2v$. Nach den obigen Erörterungen ist es gleichgültig, ob wir diesen Punkt oder denjenigen mit dem Argumente $2v$ aufsuchen. Hier handelt es sich offensichtlich um die Jacobischen elliptischen Funktionen. Die Bezeichnungen lassen sich leicht festlegen. Wir schreiben

$$\frac{x_2}{x_1} = \sin \operatorname{am} u,\quad \frac{2x_3}{x_1} = \cos \operatorname{am} u,\quad \frac{2x}{x_1} = \Delta \operatorname{am} u.$$

Durch Benutzung der Additionstheoreme bekommen wir für den gesuchten Punkt

(35) $$x = 5521,\quad x_1 = 5858,\quad x_2 = 3120,\quad x_3 = -2479.$$

Wenn wir diese Werte für x und x_1 in (14) einführen, so bekommen wir für a eine siebenzifferige und für b eine achtzifferige Zahl. Hätten wir andere rationale Punkte berechnen wollen, so wären Zahlen mit noch viel mehr Ziffern zu erwarten. Unser Resultat ist also, dass zu dem von uns betrachteten Nullbüschel zwar eine Schar von unbegrenzt vielen Kurven des Ranges sechs gehört, dass aber diese Kurven mit Ausnahme von (27) gewissermassen in eine für uns unnahbare Ferne rücken.

In unseren Entwicklungen haben wir uns auf die vier Nullformen (23), (31), (32), (33) und das Nullbüschel, zu welchem diese Formen gehören, beschränkt· Andere Nullformen und Nullbüschel lassen sich in unbegrenzter Menge bilden. Am bequemsten geschieht dies, indem man k, k_1, k_2 und k_3 nach (7) aus rationalen Punkten einer schon bekannten Kurve bestimmt. In solcher Weise erhält man unbegrenzt viele Scharen von Kurven mit dem Range fünf oder sechs. Es ist weiter zu bemerken, dass man hier zu gegebenen k, k_1 und k_2 den vierten Parameter k_3 in verschiedener Weise wählen kann. Dies hat die Bedeutung, dass eine Nullform wie (23) sich in verschiedenen Weisen zu einem Nullbüschel ergänzen lässt. Hierin haben wir einen Ausdruck dafür, dass aus der zu (23) gehörenden Schar von Kurven des Ranges fünf Scharen in unbegrenzter Anzahl von Kurven mit dem Range sechs sich extrahieren lassen. Natürlich kann dabei dieselbe Kurve in mehreren Scharen vorkommen. Es lässt sich aber fragen, ob sich die in einer Schar vom Range fünf eingestreuten Kurven vom Range sechs durch eine endliche Anzahl von Scharen erschöpfen lassen. Die Kurven vom Range sechs, welche man in solcher Weise findet, teilen doch wohl sämtlich den oben berührten Übelstand mit gar zu vielzifferigen Grössen a und b. Sucht man Kurven vom Range sechs mit mässigen Beträgen für a und b, wie es bei (27) der Fall ist, so ist wohl der einzige Ausweg die Entdeckung von Nullbüscheln ohne Anleitung an einer schon bekannten Kurve. So war es ja der Fall mit dem von uns in dieser Arbeit behandelten Nullbüschel. Dass die Kurve (27) sich ganz isoliert von allen anderen Kurven vom Range sechs so zu sagen im Endlichen befindet, wird man ja nicht gern annehmen.

Ich will keine Meinung darüber aussprechen, in wie weit es hier Kurven von noch höherem Range als sechs gibt. Jedenfalls kenne ich kein Mittel um eine solche Kurve zu bestimmen.