SUR LES FONCTIONS À UN NOMBRE FINI DE BRANCHES SATISFAISANT À UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE.

PAR

J. MALMQUIST

à STOCKHOLM.

1. Dans un travail précédent[1] nous avons étudié les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = R(x, y),$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle de x, y. Dans le travail présent nous nous proposons de faire l'étude analogue pour une équation de la forme générale

$$F_0(y; x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + F_1(y; x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + F_m(y; x) = 0, \tag{1}$$

où $F_0, F_1, \ldots F_m$ sont des fonctions entières et rationnelles de y dont les coefficients sont des fonctions algébriques de x. On peut supposer que la fonction

$$F(y', y; x) = F_0(y; x)y'^m + \cdots + F_m(y; x)$$

de y', y est irréductible pour une valeur quelconque de x.

Nous rappelons quelques résultats connus dont nous aurons besoin dans la suite. Si l'on fait, au besoin, une substitution de la forme $y = a + \frac{1}{z}$, où a est une constante convenable, on peut supposer qu'il correspond à une valeur

[1] Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre. Acta mathematica, t. 36, p. 297—343.

infiniment grande de y m valeurs infiniment grandes de y' satisfaisant à l'équation $F(y', y; x) = 0$ et s'obtenant par m séries

$$y' = \alpha_\nu(x) y^2 + \beta_\nu(x) y + \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{y};\ x\right) \qquad (\nu = 1, \ldots m), \tag{2}$$

où α_ν, β_ν et les coefficients de $\mathfrak{P}_\nu$ sont des fonctions algébriques de x. Les fonctions $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ sont distinctes. Nous pouvons prendre un point x_1 différent de certains points en nombre fini de manière que les fonctions α_ν, β_ν $(\nu = 1, \ldots m)$ et les coefficients des séries $\mathfrak{P}_\nu$ soient régulières pour $x = x_1$. Il y a m intégrales de (1) qui deviennent infinies pour $x = x_1$, elles ont en x_1 un pôle du premier ordre

$$y = -\frac{\alpha_\nu(x_1)}{x - x_1} + \mathfrak{P}_\nu(x - x_1) \qquad (\nu = 1, \ldots m). \tag{3}$$

Les résidus $-\alpha_\nu(x_1)$ $(\nu = 1, \ldots m)$ sont distincts si x_1 est différent de certains points en nombre fini.

Soit $D(y; x)$ le discriminant de la fonction $F(y', y; x)$ de y' et supposons que $y = g(x)$ soit une solution de l'équation $D(y; x) = 0$ ou de l'équation $F_0(y; x) = 0$. Si y se trouve dans le voisinage de $g(x)$, l'équation (1) peut être remplacée par un certain nombre d'équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}};\ x\right) \tag{4}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = (y - g(x))^{-\frac{\lambda}{\mu}} \mathfrak{P}\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}};\ x\right), \tag{5}$$

où l'on a $\mu \geqq 1$, $\lambda > 0$ et dans (5) $\mathfrak{P}(0; x) \not\equiv 0$. Les coefficients des séries $\mathfrak{P}$ sont des fonctions algébriques de x. En faisant dans (4) la substitution $y = g(x) + z^\mu$ on aura une équation différentielle de la forme

$$z^{\mu' - 1}\frac{dz}{dx} = \mathfrak{P}_1(z; x), \tag{6}$$

où $\mu' \geqq 1$; si $\mu' > 1$ on a $\mathfrak{P}_1(0; x) \not\equiv 0$. En faisant la même substitution dans (5) on aura une équation de la forme (6), où $\mu' = \lambda + \mu > 1$, $\mathfrak{P}_1(0; x) \not\equiv 0$. Si x_1 est différent de certains points en nombre fini, l'équation (6) peut s'écrire

$$z^{\mu'-1}\frac{dz}{dx} = \mathfrak{P}_1(z, x - x_1), \quad \mathfrak{P}_1(0, 0) \neq 0 \text{ si } \mu' > 1. \tag{7}$$

L'intégrale de cette équation correspondant aux valeurs initiales $x = x_1$, $z = 0$ est de la forme

$$z = \mathfrak{P}\left((x - x_1)^{\frac{1}{\mu'}}\right) = c(x - x_1)^{\frac{1}{\mu'}} + \cdots, \qquad c \neq 0. \tag{8}$$

L'intégrale correspondante de (4) ou (5) acquiert μ' valeurs autour de $x = x_1$.

Nous avons exclu certains points x en nombre fini, on désigne ces points par ξ. D'après un théorème de Painlevé[1] une intégrale de (1) n'admet en dehors des points ξ d'autres points singuliers que des pôles ou des points critiques algébriques. Dans le voisinage d'un pôle on a un développement (3), dans le voisinage d'un point critique algébrique on a un développement correspondant à (8) où $\mu' > 1$. Ces points singuliers sont mobiles.

Une classe importante d'équations (1) est caractérisée par ce fait qu'il n'y a aucun développement (8) où $\mu' > 1$. Alors, les intégrales n'admettent en dehors des points ξ d'autres points singuliers que des pôles. Ces équations différentielles s'appellent équations à points critiques fixes. Elles peuvent être intégrées à l'aide des fonctions classiques. Soit p le genre de l'équation algébrique $F(y', y; x) = 0$ entre y', y pour une valeur quelconque de x. Si $p = 0$ une équation différentielle (1) à points critiques fixes se ramène à une équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx} = a(x)z^2 + b(x)z + c(x)$$

par une transformation

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y; x\right), \tag{9}$$

a, b, c et les coefficients de la fonction rationnelle $R(y', y; x)$ de y', y étant des fonctions algébriques de x. Si $p = 1$ l'équation différentielle se ramène par une transformation (9) à une équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = a(x)(4z^3 - g_2 z - g_3),$$

où $a(x)$ est une fonction algébrique qui peut être $\equiv 0$. Ce résultat est dû à Fuchs.[2] Si $p > 1$ l'intégrale générale est algébrique; ce résultat est dû à Poincaré.[3]

[1] Voir p. ex. P. Painlevé, Leçons de Stockholm, p. 57.
[2] Voir p. ex. P. Painlevé, Leçons de Stockholm, p. 66.
[3] Sur un théorème de M. Fuchs. Acta mathematica, t. 7, p. 1—32.

Au lieu de supposer x variable dans tout le plan on peut supposer x limité à un certain entourage d'un point déterminé, soit $x = 0$. Dans ce qui précède on doit alors remplacer le mot algébrique par algébroïde dans le voisinage de $x = 0$. Si $|x|$ reste plus petit qu'un certain nombre suffisamment petit il n'y a d'autres points ξ que $\xi = 0$ au plus.

2. Nous faisons maintenant un premier pas dans l'étude des intégrales d'une équation (1) dans le voisinage d'un point ξ, soit $\xi = 0$. Si l'on veut obtenir une étude complète on doit faire une suite de transformations et on doit considérer une suite d'équations transformées. Pour notre but il suffira de considérer des équations correspondant aux équations (2), (6) et s'obtenant par des transformations simples. Considérons p. ex. une équation (2). On peut faire une transformation de la forme

$$x = u^q, \quad y = \frac{u^{-\sigma}}{z},$$

où q, σ sont des entiers, $q > 0$, $\sigma \geqq 0$, de manière que cette équation reçoive la forme

$$u^k \frac{dz}{du} = \mathfrak{P}(z, u), \quad \mathfrak{P}(0, 0) \neq 0, \tag{10}$$

où k est un entier positif. En effet, posons d'abord $x = u^q$, $y = \frac{1}{z}$, donc

$$\bar{F}_0(z;\, u)\left(\frac{dz}{du}\right)^m + \bar{F}_1(z;\, u)\left(\frac{dz}{du}\right)^{m-1} + \cdots + \bar{F}_m(z;\, u) = 0.$$

Les racines de l'équation en ζ

$$\bar{F}_0(0;\, u)\zeta^m + \bar{F}_1(0;\, u)\zeta^{m-1} + \cdots + \bar{F}_m(0;\, u) = 0$$

sont (voir (2))

$$-q\, u^{q-1} \alpha_\nu(u^q) \qquad (\nu = 1, \ldots m).$$

Nous pouvons prendre q de manière que les coefficients des fonctions $\bar{F}_\nu(z;\, u)$ $(\nu = 0, 1, \ldots m)$ de z et les fonctions $\alpha_\nu(u^q)$ $(\nu = 1, \ldots m)$ soient des séries de puissances de u, pouvant contenir un nombre fini de puissances négatives. Par la substitution

$$\zeta = -q\, u^{q-1} \alpha_\nu(u^q) + \zeta_1$$

l'équation

$$\bar{F}_0(z;\, u)\zeta^m + \bar{F}_1(z;\, u)\zeta^{m-1} + \cdots + \bar{F}_m(z;\, x) = 0$$

se transforme à une équation qui peut s'écrire

$$u^{x_0} z \,\Phi_0(z;\, u) + u^{x_1}\,\Phi_1(z;\, u)\,\zeta_1 + \cdots + u^{x_m}\,\Phi_m(z;\, u)\,\zeta_1^m = 0,$$

où $x_0, x_1, \ldots x_m$ sont des entiers $\geqq 0$ et $\Phi_0, \Phi_1, \ldots \Phi_m$ sont des fonctions entières et rationnelles de z dont les coefficients sont des séries de puissances de u sans puissances négatives; on a $\Phi_1(0;\, 0) \neq 0$. La racine ζ_1 de cette équation devenant égale à 0 pour $z = 0$ peut s'écrire

$$\zeta_1 = u^\tau \frac{z}{u^\sigma} \mathfrak{P}\left(\frac{z}{u^\sigma},\, u\right),$$

où σ, τ sont des entiers positifs; on peut prendre σ aussi grand que l'on veut. Maintenant, on a l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = -\,q\,u^{q-1}\,\alpha_\nu(u^q) + u^\tau \frac{z}{u^\sigma}\mathfrak{P}\left(\frac{z}{u^\sigma},\, u\right)$$

correspondant à une équation (2), et en posant ici $z = u^\sigma v$ on aura une équation

$$u^\sigma \frac{dv}{du} + \sigma\,u^{\sigma-1}\,v = -\,q\,u^{q-1}\,\alpha_\nu(u^q) + u^\tau\,v\,\mathfrak{P}(v,\, u)$$

qui est de la forme (10) si les nombres σ, τ sont choisis d'une manière convenable.

De même, en supposant que y se trouve dans le voisinage d'une racine de $D(y;\, x) = 0$ ou $F_0(y;\, x) = 0$ et en considérant une équation (6) correspondante on peut faire une transformation

$$x = u^q, \quad y = g(x) + u^\sigma z^\mu, \quad q > 0, \quad \sigma > 0$$

de manière que cette équation (6) reçoive la forme

$$(11) \qquad u^k z^{\mu'-1}\frac{dz}{du} = \mathfrak{P}(z,\, u), \;\; k > 0, \;\; \mathfrak{P}(0,\, 0) \neq 0.$$

Nous n'entrons pas dans la démonstration qui est analogue à la démonstration précédente.

Pour une équation différentielle de la forme

$$(12) \qquad x^k y^i \frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}(y,\, x), \;\; k \geqq 1, \;\; i \geqq 0, \;\; \mathfrak{P}(0,\, 0) \neq 0$$

on a un théorème important de Boutroux.[1] Prenons deux nombres positifs r, r' suffisaments petits. *Tout point x_1, $|x_1| < r$, où une intégrale de (12) prend la valeur o, peut être entouré d'un cercle*

$$|x - x_1| = K|x_1|^k r'^{i+1}, \quad K \textit{ indépendant de } x_1, r, r'$$

de telle manière que ces cercles soient extérieurs les uns aux autres sur la surface de Riemann de y et que $|y| > r'$ à l'extérieur de ces cercles.

Nous donnons ici une démonstration très simple de ce théorème. L'équation (12) peut s'écrire si l'on prend y comme variable indépendante

$$\frac{dx}{dy} = x^k y^i \mathfrak{P}_1(y, x) = y^i \mathfrak{P}_0(y) x^k + y^i \mathfrak{P}_1(y) x^{k+1} + \cdots.$$

L'intégrale de cette équation correspondant à $x = x_1$, $y = 0$ peut être développée suivant les puissances de x_1. On aura ainsi

$$x - x_1 = \frac{a}{i+1} x_1^k y^{i+1} (1 + y\overline{\mathfrak{P}}(y) + x_1 \overline{\mathfrak{P}}(y, x_1)),$$

où $a = \mathfrak{P}_0(0)$. On peut supposer que

$$|y\overline{\mathfrak{P}}(y) + x_1 \overline{\mathfrak{P}}(y, x_1)| < \frac{1}{2}$$

pour $|x_1| \leqq r$, $|y| \leqq r'$, si r, r' sont suffisamments petits. Pour $|y| = r'$ on aura donc

$$|x - x_1| < \frac{3}{2}\frac{|a|}{i+1}|x_1|^k r'^{i+1} = K|x_1|^k r'^{i+1}$$

$$|x - x_1| > \frac{1}{2}\frac{|a|}{i+1}|x_1|^k r'^{i+1} = \frac{1}{3}K|x_1|^k r'^{i+1}.$$

Les courbes dans le plan x définies par $|y| = r'$ sont évidemment extérieurs les unes aux autres sur la surface de Riemann de y. Par suite il en est de même des cercles

$$|x - x_1| = \frac{1}{3}K|x_1|^k r'^{i+1}.$$

À l'extérieur de ces cercles on a $|y| > r'_1$, le nombre r'_1 étant déterminé par $r'^{i+1} = 3 r_1'^{i+1}$. Par là, le théorème est démontré.

[1] P. Boutroux, Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre. (Collection de Borel, 1908), p. 47—53.

Nous faisons la remarque complémentaire suivante. Supposons que y ne devienne jamais égal à o quand x se meut dans le voisinage de o. Alors on a nécessairement $|y| > r'$, car si la valeur y_0 de y pour un point x_0 satisfaisait à $|y_0| \leqq r'$, l'équation

$$x_0 - x_1 = \frac{a}{i+1} x_1^k y_0^{i+1} (1 + y_0 \overline{\mathfrak{P}}(y_0) + x_1 \overline{\mathfrak{P}}(y_0, x_1))$$

donnerait un point x_1 où $y = 0$.

3. Appliquons ce théorème aux équations (10) correspondant aux équations (2). On peut évidemment prendre les mêmes nombres q, σ dans les m équations (10), mais les nombres k, K peuvent être différents dans ces équations, soient $k_1, \dots k_m$, $K_1, \dots K_m$ ces nombres. Si une intégrale de (1) satisfait à

$$|y| \geqq \frac{|u|^{-\sigma}}{r'}$$

elle peut être obtenue par une équation (10). Par suite, on *peut entourer les pôles* x_1 *de* y *dans le voisinage de* $x = 0$ *par des courbes*

$$|x^{1/q} - x_1^{1/q}| = K_\nu r' |x_1|^{k_\nu/q}$$

de telle manière que ces courbes soient extérieurs les unes aux autres sur la surface de Riemann de y *et que*

$$|y| < \frac{1}{r'} |x|^{-\frac{\sigma}{q}}$$

à l'extérieur de ces courbes.

Si une intégrale y *n'a aucun pôle dans le voisinage de* $x = 0$ *elle satisfait à l'inégalité*

$$|y| < \frac{1}{r'} |x|^{-\frac{\sigma}{q}}$$

quand x *se meut d'une manière quelconque dans le voisinage de* $x = 0$.

Supposons ensuite que y se trouve dans le voisinage d'une racine $y = g(x)$ de $D(y; x) = 0$ ou $F_0(y; x) = 0$ et soit $y' = g_1(x)$, $y = g(x)$ le point de la courbe algébrique $F(y', y; x) = 0$ correspondant à une équation (6) où $\mu' > 1$. D'après la théorie des fonctions algébriques il y a des fonctions rationnelles de y', y qui ne deviennent infinies qu'en le point $(g_1(x), g(x))$, soit $R(y', y; x)$ une telle fonction, dont les coefficients sont des fonctions algébriques de x ou du moins algébroïdes dans le voisinage de $x = 0$. Pour

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y; x\right)$$

on aura une équation différentielle analogue à (1), et si z se trouve dans le voisinage de l'infini cette équation peut être remplacée par une équation de la forme

$$\frac{dz}{dx} = z^{\frac{\lambda}{\mu}} \mathfrak{P}\left(z^{-\frac{1}{\mu}}; x\right), \quad \mathfrak{P}(0; x) \not\equiv 0.$$

Par une transformation de la forme

$$x = u^q, \quad z = \frac{u^{-\sigma}}{v}$$

on aura une équation

$$u^k v^{\mu'-1} \frac{dv}{du} = \mathfrak{P}(v, u)$$

de la forme (11). Par suite, *on peut entourer les points* x_1 *dans le voisinage de* 0 *pour lesquels* z *devient infini par des courbes*

$$|x^{1/q} - x_1^{1/q}| = K r'^{\mu'} |x_1|^{k/q}$$

de telle manière que ces courbes soint extérieures les unes aux autres sur la surface de Riemann de z *et que*

$$|z| < r'^{-\mu} |x|^{-\sigma/q}$$

à l'extérieur de ces courbes. Si z *ne devient jamais infini dans le voisinage de* $x = 0$ *on a*

$$|z| < r'^{-\mu} |x|^{-\sigma/q}$$

quand x *se meut d'une manière quelconque dans le voisinage de* $x = 0$.

A l'aide de ce résultat on peut facilement démontrer le théorème suivant.[1]

Si une équation différentielle (1) *dont les coefficients sont algébroïdes dans le voisinage de* $x = 0$ *a une intégrale non algebroïde à un nombre fini de valeurs et sans autre point critique que* $x = 0$ *dans le voisinage de ce point, l'équation différentielle est nécessairement à points critiques fixes et peut être transformée à une équation de Riccati ou à une équation différentielle elliptique.*

Nous reproduisons la démonstration très simple de ce théorème. Supposons que l'équation différentielle ne soit pas une équation à points critiques fixes.

[1] Voir J. MALMQUIST, Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre. Acta mathematica, t. 42, p. 317—325.

Il y a donc des équations (4) ou (5). Soit $y' = g_1(x)$, $y = g(x)$ un point correspondant de la courbe algébrique $F(y', y; x) = 0$ et prenons une fonction rationnelle $R(y', y; x)$ qui ne devient infini qu'en ce point. La fonction

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y; x\right),$$

où y désigne l'intégrale dont nous avons supposé l'existence, ne devient infini pour aucun point dans le voisinage de $x = 0$, car y n'a aucun point critique. Par suite, z satisfait à une inégalité de la forme

$$|z| < r'^{-\mu} |x|^{-\sigma/q}.$$

Or, y ayant un nombre fini de valeurs dans le voisinage de $x = 0$ il en est de même de z, par suite z serait algébroïde dans le voisinage de $x = 0$, ce qui est contre la supposition. L'équation différentielle doit donc être à points critiques fixes. Le genre p de l'équation $F(y', y; x) = 0$ est 0 ou 1, car si $p > 1$ l'intégrale générale serait algébroïde pour $x = 0$. Par suite le théorème est démontré.

4. Nous considérons maintenant une équation différentielle (1) qui n'est pas une équation à points critiques fixes et dont les coefficients sont des fonctions algébriques de x, et nous supposons qu'il existe une intégrale de (1) ayant une branche qui est définie dans le voisinage d'un point ξ, soit $\xi = 0$, et qui a un nombre fini de valeurs et une infinité de points critiques. Sous cette supposition on a le théorème suivant que nous allons démontrer.

Théorème. *L'équation* (1) *se transforme ou bien à une équation de Riccati*

$$\frac{dz}{dx} = a(x) z^2 + b(x) z + c(x)$$

par une transformation

$$y^n + R_1(z; x) y^{n-1} + \cdots + R_n(z; x) = 0$$

ou bien à une équation différentielle elliptique

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = a(x)(4z^3 - g_2 z - g_3)$$

par une transformation

$$y^n + R_1(z; x) y^{n-1} + \cdots + R_n(z; x) + \frac{dz}{dx}(\overline{R}_1(z; x) y^{n-1} + \cdots + \overline{R}_n(z; x)) = 0.$$

Inversement on a

$$z = R\left(\frac{d\,y}{d\,x}, y; x\right).$$

R_ν, $\bar{R}_\nu$ sont des fonctions rationnelles de z et R est une fonction rationnelle de $\frac{d\,y}{d\,x}$, y. Les coefficients de R_ν, $\bar{R}_\nu$, R et a, b, c sont des fonctions rationnelles de x, t si les coefficients de l'équation (1) *sont exprimés comme des fonctions rationnelles de x et d'une variable t liée à x par une équation algébrique irréductible.*

Dans le travail cité (voir la note p. 175) nous nous sommes servis d'un système d'équations différentielles pour les fonctions symétriques élémentaires de n intégrales quelconques de l'équation $\frac{d\,y}{d\,x} = R(x, y)$. Il semble que cette méthode ne soit pas applicable à l'équation générale (1). Nous allons nous servir d'une méthode un peu différente.

Prenons un point x_0 dans le voisinage de $x = 0$ distinct des points singuliers de la branche d'intégrale y dont nous avons supposé l'existence. Partons d'un élément $\bar{y}_1$ de y, série de puissances de $x - x_0$, et faisons décrire à x des chemins fermés dans le voisinage de $x = 0$ n'entourant pas ce point. On aura ainsi un certain nombre d'éléments $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$. Ils satisfont à l'équation (1), si les coefficients de la fonction $F(y', y; x)$ de y', y ont certaines déterminations. Pour chaque fonction rationnelle $R(y', y; x)$ dont les coefficients sont des fonctions algébriques de x n'ayant pour $|x| < r$ aucun point critique $\neq 0$ la somme

$$\sum_{\nu=1}^{n} R(\bar{y}'_\nu, \bar{y}_\nu; x),$$

où $\bar{y}'_\nu$ est la dérivée de $\bar{y}_\nu$, définit l'élément d'une branche n'ayant pour $|x| < r$ aucun point critique $\neq 0$. Il s'agit de déterminer $R(y', y; x)$ de manière que cette branche ait pour $x = 0$ un point singulier algébrique au plus.

Nous désignons par ϱ le nombre des équations (6) pour lesquelles $\mu' > 1$ et nous désignons par $(g_1(x), g(x))$ les points correspondants de la courbe algébrique $F(y', y; x) = 0$, où les coefficients ont les déterminations considérées. À chaque point $(g_1(x), g(x))$ correspondent des fonctions rationnelles de y', y ne devenant infinies qu'en ce point, et il y a un nombre k de manière qu'il existe, pour chaque entier positif ν, des fonctions rationnelles devenant infinies de l'ordre $k + \nu$ mais qu'il n'existe aucune fonction rationnelle qui devient infinie de l'ordre k. Prenons pour chaque nombre ν une fonction rationnelle déterminée $R_\nu(y', y; x)$

qui devient infinie de l'ordre $k+\nu$, les coefficients étant des fonctions algébriques de x. Toute fonction rationnelle qui devient infinie de l'ordre $k+\nu$ peut s'écrire

$$c_1(x) R_1(y', y; x) + \cdots + c_\nu(x) R_\nu(y', y; x).$$

Introduisant pour y' le second membre de (4) ou (5) on aura pour $R_\nu(y', y; x)$ un développement de la forme

$$(y-g(x))^{-\frac{k+\nu}{\mu}} \mathfrak{P}\left((y-g(x))^{\frac{1}{\mu}}; x\right), \quad \mathfrak{P}(0; x) \neq 0,$$

et cette série peut s'écrire comme une série de puissances de $(y-g(x))^{\frac{1}{\mu}}$, $x-x_1$, si x se trouve dans le voisinage d'un point quelconque x_1 tel que $|x_1| < r$, r étant suffisamment petit. Introduisant $y = g(x) + z^\mu$, où z est donné par (8), on aura un développement

$$(13) \qquad (x-x_1)^{-\frac{k+\nu}{\mu'}} \mathfrak{P}_\nu\left((x-x_1)^{\frac{1}{\mu'}}; x_1\right), \quad \mathfrak{P}_\nu(0; x_1) \neq 0,$$

les coefficients dans $\mathfrak{P}_\nu$ étant des fonctions algébriques de x_1 n'ayant pour $|x_1| < r$ aucun point critique $\neq 0$. Cette série peut évidemment s'écrire aussi

$$(13') \qquad (x-x_1)^{-\frac{k+\nu}{\mu'}} \bar{\mathfrak{P}}_\nu\left((x-x_1)^{\frac{1}{\mu'}}; x\right), \quad \bar{\mathfrak{P}}_\nu(0; x) \neq 0$$

les coefficients dans $\bar{\mathfrak{P}}_\nu$ étant des fonctions algébriques de x. Nous considérons les termes des séries (13), (13') où les exposants sont des entiers négatifs, soient

$$(14) \qquad \frac{a_{1\nu}(x_1)}{x-x_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda_\nu, \nu}(x_1)}{(x-x_1)^{\lambda_\nu}}$$

$$(14') \qquad \frac{\bar{a}_{1\nu}(x)}{x-x_1} + \cdots + \frac{\bar{a}_{\lambda_\nu, \nu}(x)}{(x-x_1)^{\lambda_\nu}}$$

ces termes, où $\lambda_\nu = \left[\frac{k+\nu}{\mu'}\right]$. La différence entre les expressions (14), (14') est finie pour $x = x_1$. Comme $\mu' > 1$ on peut prendre ν assez grand pour que $\nu > \left[\frac{k+\nu}{\mu'}\right]$. Par suite, on peut déterminer des fonctions algébriques $c_1(x), \ldots c_\nu(x)$ de manière que la somme

$$\sum_{i=1}^{\nu} c_i(x) \left\{\frac{\bar{a}_{1i}(x)}{x-x_1} + \cdots + \frac{\bar{a}_{\lambda_i, i}(x)}{(x-x_1)^{\lambda_i}}\right\}$$

soit finie pour $x_1 = x$. Alors le développement de

$$R(y', y; x) = c_1(x) R_1(y', y; x) + \cdots + c_\nu(x) R_\nu(y', y; x) \tag{15}$$

dans le voisinage de $x = x_1$ ne contient d'autres puissances négatives que des puissances fractionnaires.

Par suite, la somme

$$\sum_{\nu=1}^{n} R(\bar{y}'_\nu, \bar{y}_\nu; x)$$

définit l'élément $\bar{\alpha}(x)$ d'une branche $\alpha(x)$ qui n'a pour $|x| < r$ aucun point singulier $\neq 0$. Appliquons le théorème de Boutroux à la branche $\bar{z}$ dont

$$R(\bar{y}'_\nu, \bar{y}_\nu; x) \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

définissent des éléments. D'après le résultat énoncé à la page 182 on peut entourer les points x_1 dans le voisinage de 0 pour lesquels $\bar{z}$ devient infini par des courbes

$$|x^{1/q} - x_1^{1/q}| = K r'^{\mu'} |x_1|^{k/q}$$

de telle manière que ces courbes soient extérieures les unes aux autres sur la surface de Riemann de $\bar{z}$ et que

$$|\bar{z}| < r'^{-\mu} |x|^{-\sigma/q}$$

à l'extérieur de ces courbes. Il résulte de la dernière inégalité que

$$|\alpha(x)| < n r'^{-\mu} |x|^{-\sigma/q}.$$

Or, la fonction $\alpha(x) x^{\sigma/q}$ étant régulière pour $|x| < r$, $x \neq 0$, cette inégalité a lieu aussi à l'intérieur des courbes entourant les points x_1, par suite elle a lieu pour $|x| < r$. La branche $\alpha(x)$ ayant un nombre fini de valeurs on voit donc que $\alpha(x)$ a au plus un point singulier algébrique pour $x = 0$.

5. Il importe de montrer que la fonction (15) peut être déterminée de manière que l'expression

$$\sum_{i=1}^{\nu} c_i(x)(x - x_1)^{-\frac{k+i}{\mu'}} \mathfrak{P}_i\left((x - x_1)^{\frac{1}{\mu'}}; x_1\right),$$

où entrent les développements (13), contienne, pour chaque nombre i satisfaisant à $1 \leqq i \leqq \mu' - 1$, des termes

$$(x-x_1)^{-\frac{\varkappa}{\mu'}}$$

tels que $\varkappa \equiv i$ (mod. μ'). Prenons un nombre i de manière que $1 \leqq i \leqq \mu' - 1$, soit $\bar{\imath}$ le plus petit entier positif tel que $k + \bar{\imath} \equiv 0$ (mod. μ') et posons $k + \bar{\imath} = k'\mu'$. Nous considérons celles des fonctions $R_1, R_2, \ldots$ dont les développements (13) ou (13′) commencent par les termes

$$(x-x_1)^{-k'-\frac{i}{\mu'}}, \quad (x-x_1)^{-k'-1}, \quad (x-x_1)^{-k'-1-\frac{i}{\mu'}}, \quad (x-x_1)^{-k'-2}, \ldots,$$

désignons ces fonctions par $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots$ et considérons l'expression

$$(16) \qquad c_1(x)R^{(1)} + c_2(x)R^{(2)} + \cdots + c_{2k'+1}(x)R^{(2k'+1)}.$$

Soient

$$\begin{array}{l}
\bar{a}_{11}(x)(x-x_1)^{-k'} + \bar{a}_{12}(x)(x-x_1)^{-k'+1} + \cdots + \bar{a}_{1,k'}(x)(x-x_1)^{-1} \\
\bar{a}_2(x)(x-x_1)^{-k'-1} + \bar{a}_{21}(x)(x-x_1)^{-k'} + \cdots + \bar{a}_{2,k'}(x)(x-x_1)^{-1} \\
\bar{a}_{31}(x)(x-x_1)^{-k'-1} + \bar{a}_{32}(x)(x-x_1)^{-k'} + \cdots + \bar{a}_{3,k'+1}(x)(x-x_1)^{-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{a}_{2k'}(x)(x-x_1)^{-2k'} + \bar{a}_{2k',1}(x)(x-x_1)^{-2k'+1} + \cdots + \bar{a}_{2k',2k'-1}(x)(x-x_1)^{-1} \\
\bar{a}_{2k'+1,1}(x)(x-x_1)^{-2k'} + \bar{a}_{2k'+1,2}(x)(x-x_1)^{-2k'+1} + \cdots + \bar{a}_{2k'+1,2k'}(x)(x-x_1)^{-1}
\end{array}$$

les termes à puissances négatives entières dans les développements (13′) de $R^{(1)}$, $R^{(2)}, \ldots R^{(2k'+1)}$. Ecrivant que le développement de la fonction (16) ne contient pas les puissances

$$(x-x_1)^{-2k'}, \quad (x-x_1)^{-2k'+1}, \quad \ldots (x-x_1)^{-k'-1}$$

on aura

$$\begin{array}{l}
c_{2k'}\bar{a}_{2k'} + c_{2k'+1}\bar{a}_{2k'+1,1} = 0 \\
c_{2k'-2}\bar{a}_{2k'-2} + c_{2k'-1}\bar{a}_{2k'-1,1} + c_{2k'}\bar{a}_{2k',1} + c_{2k'+1}\bar{a}_{2k'+1,2} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_2\bar{a}_2 + c_3\bar{a}_{31} + c_4\bar{a}_{41} + \cdots + c_{2k'+1}\bar{a}_{2k'+1,k'} = 0.
\end{array}$$

Les coefficients $\bar{a}_2, \bar{a}_4, \ldots \bar{a}_{2k'}$ étant $\neq 0$ ces équations donnent pour $c_2, c_4, \ldots c_{2k'}$ des expressions linéaires et homogènes en $c_3, c_5, \ldots c_{2k'+1}$. Écrivant ensuite que le développement de la fonction (16) ne contient pas les puissances

$$(x-x_1)^{-k'}, \quad \ldots (x-x_1)^{-1}$$

on aura k' équations linéaires et homogènes entre les $k'+1$ coefficients c_1,

$c_3, \ldots c_{2k'+1}$. Ces équations ont une solution. Si l'on peut prendre $c_{2k'+1} \neq 0$ le développement de la fonction (16) contient la puissance $(x-x_1)^{-2k'-\frac{i}{\mu'}}$. Si $c_{2k'+1}=0$, $c_{2k'-1}=0, \ldots c_{2\varkappa+1}=0$, $c_{2\varkappa-1}\neq 0$ on aura aussi $c_{2k'}=0$, $c_{2k'-2}=0, \ldots c_{2\varkappa}=0$. Par suite, le développement de la fonction (16) contient la puissance $(x-x_1)^{-k'-\varkappa+1-\frac{i}{\mu'}}$.

Désignons la fonction (16) ainsi déterminée par $\overline{R}_i$. Alors $c_1\overline{R}_1+\cdots+c_{\mu'-1}\overline{R}_{\mu'-1}$, où $c_1, \ldots c_{\mu'-1}$ sont des constantes convenables, satisfait à la condition posée. Si l'on remplace, dans le développement (13) de cette fonction, $(x-x_1)^{\frac{1}{\mu'}}$ par des déterminations en nombre plus petit que μ' et si l'on fait la somme des expressions ainsi obtenues, les puissances fractionnaires ne disparaissent pas. Cette remarque est d'une grande importance pour la suite.

6. À chacun des ϱ points $(g_1(x), g(x))$ pour lequel $\mu'>1$ correspond une fonction rationnelle (15) satisfaisant à la condition posée dans le n:o précédent. En somme nous aurons ϱ fonctions rationnelles, désignons les par

$$R_1(y', y; x), \ \ldots \ R_\varrho(y', y; x).$$

Les expressions

$$\sum_{\nu=1}^{n} R_i(\bar{y}'_\nu, \bar{y}_\nu; x) \qquad (i=1, \ldots \varrho)$$

définissent des éléments $\bar{\alpha}_i(x)$ $(i=1, \ldots \varrho)$ de branches $\alpha_i(x)$ qui ont pour $x=0$ un point singulier algébrique au plus.

Nous considérons maintenant les équations algébriques

$$\sum_{\nu=1}^{n} R_i(y'_\nu, y_\nu; x) = \bar{\alpha}_i(x) \qquad (i=1, \ldots \varrho) \tag{17}$$

entre n points (y'_ν, y_ν) de $F(y', y; x)=0$. D'après la théorie de l'élimination ce système peut être remplacé par un certain nombre de systèmes de la forme

$$\begin{aligned} &G(t, t_1, \ldots t_s; x)=0 \\ &y_\nu = R_\nu(t, t_1, \ldots t_s; x) \qquad (\nu=1, \ldots n) \\ &y'_\nu = R'_\nu(t, t_1, \ldots t_s; x) \end{aligned} \tag{18}$$

ou de la forme

$$(18') \qquad \begin{aligned} &G(t; x) = 0 \\ &y_\nu = R_\nu(t; x) \\ &y'_\nu = R'_\nu(t; x) \end{aligned} \qquad (\nu = 1, \ldots n),$$

G étant une fonction entière et rationnelle de $t, t_1, \ldots t_s$ ou t et R_ν, R'_ν étant des fonctions rationnelles de $t, t_1, \ldots t_s$ ou t. Les coefficients dans (18), (18′) sont rationnels en les coefficients de $F(y', y; x)$ et les coefficients dans (17). Une solution du système (17) obtenue par un système (18′) a donc pour $x = 0$ un point singulier algébrique au plus. Par suite $\bar{y}'_\nu$, $\bar{y}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots n)$, qui satisfont au système (17), ne peuvent pas être obtenus d'un système (18′). Nous considérons un système (18) qui donne $\bar{y}'_\nu$, $\bar{y}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots n)$ si l'on prend pour $t_1, \ldots t_s, t$ certaines fonctions de x, soient $t_1 = \bar{t}_1, \ldots t_s = \bar{t}_s$, $t = \bar{t}$.

Dans ce système (18) nous pouvons supposer que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(y_1, \ldots y_s)}{\partial(t_1, \ldots t_s)}$$

ne s'annule pas identiquement. En effet, supposons que tous les déterminants

$$\frac{\partial(y_{i_1}, \ldots y_{i_s})}{\partial(t_1, \ldots t_s)}$$

soient nuls identiquement mais que

$$\frac{\partial(y_1, \ldots y_{s-1})}{\partial(t_1, \ldots t_{s-1})}$$

p. ex. soit $\not\equiv 0$. Alors $R_s, \ldots R_n$ sont indépendants de t_s si on les exprime comme fonctions de $y_1, \ldots y_{s-1}$, et comme $F(y'_\nu, y_\nu; x) = 0$ il en est de même de $R'_1, \ldots R'_n$. Le système (18) n'est donc pas changé si l'on donne à t_s une valeur déterminée quelconque. On aurait donc un système (18) où s est remplacé par $s - 1$. Nous pouvons donc supposer que

$$\frac{\partial(y_1, \ldots y_s)}{\partial(t_1, \ldots t_s)} \not\equiv 0.$$

Cette inégalité a lieu aussi pour les valeurs de $t_1, \ldots t_s$ telles que $\bar{y}_1 = R_1$, car dans le cas contraire $\bar{y}_1$ s'obtiendrait algébriquement en les coefficients dans (18) et serait donc élément d'une branche ayant pour $x = 0$ un point singulier algébrique au plus.

Posons $t_1 = \bar t_1, \ldots t_s = \bar t_s, t = \bar t$ dans le système (18) et dérivons par rapport à x, donc

$$R'_\nu = \frac{\partial R_\nu}{\partial \bar t_1}\frac{d\bar t_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial R_\nu}{\partial \bar t_s}\frac{d\bar t_s}{dx} + \frac{\partial R_\nu}{\partial x} \qquad (\nu = 1, \ldots n).$$

Pour des valeurs quelconque de $t_1, \ldots t_s$ nous considérons les équations

$$R'_\nu = \frac{\partial R_\nu}{\partial t_1} t'_1 + \cdots + \frac{\partial R_\nu}{\partial t_s} t'_s + \frac{\partial R_\nu}{\partial x} \qquad (\nu = 1, \ldots n). \tag{19}$$

Par élimination de $t'_1, \ldots t'_s$ on aura $n - s$ équations algébriques entre $t_1, \ldots t_s$ qui sont satisfaites pour $t_1 = \bar t_1, \ldots t_s = \bar t_s, t = \bar t$. Deux cas sont à considérer suivant que ces équations entre $t_1, \ldots t_s$ sont ou non des identités. Dans le cas où elles ne sont pas des identités la théorie de l'élimination donne un nouvel système (18) où s a une valeur plus petite. En poursuivant ce procédé on aboutira à un système (18) tel que les dites équations algébriques entre $t_1, \ldots t_s$ obtenues par élimination de $t'_1, \ldots t'_s$ entre les équations (19) correspondantes soient des identités, dans le cas contraire $\bar y_1, \ldots \bar y_n$ s'obtiendraient algébriquement et seraient éléments d'une branche ayant pour $x = 0$ un point singulier algébrique au plus. Nous pouvons donc supposer qu'on a un système de la forme (18) tel que les dites équations algébriques entre $t_1, \ldots t_s$ soient des identités. Ce système donne des solutions de (17) parmi lesquelles se trouve $\bar y'_\nu$, $\bar y_\nu$ $(\nu = 1, \ldots n)$.

7. Prenons pour $t_1, \ldots t_s, t$ des fonctions de x dans le voisinage de $\bar t_1, \ldots \bar t_s, \bar t$ de telle manière que $y_1, \ldots y_s$ soient des intégrales quelconques de (1) dans le voisinage de $\bar y_1, \ldots \bar y_s$. Je dis que $y_{s+1}, \ldots y_n$ sont aussi des intégrales de (1). En effet, on voit d'abord que

$$\frac{dy_\nu}{dx} = R'_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots s),$$

car pour chaque valeur de ν l'équation $F(y', y_\nu; x) = 0$ n'a qu'une seule racine y' dans le voisinage de $\bar y'_\nu$. Comme

$$\frac{dy_\nu}{dx} = \frac{\partial R_\nu}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial R_\nu}{\partial t_s}\frac{dt_s}{dx} + \frac{\partial R_\nu}{\partial x} \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

on aura donc

$$R'_\nu = \frac{\partial R_\nu}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial R_\nu}{\partial t_s}\frac{dt_s}{dx} + \frac{\partial R_\nu}{\partial x} \qquad (\nu = 1, \ldots s).$$

Les relations algébriques entre $t_1, \ldots t_s$ obtenues par élimination de $t'_1, \ldots t'_s$ entre les équations (19) se réduisant à des identités on aura aussi

$$R'_\nu = \frac{\partial R_\nu}{\partial t_1}\frac{d t_1}{d x} + \cdots + \frac{\partial R_\nu}{\partial t_s}\frac{d t_s}{d x} + \frac{\partial R_\nu}{\partial x} \qquad (\nu = s + 1, \ldots n)$$

donc

$$\frac{d y_\nu}{d x} = R'_\nu, \quad F\left(\frac{d y_\nu}{d x}, y_\nu; x\right) = 0 \qquad (\nu = s + 1, \ldots n).$$

Nous démontrons maintenant que les fonctions symétriques élémentaires des intégrales $y_1, \ldots y_n$ sont des éléments de branches n'ayant dans le voisinage de $x = 0$ aucun point critique $\neq 0$. En effet, faisons décrire à x un chemin dans le voisinage de $x = 0$ depuis x_0 jusqu'à un point critique x_1 de l'une des intégrales $y_1, \ldots y_n$, p. ex. de y_1. Alors y_1 s'obtient d'une équation (4) ou (5), soit $(g_1(x), g(x))$ le point correspondant de $F(y', y; x) = 0$ et supposons que $R_1(y', y; x)$ p. ex. soit infini en ce point. D'après le n:o 5 le développement de $R_1(y'_1, y_1; x)$ suivant les puissances de $x - x_1$ contient, pour chaque nombre i satisfaisant à $1 \leqq i \leqq \mu' - 1$, des puissances négatives $(x - x_1)^{-\frac{\varkappa}{\mu'}}$ telles que $\varkappa \equiv i \pmod{\mu'}$. Par suite $R_1(y'_1, y_1; x)$ acquiert μ' valeurs autour de x_1 et ces valeurs s'obtiennent de certaines des expressions $R_1(y'_\nu, y_\nu; x)$ $(\nu = 1, \ldots n)$, car dans le cas contraire la fonction

$$\sum_{\nu=1}^{n} R_1(y'_\nu, y_\nu; x) = \alpha_1(x)$$

aurait, d'après la remarque faite à la fin du n:o 5, un point critique en x_1, ce qui n'est pas le cas. Il en résulte que les fonctions symétriques élémentaires de $y_1, \ldots y_n$ n'ont pas x_1 comme point critique. Par suite, elles n'ont aucun point critique dans le voisinage de $x = 0$ différent de ce point.

À l'aide de ce résultat nous pouvons facilement démontrer que $s = 1$. En effet, supposons que l'on ait $s > 1$. Nous supposons comme précédamment que $y_1, \ldots y_s$ sont des intégrales de (1), nous supposons que $y_1 = \bar{y}_1$ et que $y_2, \ldots y_s$ sont des intégrales quelconques dans le voisinage de $\bar{y}_2, \ldots \bar{y}_s$. Alors $y_1, \ldots y_n$ satisfont à une équation

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n = 0,$$

où $z_1, \ldots z_n$ n'ont à l'exception de $x = 0$ aucun point critique dans le voisinage de ce point. Cette équation, étant satisfaite par $\bar{y}_1$, est nécessairement satisfaite par

$\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$, comme on le voit en faisant décrire à x des chemins fermés ne tournant pas autour de $x = 0$. Elle est satisfaite en outre par $y = y_2$, ce qui est impossible. On doit donc avoir $s = 1$.

8. Nous avons donc un système (18) où $s = 1$ donnant des solutions du système (17) parmi lesquelles se trouvent la solution $\bar{y}'_\nu, \bar{y}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots n)$. En particulier, il y a des solutions telles que $y_1, \ldots y_n$ soient des intégrales de (1) dans le voisinage de $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$. Les fonctions symétriques élémentaires de $y_1, \ldots y_n$ n'ont aucun point critique pour $0 < |x| < r$, si r est suffisamment petit. On en conclut que toute intégrale de (1) dans le voisinage de $\bar{y}_1$ acquiert n valeurs $y_1, \ldots y_n$ autour des points critiques mobiles satisfaisant à $|x| < r$, car elle acquiert évidemment au moins n valeurs. De plus, $y_2, \ldots y_n$ sont des fonctions algébriques de y_1.

Soient $f_i(y_1, \ldots y_n)$ $(i = 1, \ldots n)$ les fonctions symétriques élémentaires de $y_1, \ldots y_n$ et posons

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(y_1, \ldots y_n)$$

où $c_1, \ldots c_n$ sont des constantes. En désignant y_1 par y on aura entre z, y une équation algébrique

$$G(z, y; x) = 0, \tag{21}$$

et les coefficients de cette équation n'ont aucun point critique pour $0 < |x| < r$ car il en est ainsi des coefficients du système (18). L'équation (21) est évidemment satisfaite par $y_1 \ldots y_n$.

Pour z on aura une équation différentielle

$$\Phi\left(\frac{dz}{dx}, z; x\right) = 0 \tag{22}$$

transformée algébrique de (1). Les coefficients de cette équation n'ont aucun point critique pour $0 < |x| < r$. L'équation (22) est satisfaite par

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n).$$

La branche d'intégrale y dont nous avons supposé l'existence et dont $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ sont des éléments a nécessairement une infinité de pôles car dans le cas contraire y satisferait, d'après le théorème de Boutroux, à une inégalité (voir p. 182)

$$|y| < K|x|^{-\sigma}$$

pour $|x| < r$, par suite y, qui a un nombre fini de valeurs, serait algébroïde dans le voisinage de $x = 0$, contrairement à la supposition. On peut donc prendre les constantes $c_1, \ldots c_n$ de manière que $\bar{z}$ soit élément d'une branche ayant une infinité de pôles pour $|x| < r$. Or, cette branche a un nombre fini de valeurs et elle n'a aucun point critique pour $0 < |x| < r$. On en conclut, d'après le théorème démontré à la fin du n:o 3, que l'équation (22) est une équation à points critiques fixes qui peut être transformée à une équation de Riccati où à une équation différentielle elliptique. Par suite, l'intégrale générale de l'équation (1) est fonction algébrique de la valeur initiale y_0.

L'équation algébrique (21) peut s'écrire de deux autres formes. Soient y_0, y_0' les valeurs initiales de y, $\frac{dy}{dx}$ pour $x = x_0$ et faisons décrire à (y_0', y_0) un chemin fermé L sur la surface de Riemann de $F(y', y; x_0) = 0$. Les intégrales $y_1, \ldots y_n$ varient avec continuité et quand (y_0', y_0) a décrit L on aura des intégrales $y_1^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}$. Ces intégrales satisfont au système (17) si y_ν' est la dérivée de y_ν, et on voit comme précédamment que les fonctions symétriques élémentaires de $y_1^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}$ n'ont aucun point critique pour $0 < |x| < r$. Or $y_1^{(1)} = y_1$ si $|x - x_0|$ est assez petit. Alors le raisonnement employé à la fin de n:o 7 montre que $y_2^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}$ sont les fonctions $y_2, \ldots y_n$ dans un certain ordre, donc

$$f_i(y_1^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}) = f_i(y_1, \ldots y_n) \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Les fonctions $f_i(y_1, \ldots y_n)$ $(i = 1, \ldots n)$ sont donc uniformes en y', y liés par $F(y', y; x) = 0$. Étant des fonctions algébriques de y elles peuvent donc s'écrire comme des fonctions rationnelles de $\frac{dy}{dx}$, y, soit

$$R_i\left(\frac{dy}{dx}, y; x\right) \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Nous les supposons écrites comme des fonctions entières et rationnelles de $\frac{dy}{dx}$ de degré au plus égal à $m - 1$. Posons

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i R_i\left(\frac{dy}{dx}, y; x\right) = R\left(\frac{dy}{dx}, y; x\right). \tag{23}$$

Soient ensuite z_0, z'_0 les valeurs initiales de z, $\frac{dz}{dx}$ pour $x = x_0$ et faisons décrire à (z'_0, z_0) un chemin fermé L sur la surface de Riemann de $\Phi(z', z; x_0) = 0$. Les intégrales $y_1, \ldots y_n$ de (1) varient avec continuité et quand (z'_0, z_0) a décrit le chemin L on aura des intégrales $y_1^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}$. Ces intégrales sont indépendantes de $c_1, \ldots c_n$. L'intégrale z de (22) revient à l'intégrale d'où l'on est partie, par suite

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(y_1^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(y_1, \ldots y_n),$$

et cette équation a lieu pour des valeurs quelconques de $c_1, \ldots c_n$ dans le voisinage de valeurs déterminées, d'où résulte que $y_1^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}$ sont identiques à $y_1, \ldots y_n$ dans un certain ordre. Les fonctions $f_i(y_1, \ldots y_n)$ $(i = 1, \ldots n)$ sont donc uniformes en z', z liés par $\Phi(z', z; x) = 0$; étant algébriques en z elles sont donc rationnelles en z', z. Nous pouvons donc écrire

$$f_i(y_1, \ldots y_n) = R_i^{(1)}\left(\frac{dz}{dx}, z; x\right) \qquad (i = 1, \ldots n)$$

et nous pouvons supposer que $R_i^{(1)}$ sont des fonctions entières et rationnelles de $\frac{dz}{dx}$ de degré plus petit que le degré de $\Phi(z', z; x)$ par rapport à z'. À la relation (23) correspond

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i R_i^{(1)}\left(\frac{dz}{dx}, z; x\right). \tag{23'}$$

Les intégrales $y_1, \ldots y_n$ sont racines de l'équation

$$y^n + R_1^{(1)}\left(\frac{dz}{dx}, z; x\right) y^{n-1} + \cdots + R_n^{(1)}\left(\frac{dz}{dx}, z; x\right) = 0. \tag{24}$$

Nous étudions maintenant les coefficients dans (22), (23), (24). Pour un moment nous laissons les coefficients dans (22), (24) indéterminés, désignons les par γ. Écrivant que l'équation (22) est à points critiques fixes et que l'intégrale générale de (1) s'obtient de (22), (24) et s'appuyant sur (23') on aura pour les coefficients γ un système d'équations différentielles (S) qui a certainement une solution. Nous démontrons qu'il a une seule solution[1]. Supposons qu'il y ait une autre solution $\bar{\gamma}$. À cette solution correspondent des équations

[1] Cf. P. Painlevé, Leçons de Stockholm, p. 89.

$$\overline{\Phi}\left(\frac{dz}{dx}, z;\, x\right) = 0 \tag{22'}$$

$$y^n + \overline{R}_1^{(1)}\left(\frac{dz}{dx}, z;\, x\right) y^{n-1} + \cdots + \overline{R}_n^{(1)}\left(\frac{dz}{dx}, z;\, x\right) = 0 \tag{24'}$$

analogues aux équations (22), (24) et l'équation

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \overline{R}_i^{(1)}\left(\frac{dz}{dx}, z;\, x\right)$$

analogue à (23'). Si z est une intégrale quelconque de (22') les racines $y_1, \ldots y_n$ de (24') sont des intégrales de (1), par suite $\overline{R}_1^{(1)}, \ldots \overline{R}_n^{(1)}$ et z n'ont dans le voisinage de $x = 0$ que des points singuliers algébriques au plus. L'équation (22') étant à points critiques fixes et y_1 pouvant être supposée voisine de $\bar{y}_1$, $y_1, \ldots y_n$ se permutent autour des points critiques mobiles dans le voisinage de $x = 0$. Par suite

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \overline{R}_i^{(1)}\left(\frac{dz}{dx}, z;\, x\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(y_1, \ldots y_n)$$

est une intégrale de (22). De même, toute intégrale de (22) est aussi une intégrale de (22'). Les équations (22), (22') sont donc identiques. Pour une intégrale quelconque de (22) on a $R_i^{(1)} = \overline{R}_i^{(1)}$ $(i = 1, \ldots n)$. Par suite, les coefficients dans $R_i^{(1)}$, $\overline{R}_i^{(1)}$ sont identiques. Le système (S) a donc une seule solution. Il en résulte que les coefficients dans (22), (24) peuvent s'écrire comme des fonctions rationnelles des coefficients dans (1) et de leurs dérivées. Si l'on exprime les coefficients dans (1) comme des fonctions rationnelles de x et d'une variable t liée à x par une équation algébrique irréductible, on voit donc que les coefficients dans (22), (24) peuvent s'écrire comme des fonctions rationnelles de x, t.

La fonction (23) est univoquement déterminée par la condition que

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y;\, x\right)$$

satisfasse à l'équation (22) pour une intégrale y quelconque de (1). Alors, on voit comme tout-à-l'heure que les coefficients de cette fonction peuvent s'écrire comme des fonctions rationnelles de x, t.

En effectuant la transformation de l'équation (22) à une équation de Riccati ou à une équation différentielle elliptique on parviendra enfin au théorème que nous voulions démontrer.

La théorie précédente est évidemment applicable sous la seule supposition concernant les coefficients dans (1) qu'ils sont algébroïdes pour $x = 0$. Le théorème démontré est valable aussi dans ce cas, les coefficients pouvant s'écrire comme des fonctions rationnelles des coefficients dans (1) et de leurs dérivées.