(Cont.)

RECHERCHES SUR LA MÉTHODE DE GRAEFFE ET LES ZÉROS DES POLYNOMES ET DES SÉRIES DE LAURENT.

PAR

ALEXANDRE OSTROWSKI

à BÂLE.

CHAPITRE III. Approximations et évaluations des racines dépendant des déviations.

§ 8. Séparation des racines pour les côtés simples du diagramme.

(Deuxième théorème fondamental.)

32. Dans ce qui suit nous allons faire usage du théorème classique de Rouché:

Soient $f(z)$, $g(z)$ deux fonctions holomorphes à l'intérieur et sur la frontière d'un domaine G et supposons que sur la frontière de G on a partout: $|f(z)| > |g(z)|$. Alors les deux fonctions $f(z)$, $f(z) + g(z)$ possèdent à l'interieur de G le même nombre de racines.

Bien que ce théorème appartienne à la théorie des fonctions il est pour le cas de polynômes une conséquence directe du théorème sur la continuité des racines d'une équation algébrique en fonction des coefficients. Il suffit en effet de faire croître t de 0 à 1 dans l'expression

$$f(z) + tg(z)$$

en tenant compte du fait que cette expression reste différente de zéro sur la frontière de G pour chaque t, $0 \leqq t \leqq 1$. — On ne sort donc pas du domaine de l'algèbre élémentaire en utilisant le théorème de Rouché pour le cas des équations polynomiales.

33. XVI. **Deuxième théorème fondamental.** *Supposons que la série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{33,1}$$

possède une couronne circulaire de convergence. Soit

$$M_0 = 6{,}357\,355\,627\ldots$$

la racine positive de l'équation

$$M^3 - 5M^2 - 8M - 4 = 0$$

et

$$\varrho_0 = \frac{M_0^2 + M_0 + 2}{4M_0} = 1{,}9180\ldots, \qquad m_0 = \frac{\varrho_0^2 M_0}{M_0 - \varrho_0} + \frac{M_0}{M_0\varrho_0 - 1} = 5{,}841\ldots.$$

Le polynome

$$\varphi(\varrho) = 2M\varrho^2 - (M^2 + M + 2)\varrho + M^2 + M \tag{33.2}$$

possède pour $M > M_0$ deux racines positives différentes $\tau_1(M)$, $\tau_2(M)$ avec

$$1 < \tau_1(M) < \varrho_0 < \tau_2(M) < \frac{M}{2}. \tag{33,2°}$$

Supposons maintenant que l'on ait pour un entier q:

$$a_{q-1}a_q \neq 0, \qquad M = \operatorname{Min}(D_q, D_{q-1}) > M_0. \tag{33,3}$$

A. *$f(z)$ possède une seule racine simple ζ_0 dans la couronne circulaire*

$$\frac{1}{\tau_2(M)} < \frac{z}{|a_{q-1}/a_q|} < \tau_2(M), \tag{33,4}$$

et l'on a

$$\left|\frac{\zeta_0}{a_{q-1}/a_q} + 1\right| \leqq \tau_1(M) - 1, \qquad \left|\frac{a_{q-1}/a_q}{\zeta_0} + 1\right| \leqq \tau_1(M) - 1. \tag{33,5}$$

En particulier ζ_0 est pour $M > M_0$ la seule racine contenue dans la couronne circulaire

$$\frac{1}{\varrho_0} \leqq \left|\frac{z}{a_{q-1}/a_q}\right| \leqq \varrho_0 \tag{33,4°}$$

et l'on a

$$(33,5^\circ)\qquad \left|\frac{\zeta_0}{a_{q-1}/a_q}+1\right|\leqq\frac{m_0}{M},\qquad \left|\frac{a_{q-1}/a_q}{\zeta_0}+1\right|\leqq\frac{m_0}{M}.$$

B. *Pour*

$$(33,6)\qquad M>3+\sqrt{13}=6{,}605\,55\ldots$$

ζ_0 *est la seule racine de* $f(z)$ *située dans la couronne circulaire*

$$(33,7)\qquad \frac{1}{\frac{M}{2}-1}\leqq\left|\frac{z}{a_{q-1}/a_q}\right|\leqq\frac{M}{2}-1$$

et pour

$$(33,8)\qquad M>\frac{5+\sqrt{13}}{2}=6{,}772\,00\ldots=M_1$$

on a même

$$(33,9)\qquad \left|\frac{\zeta_0}{a_{q-1}/a_q}+1\right|<\frac{2}{M}\left(1+\frac{M_1}{M}\right)<\frac{4}{M}.$$

C. *Si* $f(z)$ *est une série de Taylor sans racine à l'origine,* $f(z)$ *possède sous l'hypothèse* $M>M_0$ *du moins* q *racines et* ζ_0 *est la* q*-ième de ces racines rangées dans l'ordre des modules croissants.*

34. Avant d'aborder la démonstration de XVI, nous allons déduire quelques propriétés de $\varphi(\varrho)$ comme polynôme en ϱ.

Le discriminant de $\varphi(\varrho)$ est

$$D(M)=M^4-6M^3-3M^2+4M+4=(M-1)(M^3-5M^2-8M-4)$$

et possède une seule racine positive >1:

$$M_0=6{,}357\,355\,627\ldots.$$

Donc $\varphi(\varrho)$ possède pour $M=M_0$ une racine double

$$\varrho_0=\frac{M_0^2+M_0+2}{4M_0}=1{,}918\,0\ldots,$$

pour laquelle on a évidemment

$$\varrho_0^2=\frac{M_0+1}{2}.$$

Pour $M>M_0$, $\varphi(\varrho)$ possède deux racines positives différentes $\tau_1(M)<\tau_2(M)$ pour lesquelles $(33,2^\circ)$ est facilement verifiée.

En effet on a en substituant dans $\varphi(\varrho)$ les expressions de ϱ_0 et ϱ_0^2 par M_0 et en ordonnant suivant les puissances de M

$$-4 M_0 \varphi(\varrho_0) = (M_0 - 1)(M_0 - 2) M^2 - (3 M_0^2 + 7 M_0 - 2) M + 2 (M_0^2 + M_0 + 2).$$

Or, pour $M = M_0$, $\varphi(\varrho_0)$ devient 0. Donc le polynôme de droite contient le facteur $M - M_0$ et l'on a

$$-\frac{4 M_0 \varphi(\varrho_0)}{M - M_0} = (M_0 - 1)(M_0 - 2) M - 2 \frac{M_0^2 + M_0 + 2}{M_0}.$$

Mais $2 \dfrac{M_0^2 + M_0 + 2}{M_0}$ est égal à $8 \varrho_0 < 16$, tandis que pour $M > M_0$ $(M_0 - 1)(M_0 - 2) M$ est > 120. Donc, on a $\varphi(\varrho_0) < 0$ pour $M > M_0$ et ϱ_0 est situé entre $\tau_1(M)$ et $\tau_2(M)$. Et $1 < \tau_1(M)$ résulte de $\varphi(1) = 2M - 2 > 0$.

Pour obtenir quelques limites pour $\tau_1(M)$ et $\tau_2(M)$ calculons les expressions $\varphi\left(\dfrac{M}{2}\right)$, $\varphi\left(\dfrac{M}{2} - 1\right)$, $\varphi\left(1 + \dfrac{2}{M}\right)$, $\varphi\left(1 + \dfrac{4}{M}\right)$:

$$\varphi\left(\frac{M}{2}\right) = \frac{M^2}{2} > 0,$$

$$\varphi\left(1 + \frac{2}{M}\right) = 4 + \frac{4}{M} > 0.$$

Donc on a en tout cas, puisque $1 + \dfrac{2}{M} < \varrho_0 < \dfrac{M}{2}$:

$$(34, 1) \qquad 1 + \frac{2}{M} < \tau_1(M) < \tau_2(M) < \frac{M}{2}.$$

D'autre part on a

$$-2 \varphi\left(\frac{M}{2} - 1\right) = M^2 - 6M - 4$$

et l'expression de droite est positive pour $M > 3 + \sqrt{13}$, donc:

$$(34, 2) \qquad \tau_1(M) < \frac{M}{2} - 1 < \tau_2(M) < \frac{M}{2} \qquad (M > 3 + \sqrt{13} = 6{,}60555\ldots);$$

et enfin, puisque

$$(34, 2^\circ) \qquad -M \varphi\left(1 + \frac{4}{M}\right) = 2 (M^2 - 5M - 12)$$

est o pour $M = M_1 \equiv \frac{5+\sqrt{73}}{2}$ et reste positif pour $M > M_1$:

$$(34,3) \qquad 1 + \frac{2}{M} < \tau_1(M) < 1 + \frac{4}{M} \qquad \left(M > \frac{5+\sqrt{73}}{2} = 6{,}772\,00\right).$$

35. Au polynôme $\varphi(z)$ se rattache l'expression

$$(35,1) \qquad S(\varrho) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\nu+1}}{M^\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho^\nu M^\nu},$$

convergente pour $M > 1$, $\frac{1}{M} < \varrho < M$. En sommant, on a

$$(35,2) \qquad S(\varrho) = \frac{\varrho^2}{M-\varrho} + \frac{1}{M\varrho - 1}.$$

On verifie tout de suite la relation

$$(35,3) \qquad S\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho} S(\varrho).$$

D'autre part, en calculant $S(\varrho) - (\varrho - 1)$, on a

$$S(\varrho) - (\varrho - 1) = \varrho \frac{2M\varrho^2 - (M^2 + M + 2)\varrho + M^2 + M}{(M\varrho - 1)(M - \varrho)},$$

donc d'après (33, 2):

$$(35,4) \qquad S(\varrho) - (\varrho - 1) = \frac{\varrho}{(M\varrho - 1)(M-\varrho)} \varphi(\varrho).$$

En écrivant (35, 1) sous la forme

$$S(\varrho) = \sqrt{\varrho} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M^\nu} \left(\varrho^{\nu+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\varrho^{\nu+\frac{1}{2}}}\right)$$

on voit que $S(\varrho)$ croît pour $\varrho > 1$ avec ϱ, les dérivées des sommes entre parenthèses étant alors positives. D'autre part il résulte de (35, 3) pour $\varrho > 1$:

$$S\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho} S(\varrho) < S(\varrho).$$

Donc, on a pour $1 \leqq \varrho' < M$, $\frac{1}{\varrho'} \leqq \varrho \leqq \varrho'$:

$$(35,5) \qquad S(\varrho) \leqq S(\varrho') \qquad \left(1 \leqq \varrho' < M,\ \frac{1}{\varrho'} \leqq \varrho \leqq \varrho'\right).$$

D'autre part il résulte évidemment de (35, 4) et (34, 2°) pour $M=M_1$, $\varrho = 1 + \frac{4}{M_1}$:

$$(35,6) \qquad S\left(1 + \frac{4}{M_1}\right) = \frac{4}{M_1}\cdot$$

On a enfin en posant $\varrho = \tau_1(M)$ en (35, 4), d'après (35, 5):

$$M(\tau_1(M) - 1) = MS(\tau_1(M)) \leqq S(\varrho_0)M =$$

$$= \frac{\varrho_0^2 M}{M - \varrho_0} + \frac{M}{M\varrho_0 - 1} < \frac{\varrho_0^2 M_0}{M_0 - \varrho_0} + \frac{M_0}{M_0\varrho_0 - 1} = m_0,$$

$$(35,7) \qquad \tau_1(M) < 1 + \frac{m_0}{M}\cdot$$

36. Passons maintenant à la démonstration des parties A, B de XVI. En divisant $f(z)$ par z^{q-1} on fait $q = 1$. En remplaçant z par $-\frac{a_0}{a_1}z'$ et en divisant $f(z)$ par $-a_0$ on ramène le cas général à celui où

$$(36, 1) \qquad a_0 = -a_1 = 1,$$

et l'on peut supposer dès le début que les relations (36, 1) soient satisfaites. On a alors pour $f(z)$

$$(36, 2) \qquad \begin{cases} f(z) = 1 - z + R_-(z) + R_+(z), \\ R_-(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu z^\nu, \qquad R_+(z) = \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu. \end{cases}$$

Or, en vertu de

$$D_0 = \frac{R_1}{R_0} \geqq M, \qquad D_1 = \frac{R_2}{R_1} \geqq M,$$

puisque les R_ν vont en croissant, il vient

$$R_1 = 1; \quad R_\nu \leqq \mu = \frac{1}{M} \qquad (\nu \geqq 0); \quad R_\nu \geqq M \qquad (\nu \geqq 2).$$

Appliquons la seconde des formules (15, 5) à l'indice principal $n_{\mu-1} = 0$ et à chaque $\nu < 0$. On obtient

$$|a_\nu| \leqq \mu^{-\nu} \ (\nu < 0), \qquad \mu = \frac{1}{M}\cdot$$

D'autre part, en appliquant la première des formules (15, 5) à l'indice principal $n_\mu = 1$ et $\nu \geqq 2$ on a

$$|a_\nu| \leqq \mu^{\nu-1} \qquad (\nu \geqq 2).$$

On a donc pour $|z| = \varrho$, $\mu = \frac{1}{M} < \varrho < M$, en tenant compte de (35, 1) et (35,2):

$$(36,3) \qquad |R_-(z) + R_+(z)| \leqq S(\varrho), \qquad \frac{1}{M} = \mu < \varrho < M.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Rouché a $f(z)$ cherchons les cercles $|z| = \varrho$ sur lesquels on a:

$$(36,4) \qquad |1 - z| > |R_-(z) + R_+(z)|, \qquad |z| = \varrho.$$

Pour $1 < \varrho < M$ il suffit évidemment de soumettre ϱ à la condition suivante

$$(36,5) \qquad \varrho - 1 > S(\varrho), \qquad 1 < \varrho < M.$$

Pour $\mu < \varrho < 1$ il suffit d'assurer la rélation

$$1 - \varrho > S(\varrho).$$

Or, posons $\varrho = \frac{1}{\varrho'}$, où $1 < \varrho' < M$. Alors la dernière condition devient

$$1 - \frac{1}{\varrho'} > S\left(\frac{1}{\varrho'}\right)$$

ou bien en multipliant par ϱ' et en utilisant (35, 3)

$$\varrho' - 1 > S(\varrho').$$

Donc on obtient les ϱ situés entre μ et 1 en prenant les réciproques des solutions de l'inégalité (36, 5).

Or, l'inégalité (36, 5) est équivalente à $\varphi(\varrho) < 0$, donc à

$$(36,6) \qquad \tau_1(M) < \varrho < \tau_2(M).$$

$f(z)$ ne possède donc pas de zéros dans les couronnes circulaires

$$\frac{1}{\tau_2(M)} < |z| < \frac{1}{\tau_1(M)}, \qquad \tau_1(M) < |z| < \tau_2(M).$$

En particulier pour $M > M_0$ (36, 6) est satisfaite pour $\varrho = \tau_2(M) - \varepsilon$ pour chaque $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Il en résulte (36, 4) pour

$$\varrho = \tau_2(M) - \varepsilon \quad \text{et} \quad \varrho = \frac{1}{\tau_2(M) - \varepsilon}.$$

D'après le théorème de Rouché $f(z)$ possède donc dans la couronne circulaire

$$\frac{1}{\tau_2(M) - \varepsilon} < |z| < \tau_2(M) - \varepsilon$$

autant de racines que $z - 1$, c'est-à-dire *une*. Il en résulte que $f(z)$ possède pour $M > M_0$ dans la couronne circulaire (33, 4) exactement une racine ζ_0, et ζ_0 est même située dans

$$(36,7) \qquad \tau_1(M) \geqq |z| \geqq \frac{1}{\tau_1(M)},$$

— en particulier, il résulte de (33, 2°) que ζ_0 est située dans (33, 4°).

Pour ζ_0 on obtient de (36, 2), (36, 3) en posant $|\zeta_0| = \varrho$:

$$(36,7^\circ) \qquad |\zeta_0 - 1| \leqq |R_-(\varrho) + R_+(\varrho)| \leqq S(\varrho),$$

donc, eu égard à (35, 5), (35, 4) et à la relation $\frac{1}{\tau_1(M)} \leqq \varrho \leqq \tau_1(M)$:

$$(36,8) \qquad |\zeta_0 - 1| \leqq S(\tau_1(M)) = \tau_1(M) - 1,$$

ce qui est équivalent à la première des relations (33, 5). La seconde de ces relations s'obtient en appliquant la première à l'équation

$$z f\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

(33, 5°) résulte de (33, 5) en tenant compte de (33, 7).

37. Si l'on fait maintenant l'hypothèse (33, 6) il suit de (34, 2) que (33, 7) est située dans (33, 4) et ζ_0 est alors la seule racine dans (33, 7).

Sous l'hypothèse (33, 8) il résulte de (36, 7°) pour $\varrho = 1 + 4\mu$

$$(37,1) \qquad M|\zeta_0 - 1| < \frac{(1+4\mu)^2}{1 - \mu(1+4\mu)} + \frac{1}{(1+4\mu) - \mu} = 2(1 + \mu B(\mu))$$

où

$$B(\mu) = \frac{3 + 25\mu + 36\mu^2}{1 + 2\mu - 7\mu^2 - 12\mu^3}.$$

Or, on a pour $\mu < \mu_1 = \frac{1}{M_1}$, $M_1 = \frac{5 + \sqrt{73}}{2}$:

$$\frac{dB(\mu)}{d\mu} = \frac{19 + 114\mu + 355\mu^2 + 600\mu^3 + 432\mu^4}{(1 + 2\mu - 7\mu^2 - 12\mu^3)^2} > 0,$$

donc $B(\mu) < B(\mu_1)$. Mais d'après (35,6) on a

$$M_1 S(1 + 4\mu_1) = 2(1 + M_1 B(\mu_1)) = 4,$$

donc $B(\mu_1) = \frac{1}{\mu_1} = M_1$ et (33,9) résulte de (37,1).

Pour démontrer enfin la partie C. du théorème XVI, supposons que $f(z)$ soit une série de Taylor. Alors la discussion précédente s'applique à $z^{-q+1}f(z)$ et l'on peut supposer $f(z)$ d'avoir la forme suivante:

$$f(z) = z^{q-1} - z^q + z^{q-1} R_-(z) + z^{q-1} R_+(z),$$

où l'inégalité (36,4) est valable pour $\varrho = \varrho_0$. Donc, on a pour $|z| = \varrho_0$:

$$|z^q - z^{q-1}| > |z^{q-1} R_-(z) + z^{q-1} R_+(z)|.$$

Donc, d'après le théorème de Rouché, $f(z)$ possède dans $|z| \leqq \varrho_0$ autant de racines que $z^q - z^{q-1}$, c'est-à-dire q, et la démonstration de XVI est achevée.

38. L'équation $f(z) = 0$ ce réduit pour $a_\nu = \mu^{-\nu}$ $(\nu < 0)$, $a_\nu = \mu^{\nu-1}$ $(\nu \geqq 2)$, $a_0 = -a_1 = 1$ à l'équation $\varphi(\varrho) = 0$ et ne possède pour $M = M_0$ qu'une racine *double* sur la circonférence $|z| = \varrho_0$. Donc la borne M_0 dans le théorème XVI ne peut pas être remplacée par une borne plus petite, si l'on veut isoler une racine *simple*. D'autre part, en faisant tendre M vers M_0 on voit aisément que m_0 et ϱ_0 sont les »meilleures» constantes dans le théorème XVI. De même, M_1 est la borne »exacte» des M pour lesquelles (33,9) est toujours valable.

Du reste, si M est suffisamment grand et un des nombres D_{q-1}, D_q est égal à ∞, on obtient des évaluations plus précises du théorème XXVI du No. 61.

§ 9. Séparation simultanée de l'ensemble des racines.

39. La borne M_0 du théorème XVI peut être abaissée si l'on suppose que toutes les déviations du diagramme de $f(z)$ deviennent suffisamment grandes — ou du moins plusieurs déviations consécutives. Nous ne traiterons ici que la première hypothèse.

Un résultat appartenant à cet ordre d'idée à été déjà signalé par M. Valiron[1]. Voici l'énoncé de M. Valiron dans lequel nous avons seulement changé les notations et la valeur de la constante, qui contient chez M. Valiron une décimale inexacte. D'ailleurs M. Valiron ne considère que les séries de Taylor:

Si nous supposons que, à partir d'un certain rang, les coefficients a_ν sont différents de zéro, et que l'on ait, à partir de ce rang,

$$\left|\frac{a_\nu^2}{a_{\nu-1}\,a_{\nu+1}}\right| \geqq k^2, \qquad k > 1; \tag{39, 1}$$

on a, pour $|z| = k R_\nu = k\left|\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}\right|$:

$$f(z) = a_\nu z^\nu [1 + H(k)\,\alpha(z)], \qquad H(k) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} k^{-\nu^2}, \qquad |\alpha(z)| < 1; \tag{39, 2}$$

donc si $H(k) < 1$, *c'est-à-dire* $k > 2{,}193\,303\ldots$, *les zéros de* $f(z)$ *sont séparés par les cercles de rayon* $k R_\nu \ldots$

Nous allons démontrer un théorème un peu plus précis:

XVII. *Supposons que la série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

possède une couronne circulaire de convergence. En désignant par $v = 2{,}193\,303\ldots$ *la racine positive de l'équation*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v^{-\nu^2} = 2, \tag{39, 3}$$

supposons que toutes les déviations de $f(z)$, *autant qu'elles sont définies, soient plus grandes que* $v^2 = 4{,}810\,58\ldots.$ *Alors pour chaque inclinaison numérique* R_ν *du diagramme de Newton de* $f(z)$ *la couronne circulaire*

$$\frac{R_\nu}{v} < |z| < R_\nu v \tag{39, 4}$$

contient exactement une racine simple de $f(z)$, *et* $f(z)$ *ne possède pas des racines différentes de zéro en dehors de ces couronnes à l'intérieur de la couronne de convergence.*

40. *Démonstration.* Montrons d'abord que si z est une racine de $f(z)$ et $|z| = \varrho$, ϱ est différent de tous les nombres $R_\nu v$, $\frac{R_\nu}{v}$. Comme les hypothèses de

[1] Cf. VALIRON (1) pp. 17.

notre théorème restent satisfaites si l'on remplace z par $\frac{1}{z}$ il suffit de considérer les produits $R_\nu v$. En plus il suffit de considérer $\nu = 0$, le cas général ce ramenant à celui-ci en divisant $f(z)$ par z^ν. En outre on peut supposer $R_0 = 1$ et enfin $a_0 = 1$, puisque, toutes les déviations étant > 1, 0 est un indice principal, donc $a_0 \neq 0$.

Alors il résulte des relations

$$D_\nu = \frac{R_{\nu+1}}{R_\nu} > v^2:$$

$$R_\nu > v^{2\nu} \quad (\nu > 0); \qquad R_\nu < v^{2\nu} \quad (\nu < 0).$$

Donc, puisque dans nos hypothèses $R_\nu = \left|\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}\right|$, on a pour $\nu > 0$

$$|a_\nu| = \frac{1}{R_\nu R_{\nu-1} \ldots R_1} < v^{-\nu(\nu+1)}$$

et pour $\nu < 0$:

$$|a_\nu| = R_{\nu+1} |a_{\nu+1}| = \cdots,$$

$$|a_\nu| = R_{\nu+1} \ldots R_{-1} < v^{-\nu(\nu+1)}.$$

Donc on obtient de l'équation $f(z) = 0$, en y isolant $a_0 = 1$,

$$1 < \sum_{\nu=-\infty}^{-1} v^{-\nu(\nu+1)} \varrho^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} v^{-\nu(\nu+1)} \varrho^\nu,$$

donc, si ϱ avait la valeur v satisfaisant à (39, 3):

$$2 < \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} v^{-\nu^2-\nu} v^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} v^{-\nu^2} = 2.$$

Donc, aucune des racines de $f(z)$ n'est située sur les circonférences

$$|z| = R_\nu v, \qquad |z| = \frac{R_\nu}{v}.$$

Montrons maintenant que chacune des couronnes (39, 4) contient exactement une racine (simple) de $f(z)$. Il suffit de considérer le cas $\nu = 0$ et l'on peut encore supposer que $R_0 = 1$, $a_0 = 1$, $a_{-1} = -1$. Si l'on considère maintenant au lieu de $f(z)$ l'expression plus générale

$$f_t(z) = 1 - \frac{1}{z} + t \sum_{\nu=-\infty}^{-2} a_\nu z^\nu + t \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu, \qquad |t| \leqq 1,$$

les hypothèses de notre théorème sont satisfaites et aucune racine de $f_t(z)$ n'est située sur les circonférences $|z| = \frac{R_1}{v}$, $|z| = v$. Donc, puisque pour $t = 0$ notre couronne circulaire contient exactement une racine de $1 - \frac{1}{z}$, il en est de même pour $t = 1$.

Supposons maintenant que $z \neq 0$ est une racine de $f(z)$ située en dehors de toutes les couronnes (39, 4). Alors, si l'on a

$$R_\nu v < |z| < \frac{R_{\nu+1}}{v},$$

on trouve, en introduisant l'expression

$$f_t(z) = t \sum_{\mu=-\infty}^{\nu-2} a_\mu z^\mu + (a_{\nu-1} z^{\nu-1} + a_\nu z^\nu + a_{\nu+1} z^{\nu+1}) + t \sum_{\mu=\nu+2}^{\infty} a_\mu z^\mu, \qquad |t| \leqq 1,$$

et en faisant tendre t continuellement de 1 à 0, que l'équation

$$a_{\nu-1} z^{\nu-1} + a_\nu z^\nu + a_{\nu+1} z^{\nu+1} = 0$$

a *trois* racines différentes dans la couronne circulaire $\frac{R_\nu}{v} < |z| < R_{\nu+1} v$, tandis que cette équation se réduit à une équation quadratique.

Si d'autre part z est situé ou bien à l'extérieur de tous les cercles $|z| = \frac{R_\nu}{v}$, $|z| = R_\nu v$ ou bien à l'intérieur de tous ces cercles, il suffit de considérer le second cas, le premier cas s'y ramenant par la transformation $z = \frac{1}{z'}$. Mais alors $f(z)$ ne possède qu'un nombre fini de termes différents de zéro aux exposants négatifs. Et l'on peut supposer dès le début que $f(z)$ est une série de Taylor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \qquad a_0 \neq 0.$$

Dans ce cas $f(z)$ possèderait à l'intérieur du cercle $|z| = R_1 v$ deux racines différentes, ce qui est impossible, comme on voit aisément en remplacant $f(z)$ par l'expression plus générale

$$a_0 + a_1 z + t \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu, \qquad |t| \leqq 1$$

et en faisant $t \to 0$.

41. Avant d'énoncer les précisions qu'on peut apporter au théorème XVII dans le cas où $f(z)$ est un *polynôme*, faisons quelques remarques sur quelques constantes correspondant à la constante v.

Pour deux entiers m, n avec $m \leqq 0 \leqq n$, $n - m > 0$ considérons l'expression

$$H_{m,n}(u) = \sum_{\nu=m}^{n} u^{-\nu^2}. \tag{41, 1}$$

Cette expression étant une fonction monotone de u, si u va de 0 à ∞, l'équation

$$H_{m,n}(u) = 2 \tag{41, 2}$$

possède exactement une racine positive que nous désignons par $v(m, n)$. Si pour un u positif $H_{m,n}(u) \gtrless 2$, on a évidemment $u \lessgtr v(m, n)$. Il en résulte que

$$v(m,n) < v(m, n+1), \qquad v(m,n) < v(m-1, n), \qquad v(m,n) < v. \tag{41, 3}$$

Soit N un entier positif. Désignons par v_N le plus grand des nombres

$$v(-N, 0), \qquad v(-N+1, 1), \ldots, \qquad v(0, N). \tag{41, 4}$$

Pour déterminer v_N observons que l'on a pour $-m = |m| > n + 1$

$$u^{-(n+1)^2} - u^{-m^2} + H_{m,n}(u) = H_{m+1,\, n+1}(u),$$

donc

$$H_{m,n}(u) < H_{m+1,\, n+1}(u),$$

donc

$$v(m,n) < v(m+1, n+1) \qquad (m + n < -1).$$

Une considération analogue conduit pour $n > |m| + 1 = -m + 1$ à l'inégalité

$$v(m,n) < v(m-1, n-1) \qquad (m + n > 1).$$

Il en résulte que pour $N = 2k$, le plus grand des nombres (41, 4) est $v(-k, k)$. Pour $N = 2k + 1$ les plus grands parmi les nombres (41, 4) sont $v(-k, k+1) = v(-k-1, k)$. Donc on a dans tous les cas pour un entier positif N

$$v_N = v\left(-\left[\frac{N}{2}\right], \left[\frac{N+1}{2}\right]\right). \tag{41, 5}$$

On calcule par cette formule aisément les valeurs de v_2, v_3, v_4, v_5:

$$
(41,6) \qquad
\begin{aligned}
v_2 &= 2 & v_2^2 &= 4 \\
v_3 &= 2{,}106\,92\ldots & v_3^2 &= 4{,}439\,1\ldots \\
v_4 &= 2{,}190\,6\ldots & v_4^2 &= 4{,}797\,6\ldots \\
v_5 &= 2{,}191\,82\ldots & v_5^2 &= 4{,}804\ldots \\
v_6 &= 2{,}193\,29\ldots & v_6^2 &= 4{,}810\,5\ldots
\end{aligned}
$$

en résolvant les équations

$$\frac{1}{u} + 1 + \frac{1}{u} = 2, \quad \frac{1}{u^4} + \frac{2}{u} + 1 = 2, \quad \frac{2}{u^4} + \frac{2}{u} + 1 = 2, \quad \frac{1}{u^9} + \frac{2}{u^4} + \frac{2}{u} + 1 = 2,$$

$$\frac{2}{u^9} + \frac{2}{u^4} + \frac{2}{u} + 1 = 2.$$

Il résulte de (41, 5) que $v_2 < v_3 < v_4 < \ldots.$ Donc puisque $v_N < v$, on a pour $N \to \infty$: $v_N \uparrow v^* \leqq v$. D'autre part on a évidemment

$$H(v_{2k}) - 2 = 2 \sum_{\nu=k+1}^{\infty} v_{2k}^{-\nu^2} \leqq 2 \sum_{\nu=k+1}^{\infty} 2^{-\nu^2},$$

ce qui converge vers 0 pour $k \to \infty$, donc $H(v^*) = 2$, $v^* = v$ et l'on a

$$v_N \uparrow v.$$

La convergence est très rapide. On a p. ex.

$$|v - v_6| < 2 \,.\, 10^{-5}.$$

Supposons maintenant que $f(z)$ est un polynôme du degré n

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu.$$

En y appliquant le raisonnement qui nous a conduit au théorème XVII on peut remplacer l'équation (39, 3) par une des équations

$$H_{m,m'}(u) = 2$$

pour $m \leqq 0 \leqq m'$, $m' - m = n$. Donc on obtient le résultat:

XVIII. *Si la fonction $f(z)$ dans le théorème* XVII *est un polynôme du degré n, les assertions du théorème* XVII *restent vraies si l'on y remplace v par v_n.*

Dans le cas des équations algébriques de la forme $P(x) = 0$, où $P(x)$ est un polynôme aux coefficients réels, le résultat de M. Valiron et le théorème XVIII permettent dans beaucoup de cas de reconnaître si toutes les racines de $P(z)$ sont réelles. Il suffit évidemment pour cela que ce critère soit applicable ou bien au polynôme $P(z)$ ou bien à une des transformées de Graeffe de ce polynôme. Et si $P(z)$ ne possède que des racines réelles aux modules différents, ces critères sont toujours applicables aux transformées de Graeffe de $P(z)$ à partir d'un certain rang.

§ 10. Séparation des groupes de racines en fonction des déviations.

42. Démontrons d'abord le lemme suivant:

XIX. *Soit*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu z^\nu, \tag{42, 1}$$

où $a_0 = 1$, $|a_\nu| \leqq 1$ $(\nu < 0)$, $|a_\nu| \leqq \mu^\nu$ $(\nu > 0)$,

$$\frac{1}{9} > \mu = \frac{1}{M} > 0. \tag{42, 2}$$

Soient τ_1, τ_2, $\tau_1 < \tau_2$ *les deux racines de l'équation*

$$\psi(\tau) \equiv \tau^2 - \frac{3+M}{2}\tau + M = 0. \tag{42, 3}$$

Alors $f(z)$ *n'a pas de racines dans la couronne circulaire* $\tau_1 < |z| < \tau_2$ *et l'on a*

$$2 < \tau_1 < \frac{2}{1-3\mu} < (2 + 9\mu) < 3 < \frac{M}{3} < \left(\frac{M}{2} - \frac{3}{2}\right) < \tag{42, 4}$$

$$< \left(\frac{M}{2} - \frac{1}{2} - 9\mu\right) < \tau_2 < \frac{M-1}{2}.$$

Démonstration. τ_1, τ_2 sont réels, puisque pour $M > 9$

$$\left(\frac{3+M}{2}\right)^2 - 4M = \frac{(M-1)(M-9)}{4} > 0.$$

Calculons $\psi(2 + 9\mu)$ et $\psi(2) : \psi(2) = 1 > 0$,

$$\psi(2+9\mu)=(2+9\mu)^2-\left(\frac{3+M}{2}\right)(2+9\mu)+M=\frac{(9\mu-1)(18\mu+7)}{2}<0.$$

Donc $2<\tau_1<2+9\mu<\tau_2$. En vertu de $\tau_1+\tau_2=\frac{M+3}{2}$ il en résulte

$$\tau_1<\frac{M}{2}-\frac{1}{2}-9\mu<\tau_2<\frac{M-1}{2}.$$

Les relations

$$2+9\mu<3<\frac{M}{3}<\frac{M}{2}-\frac{3}{2}<\frac{M}{2}-\frac{1}{2}-9\mu$$

résultent immédiatement de $\mu<\frac{1}{9}$, $M>9$. Donc τ_1, τ_2 sont séparés par $\frac{M-3}{2}$, donc aussi par $\frac{\tau_1\tau_2}{\frac{M-3}{2}}=\frac{M}{\frac{M-3}{2}}=\frac{2}{1-3\mu}$. Enfin $\frac{2}{1-3\mu}<2+9\mu$ résulte de $2<(2+9\mu)(1-3\mu)=2+3\mu-27\mu^2$, et les relations (42, 4) sont verifiées.

Soit maintenant z une racine de $f(z)$ avec $1<|z|=\varrho<M$. Il suit alors de (42, 1) en isolant $a_0=1$:

$$1\leqq\sum_{\nu=-\infty}^{-1}\varrho^\nu+\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu^\nu\varrho^\nu=\frac{1}{\varrho-1}+\frac{\varrho}{M-\varrho}.$$

Donc en multipliant par $\frac{(\varrho-1)(M-\varrho)}{2}$:

$\varrho^2-\frac{3+M}{2}\varrho+M\geqq 0$, et ϱ ne sépare pas τ_1, τ_2, C. Q. F. D.

Pour $M\to\infty$ on a $\tau_1\to 2$, $\tau_2\to\infty$. Donc, si $a_\nu=0$ pour tout $\nu>0$, $f(z)$ n'a pas de racines dans la region $|z|>2$.

43. De XIX résulte immédiatement:

XX. *Soit*

$$F(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}b_\nu z^\nu$$

et supposons que pour un entier p on ait

$$D_p=\frac{R_{p+1}}{R_p}=M>9. \tag{43, 1}$$

Alors $F(z)$ *ne possède pas de racines dans la couronne circulaire*

$$R_p \tau_1 < |z| < \frac{R_{p+1}}{\tau_1}, \tag{43, 2}$$

où τ_1 *a la même signification que dans le théorème* XIX, *et est* $= 2$ *pour* $D_p = \infty$.

En effet p est un indice principal du diagramme de $F(z)$, donc $b_p \neq 0$. Mais alors, si $R_p > 0$, XX s'obtient immédiatement en appliquant XIX à la fonction

$$f(z) = \frac{F(R_p z)}{b_p R_p^p z^p},$$

en posant $M = D_p$ et en observant que

$$R_p \tau_2 = R_p \frac{M}{\tau_1} = \frac{R_{p+1}}{\tau_1}.$$

Pour $R_p = 0$ on applique la remarque à la fin du No. 42 à la fonction $\frac{1}{b_p} z^{-p} F(z)$.

44. À l'aide de XX on démontre aisément le théorème suivant:

XXI. *Soit*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{44, 1}$$

et supposons que pour deux entiers q, q' $(q < q')$ *les déviations* D_q, $D_{q'}$ *soient définies et que*

$$\text{Min}\,(D_q,\ D_{q'}) = M > 9. \tag{44, 2}$$

Alors $f(z)$ *ne possède pas de racines dans les couronnes circulaires*

$$\tau_1 R_q < |z| < \frac{R_{q+1}}{\tau_1}, \quad \tau_1 R_{q'} < |z| < \frac{R_{q'+1}}{\tau_1} \tag{44, 3}$$

et possède exactement $n = q' - q$ *racines dans la couronne circulaire*

$$\frac{R_{q+1}}{\tau_1} \leqq |z| \leqq \tau_1 R_{q'}, \tag{44, 4}$$

où τ_1 *a la même signification que dans le théorème* XX.[1]

[1] Cf. le théorème de M. Valiron cité dans l'introduction.

Démonstration. Puisque D_q et $D_{q'}$ existent et sont > 1, les indices q, q' sont des indices principaux et l'on peut supposer dès le début que $q = 0$, $q' = n$ — il suffit dans le cas contraire de diviser $f(z)$ par z^q. Posons alors

$$(44, 5) \qquad \begin{cases} a_0 + \cdots + a_n z^n \equiv P(z), \\ \sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu z^\nu = R_-(z), \quad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu z^\nu = R_+(z) \end{cases}$$

et considérons la série de Laurent

$$f_t(z) \equiv P(z) + t R_+(z) + t R_-(z)$$

qui devient $f(z)$ pour $t = 1$.

Si l'on suppose

$$|t| \leqq 1,$$

l'hypothèse (43, 1) du théorème XX reste satisfaite pour $p = 1$ et $p = n + 1$, donc $f_t(z)$ ne possède pas de racines dans les couronnes circulaires

$$(44, 6) \qquad \tau_1 R_0 < |z| < \frac{R_1}{\tau_1}, \quad \tau_1 R_n < |z| < \frac{R_{n+1}}{\tau_1}$$

et le même est vrai en particulier pour $f(z)$.

Si l'on varie maintenant continuellement t de manière que $|t|$ reste $\leqq 1$, le nombre des racines de $f_t(z)$ situées dans la couronne circulaire

$$(44, 7) \qquad \frac{R_1}{\tau_1} \leqq |z| \leqq \tau_1 R_n$$

ne change pas puisqu'aucune des racines de $f_t(z)$ ne peut passer les couronnes (44, 6). Donc le nombre des racines de $f_t(z)$ dans (44, 7) est égal à ce nombre pour $t = 0$, c'est à dire au nombre des racines du polynôme $P(z)$ dans (44, 7).

Or, dans le cas du polynôme $P(z)$ on a évidemment $D_0 = D_n = \infty$, donc les couronnes (44, 6) remplissent tout l'extérieur de (44, 7), sauf le point à l'origine. Mais le point à l'origine n'est pas lui non plus une racine de $P(z)$, puisque $a_q = a_0 \neq 0$. Donc toutes les n racines de $P(z)$ sont contenues dans (44, 7) et le nombre des racines de $f(z)$ dans (44, 7) est exactement n, C. Q. F. D.

45. Reprenons les notations (44, 5) et les hypothèses que nous avons introduites au cours de la démonstration du théorème XXI. Désignons les racines

du polynôme $P(z)$ par $y_1, \ldots, y_n$ et soit ζ une des n racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $f(z)$ dans la couronne circulaire (44, 7). On a d'après (15, 5) et (44, 2) pour les coefficients a_ν de $R_-(z)$ les relations

$$\left|\frac{a_\nu}{a_0}\right| \leqq (\mu R_1)^{-\nu}$$

et pour ceux de $R_+(z)$ les relations

$$\left|\frac{a_\nu}{a_n}\right| \leqq \left(\frac{\mu}{R_n}\right)^{\nu-n}.$$

Donc pour $|\zeta| = \varrho$, $\frac{R_1}{\tau_1} \leqq \varrho \leqq \tau_1 R_n$,

$$P(\zeta) = -R_-(\zeta) - R_+(\zeta),$$

$$|P(\zeta)| \leqq |a_0| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\mu R_1}{\varrho}\right)^\nu + |a_n| \varrho^n \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\mu \varrho}{R_n}\right)^\nu \leqq$$

$$\leqq |a_0| \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mu \tau_1)^\nu + |a_n| \varrho^n \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mu \tau_1)^\nu = \frac{\mu \tau_1}{1 - \mu \tau_1} (|a_n| \varrho^n + |a_0|).$$

Or, en posant

(45, 1)
$$\frac{\mu \tau_1}{1 - \mu \tau_1} = \lambda, \quad \tau_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda} M,$$

on déduit de l'équation (42, 3) pour τ_1 immédiatement que λ est la plus petite racine de l'équation

$$\frac{M \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} - \frac{(3 + M) \lambda}{2(1 + \lambda)} + 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{2 \mu}{1 - \mu} = 0.$$

L'expression de gauche devient pour $\lambda = \frac{9}{2} \mu$:

$$-\frac{1}{4} \frac{\mu}{1 - \mu} (1 - 9 \mu)(10 - 9 \mu)$$

ce qui est négatif pour $\mu < \frac{1}{9}$; donc

(45, 2)
$$\lambda < \frac{9}{2} \mu.$$

Il en résulte

$$|P(\zeta)| \leqq \frac{9}{2}\mu(|a_n|\varrho^n + |a_0|).$$

D'autre part on a, puisque o et n sont des indices principaux,

$$\left|\frac{a_0}{a_n}\right| = R_1 \ldots R_n \leqq R_n^n, \tag{45, 3}$$

et en divisant par $|a_n|$:

$$\prod_{\varkappa=1}^{n} |\zeta - y_\varkappa| \leqq \frac{9}{2}\mu(\varrho^n + R_1 \ldots R_n) \leqq \frac{9}{2} R_n^n \mu(\tau_1^n + 1). \tag{45, 4}$$

Enfin, on a pour les modules des racines y_ν de $P(z)$ aussi des inégalités

$$\frac{R_1}{\tau_1} \leqq |y_\nu| \leqq R_n \tau_1,$$

puisque $P(z)$ est évidemment un cas particulier de $f(z)$. Donc par le même calcul

$$|f(y_\nu)| \leqq |R_-(y_\nu)| + |R_+(y_\nu)| \leqq \frac{9}{2}\mu(|a_n||y_\nu^n| + |a_0|),$$

et l'on a en revenant aux hypothèses générales de XXI:

Corollaire au théorème XXI. *Sous les hypothèses du théorème* XXI *désignons par* x_ν, $\nu = 1, \ldots, n$ *les racines de* $f(z)$ *dans la couronne circulaire* (44, 4), *par* $P(z)$ *le polynôme*

$$P(z) = a_q + a_{q+1} z + \cdots + a_{q'} z^n \tag{45, 5}$$

et par $y_1, \ldots, y_n$ *les* n *racines de* $P(z)$. *Alors on a*

$$|P(x_\nu)| \leqq \frac{9}{2}\mu(|a_{q'}|\varrho^n + |a_q|), \tag{45, 6}$$

$$|f(y_\nu)| \leqq \frac{9}{2}\mu(|a_{q'}|\varrho^n + |a_q|), \tag{45, 7}$$

$$\prod_{\varkappa=1}^{n} |x_\nu - y_\varkappa| \leqq \frac{9}{2}\mu R_{q'}^n \mu(\tau_1^n + 1), \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{45, 8}$$

§ 11. Une évaluation du produit des racines pour $M > 9$.

46. Sous les hypothèses du théorème XXI, c'est-à-dire pour $M > 9$, nous allons déduire de la formule de Jensen des bornes assez précises pour le module du produit des racines de (44, 1) contenues dans (44, 4). Toutefois, dès qu'on pourra supposer $M > 18{,}5$, les évaluations résultant du troisième théorème fondamental seront plus précises.

En introduisant la notation

$$\mathfrak{M}_{\varphi}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg |\varphi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \tag{46, 1}$$[1]

on peut écrire la formule de Jensen de la façon suivante

$$\mathfrak{M}_{\varphi}(r) = \lg |\varphi(0)| + n \lg r - \lg |z_1 \ldots z_n|, \tag{46, 2}$$

où $\varphi(z)$ est supposée d'être régulière dans $|z| \leqq r$, $f(0) \neq 0$ et $z_1, \ldots, z_n$ sont toutes les racines de $\varphi(z)$ dans $|z| \leqq r$.

Si l'on suppose que $\psi(z)$ est régulière dans le domaine $|z| \geqq r$, y possède seulement les racines $z_1, \ldots, z_n$ finies et $\psi(\infty) \neq 0$, on déduit de (46, 2) en remplaçant z par $\frac{1}{z}$:

$$\mathfrak{M}_{\psi}(r) = \lg |\psi(\infty)| - n \lg r + \lg |z_1 \ldots z_n|. \tag{46, 3}$$

Enfin, pour $\psi(z) = z^k$, on a

$$\mathfrak{M}_{z^k}(r) = k \lg r. \tag{46, 4}$$

Soit maintenant $f(z)$ une série de Laurent, régulière et sans zéro dans la couronne circulaire $\varrho_1 \leqq |z| \leqq \varrho_2$. On peut alors représenter $f(z)$ par

$$f(z) = \varphi(z)\psi(z)z^k$$

où $\varphi(z)$ est régulière pour $|z| \leqq \varrho_2$ et $\varphi(0) \neq 0$, tandis que $\psi(z)$ est régulière pour $|z| \geqq \varrho_1$ et $\psi(\infty) \neq 0$, et k est un nombre entier. Alors, si k_1 et k_2 désignent resp. les nombres de racines de $\varphi(z)$ dans $|z| \leqq \varrho_2$ et $\psi(z)$ dans $|z| \geqq \varrho_1$, on a d'après (46, 2)—(46, 4)

$$\mathfrak{M}_{\varphi}(\varrho_2) - \mathfrak{M}_{\varphi}(\varrho_1) = k_1 \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

[1] Cette notation qu'o npourrait confondre avec celle de majorante newtonienne ne sera empolyée que dans ce §.

$$\mathfrak{M}_{\psi}(\varrho_2) - \mathfrak{M}_{\psi}(\varrho_1) = -k_2 \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

$$\mathfrak{M}_{z^k}(\varrho_2) - \mathfrak{M}_{z^k}(\varrho_1) = k \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

donc

$$\mathfrak{M}_f(\varrho_2) - \mathfrak{M}_f(\varrho_1) = K_1 \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1}, \tag{46, 5}$$

où $K_1 = k_1 - k_2 + k$ est un nombre entier.

On en déduit aisément le théorème suivant:

XXII. *Soit $f(z)$ une fonction régulière et uniforme dans la couronne circulaire $\varrho_1 \leqq |z| \leqq \varrho_2$ et soit $(z_1, \ldots, z_n)$ l'ensemble de ses racines dans cette couronne. Alors on a*

$$\mathfrak{M}_f(\varrho_2) - \mathfrak{M}_f(\varrho_1) = K \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \lg |z_1 \ldots z_n| \tag{46, 6}$$

où K est un nombre entier.

Démonstration. En effet, posons

$$Q(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right), \quad \frac{f(z)}{Q(z)} = f^*(z).$$

Alors il résulte pour $Q(z)$ de (46, 2)

$$\mathfrak{M}_Q(\varrho_2) - \mathfrak{M}_Q(\varrho_1) = k \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \lg |z_1 \ldots z_n|,$$

tandis que pour $f^*(z)$ une relation du type (46, 5) est valable. En ajoutant ces deux relations on obtient (46, 6).

47. Pour appliquer ces résultats à la configuration du théorème XXI reprenons les notations (44, 5) et les hypothèses que nous avons introduites au cours de la démonstration de ce théorème. Désignons les n racines de $f_t(z) = P(z) + t R_+(z) + t R_-(z)$ contenues dans la couronne (44, 4) par $z_1, \ldots, z_n$. Ce sont des fonctions continues de t qui se réduisent pour $t = 1$ aux n racines $x_1, \ldots, x_n$ de $f(z)$ et pour $t = 0$ aux n racines $y_1, \ldots, y_n$ de $P(z)$. Posons

$$\varrho_1 = \sqrt{R_0 R_1} = \sqrt{\tau_1 R_0 \frac{R_1}{\tau_1}} = R_0 \sqrt{D_0}, \tag{47, 1}$$

$$\varrho_2 = \sqrt{R_n R_{n+1}} = \sqrt{\tau_1 R_n \frac{R_{n+1}}{\tau_1}} = R_n \sqrt{D_n}. \tag{47, 2}$$

En appliquant à $f_t(z)$ la formule (46, 6) on voit que K dans cette formule est aussi une fonction continue de t, donc un *entier* constant. Remplaçons maintenant dans cette formule $f_t(z)$ par $f(z)$ et $P(z)$ et retranchons. On obtient

$$\mathfrak{M}_{\frac{f}{P}}(\varrho_2) - \mathfrak{M}_{\frac{f}{P}}(\varrho_1) = \lg \left|\frac{y_1 \ldots y_n}{x_1 \ldots x_n}\right|. \tag{47, 3}$$

Il s'agit maintenant de trouver des évaluations de $\mathfrak{M}_{\frac{f}{P}}(\varrho_1)$ et $\mathfrak{M}_{\frac{f}{P}}(\varrho_2)$. Pour évaluer la première expression supposons $a_0 = 1$, ce qui est évidemment permis. Il en résulte les inégalités

$$a_\nu \leqq R_{\nu+1} \ldots R_{-1} R_0 \leqq R_0^{-\nu}, \qquad \nu < 0,$$

$$a_\nu \leqq \frac{1}{R_\nu R_{\nu-1} \ldots R_1} \leqq R_1^{-\nu}, \qquad \nu > 0,$$

enfin pour $\nu > n$ on a, n étant un indice principal,

$$|a_\nu| \leqq \frac{|a_n|}{R_{n+1} \ldots R_\nu} \leqq \frac{1}{R_1^n R_{n+1}^{\nu-n}} \leqq \frac{R_1^{-\nu}}{D_n}, \qquad \nu > n.$$

En appliquant ces relations et en observant que $\frac{R_0}{\varrho_1} = \frac{1}{\sqrt{D_0}}$, $\frac{\varrho_1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{D_0}}$ on a pour $|z| = \varrho_1$:

$$\frac{f}{P} - 1 = \frac{\sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu z^\nu + \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu z^\nu}{1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}, \tag{47, 4}$$

$$\left|\frac{f}{P} - 1\right| \leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{\varrho_1}\right)^\nu + \frac{1}{D_n} \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_1}{R_1}\right)^\nu}{1 - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\varrho_1}{R_1}\right)^\nu} \leqq \frac{\frac{1}{\sqrt{D_0} - 1} + \frac{1}{D_n} \frac{D_0^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{D_0} - 1}}{1 - \frac{1 - D_0^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{D_0} - 1}} \leqq$$

$$\leqq \frac{1 + \frac{1}{M} D_0^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{D_0} - 2 + D_6^{-\frac{n}{2}}} < \frac{1 + \frac{1}{M} D_0^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{M} - 2 + D_0^{-\frac{n}{2}}}.$$

Or, cette borne est évidemment < 1 pour $M > 9$. En plus, la dérivée de $\dfrac{1 + \dfrac{x}{M}}{\sqrt{M} - 2 + x}$ par rapport à x étant négative, cette borne obtient sa valeur maximum pour $n = \infty$. On obtient alors l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{M} - 2}.$$

Donc on obtient finalement

$$\left|\frac{f(z)}{P(z)} - 1\right| \leqq \varkappa_0, \qquad |z| = \varrho_1, \tag{47, 5}$$

où $\varkappa_0 < \dfrac{1}{\sqrt{M} - 2}$.

Évidemment on a la même inégalité pour $|z| = \varrho_2$. En effet, cette seconde inégalité est ramené à la première en divisant $f(z)$ par z^n et en ramplaçant z par $\dfrac{1}{z}$.

Il en résulte

$$\lg(1 - \varkappa_0) \leqq \mathfrak{M}_{\frac{f}{P}}(\varrho_i) \leqq \lg(1 + \varkappa_0), \quad i = 1, 2.$$

$$\lg \frac{1 - \varkappa_0}{1 + \varkappa_0} \leqq \mathfrak{M}_{\frac{f}{P}}(\varrho_2) - \mathfrak{M}_{\frac{f}{P}}(\varrho_1) \leqq \lg \frac{1 + \varkappa_0}{1 - \varkappa_0},$$

donc, en vertu de (47, 3)

$$\frac{1 - \varkappa_0}{1 + \varkappa_0} \leqq \left|\frac{y_1 \ldots y_n}{x_1 \ldots x_n}\right| \leqq \frac{1 + \varkappa_0}{1 - \varkappa_0}. \tag{47, 6}$$

En revenant maintenant par une transformation de la forme $z = a z'$ aux hypothèses du théorème XXI, on a:

XXIII. *Désignons, sous les hypothèses du théorème* XXI, *par* γ *le module du produit des racines de* $f(z)$ *situées dans* (44, 4) *et par* γ_0 *le module du produit des racines du polynôme*

$$a_q + a_{q+1} z + \cdots + a_{q'} z^n; \tag{47, 7}$$

alors on a pour $n \geqq 2$

$$\frac{1}{\varkappa} \leqq \frac{\gamma_0}{\gamma} \leqq \varkappa, \quad \varkappa \leqq \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} - 3}. \tag{47, 8}$$

§ 12. Le diagramme des produits de polynômes et de séries de Laurent.

48. Soient

$$F(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu z^\nu; \quad f(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}, \quad A_0 = a_0 = 1, \tag{48, 1}$$

deux expressions ayant une couronne circulaire de convergence en commun. Soient

$$R_1 \leqq R_2 \leqq R_3 \leqq \cdots$$

les inclinaisons numériques de $F(z)$ et

$$R_0 = r_0 \geqq R_{-1} = r_1 \geqq R_{-2} = r_2 \geqq \cdots$$

celles de $f(z)$ et supposons que

$$\frac{R_1}{r_0} = \frac{R_1}{R_0} = P > 2. \tag{48, 2}$$

Considérons le produit

$$G(z) = f(z)\, F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu z^\nu \tag{48, 3}$$

et désignons resp. par $G_+(z)$ et $G_-(z)$ les sommes des termes de $G(z)$ aux exposants non négatifs et aux exposants non positifs:

$$G_+(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu, \quad G_-(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} b_\nu z^\nu. \tag{48, 4}$$

Alors je dis qu'on a pour les majorantes newtoniennes de $G_+(z)$ et $G_-(z)$

$$\frac{P-2}{P-1} \mathfrak{M}_F \ll \mathfrak{M}_{G_+} \ll \frac{P}{P-1} \mathfrak{M}_F, \tag{48, 5}$$

$$G_+(z) - F(z) \ll \frac{1}{P-1} \mathfrak{M}_F \ll \frac{1}{P-2} \mathfrak{M}_{G_+} \tag{48, 6}$$

et

$$\frac{P-2}{P-1} \mathfrak{M}_f \ll \mathfrak{M}_{G_-} \ll \frac{P}{P-1} \mathfrak{M}_f, \tag{48, 7}$$

$$G_-(z) - f(z) \ll \frac{1}{P-1} \mathfrak{M}_f \ll \frac{1}{P-2} \mathfrak{M}_{G_-}. \tag{48, 8}$$

49. Il suffit évidemment de démontrer la première partie de (48, 6), puisque (48, 5) en résulte en vertu du théorème VI et (48, 7), (48, 8) se ramènent à (48, 5), (48, 6) en remplaçant z par $\frac{1}{z}$. Posons pour les majorantes newtoniennes de $F(z)$ et $f(z)$

$$\mathfrak{M}_F = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu z^\nu, \quad \mathfrak{M}_f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t_\nu}{z^\nu}$$

et en plus

$$\mathfrak{M}_{G_+} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu z^\nu. \tag{49, 1}$$

On a pour les T_ν d'après (10, 5)

$$\frac{T_{n+\nu}}{T_n} = \frac{1}{R_{n+1} \ldots R_{n+\nu}} \leqq \frac{1}{R_1^\nu} \tag{49, 2}$$

et pour t_ν

$$\frac{t_{n+\nu}}{t_n} = r_n r_{n+1} \ldots r_{n+\nu-1} \leqq r_n^\nu \leqq r_0^\nu. \tag{49, 3}$$

(Rappelons que l'indice de r_ν et de t_ν, envisagés comme les inclinaisons numériques et les coefficients de la majorante newtonienne, doit être remplacé par $-\nu$ si l'on veut appliquer la formule (10, 5)).

Or, on a pour $n \geqq 0$

$$b_n = A_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{n+\nu} a_\nu,$$

donc

$$|b_n - A_n| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{n+\nu} t_\nu$$

et d'après (49, 2), (49, 3) et (48, 2)

$$|b_n - A_n| \leqq T_n \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R_1}\right)^\nu = \frac{T_n}{P-1}; \tag{49, 4}$$

donc, en posant $\frac{1}{P-1} = \delta$,

$$G_+ - F \ll \delta\, \mathfrak{M}_F, \tag{49, 5}$$ C. Q. F. D.

50. Il est maintenant facile de démontrer les relations correspondantes dans un cas un peu plus général.

XXIV. *Soient deux séries*

$$(50,1)\qquad f_+(z)=\sum_{\nu=n}^{\infty}A_\nu z^\nu,\quad f_-(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{m}a_\nu z^\nu,\quad A_n\neq 0,\quad a_m\neq 0,$$

ayant une couronne circulaire de convergence en commun. Posons

$$(50,2)\qquad \begin{cases} G(z)=f_-(z)f_+(z)=\displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}b_\nu z^\nu, \\ G_+(z)=z^{-m}\displaystyle\sum_{\nu=n+m}^{\infty}b_\nu z^\nu,\quad G_-(z)=z^{-n}\displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{n+m}b_\nu z^\nu. \end{cases}$$

Soient resp.

$$(50,3)\qquad \begin{cases} R_{n+1}^+\leqq R_{n+2}^+\leqq R_{n+3}^+\leqq\cdots, \\ R_m^-\geqq R_{m-1}^-\geqq R_{m-2}^-\geqq\cdots \end{cases}$$

les inclinaisons numériques de $f_+(z)$ et $f_-(z)$ et $\{R_\nu\}$ les inclinaisons numériques de $G(z)$. Alors, si

$$(50,4)\qquad \frac{R_{n+1}^+}{R_m^-}=P>2,$$

on a

$$(50,5)\qquad \begin{cases} \dfrac{P-1}{P}\mathfrak{M}_{G_+}\ll\mathfrak{M}_{a_mf_+}\ll\dfrac{P-1}{P-2}\mathfrak{M}_{G_+}, \\ a_mf_+-G_+\ll\dfrac{1}{P-1}\mathfrak{M}_{a_mf_+}\ll\dfrac{1}{P-2}\mathfrak{M}_{G_+}, \end{cases}$$

$$(50,6)\qquad \begin{cases} \dfrac{P-1}{P}\mathfrak{M}_{G_-}\ll\mathfrak{M}_{A_nf_-}\ll\dfrac{P-1}{P-2}\mathfrak{M}_{G_-}, \\ A_nf_--G_-\ll\dfrac{1}{P-1}\mathfrak{M}_{A_nf_-}\ll\dfrac{1}{P-2}\mathfrak{M}_{G_-}, \end{cases}$$

$$(50,7)\qquad \begin{cases} \dfrac{P-2}{P}\leqq\dfrac{R_\nu}{R_{\nu-m}^+}\leqq\dfrac{P}{P-2},\quad \nu>n+m, \\ \dfrac{P-2}{P}\leqq\dfrac{R_\nu}{R_{\nu-n}^-}\leqq\dfrac{P}{P-2},\quad \nu\leqq n+m. \end{cases}$$

51. En effet, posons

$$f_+(z) = A_n z^n \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{n+\nu}}{A_n} z^\nu\right) = A_n z^n F^*(z),$$

$$f_-(z) = a_m z^m \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{m-\nu}}{a_m} z^{-\nu}\right) = a_m z^m f^*(z).$$

Alors

$$G(z) = A_n a_m z^{n+m} G^*(z)$$

où les formules (48, 5)—(48, 8) s'appliquent au produit $G^*(z)$ de $F^*(z)$, $f^*(z)$ et aux expressions correspondantes G_+^*, G_-^*; or, si l'on a égard aux relations

$$G_+ = a_m A_n z^n G_+^*, \quad G_- = a_m A_n z^m G_-^*,$$

les formules (50, 5)—(50, 6) résultent immédiatement de (48, 5)—(48, 8). Enfin, es relations (50, 7) résultent de (50, 5), (50, 6), eu égard à la formule (16, 4) du théorème VI.

Remarque. Dans les hypothèses du théorème XXIV *on a*

$$(51, 1) \qquad \left(1 - \frac{2}{P}\right)^2 \leqq \frac{D_\nu}{D_{\nu-m}^+} \leqq \left(1 - \frac{2}{P}\right)^{-2}, \quad \nu > n + m,$$

$$(51, 2) \qquad \left(1 - \frac{2}{P}\right)^2 \leqq \frac{D_\nu}{D_{\nu-n}^-} \leqq \left(1 - \frac{2}{P}\right)^{-2}, \quad \nu < n + m,$$

$$(51, 3) \qquad \left(1 - \frac{2}{P}\right)^2 \leqq \frac{D_{m+n}}{P} \leqq \left(1 - \frac{2}{P}\right)^{-2},$$

où $\{D_\nu\}$, $\{D_\nu^+\}$, $\{D_\nu^-\}$ *sont resp. les déviations de* $G(z)$, $f_+(z)$, $f_-(z)$.

Dans chaque inégalité numérique dont sont composées les relations (50, 5), (50, 6), (50, 7) *et* (51, 1)—(51, 3) *c'est le signe d'inégalité qui a lieu, si ou bien un nombre infini des* A_ν *ou bien un nombre infini des* a_ν *disparait, donc en particulier si au moins une des expressions* $f_+(z)$ *ou* $f_-(z)$ *ne consiste qu'en un nombre fini de termes.*

En effet, les relations (51, 1)—(51, 3) suivent immédiatement des relations (50, 7) et (50, 4) par division. Quant à la seconde partie de notre assertion, elle résulte immédiatement en observant que dans l'inégalité (49, 4) le signe d'égalité n'est jamais valable si dans l'expression $b_n - A_n = \sum_{\nu=l}^{\infty} A_{n+\nu} a_\nu$ manque au moins un terme.

§ 13. La factorisation des polynômes dans le cas de grandes déviations.

52. Nous allons maintenant démontrer les théorèmes inverses du théorème XXIV, en nous bornant d'abord, dans ce §, au cas des polynômes.

XXV. *Soit*

$$G(z) = \sum_{\nu=l_1}^{l_2} b_\nu z^\nu, \tag{52, 1}$$

et pour un m, $l_1 < m < l_2$, *en désignant par* D_m *la* m*-ième déviation de* $G(z)$*:*

$$D = D_m \geqq 13{,}5 \qquad (l_1 < m < l_2). \tag{52, 2}$$

Désignons par P_0 *la plus grande des racines positives de l'équation*

$$P_0 = \left(1 - \frac{2}{P_0}\right)^2 D. \tag{52, 3}$$

Alors $G(z)$ *se décompose en un produit de deux facteurs,* $G(z) = f_+(z) f_-(z)$*:*

$$f_+ = \sum_{\nu=0}^{l_2-m} A_\nu z^\nu, \quad A_0 = 1; \qquad f_- = \sum_{\nu=l_1}^{m} a_\nu z^\nu, \quad a_m \neq 0, \tag{52, 4}$$

pour lesquels on a, en désignant par $G_+(z)$ *l'ensemble de termes de* $z^{-m} G(z)$ *aux exposants non négatifs et par* $G_-(z)$ *l'ensemble de termes de* $G(z)$ *aux exposants* $\leqq m$*:*

$$f_- - G_- \ll \frac{1}{P_0 - 2} \mathfrak{M}_{G_-}, \tag{52, 5}$$

$$a_m f_+ - G_+ \ll \frac{1}{P_0 - 2} \mathfrak{M}_{G_+}, \tag{52, 6}$$

et $f_+(z)$, $f_-(z)$ *sont univoquement déterminés par* (52, 5), (52, 6) *et par la relation*

$$G(z) = f_+(z) f_-(z).$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $b_{l_1} \neq 0$, $b_{l_2} \neq 0$ et $l_2 > m$. L'équation (52, 3) peut s'écrire $\frac{P_0^3}{(P_0 - 2)^2} = D$. Or, ici l'expression de gauche atteint son minimum pour $P_0 > 2$ avec $P_0 = 6$, pour la valeur de $D = 13{,}5$, et croît à partir de $P_0 = 6$. Donc P_0 est une fonction continue et croissante de D à partir de $D = 13{,}5$ et l'on a $P_0 > 6$ si $D > 13{,}5$.

Pour trouver $f_+(z)$ observons que d'après le théorème XXI $G(z)$ possède exactement $l_2 - m$ racines des modules $> \frac{R_{m+1}}{3}$. Nous désignons par $f_+(z)$ le polynôme du degré $l_2 - m$ à terme constant 1 possédant ces $l_2 - m$ nombres comme racines et posons $f_-(z) = \frac{G(z)}{f_+(z)}$, alors $f_-(z)$ aura évidemment la forme indiquée dans (52, 4). Désignons les inclinaisons numériques de $f_+(z)$, $f_-(z)$ resp. par $\{R_\nu^+\}$, $\{R_\nu^-\}$ et posons

$$\frac{R_1^+}{R_m^-} = P. \tag{52,7}$$

53. Nous conduisons la démonstration en trois étapes.

a) *Supposons d'abord que*

$$P \geqq 6. \tag{53,1}$$

Alors les conditions du théorème XXIV sont remplies (pour $n = 0$) et les relations (52, 5), (52, 6) découlent des relations (50, 5), (50, 6) si nous pourrons montrer que $P > P_0$. Or, d'après (51, 3) avec le *signe d'inégalité* on a

$$\frac{P^3}{(P-2)^2} > D = \frac{P_0^3}{(P_0 - 2)^2}.$$

Donc puisque, pour $P \geqq 6$, l'expression de gauche est une fonction croissante de P, on a en effet $P > P_0$. Il en résulte en particulier que pour $D \geqq 13{,}5$ on a sûrement

$$P \neq 6. \tag{53,2}$$

b) *Montrons maintenant que* (53, 1) *est sûrement satisfait si* $D \geqq 54\,(m-l_1)(l_2-m)$. En effet d'après la relation (24, 1) on a

$$R_1^+ > \frac{R_{m+1}}{3\,(l_2 - m)},$$

puisque le module minimum des racines de $f_+(z)$ est

$$> \frac{R_{m+1}}{3}.$$

D'autre part on a

$$R_m^- < 3\,(m - l_1)\,R_m,$$

puisque, d'après (43, 2), le module maximum des racines de $f_-(z)$ est $< 3\,R_m$. Donc

$$P = \frac{R_1^+}{R_m^-} \geqq \frac{D}{9\,(m - l_1)(l_2 - m)} \geqq 6.$$

c) *Supposons maintenant que l'on ait pour notre expression $G(z)$ et les expressions f_+ et f_- que nous avons formées: $P < 6$.* Introduisons alors l'expression suivante

$$G_t(z) = t\sum_{\nu=l_1}^{m-1} b_\nu z^\nu + \sum_{\nu=m}^{l_2} b_\nu z^\nu, \qquad 0 < t \leqq 1.$$

Les déviations $D_\nu(t)$ de ce polynôme sont évidemment des fonctions continues de t, il en est de même en particulier de $D_m(t)$ et l'on a toujours $D_m(t) \geqq 13{,}5$. En formant pour $G_t(z)$ les expressions f_+ et f_- désignons les par $f_+^{(t)}(z)$, $f_-^{(t)}(z)$. Les racines de $G_t(z)$ étant des fonctions continues de t, il en est de même des coefficients et des inclinaisons numériques $R_\nu^+(t)$, $R_\nu^-(t)$. Donc en particulier

$$P(t) = \frac{R_1^+(t)}{R_m^-(t)}$$

est une fonction continue de t. Or, si $t = t_0$ est suffisamment petit, on a évidemment $D_m(t_0) > 54(m - l_1)(l_2 - m)$, donc, d'après ce que nous avons démontré sous b), $P(t_0) > 6$. Mais alors, puisqu'on a pour la fonction continue $P(t)$:

$$P(t_0) \gtrsim 6, \qquad P(1) < 6,$$

il existe une valeur t_1 entre t_0 et 1 pour laquelle $P(t_1) = 6$. Or, puisque pour cette valeur $D_m(t_1) \geqq 13{,}5$, ceci est en contradiction avec $(53, 2)$.

Enfin, puisque les modules des $l_2 - m$ racines d'un facteur $f_+^*(z)$ de $G(z)$ satisfaisant à $(52, 6)$, sont d'après $(16, 4)$ et $(24, 1)$ plus grands que

$$\frac{P_0 - 3}{P_0 - 1}\,\frac{R_{m+1}}{2} > \frac{R_{m+1}}{4} > \frac{R_{m+1}}{\frac{D_m}{\tau_1}} = \tau_1 R_m,$$

les racines de $f_+^*(z)$ coïncident avec celles de $f_+(z)$ et notre théorème est complètement démontré.

Sous les hypothèses du théorème XXV on a évidemment

$$(53, 3) \qquad P_0 = \left(1 - \frac{2}{P_0}\right)^2 D \geqq \left(1 - \frac{2}{6}\right)^2 D = \frac{4}{9}D, \quad 1 - \frac{2}{P_0} = \left(\frac{P_0}{D}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(53, 4) \qquad P_0 = D - 4\frac{1 - \frac{1}{P_0}}{\left(1 - \frac{2}{P_0}\right)^2} \geqq D - 7{,}5.$$

De (53, 3) résulte:

$$P_0 - 1 \geqq \frac{4}{9} D - \frac{2D}{27} \frac{13{,}5}{D} \geqq \frac{10}{27} D, \qquad P_0 - 2 \geqq \frac{4}{9} D - \frac{4D}{27} \frac{13{,}5}{D} \geqq \frac{8}{27} D.$$

On en déduit facilement que *les facteurs, par lesquels en vertu de* (50, 7) *les inclinaisons numériques de* f_+, f_- *diffèrent des inclinaisons numériques correspondantes de* G, *sont contenus dans les intervalles*

$$(53, 5) \qquad \left\langle \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\rangle, \quad \left\langle 1 - \frac{9}{2D}, \frac{1}{1 - \frac{9}{2D}} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{D - 9{,}5}{D - 7{,}5}, \frac{D - 7{,}5}{D - 9{,}5} \right\rangle.$$

54. Considérons maintenant la factorisation de l'expression

$$(54, 1) \qquad G(z) = \sum_{\nu = l_1}^{l_2} b_\nu z^\nu$$

en *trois* facteurs. En désignant les inclinaisons numériques et les déviations de $G(z)$ par $\{R_\nu\}$, $\{D_\nu\}$, supposons que l'on ait

$$(54, 2) \qquad D_0 \geqq 18{,}7; \quad D_k \geqq 18{,}7, \quad l_1 < 0 < k < l_2.$$

Posons $\mathrm{Min}(D_0, D_k) = D$. $G(z)$ se décompose, en vertu du théorème XXV pour $m = 0$, en deux facteurs univoquement déterminés:

$$(54, 3) \qquad f_-(z) = \sum_{\nu = l_1}^{0} a_\nu z^\nu, \; a_0 \neq 0; \qquad F(z) = \sum_{\nu = 0}^{l_2} B_\nu z^\nu, \; B_0 = 1,$$

pour lesquels les relations correspondant à (52, 5) et (52, 6) sont valables avec P_0 déduit de l'équation (52, 3):

$$(54, 4) \qquad f_-(z) - G_-(z) \ll \delta_0 \mathfrak{M}_{G_-}, \qquad \delta_0 = \frac{1}{P_0 - 2} < \frac{1}{4},$$

$$(54, 5) \qquad a_0 F(z) - G^+(z) \ll \frac{1}{P_0 - 2} \mathfrak{M}_{G^+},$$

où G_-, G^+ sont des ensembles de termes de $G(z)$ resp. aux exposants non positifs et aux exposants non négatifs. Désignons les déviations de $F(z)$ par D'_ν. Alors D'_k diffère de D_k par un facteur numérique contenu entre

$$\left(1 - \frac{2}{P_0}\right)^2, \quad \left(1 - \frac{2}{P_0}\right)^{-2},$$

d'après (51, 1). Donc

$$D'_k \geqq \left(1 - \frac{2}{P_0}\right)^2 D = P_0.$$

Or, pour $D \geqq 18,7$ on a

(54, 6) $$P_0 > 13,5;$$

en effet l'expression $\frac{P_0^3}{(P_0 - 2)^2}$ obtient pour $P_0 = 13,5$ la valeur

$$\frac{27^3}{23^2 \cdot 2} = 18,60397 \ldots < 18,7.$$

55. On peut donc appliquer au polynôme $F(z)$ le théorème XXV pour $m = k$. On obtient la décomposition

$$F(z) = Q(z) f_+(z)$$

où

(55, 1) $$\begin{cases} Q(z) = \sum_{\nu=0}^{k} C_\nu z^\nu, & C_k \neq 0, \\ f_+(z) = \sum_{\nu=0}^{l_2 - k} A_\nu z^\nu, & A_0 = 1, \end{cases}$$

avec

$$C_0 = \frac{B_0}{A_0} = 1$$

et

$$Q - F_- \ll \frac{1}{P'_0 - 2} \mathfrak{M}_{F_-}.$$

F_- est ici l'ensemble de termes de $F(z)$ aux exposants $0, \ldots, k$ et P'_0 désigne la plus grande racine de

$$P_0'^3 = D'_k (P'_0 - 2)^2;$$

donc, puisque $D'_k \geqq P_0 > 13,5$: $P'_0 \geqq P_1$, où P_1 est la plus grande racine de l'équation

(55, 2) $$P_1^3 = P_0 (P_1 - 2)^2.$$

Donc, en multipliant par a_0

$$a_0 Q - a_0 F_- \ll \frac{1}{P_1 - 2} \mathfrak{M}_{a_0 F_-}.$$

Or, désignons par G_0 l'ensemble de termes de $G_+(z)$ aux exposants $0, \ldots, k$. Alors il résulte de (54, 5)

$$(55,3) \qquad a_0 F_- - G_0 \ll \frac{1}{P_0 - 2} \mathfrak{M}_{G_0}.$$

Donc, en ajoutant

$$(55,4) \qquad a_0 Q - G_0 \ll \frac{1}{P_1 - 2} \mathfrak{M}_{a_0 F_-} + \frac{1}{P_0 - 2} \mathfrak{M}_{G_0}.$$

D'autre part il résulte de (55, 3)

$$\mathfrak{M}_{a_0 F_-} \ll \frac{P_0 - 1}{P_0 - 2} \mathfrak{M}_{G_0},$$

donc, en introduisant ceci dans (55,4):

$$(55,5) \qquad a_0 Q - G_0 \ll \delta_1 \mathfrak{M}_{G_0}, \qquad \delta_1 = \frac{P_0 + P_1 - 3}{(P_0 - 2)(P_1 - 2)}.$$

Quant au facteur $f_+(z)$, on obtient la relation correspondant à (52, 5) par une simple transformation. Posons $z = \frac{1}{z'}$. Alors on obtient la décomposition (univoquement déterminée)

$$G^*(z') = z'^k G\left(\frac{1}{z'}\right) = \left(\frac{z'^k}{a_0 C_k} Q\left(\frac{1}{z'}\right) f_-\left(\frac{1}{z'}\right)\right)\left(a_0 C_k f_+\left(\frac{1}{z'}\right)\right) = H_+(z') H_-(z')$$

où $H_+(z')$ est un polynôme à terme constant $= 1$, tandis que $H_-(z')$ est un développement fini suivant les puissances négatives de z' et commençant par $a_0 C_k \neq 0$. Donc, en désignant par $G^*_-(z')$ l'ensemble de termes de $G^*(z')$ aux exposants non positifs, on a

$$a_0 C_k f_+\left(\frac{1}{z'}\right) - G^*_-(z') \ll \frac{1}{P_0 - 2} \mathfrak{M}_{G^*_-(z')}.$$

Remplaçons dans cette relation z' par $\frac{1}{z}$, alors on obtient

$$(55,6) \qquad a_0 C_k f_+(z) - G_+(z) \ll \delta_0 \mathfrak{M}_{G_+}, \qquad \delta_0 = \frac{1}{P_0 - 2},$$

où $z^k G_+(z)$ est l'ensemble de termes de $G(z)$ aux exposants $k, k+1, \ldots, l_2$.

56. Pour évaluer P_0 et P_1 sous la condition $D \geqq 18{,}7$ formons l'expression

$$\psi(D;\,\alpha) = (D-\alpha)^3 - D(D-\alpha-2)^2 = (4-\alpha)D^2 + 2(\alpha^2 - 2\alpha - 2)D - \alpha^3.$$

Pour $\alpha = 4$, $\psi(D, 4)$ devient $12\,D - 64$, donc positive pour $D \geqq 13{,}5$. Il en résulte que même pour $D \geqq 13{,}5$:

$$(56,1) \qquad P_0 < D - 4, \qquad D \geqq 13{,}5.$$

D'autre part posons $\alpha = 5{,}5$. On obtient

$$-2\,\psi(D;\,5{,}5) = 3\,D^2 - 69\,D + 332{,}75.$$

Or ici $11{,}5$ est situé entre les deux racines du polynôme quadratique. D'autre part, on a, en remplaçant dans le polynôme quadratique D par 18:

$$332{,}75 - (69 - 54)\,18 = 332{,}75 - 270 > 0,$$

donc pour $D \geqq 18{,}7$ l'expression $D - 5{,}5$ est plus petite que P_0:

$$(56,2) \qquad P_0 > D - 5{,}5, \qquad \delta_0 < \frac{1}{D - 7{,}5} \qquad (D \geqq 18{,}7).$$

Pour δ_1 on a d'après $(55,5)$, en posant $P_1 - 2 = x \geqq 4$, $P_0 = \dfrac{(x+2)^3}{x^2}$:

$$\frac{\delta_1}{\delta_0} = 1 + \frac{P_0 - 1}{P_1 - 2} = 2 + \frac{5}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{8}{x^3} \leqq 2 + \frac{5}{4} + \frac{12}{16} + \frac{8}{64} = 4\,\frac{1}{8}.$$

D'un autre côté on a pour cette expression, en remplaçant d'après $(53,4)$ P_1 par $P_0 - 7{,}5$ et en utilisant $(56,2)$

$$\frac{\delta_1}{\delta_0} \leqq 2 + \frac{10}{D - 5{,}5 - 7{,}5 - 2} = 2 + \frac{10}{D - 15}.$$

Donc, d'après $(54,6)$, $(56,2)$ et $\delta_0 = \dfrac{1}{P_0 - 2} < \dfrac{1}{11{,}5}$,

$$(56,3) \qquad \delta_1 \leqq 4\,\frac{1}{8}\,\delta_0 < \frac{4\,\frac{1}{8}}{D - 7{,}5}, \qquad \delta_1 < \frac{33}{8 \cdot 11{,}5} < 0{,}3587,$$

$$(56,4) \qquad \delta_1 \leqq \left(2 + \frac{10}{D - 15}\right)\delta_0 < 2\,\frac{1 + \dfrac{5}{D-15}}{D - 7{,}5}.$$

§ 14. Factorisation des séries de Laurent dans le cas des grandes déviations.

(Troisième théorème fondamental.)

57 Il est maintenant facile d'obtenir la décomposition de l'expression

$$G(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

supposée convergente dans la couronne $R^{(i)} < |z| < R^{(e)}$, en supposant que pour un $k > 0$

$$\mathrm{Min}\,(D_0, D_k) = D \geqq 18{,}7.$$

Pour un $n > k$ posons

$$G_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} b_\nu z^\nu, \quad n > k$$

et décomposons $G_n(z)$ en trois facteurs correspondant à $f_-(z)$, $Q(z), f_+(z)$ du No. 55, en les désignant resp. par

$$(57,1) \qquad \begin{cases} f_n^-(z) = \sum_{\nu=-n}^{0} a_\nu^{(n)} z^\nu, \\ Q_n(z) = \sum_{\nu=0}^{k} C_\nu^{(n)} z^\nu, \quad C_0^{(n)} = 1, \\ f_n^+(z) = \sum_{\nu=0}^{n-k} A_\nu^{(n)} z^\nu, \quad A_0^{(n)} = 1. \end{cases}$$

Désignons resp. par $G_n^-(z)$, $G_n^{(0)}(z)$ les ensembles de termes des $G_n(z)$ aux exposants $-n, \ldots, 0$; $0. \ldots, k$ et par $G_n^+(z)$ celui des termes de $z^{-k} G_n(z)$ aux exposants $0, 1, \ldots, n-k$. De même désignons par $G_-(z)$, $G_0(z)$ resp. les ensembles de termes de $G(z)$ aux exposants $\leqq 0$ et aux exposants $0, \ldots, k$, et par $G_+(z)$ l'ensemble de termes de $z^{-k} G(z)$ aux exposants non négatifs. Alors on a d'après (54, 4), (55, 5), (55, 6):

$$(57,2) \qquad f_n^-(z) - G_n^-(z) \ll \delta_0 \mathfrak{M}_{G_n^-},$$

$$(57,3) \qquad a_0^{(n)} Q_n(z) - G_n^{(0)}(z) \ll \delta_1 \mathfrak{M}_{G_n^{(0)}},$$

$$(57,4) \qquad a_0^{(n)} C_k^{(n)} f_n^+(z) - G_n^+(z) \ll \delta_0 \mathfrak{M}_{G_n^+}.$$

Or, il résulte de (57, 2)

$$f_n^-(z) \ll (1 + \delta_0)\,\mathfrak{M}_{G_n^-} \ll (1 + \delta_0)\,\mathfrak{M}_{G_-},$$

donc la famille des séries de Taylor $f_n^-\left(\frac{1}{z}\right)$ est uniformément bornée dans chaque cercle $|z| \leqq \frac{1}{R^{(i)}} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Donc on a pour une série partielle des indices $N = \{n_i\}$:

$$f_{n_i}^-(z) \Rightarrow f_-(z)$$[1]

où

$$f_-(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} a_\nu z^\nu$$

converge dans la région $|z| > R^{(i)}$ et en vertu de (57, 2)

(57, 5) $$f_-(z) - G_-(z) \ll \delta_0\,\mathfrak{M}_{G_-}.$$

Il résulte de cette relation en particulier, 0 étant un indice principal de $G(z)$:

$$|a_0| \geqq (1 - \delta_0)\,|b_0| > 0.$$

58. On obtient maintenant de la relation (57, 3):

$$a_0^{(n)}\,Q_n(z) \ll (1 + \delta_1)\,\mathfrak{M}_{G_n^{(0)}} \ll (1 + \delta_1)\,\mathfrak{M}_{G_0},$$

donc la suite de polynômes $a_0^{(n_i)}\,Q_{n_i}(z)$ est uniformément majorée et l'on peut extraire de la suite N des indices une suite partielle $N' = \{n_j\}$ telle que

$$a_0^{(n_j)}\,Q_{n_j}(z) \Rightarrow a_0\,Q(z)$$

dans un cercle aussi grand que l'on veut, où l'on a pour le polynôme $Q(z) = \sum_{\nu=0}^{k} C_\nu z^\nu$ en vertu de (57, 3):

(58, 1) $$C_0 = 1,\quad a_0\,Q(z) - G_0(z) \ll \delta_1\,\mathfrak{M}_{G_0}.$$

Or, de cette relation il résulte, k étant un indice principal de $G(z)$:

$$|a_0\,C_k| \geqq (1 - \delta_1)\,|b_k| > 0.$$

---

[1] Le symbole $\Rightarrow$ a été introduit par E. Landau pour exprimer la convergence uniforme.

Mais maintenant, en vertu de (57, 4), on a

$$a_0^{(n)}\, C_k^{(n)} f_n^+(z) \ll (1+\delta_0)\,\mathfrak{M}_{G_n^+} \ll (1+\delta_0)\,\mathfrak{M}_{G^+},$$

donc la famille des séries de Taylor $a_0^{(n)}\, C_k^{(n)} f_n^+(z)$ est uniformément majorée et l'on peut extraire de la suite N' la suite partielle $N''=\{n_l\}$ des indices telle que

$$a_0^{(n_l)}\, C_k^{(n_l)} f_{n_l}^+(z) \Rightarrow a_0\, C_k f_+(z)$$

uniformément dans chaque cercle $|z| \leqq R^{(e)}-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Il résulte de (57, 4) pour

$$f_+(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu:$$

$$A_0 = 1, \quad a_0\, C_k f_+(z) - G_+(z) \ll \delta_0\, \mathfrak{M}_{G_0} \tag{58, 2}$$

et finalement de $G^{(n)}(z) = f_n^-(z)\, Q_n(z) f_n^+(z)$ la décomposition de $G(z)$:

$$G(z) = f_-(z)\, Q(z) f_+(z). \tag{58, 3}$$

Exactement les mêmes considérations sont évidemment applicables pour $k=0$ en supposant seulement $D_0 \geqq 13{,}5$, c'est-à-dire dans les hypothèses du théorème XXV. On obtient alors la décomposition de $G(z)$ en *deux* facteurs $f_-(z)$, $f_+(z)$ (avec $Q(z) \equiv 1$).

En appliquant aux relations (57, 5), (58, 1) et (58,2) le théorème VI on obtient:

Désignons les inclinaisons numériques de $G(z)$, $f_-(z)$, $Q(z)$, $f_+(z)$ dans une décomposition (58, 3) *de $G(z)$ possédant les propriétés* (57, 5), (58, 1), (58, 2) *resp. par* $\{R_\nu\}$, $\{R_\nu^-\}$, $\{R_\nu^{(0)}\}$, $\{R_\nu^+\}$. *Alors tous les quotients* $\frac{R_\nu^-}{R_\nu}$, $\frac{R_\nu^+}{R_{\nu+k}}$ *sont compris entre les bornes* $\frac{1-\delta_0}{1+\delta_0}$, $\frac{1+\delta_0}{1-\delta_0}$ *et tous les quotients* $\frac{R_\nu^{(0)}}{R_\nu}$ *entre les bornes* $\frac{1-\delta_1}{1+\delta_1}$, $\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$.

En particulier on a en vertu de (54, 4), (56, 3): $\delta_0 < \frac{1}{4}$; $\delta_1 < 0{,}3587$;

$$R_0^- < \frac{5}{3} R_0, \quad R_1^+ > \frac{3}{5} R_{k+1},$$

$$R_1^{(0)} > 0{,}47\, R_1, \quad R_k^{(0)} < 2{,}12\, R_k.$$

Il en résulte en vertu du théorème IX que les modules des racines de $f_-(z)$

sont plus petits que $3\,R_0$, ceux de $f_+(z)$ plus grands que $\frac{1}{3}\,R_{k+1}$ et ceux de $Q(z)$ plus grands que $0{,}235\,R_1$ et plus petits que $4{,}24\,R_k$. Or, pour $k > 0$, $D \geqq 18{,}7$ on a $\sqrt{D} \geqq 4{,}324\ldots > 4{,}24$,

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_0}} > 4{,}24; \quad \sqrt{\frac{R_{k+1}}{R_k}} > 4{,}24;$$

pour $q = 0$ et $D_0 \geqq 13{,}5$ on a $\sqrt{\frac{R_1}{R_0}} > 3{,}5 > 3$. *Donc en tous cas les racines de* $f_-(z)$, $Q(z)$, $f_+(z)$ *sont séparées par les circonférences*

$$|z| = \sqrt{R_0\,R_1}, \quad |z| = \sqrt{R_k\,R_{k+1}}.$$

59. On montre maintenant facilement que la décomposition (58, 3) est *unique* si $Q(z)$ et $f_+(z)$ sont normées de sorte que leurs termes constants sont égaux à 1. Il suffit de le démontrer pour la décomposition en *deux* facteurs, valable déjà pour $D_0 \geqq 13{,}5$. Or, supposons que l'on ait les décompositions

$$G_0(z) = f_-(z) f_+(z) = f_-^*(z) f_+^*(z), \tag{59, 1}$$

$$f_+(0) = f_+^*(0) = 1\,;\; f_-(\infty) = a_0 \neq 0,\; \neq \infty\,;\; f_-^*(\infty) = a_0^* \neq 0,\; \neq \infty,$$

où les quatre séries de Taylor $f_+(z)$, $f_+^*(z)$, $f_-\left(\frac{1}{z}\right)$, $f_-^*\left(\frac{1}{z}\right)$ sont convergentes resp. pour $|z| < R^{(e)}$, $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{R^{(i)}}$ et que l'on ait en plus

$$f_-(z) - G_-(z) \ll \delta_0\,\mathfrak{M}_{G_-},\quad f_-^*(z) - G_-(z) \ll \delta_0\,\mathfrak{M}_{G_-}, \tag{59, 2}$$

$$a_0 f_+(z) - G_+(z) \ll \delta_0\,\mathfrak{M}_{G_+},\quad a_0^* f_+^*(z) - G_+(z) \ll \delta_0\,\mathfrak{M}_{G_+}. \tag{59, 3}$$

Mais alors il résulte de ce que nous avons dit à la fin du No. 58, que les racines de f_- et f_+ sont séparées par la circonférence $|z| = \sqrt{R_0\,R_1}$. Et puisque le même a lieu pour f_-^* et f_+^*, f_- et f_-^* possèdent les mêmes racines. Mais maintenant notre affirmation résulte du lemme suivant:

Lemme. *Soit* $G(z)$ *une série de Laurent avec une couronne de convergence* $R^{(i)} < |z| < R^{(e)}$. *Supposons que* $G(z)$ *possède deux décompositions de la forme suivante*

$$G(z) = f_-(z)\,f_+(z) = f_-^*(z) f_+^*(z),$$

où $f_-(z)$, $f_-^*(z)$ *sont des séries de Laurent convergentes pour* $|z| > R^{(i)}$, $f_+(z)$, $f_+^*(z)$ *des séries de Taylor convergentes pour* $|z| < R^{(e)}$ *à termes constants* 1. *Alors, si les racines de* $f_-(z)$ *et* $f_-^*(z)$ *sont les mêmes pour* $|z| \geqq R^{(i)}$, *et celles de* $f_+(z)$ *et* $f_+^*(z)$ *sont les mêmes pour* $|z| \leqq R^{(e)}$, *on a* $f_-(z) \equiv f_-^*(z)$, $f_+(z) \equiv f_+^*(z)$.

En effet on a

$$\frac{f_+^*(z)}{f_+(z)} = F_+(z), \quad \frac{f_-(z)}{f_-^*(z)} = F_-(z),$$

où $F_+(z)$ est une série de Taylor avec le terme constant 1, convergente dans la couronne $R^{(i)} < |z| < R^{(e)}$ et $F_-(z)$ une série de Laurent commençant par un terme constant différent de zéro et convergente, elle aussi, dans la même couronne. Or, on a dans cette couronne

$$F_+(z) - F_-(z) = 0,$$

donc, puisque le développement dans une série de Laurent est unique dans notre couronne circulaire, toutes les deux expressions se réduisent à une constante, c'est-à-dire à 1, le terme constant de $F(z)$. Donc on a

$$f_-(z) = f_-^*(z), \; f_+(z) = f_+^*(z)$$

et notre lemme est démontré. — Dans le cas de la décomposition générale (58, 3) il suffit d'appliquer deux fois notre résultat, pour voir que $f_-(z)$, $Q(z)$ et $f_+(z)$ sont univoquement déterminées.

60. Du fait que les trois facteurs dans la décomposition (58, 3) sont univoquement définis il résulte aisément que ces facteurs *varient continument avec* $G(z)$. Car, supposons qu'on ait une suite infinie de séries de Laurent

$$G_\mu(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu^{(\mu)} z^\nu$$

convergente chacune dans la couronne

(60, 1) $$R^{(i)} < |z| < R^{(e)},$$

et qu'on ait pour $\mu \to \infty$ dans (60, 1) $G_\mu(z) \Rightarrow G(z)$. Supposons en plus que les déviations des expressions $G_\mu(z)$ de rang 0 et k soient $\geqq 18{,}7$. Alors on peut décomposer chacune des $G_\mu(z)$ en trois facteurs

$$G_\mu(z) = f_\mu^-(z)\, Q_\mu(z)\, f_\mu^+(z)$$

satisfaisant resp. aux conditions analogues à (57, 5), (58, 1), (58, 2). En particulier:

$$f_\mu^- \ll (1 + \delta_0)\,\mathfrak{M}_{G_{\mu-}},$$

où les expressions $G_{\mu-} = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{0} b_\nu^{(\mu)} z^\nu$ convergent uniformément dans le domaine $|z| > R^{(i)}$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, les majorantes $\mathfrak{M}_{G_{\mu-}}$ sont bornées en leur ensemble dans le domaine $|z| \geqq R^{(i)} + \varepsilon$. Donc la suite des fonctions $f_\mu^-(z)$ est normale à l'intérieur de la couronne (60, 1) et par un raisonnement analogue on voit que les suites $Q_\mu(z)$ et $f_\mu^+(z)$ sont normales dans cette couronne. Or, si p. ex. $f_-^*(z)$ est une fonction limite des $f_\mu^-(z)$, on peut extraire de la suite des indices μ une suite partielle μ_i telle que les suites $\{f_{\mu_i}^-\}$, $\{Q_{\mu_i}\}$, $\{f_{\mu_i}^+\}$ convergent resp. uniformément dans (60, 1) vers $f_-^*(z)$, $Q^*(z)$, $f_+^*(z)$, où $Q^*(z)$ et $f_+^*(z)$ fournissent avec $f_-^*(z)$ trois facteurs d'une décomposition de $G(z)$, satisfaisant aux conditions (57, 5), (58, 1), (58, 2). Donc, puisque cette décomposition est unique, $f_-^*(z)$ est univoquement déterminée et la suite *totale* des fonctions $\{f_\mu^-\}$ converge uniformément dans (60, 1). Et un raisonnement complètement analogue établit le fait correspondant pour les suites $\{Q_\mu\}$, $\{f_\mu^+\}$.

Du fait que nous venons de démontrer on peut évidemment tirer la conclusion suivante:

Supposons que les coefficients $b_\nu(P)$ de l'expression

$$G(z;\ P) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu(P)\, z^\nu$$

sont des fonctions continues de P, si P varie sur un ensemble $\mathfrak{M}$, et que $G(z; P)$ converge pour chaque P dans la couronne (60, 1) et qu'en plus pour ces P les déviations de $G(z; P)$ aux indices fixes 0, k restent $\geqq 18{,}7$. Alors on peut décomposer $G(z; P)$ en trois facteurs

$$G(z;\ P) = f_-(z;\ P)\, Q(z;\ P) f_+(z;\ P)$$

satisfaisant comme fonctions de z aux conditions analogues à (57, 5), (58, 1) et (58, 2), et les coefficients de $f_-(z;\ P)$, $Q(z;\ P)$, $f_+(z;P)$ sont des fonctions continues de P sur $\mathfrak{M}$.

61. Dans les considérations précédentes nous avons supposé que les déviations de rang 0 et q sont suffisamment grandes. Il est évident que les résultats complètement analogues sont valables dans le cas où p. ex. les deux déviations D_m, D_n, $m < n$, sont $\geqq 18{,}7$, ce cas se réduisant au cas considéré plus haut en divisant $G(z)$ par z^m.

En rassemblant nos résultats nous pouvons énoncer

XXVI. **Troisième théorème fondamental. A.** *Soit*

$$G(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

une série de Laurent convergente dans la couronne circulaire

$$R^{(i)} < |z| < R^{(e)}, \tag{61, 1}$$

et supposons que pour les déviations D_m, D_n, $m < n$, on ait

$$\operatorname{Min}(D_m, D_n) = D \geqq 18{,}7, \quad n - m = k. \tag{61, 2}$$

Soit

$$Q(z) = \sum_{\nu=0}^{k} C_\nu z^\nu, \quad C_0 = 1, \quad C_k \neq 0, \tag{61, 3}$$

le polynôme possédant toutes les k racines de $G(z)$ comprises d'après le théorème XXI *dans la couronne circulaire*

$$\frac{1}{3} R_{m+1} < |z| < 3 R_n, \tag{61, 4}$$

et

$$G_0(z) = z^{-m} \sum_{\nu=m}^{n} b_\nu z^\nu. \tag{61, 5}$$

Alors on a

$$a\, Q(z) - G_0(z) \ll \delta_1 \mathfrak{M}_{G_0} \tag{61, 6}$$

où a est une constante $\neq 0$ et

$$\delta_1 = \frac{P_0 + P_1 - 3}{(P_0 - 2)(P_1 - 2)} < \frac{4\frac{1}{8}}{D - 7{,}5}, \quad \delta_1 < 2\,\frac{1 + \dfrac{5}{D - 15}}{D - 7{,}5}, \quad \delta_1 < 0{,}3587, \tag{61, 7}$$

$P_0 > 13{,}5$, $P_1 > 6$ *étant resp. les plus grandes racines des équations*

$$(61, 8) \qquad P_0^3 - (P_0 - 2)^2 D = 0, \quad P_1^3 - (P_1 - 2)^2 P_0 = 0.$$

Les conclusions analogues subsistent si l'une des déviations D_m, D_n *devient* ∞. *Alors* (61, 2) *peut être même remplacé par*

$$(61, 2^\circ) \qquad D \geqq 13{,}5$$

à condition de remplacer δ_1 *dans* (61, 6) *par* δ_0, *où*

$$(61, 7^\circ) \qquad \delta_0 = \frac{1}{P_0 - 2} \leqq \frac{1}{4}, \quad \delta_0 < \frac{1}{D - 9{,}5}, \quad \delta_0 \leqq \frac{27}{8D}, \quad (D \geqq 13{,}5).$$

62. XXVII. **Troisième théorème fondamental. B.** *Posons dans les hypothèses du théorème* XXVI

$$(62, 1) \qquad G_-(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{m} b_\nu z^\nu, \quad G_+(z) = z^{-n} \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu z^\nu.$$

Alors on a la décomposition

$$(62, 2) \qquad G(z) = f_-(z)\, Q(z) f_+(z)$$

où

$$(62, 3) \qquad f_-(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{m} a_\nu z^\nu, \; f_+(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu, \; A_0 = 1, \; a_m \neq 0$$

et pour $\delta_0 = \dfrac{1}{P_0 - 2}$

$$(62, 4) \qquad \begin{cases} f_-(z) - G_-(z) \ll \delta_0 \mathfrak{M}_{G_-}, \\ a_m C_k f_+(z) - G_+(z) \ll \delta_0 \mathfrak{M}_{G_+}. \end{cases}$$

Les racines de $f_-(z)$, $Q(z)$, $f_+(z)$ *sont séparées par les circonférences* $|z| = \sqrt{R_m R_{m+1}}$ *et* $|z| = \sqrt{R_n R_{n+1}}$. *La constante a de* (61, 6) *est égale à* a_m.

La décomposition (62, 2) *satisfaisant aux conditions* (61, 3), (61, 6), (62, 3) *et* (62, 4) *n'est possible que d'une seule façon.*

Les expressions $f_-(z)$, $Q(z)$, $f_+(z)$ *varient continuement si l'on varie* $G(z)$ *continuement tant que la condition* (61, 2) *reste satisfaite.*

Pour δ_0 on a

$$\delta_0 = \frac{1}{P_0 - 2} < \frac{1}{D - 7{,}2}, \quad \delta_0 < \frac{1}{11{,}5} \quad (D \geqq 18{,}7). \tag{62, 5}$$

Les mêmes conclusions restent exactes aussi pour $n = m$ si l'on pose $Q(z) \equiv 1$. Dans ce cas la condition (61, 2) *peut être remplacée par*

$$D \geqq 13{,}5. \tag{62, 6}$$

Alors, si $D < 18{,}7$, les évaluations (62, 5) *pour δ_0 doivent être remplacées par* (61,7°).

En utilisant les bornes déduites dans le No. 58 pour R_ν^-, $R_\nu^{(0)}$, R_ν^+ — si $m \gtrless 0$, il faut pour les obtenir diviser $G(z)$ par z^m, — nous avons sous les hypothèses de XXVII:

$$\frac{1-\delta_0}{1+\delta_0} \leqq \frac{R_\nu^-}{R_\nu} \leqq \frac{1+\delta_0}{1-\delta_0}, \quad \frac{1-\delta_0}{1+\delta_0} \leqq \frac{R_\nu^+}{R_{\nu+n}} \leqq \frac{1+\delta_0}{1-\delta_0}; \quad \frac{1-\delta_1}{1+\delta_1} \leqq \frac{R_\nu^{(0)}}{R_{\nu+m}} \leqq \frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}. \tag{62, 7}$$

§ 15. Compléments au troisième théorème fondamental.

63. On peut évidemment appliquer le théorème IX aux facteurs f_-, Q, f_+ de $G(z)$ et obtenir, par là, des bornes supérieures et inférieures pour les modules des racines de $Q(z)$, des bornes supérieures des modules de celles de $f_-(z)$ et des bornes inférieures des modules de celles de $f_+(z)$.

Le théorème XXVII donnant une décomposition de $G(z)$ en *trois* facteurs, il est naturel de se demander si un théorème analogue reste exact pour un nombre plus grand fini ou même infini, de facteurs. Pour un nombre fini de facteurs c'est évident. En effet, supposons que l'on ait une suite de déviations $\geqq 18{,}7$:

$$D_{m_1}, D_{m_2}, \ldots, D_{m_n}. \tag{63, 1}$$

Alors on appliquera le théorème XXVII aux déviations D_{m_1}, D_{m_n}. On obtiendra une décomposition (62, 2), où $Q(z)$ est le polynôme à terme constant 1 possédant toutes les racines de $G(z)$ aux modules compris entre $\frac{1}{3} R_{m_1+1}$, $3 R_{m_n}$. Or, si nous désignons généralement par Q_μ le polynôme au terme constant 1 possédant exactement toutes les racines de $G(z)$ aux modules compris entre $\frac{1}{3} R_{m_\nu+1}$ et $3 R_{m_{\nu+1}}$ on a évidemment $Q(z) = Q_1 \ldots Q_{n-1}$, donc

$$G(z) = f_-(z)\, Q_1(z) \ldots Q_{n-1}(z) f_+(z), \quad f_+(0) = 1, \tag{63, 2}$$

où pour chacun des polynômes $Q_\nu(z)$ une formule analogue à (61, 6) est valable, comme on voit en appliquant XXVI aux déviations D_{m_ν}, $D_{m_{\nu+1}}$.

En plus, si l'on a

$$m_1 < m_k < m_n$$

il résulte de (63, 2)

$$G(z) = F_-(z) F_+(z), \quad F_-(z) = f_- Q_1 \ldots Q_{k-1}, \quad F_+(z) = Q_k \ldots Q_{n-1} f_+ .$$

Or, je dis que dans cette décomposition $F_-(z)$ et $F_+(z)$ satisfont aux relations (62, 4) (pour $Q \equiv 1$). En effet, puisque $D_{m_k} \geqq 18{,}7$, il existe une décomposition

$$G(z) = F^*_-(z) F^*_+(z), \quad F^*_+(0) = 1$$

satisfaisant aux conditions (62, 4) et dans laquelle les racines de $F^*_-(z)$, $F^*_+(z)$ sont séparées par la circonférence $|z| = \sqrt{R_{m_k} R_{m_k+1}}$. Mais la même circonférence sépare les racines de $F_-(z)$, $F_+(z)$, donc, d'après le lemme du No. 59 on a $F_-(z) = F^*_-(z)$, $F_+(z) = F^*_+(z)$.

64. Supposons maintenant qu'il existe un nombre *infini* de déviations $D_{m_\nu} \geqq 18{,}7$. Si les indices m_ν vont dans un seul sens à l'infini, p. ex. en croissant:

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_\nu < \ldots, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{64, 1}$$

on a évidemment $R_\nu \uparrow \infty$, donc $R^{(e)} = \infty$. Si généralement au couple des déviations consécutives D_{m_ν}, $D_{m_{\nu+1}}$ correspond le polynôme $Q_\nu(z)$, $Q_\nu(0) = 1$, dont les racines sont celles de $G(z)$ situées entre les circonférences $|z| = 3\, R_{m_{\nu+1}}$, $|z| = 3\, R_{m_\nu}$ on peut écrire pour un n positif

$$G(z) = f_-(z)\, Q_1(z) \ldots Q_{n-1}(z) f_+^{(n)}(z), \tag{64, 2}$$

où $f_+^{(n)}(0) = 1$ et les modules des racines de $f_+^{(n)}(z)$ sont supérieurs à $\frac{1}{3} R_{m_n+1}$. La plus petite inclinaison numérique de $f_+^{(n)}(z)$ est d'après (62, 7) plus grande que $\frac{1-\delta_0}{1+\delta_0} R_{m_n+1} \geqq \frac{3}{5} R_{m_n+1}$. Donc on a

$$f_+^{(n)}(z) - 1 \ll \frac{\frac{5}{3}\frac{z}{R_{m_n+1}}}{1 - \frac{5}{3}\frac{z}{R_{m_n+1}}},$$

donc pour $n \uparrow \infty$

$$f_+^{(n)}(z) \Longrightarrow 1$$

uniformément dans chaque région finie du plan des z. Il en résulte finalement

$$\frac{G(z)}{f_-(z)} = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu(z). \tag{64, 3}$$

Si $G(z)$ est ici une série de Taylor, $f_-(z)$ est une expression de la forme $a z^m$. On obtient alors une décomposition de la fonction entière $G(z)$ dans un produit infini.

On pourrait ici choisir $G(z)$ telle que sa croissance soit aussi petite que possible en prenant les différences $m_{\nu+1} - m_\nu$ égales à 1 et en faisant les D_ν croître de manière convenable. D'autre côté on pourrait, en espaçant les m_ν suffisammet et en choisissant D_{m_ν} toutes p. ex. égales à 18,7, obtenir une fonction entière $G(z)$ de croissance aussi rapide que l'on veut.

Le résultat est analogue dans le cas où les m_ν vont à l'infini dans le sens négatif et aussi si les indices m_ν vont à l'infini dans tous les deux sens. Dans ce dernier cas on a évidemment $R_{-\nu} \downarrow 0$, $R_\nu \uparrow \infty$, $R^{(i)} = 0$, $R^{(e)} = \infty$. Supposons d'abord que $m_0 = 0$. Alors on a d'après le théorème XXVII

$$G(z) = a F_-(z) F_+(z) \tag{64, 4}$$

où

$$a \neq 0, \quad F_+(0) = F_-(\infty) = 1.$$

Dans $F_+(z)$ et $F_-(z)$ les déviations d'indices m_ν sont en tout cas $\geqq 13{,}5$. D'autre côté, les racines de F_+ et F_- sont séparées par la circonférence $|z| = \sqrt{R_0 R_1}$. Donc on a par la dernière partie du théorème XXVI

$$F_+(z) = \left(\prod_{\nu=0}^{l-1} Q_\nu(z)\right) f_+^{(l)}(z)$$

et

$$G(z) = [a F_-(z)] \left(\prod_{\nu=0}^{l-1} Q_\nu(z)\right) f_+^{(l)}(z)$$

où cette dernière décomposition de $G(z)$ correspond aux indices m_0 et m_l. Donc, par le même raisonnement qu'en haut, $f_+^{(l)}(z)$ converge avec $l \uparrow \infty$ vers 1, uniformément dans toute région finie du plan. En appliquant le même raisonnement à $F_-\left(\frac{1}{z}\right)$ on obtient la décomposition

$$F_-\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\prod_{\nu=-k}^{-1} Q_\nu^*(z)\right) f_-^{(k)}\left(\frac{1}{z}\right)$$

où $f_-^{(k)}\left(\frac{1}{z}\right)$ est une série de Taylor commençant par la constante 1 et convergeant avec $k \uparrow \infty$ uniformément vers 1 dans chaque région finie du plan. Quant au polynôme $Q_\nu^*(z)$, c'est un polynôme à terme constant 1, de degré $m_{\nu+1} - m_\nu$, tel que le polynôme

$$Q_\nu(z) = z^{m_{\nu+1}-m_\nu}\, Q_\nu^*\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \nu = -1, \ldots, -k.$$

a pour ses racines le groupe des $m_{\nu+1} - m_\nu$ racines de $G(z)$ séparées par les circonférences

(64, 5) $$|z| = \sqrt{R_{m_\nu} R_{m_\nu+1}}, \quad |z| = \sqrt{R_{m_{\nu+1}} R_{m_{\nu+1}+1}}.$$

Mais $Q_\nu(z)$ est pour les indices ν négatives normé de façon que dans Q_ν le coefficient *de la plus haute puissance de* z est égal à 1. Il en résulte finalement dans le cas général le théorème suivant:

XXVIII. *On a sous les hypothèses des théorèmes* XXVI, XXVII *si les indices* m_ν *aux déviations* $D_{m_\nu} \geqq 18{,}7$ *sont en nombre infini dans les deux sens:*

$$\ldots\, m_{\nu-1} < m_\nu < m_{\nu+1} \,\ldots, \qquad -\infty < \nu < \infty$$

la représentation

(64, 6) $$G(z) = a\, z^{m_0} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} Q_\nu(z)$$

où, pour chaque ν, Q_ν *est le polynôme du degré* $m_{\nu+1} - m_\nu$ *dont les racines sont identiques aux* $m_{\nu+1} - m_\nu$ *racines de* $G(z)$ *séparées par les circonférences* (64, 5). *Les polynômes* Q_ν *sont normés de façon que dans les polynômes aux indices non négatifs les termes constants, et dans les* P_ν *aux indices négatifs les coefficients des plus hautes puissances de* z *soient égaux à* 1. a *est un nombre fixe différent de zéro, mais dépendant du choix de* m_0, *c'est-à-dire du numérotage des* m_ν.

Si la suite des m_ν est remplacée par $\{m_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *on a au lieu de* (64, 6) *la décomposition* (64, 3). *Si la suite des m_ν est remplacée par* $\{m_\nu\}$, $\nu = -1, -2, \ldots$ *on a la formule analogue à* (64, 3)

$$\frac{G(z)}{f_+(z)} = a \prod_{\nu=-\infty}^{-1} Q_\nu(z), \tag{64, 7}$$

où les $Q_\nu(z)$ sont normés comme les facteurs aux indices négatifs en (64, 6).

Enfin, si l'on ne considère que les m_ν en nombre fini on a la décomposition (63, 2).

65. L'assertion du théorème XXVII que les expressions $f_-(z)$, $Q(z)$, $f_+(z)$ varient continuement avec $G(z)$ peut être considérablement précisée dans le cas où les coefficients de $G(z)$ sont des *fonctions holomorphes* de certains paramètres $u, v, \ldots, w$ variant resp. dans certains domaines ouverts $K_u, K_v, \ldots, K_w$. Supposons alors que, autant que les conditions

$$u \prec K_u, \ \ldots, \ w \prec K_w \tag{65, 1}$$

restent satisfaites, la relation (61, 2) resp. la relation (61, 2°) reste valable. Alors je dis que les coefficients de $Q(z)$, $f_-(z)$, $f_+(z)$ sont des fonctions holomorphes de $u, \ldots, w$ dans (65, 1).

Il suffit de démontrer notre assertion dans un voisinage convenable d'un point arbitraire mais fixe $u_0, \ldots, w_0$ de (65, 1):

$$|u - u_0| < \varepsilon, \ \ldots, \ |w - w_0| < \varepsilon \tag{65, 2}$$

pour un ε convenablement choisi.

Nous considérons d'abord le cas où les hypothèses du théorème XXV sont satisfaites, c'est-à-dire où $G(z)$ est une expression »finie». Or, sous les hypothèses de XXV les racines de $f_+(z)$ sont séparées de celles de $f_-(z)$ par chaque circonférence

$$|z| = R, \quad 3\, R_m < R < \frac{R_{m+1}}{3}.$$

On peut évidemment supposer sans restreindre la généralité que l'on a $l_1 = 0$, $l_2 = l > m > 0$. Soient $z_1, \ldots, z_m$ les m racines de $f_-(z)$ (dont certaines peuvent être nulles) et soit

$$f_-^*(z) = \prod_{\nu=1}^{m} (z - z_\nu) = z^m + a_1^* z^{m-1} + \cdots + a_m^*.$$

Nous allons montrer que les coefficients $a_1^*, \ldots, a_m^*$ restent holomorphes en $u, \ldots, w$ en (65, 2) pour un ε suffisamment petit. Il suffit évidemment de le démontrer pour les sommes des puissances $z_1^k + z_2^k + \cdots + z_m^k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Soient $R_m(u, \ldots, w)$, $R_{m+1}(u, \ldots, w)$ les inclinaisons numériques aux indices m, $m+1$ et soit

$$R = \sqrt{R_m(u_0, \ldots, w_0)\, R_{m+1}(u_0, \ldots, w_0)}.$$

On a évidemment, d'après ce que nous avons dit au No. 16, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit dans (65, 2)

$$3\, R_m(u, \ldots, w) < R < \frac{1}{3} R_{m+1}(u, \ldots, w).$$

Or, on a alors, le chemin d'intégration étant la circonférence $|z| = R$:

$$z_1^k + \cdots + z_m^k = \frac{1}{2\pi i}\int z^k \frac{G'(z)}{G(z)}\, dz = \frac{R^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(k+1)i\varphi}\frac{G'(R\, e^{i\varphi})}{G(R\, e^{i\varphi})}\, d\varphi,$$

où l'expression sous le signe d'intégrale est holomorphe dans (65, 2) et continue en φ, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Donc $z_1^k + \cdots + z_m^k$ est aussi holomorphe dans (65, 2).

En divisant $G(z)$ par $f_-^*(z)$ on obtient un polynôme $f_+^*(z)$ dont les coefficients sont aussi holomorphes dans (65, 2). Soit en particulier a^* le terme constant de $f_+^*(z)$. a^* reste différent de 0 dans (65, 2), puisque les racines de $f_+^*(z)$ restent en module $> R$. Donc les coefficients des expressions

$$f_-(z) = a^* f_-^*(z), \quad f_+(z) = \frac{1}{a^*} f_+^*(z)$$

sont aussi holomorphes dans (65, 1).

En appliquant ce résultat deux fois, on voit que dans la décomposition de l'expression (54, 1) en *trois* facteurs (54, 3), (55, 1) sous les conditions (54, 2) notre assertion reste encore valable.

66. Considérons maintenant le cas général où $G(z)$ est une expression

$$G(z, u, \ldots, w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu z^\nu \tag{66, 1}$$

convergente pour chaque point de (65, 2) dans la couronne circulaire fixe $R^{(i)} < |z| < R^{(e)}$, $R^{(i)}$, $R^{(e)}$ étant indépendants de $u, \ldots, w$. Désignons par $T_\nu(\varepsilon)$ le maximum du coefficient de la majorante Newtonienne $T_\nu(u, \ldots, w)$ pour

(66, 2)
$$|u-u_0| \leqq \varepsilon, \ldots, |w-w_0| \leqq \varepsilon$$

et soient $R_*^{(i)}$, $R_*^{(e)}$ deux nombres positifs satisfaisants à la condition

(66, 3)
$$R^{(i)} < R_*^{(i)} < R_*^{(e)} < R^{(e)}.$$

Alors la série

(66, 4)
$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu(\varepsilon) z^\nu$$

converge dans la couronne circulaire

(66, 5)
$$R_*^{(i)} < |z| < R_*^{(e)}.$$

En effet, soit $\beta_\nu(\varepsilon)$ le maximum de $|b_\nu|$ pour (66, 2). Il suffit de démontrer que

(66, 6)
$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \beta_\nu(\varepsilon) z^\nu$$

converge dans (66, 5). Car alors d'après V la majorante Newtonienne $\mathfrak{N}(z)$ de (66, 6) converge dans (66, 5). Or, $\mathfrak{N}(z)$, étant une majorante normale de toutes les séries (66, 1) dans (66, 2), l'est aussi pour toutes les séries $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu(u, \ldots, w) z^\nu$, donc (66, 4), elle aussi, est majorée par $\mathfrak{N}(z)$ et notre assertion est démontrée.

Or, soient

$$G_+(z, u, \ldots, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu, \quad G_-(z, u, \ldots, w) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} b_\nu z^\nu,$$

et M_+ resp. M_- des bornes de $|G_+(z, u, \ldots, w)|$, $|G_-(z, u, \ldots, w)|$ dans la couronne $R_*^{(i)} \leqq |z| \leqq R_*^{(e)}$ et (66, 2). On a alors évidemment pour $M = M_+ + M_-$

$$\beta_\nu(\varepsilon) \leqq \frac{M}{R_*^{(e)\,\nu}} (\nu \geqq 0); \quad \beta_\nu(\varepsilon) \leqq \frac{M}{R_*^{(i)\,\nu}} \quad (\nu \leqq 0)$$

et la convergence de (66, 6) dans (66, 5) en résulte immédiatement.

67. En utilisant les résultats établis au No. précédent on pourra maintenant appliquer le raisonnement du No. 57. En posant $G(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} b_\nu z^\nu$ on décomposera $G_n(z)$ en trois facteurs (57, 1) satisfaisant resp. aux majorations (57, 2), (57, 3), (57, 4). Il en résulte d'après le théorème VIII les majorations

$$f_n^-(z) \ll (1 + \delta_0)\,\mathfrak{M}_{G_n^-} \ll (1 + \delta_0)\,\mathfrak{M}_G,$$

$$a_0^{(n)}\,Q_n(z) \ll (1 + \delta_1)\,\mathfrak{M}_{G_n^{(0)}} \ll (1 + \delta_1)\,\mathfrak{M}_G,$$

$$a_0^{(n)}\,C_k^{(n)} f_n^+(z) \ll (1 + \delta_0)\,\mathfrak{M}_{G_n^+} \ll \frac{1 + \delta_0}{z^k}\,\mathfrak{M}_G.$$

Donc, d'après ce que nous avons établit au numéro précédent on a dans la région (65, 2) pour un ε suffisamment petit

$$(67, 1)\qquad \begin{cases} f_n^-(z) \ll (1 + \delta_0) \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu(\varepsilon)\, z^\nu, \\ a_0^{(n)}\,Q_n(z) \ll (1 + \delta_1) \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu(\varepsilon)\, z^\nu, \\ a_0^{(n)}\,C_k^{(n)} f_n^+(z) \ll (1 + \delta_0) \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu(\varepsilon)\, z^{\nu-k}. \end{cases}$$

On pourra donc, en appliquant trois fois le théorème du choix, extraire de chaque suite partielle de n: $\{n_i\}$ une suite infinie $\{n_{i_t}\}$ telle que les suites

$$f_{n_{i_t}}^-(z), \quad a_0^{(n_{i_t})}\,Q_{n_{i_t}}(z), \quad a_0^{(n_{i_t})}\,C_k^{(n_{i_t})} f_{n_{i_t}}^+(z)$$

convergent uniformément dans chaque point intérieur du domaine

$$(67, 2)\qquad R^{(i)} < |z| < R^{(e)}, \quad |u - u_0| < \varepsilon, \ldots, \quad |w - w_0| < \varepsilon.$$

Or, les fonctions limites

$$(67, 3)\qquad f_-(z), \quad a_0\,Q(z), \quad a_0\,C_k f_+(z)$$

étant univoquement déterminées d'après le No. 59, il en résulte que les suites totales

$$f_n^-(z), \quad a_0^{(n)}\,Q_n(z), \quad a_0^{(n)}\,C_k^{(n)} f_n^+(z)$$

convergent uniformément dans chaque point intérieur de (67, 2) resp. vers les fonctions (67, 3). Donc, les coefficients des différentes puissances de z dans les fonctions de ces suites étant holomorphes dans la région (65, 2), il en est de même des coefficients de $f_-(z)$, $Q(z)$, $f_+(z)$. On obtient évidemment le résultat complètement analogue pour la décomposition en deux facteurs sous la condition (61, 2°).

XXIX. *Supposons que sous les hypothèses des théorèmes* XXVI, XXVII, *les coefficients* b_ν *de* $G(z)$ *sont des fonctions holomorphes de certaines variables* $u, \ldots, w$ *autant que ces variables varient dans certains domaines ouverts* $K_u, \ldots, K_w$ *et supposons que, autant que les conditions* (65, 1) *restent satisfaites, la relation* (61, 2) *resp. la relation* (61, 2°) *reste valable. Alors les coefficients* C_ν *de* (61, 3), a_ν *et* A_ν *de* (62, 3) *sont des fonctions holomorphes de* $u, \ldots, w$ *dans* (65, 1).

68. On obtient en spécialisant les théorèmes XXVI, XXVII, XXIX »le théorème de préparation» de Weierstrass.[1] En effet: Soit

$$G(z; u, \ldots, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(u, \ldots, w) z^\nu \tag{68, 1}$$

une série de puissances procédant suivant les puissances entières non négatives des $z; u, \ldots, w$ et convergente uniformément dans le domaine

$$|z| \leqq \varrho_z; \quad |u| \leqq \varrho_u, \ldots, |w| \leqq \varrho_w \tag{68, 2}$$

et supposons que l'on ait

$$A_0(0, \ldots, 0) = A_1(0, \ldots, 0) = \cdots = A_{n-1}(0, \ldots, 0) = 0; \; A_n(0, \ldots, 0) \neq 0. \tag{68, 3}$$

Alors le théorème de Weierstrass dit que la décomposition suivante de G est possible

$$G(z; u, \ldots, w) = (z^n + B_1(u, \ldots, w) z^{n-1} + \cdots \\ + B_n(u, \ldots, w)) \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(u, \ldots, w) z^\nu, \quad C_0(0, \ldots, 0) \neq 0, \tag{68, 4}$$

où les séries $B_1, \ldots, B_n, C_\nu$ convergent pour $|u| \leqq \varrho'_u, \ldots, |w| \leqq \varrho'_w$ et la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu$ converge pour

$$|z| \leqq \varrho'_z; \; |u| \leqq \varrho'_u, \ldots, |w| \leqq \varrho'_w. \tag{68, 5}$$

Pour déduire ce fait de nos résultats il suffit de trouver les nombres positifs $\varrho'_u \leqq \varrho_u, \ldots, \varrho'_w \leqq \varrho_w$, tels que dans le domaine

[1] On trouve des renseignements bibliographiques sur ce théorème dans Osgood (1) p. 86 et Ostrowski (1) p. 108.

$$(68, 6) \qquad |u| \leqq \varrho'_u, \ldots, |w| \leqq \varrho'_w,$$

la déviation D_n de l'indice n de la série G considérée comme une série entière en z, reste $\geqq 13{,}5$. Il suffit pour cela d'après ce que nous avons dit au No. 15 que l'on ait dans (68, 6)

$$(68, 7) \qquad \frac{1}{D_n} = \operatorname*{Max}_{\varkappa > 0} \left| \frac{A_{n-\varkappa}(u, \ldots, w)}{A_n(u, \ldots, w)} \right|^{\frac{1}{\varkappa}} \operatorname*{Max}_{\nu > 0} \left| \frac{A_{n+\nu}(u, \ldots, w)}{A_n(u, \ldots, w)} \right|^{\frac{1}{\nu}} \leqq \frac{1}{13{,}5}.$$

Or, en désignant par M la borne supérieure de $|G(z; u, \ldots, w)|$ dans (68, 2) on a d'après les inégalités de Cauchy

$$|A_{n+\nu}(u, \ldots, w)| \leqq \frac{M}{\varrho_z^{n+\nu}};$$

il suffit donc de faire

$$\frac{1}{\varrho_z} \operatorname*{Max}_{\varkappa > 0} \left| \frac{A_{n-\varkappa}(u, \ldots, w)}{A_n(u, \ldots, w)} \right|^{\frac{1}{\varkappa}} \operatorname*{Max}_{\nu > 0} \left(\frac{M}{\varrho_z^n |A_n(u, \ldots, w)|} \right)^{\frac{1}{\nu}} \leqq \frac{1}{13{,}5},$$

$$\frac{1}{\varrho_z} \operatorname{Max} \left(1, \frac{M}{\varrho_z^n |A_n(u, \ldots, w)|} \right) \operatorname*{Max}_{\varkappa > 0} \left| \frac{A_{n-\varkappa}(u, \ldots, w)}{A_n(u, \ldots, w)} \right|^{\frac{1}{\varkappa}} \leqq \frac{1}{13{,}5}$$

et ceci est évidemment possible en vertu de (68, 3).

CHAPITRE IV. Continuité des racines des équations algébriques. Méthode de Graeffe.

§ 16. Continuité des racines des équations algébriques.
(Quatrième théorème fondamental.)

69. Soient pour $n > 1$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$:

$$(69, 1) \quad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0; \quad g(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

deux équations algébriques dont les racines seront désignées resp. par

$$x_1, \ldots, x_n; \quad y_1, \ldots, y_n.$$

Posons

$$(69, 2) \qquad T = \operatorname{Max}\left(1, |a_1|, |b_1|, |a_2|^{\frac{1}{2}}, |b_2|^{\frac{1}{2}}, \ldots, |a_n|^{\frac{1}{n}}, |b_n|^{\frac{1}{n}}\right).$$

En désignant par y une des racines $y_1, \ldots, y_n$, arbitraire mais fixe, on a

$$(69,\ 3)\qquad \prod_{\nu=1}^{n}(y-x_\nu)=f(y)=f(y)-g(y)=\sum_{\nu=0}^{n-1}(a_\nu-b_\nu)\,y^\nu.$$

Soit $\gamma = \mathrm{Max}\,(|x_\nu|,\ |y_\nu|)$ et

$$(69,\ 4)\qquad \varepsilon=\sqrt[n]{\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu-b_\nu|\,\gamma^\nu}\,.$$

Il résulte alors de (69, 3)

$$(69,\ 5)\qquad \prod_{\nu=1}^{n}|y-x_\nu|\leqq\varepsilon^n.$$

De l'autre côté, en posant

$$(69,\ 6)\qquad \delta=\sqrt{|a_1-b_1|^2+\cdots+|a_n-b_n|^2},$$

il résulte en vertu de l'inégalité de Schwarz

$$(69,\ 7)\qquad \varepsilon^n\leqq\delta\sqrt{1+|y|^2+\cdots+|y|^{2n-2}}.$$

Or, on a d'après Cauchy: $|y|\leqq 2\,T$. Donc, en posant

$$(69,\ 8)\qquad 1+(2\,T)^2+\cdots+(2\,T)^{2n-2}=M^{2n}<(2\,T)^{2n},$$

$$(69,\ 9)\qquad \varepsilon^n\leqq M^n\,\delta.$$

70. Une conséquence immédiate de la formule (69, 5) est que pour chaque $y=y_\nu$ il existe un x_{μ_ν} tel que l'on a

$$(70,\ 1)\qquad \left|y_\nu-x_{\mu_\nu}\right|\leqq\varepsilon.$$

En interchangeant $f(z)$ et $g(z)$ on voit que pour chaque $x=x_\mu$ on peut trouver un $y=y_{\nu_\mu}$ tel que

$$(70,\ 2)\qquad \left|x_\mu-y_{\nu_\mu}\right|\leqq\varepsilon.$$

On peut se demander s'il soit possible de changer le numérotage de x_μ de manière qu'on aurait pour chaque ν dans (70, 2): $y_{\nu_\mu}=y_\mu$. Pour $n=2$ il est presque immédiat que ceci soit possible. Au contraire, pour $n=3$ on peut montrer par l'exemple suivant que la réponse à notre question doit être négative. Soit

$$f(z) = z^3 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\,z^2 - 1, \quad g(z) = z^3 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\,z^2.$$

Les trois racines de $f(z)$ sont

$$x_1 = -\sqrt[3]{2}, \quad x_2 = -\sqrt[3]{2}, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0{,}62996,$$

et celles de $g(z)$:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = -1{,}89.$$

Or, ici on a $\varepsilon = 1$ et dans la distance 1 des deux racines y_1, y_2 n'est située qu'une seule racine x_3 de $f(z)$.

71. Pour généraliser (70, 1) dans le sens indiqué on peut utiliser la méthode suivante:

Supposons dans les hypothèses du No. 69 qu'à chaque x_ν correspond un cercle $K_\nu\,(|x - x_\nu| \leqq \varepsilon_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, de façon que chaque y_μ est situé dans un des cercles K_ν.

Si deux cercles K_ν, $K_{\nu'}$ possèdent des points intérieurs en commun, nous dirons que x_ν est *enchaîné* avec $x_{\nu'}$. Plus généralement, nous appelons x_ν et $x_{\nu'}$ *enchaînés* s'il existe une suite:

$$x_\nu,\ x_{\nu_1},\ \ldots,\ x_{\nu_\varkappa},\ x_{\nu'},$$

telle que chaque racine dans cette suite est enchaînée avec la racine précédente et la racine suivante. Alors on peut repartir tous les x_ν en l groupes G_λ, $\lambda = 1, \ldots, l$, de sorte que tous les x_ν dans un groupe G_λ soient enchaînés entre eux, tandis que deux x_ν appartenant à deux groupes différents ne le soient pas. Soit g_λ le nombre de x_ν dans la groupe G_λ. On a évidemment $\Sigma g_\lambda = n$.

Considérons maintenant les cercles K_ν correspondant aux x_ν d'un groupe G_λ. L'ensemble de tous les points de ces cercles sera désigné par U_λ.

Si l'on remplace maintenant chaque b_ν par $a_\nu + t(b_\nu - a_\nu)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $g(z)$ varie avec t. Nous supposerons qu'à chaque t, $0 \leqq t \leqq 1$ correspondent encore des cercles $K_\nu^{(t)}\,(|x - x_\nu| \leqq \varepsilon_\nu^{(t)})$ possédant les propriétés analogues à celles supposées pour $t = 1$ et que si t va en diminuant de *un* à *zéro*, chaque $\varepsilon_\nu^{(t)}$ diminue de ε_ν à zéro.

Pour chaque $\varepsilon_\nu^{(t)}$ on obtient de l'ensemble U_λ un ensemble $U_\lambda^{(t)}$ en remplaçant les cercles K_ν dont U_λ est formé par les cercles correspondants $K_\nu^{(t)}$. Alors pour

$t < 1$ $U_\nu^{(t)}$ n'a plus de points en commun avec $U_{\lambda'}^{(t)}$ si $\lambda \neq \lambda'$. Donc, si $t < 1$ diminue à 0, le nombre des y_μ contenus dans $U_\lambda^{(t)}$ reste le même; mais pour $t = 0$ les y_μ coïncident avec les x_ν. Donc chaque $U_\lambda^{(t)}$, $t < 1$, contient exactement g_λ des racines y_μ. En faisant $t \uparrow 1$ on voit que les n racines y_μ peuvent être réparties en l groupes G_λ^*, $\lambda = 1, \ldots, l$, de sorte que G_λ^* contient exactement g_λ des racines y_μ situées dans U_λ.

En appliquant ce résultat à $\varepsilon_\nu = \varepsilon$, où ε est defini par (69, 4), il résulte maintenant de (70, 2), qu'en numérotant les y_μ convenablement on a

$$(71, 1) \qquad |y_\nu - x_\nu| \leqq (2n-1)\varepsilon \leqq (2n-1) M \delta^{\frac{1}{n}} < 4nT\delta^{\frac{1}{n}}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

XXX. *Soient* (69, 1) *deux équations algébriques aux racines* x_ν, $\nu = 1, \ldots, n$ *et* y_ν, $\nu = 1, \ldots, n$. *Alors on a, en numérotant les* x_ν *et* y_ν *convenablement, la relation* (71, 1) *où* ε *est defini par* (69, 4), δ *par* (69, 6) *et* M *par* (69, 2), (69, 8).

On peut donc dire que les racines d'une équation algébrique du degré n satisfont, comme fonctions des coefficients, à une *condition de Lipschitz d'ordre* $\frac{1}{n}$.

72. Les résultats du No. précédent deviennent particulièrement désavantageux si l'équation considérée possède des racines d'ordres de grandeur très différents, puisque le module de continuité donné par ce théorème est le même pour toutes les racines. De l'autre côté on a dans le calcul numérique l'habitude de calculer un *nombre fixe de chiffres significatifs*. Or, le théorème XXX ne peut évidemment pas être utilisé pour les évaluations de cette espèce.

Nous allons maintenant démontrer le fait de la *continuité relative* des racines des équations algébriques, comme fonctions des coefficients, qui s'adapte très bien à ce point de vue. —

Si l'on remplace le polynôme $f(z)$ en (69, 1) par le polynôme $g(z)$ en (69, 1) c'est-à-dire les a_ν par les b_ν, où $a_0 = 1$, mais le coefficient b_0 de z^n dans $g(z)$ peut être maintenant $\neq 1$, la variation relative des a_ν peut être mesurée par

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{a_\nu}\right|.$$

Or, si un des coefficients a_ν est exceptionnellement petit ou même disparaît, il ne serait plus possible de varier ce coefficient; c'est pourquoi il est plus avantageux d'utiliser comme échelle au lieu des nombres $|a_\nu|$ les coefficients T_ν de la majorante newtonienne $\mathfrak{M}_f(z)$ de $f(z)$. Nous introduisons donc comme mesure des variations relatives le nombre

$$\tau = \operatorname*{Max}_{\nu} \frac{|a_\nu - b_\nu|}{T_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n, \quad a_0 = 1, \quad a_n \neq 0. \tag{72, 1}$$

On a alors évidemment pour $\tau < 1$: $b_n \neq 0$ et

$$f(z) - g(z) \ll \tau \mathfrak{M}_f(z), \quad \tau < 1. \tag{72, 2}$$

Soit $y_\mu = y$, $|y| = r$, une des racines de $g(z)$ qui sont toutes $\neq 0$. Soit

$$|x_\nu| = r_\nu, \quad r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_n > 0.$$

Alors de $f(y) = f(y) - g(y)$, il résulte $|f(y)| = \prod\limits_{\nu=1}^{n} |y - x_\nu| \leqq \tau \mathfrak{M}(r)$, donc, en utilisant (5, 1):

$$|f(y)| \leqq \tau \prod_{\nu=1}^{n} (r + |x_\nu|) = \tau \prod_{\nu=1}^{n} (r + r_\nu). \tag{72, 3}$$

Pour un q fixe avec $0 < q < 1$ les x_ν se repartissent en trois groupes:

$$\frac{r}{q} > |x_\nu| > q\,r, \quad \nu = l + 1, \ldots, k;$$

$$|x_\nu| \geqq \frac{r}{q}, \qquad \nu = 1, \ldots, l;$$

$$|x_\nu| \leqq q\,r, \qquad \nu = k + 1, \ldots, n.$$

Alors on a

$$|f(y)| = \prod_{\nu=1}^{k} |y - x_\nu| \prod_{\nu=k+1}^{n} |y - x_\nu| = \prod_{\nu=1}^{k} r_\nu \prod_{\nu=1}^{k} \left| 1 - \frac{y}{x_\nu} \right| r^{n-k} \prod_{\nu=k+1}^{n} \left| 1 - \frac{x_\nu}{y} \right|,$$

donc

$$|f(y)| \geqq r^{n-k} \prod_{\nu=1}^{k} \left| 1 - \frac{y}{x_\nu} \right| \prod_{\nu=k+1}^{n} \left(1 - \frac{r_\nu}{r} \right) \prod_{\nu=1}^{k} r_\nu. \tag{72, 4}$$

Or, ceci devient en utilisant la borne supérieure (72, 3) de $|f(y)|$:

$$r^{n-k} \prod_{\nu=1}^{k} r_\nu \prod_{\nu=k+1}^{n} \left(1 - \frac{r_\nu}{r} \right) \prod_{\nu=1}^{k} \left| 1 - \frac{y}{x_\nu} \right| \leqq \tau \prod_{\nu=1}^{n} (r + r_\nu) =$$

$$= \tau r^{n-k} \prod_{\nu=1}^{k} r_\nu \prod_{\nu=k+1}^{n} \left(1 + \frac{r_\nu}{r}\right) \prod_{\nu=1}^{k} \left(1 + \frac{r}{r_\nu}\right),$$

$$(72, 5) \quad \prod_{\nu=1}^{k} \left|1 - \frac{y}{x_\nu}\right| \leqq \tau \prod_{\nu=1}^{k} \left(1 + \frac{r}{r_\nu}\right) \prod_{\nu=k+1}^{n} \frac{1 + \frac{r_\nu}{r}}{1 - \frac{r_\nu}{r}} \leqq \tau \left(1 + \frac{1}{q}\right)^k \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{n-k}.$$

De cette formule on conclut en utilisant la borne inférieure des l premiers facteurs de gauche:

$$(72, 6) \quad \prod_{\nu=l+1}^{k} \left|1 - \frac{y}{x_\nu}\right| \leqq \tau \prod_{\nu=1}^{l} \frac{1 + \frac{r}{r_\nu}}{1 - \frac{r}{r_\nu}} \prod_{\nu=l+1}^{k} \left(1 + \frac{r}{r_\nu}\right) \prod_{\nu=k+1}^{n} \frac{1 + \frac{r_\nu}{r}}{1 - \frac{r_\nu}{r}} \leqq$$

$$\leqq \tau \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{n-(k-l)} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{k-l}.$$

Dans les inégalités (72, 5), (72, 6) les produits à gauche sont à remplacer par 1 s'ils sont vides. Or, dans ce cas il serait ou bien $k = 0$ ou bien $k = l$ et nous aurions l'inégalité

$$(72, 7) \qquad 1 \leqq \tau \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^n.$$

Mais si $\tau < 1$ il suffit de choisir q de manière que

$$(72, 8) \qquad q < \frac{1 - \tau^{\frac{1}{n}}}{1 + \tau^{\frac{1}{n}}}, \quad \tau^{\frac{1}{n}} < \frac{1-q}{1+q},$$

pourque (72, 7) soit impossible. Alors on a $k > l \geqq 0$ et, en désignant par x_0 une des racines de $f(z)$ pour laquelle $\left|1 - \frac{y}{x_0}\right|$ est minimum, on obtient de (72, 6)

$$(72, 9) \qquad \left|1 - \frac{y}{x_0}\right| \leqq \left(\frac{1}{q} - 1\right) \left(\tau \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^n\right)^{\frac{1}{k-l}}.$$

73. Or, il résulte de (72, 9), en vertu de $\tau\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^n < 1$:

$$(73, 1) \qquad \left|1 - \frac{y}{x_0}\right| \leqq \frac{1-q}{q} \left(\tau \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1+q}{q} \tau^{\frac{1}{n}}.$$

$q > 0$ doit ici satisfaire à (72, 8). Or, (73, 1) reste valable si l'on fait $q \uparrow \dfrac{1 - \tau^{\frac{1}{n}}}{1 + \tau^{\frac{1}{n}}}$. Le facteur de $\tau^{\frac{1}{n}}$ devient alors $= \dfrac{2}{1 - \tau^{\frac{1}{n}}}$ et reste $\leqq 4$, si $2\tau^{\frac{1}{n}}$ est $\leqq 1$.

Alors (73, 1) devient

$$\left|1 - \frac{y}{x_0}\right| \leqq \frac{2\tau^{\frac{1}{n}}}{1 - \tau^{\frac{1}{n}}}, \quad \tau < 1; \quad \left|1 - \frac{y}{x_0}\right| \leqq 4\,\tau^{\frac{1}{n}}, \quad 2\,\tau^{\frac{1}{n}} \leqq 1. \tag{73, 2}$$

De l'autre côté on pourra dans certains cas obtenir une évaluation plus favorable en prenant q suffisamment près d'*un* de manière à faire $k - l = 1$. Alors (72, 9) devient

$$\left|1 - \frac{y}{x_0}\right| \leqq \frac{(1 + q)^n}{q(1 - q)^{n-1}}\,\tau, \quad k - l = 1. \tag{73, 3}$$

Mais τ doit être ici plus petit que $\dfrac{q}{1+q}\left(\dfrac{1-q}{1+q}\right)^{n-1}$ pour que l'expression de droite soit < 1.

Il résulte de (73, 2) qu'il existe une fonction $\delta(\tau)$, positive pour τ positif et suffisamment petit, diminuant au sens étroit avec τ et convergeant vers 0 avec $\tau \downarrow 0$, telle que pour chaque ν, $\nu = 1, \ldots, n$ il existe un x_{μ_ν} pour lequel on a

$$\left|1 - \frac{y_\nu}{x_{\mu_\nu}}\right| \leqq \delta(\tau). \tag{73, 4}$$

Et l'on peut prendre en particulier

$$\delta(\tau) = \frac{2\,\tau^{\frac{1}{n}}}{1 - \tau^{\frac{1}{n}}}. \tag{73, 5}$$

Il en résulte, en supposant $\delta < 1$ et en posant

$$|x_\nu|\,\delta(\tau) = \varepsilon_\nu,$$

que si l'on décrit autour de chaque x_ν le cercle K_ν de rayon ε_ν, chaque y_ν est situé dans un des cercles K_ν. Alors les hypothèses que nous avons faites au No. 71 sont évidemment satisfaites et toutes les racines y_μ se répartissent en l groupes G^*_λ telles que les g_λ racines y_μ du groupe G^*_λ sont situées dans l'ensemble U_λ. Reprenons les notations du No. 71.

L'ensemble U_λ est un continu formé de g_λ cercles K_ν. Donc on a, en désignant par D_λ le diamètre de U_λ et en numérotant y_μ de manière que les racines des groupes G_λ, G_λ^* possèdent chaque fois les mêmes indices, pour chaque couple de racines x_ν, y_ν contenu dans U_λ

$$|x_\nu - y_\nu| \leqq D_\lambda - \delta(\tau)\,|x_\nu|,$$

(73, 6)
$$\left|1 - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| \leqq \frac{D_\lambda}{|x_\nu|} - \delta(\tau).$$

Il reste à évaluer les quotients $\frac{D_\lambda}{|x_\nu|}\cdot$ Écrivons pour le moment δ pour $\delta(\tau)$. Le quotient de $\frac{D_\lambda}{|x_\nu|}$ est évidemment $= 2\,\delta$ si $g_\lambda = 1$. Supposons donc que $g_\lambda > 1$. Alors, si deux racines x_μ, x_ν du groupe G_λ aux modules r_μ, r_ν sont directement enchaînées, on a $\frac{1-\delta}{1+\delta} r_\nu < r_\mu < \frac{1+\delta}{1-\delta} r_\nu$. Donc, si K_ν est un cercle de U_λ enchaîné avec $K_\varkappa$ au moyen des $K_\mu : K_\nu,\ K_{\mu_1},\ \ldots,\ K_{\mu_k},\ K_\varkappa$ la somme des diamètres de ces cercles est au plus égal à $2\,r_\nu\,\delta\left(1 + \frac{1+\delta}{1-\delta} + \cdots + \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{k+1}\right) \leqq 2\,\delta\, r_\nu \sum_{\mu=0}^{g_\lambda - 1} \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{\mu}$.

Donc on a

(73, 7)
$$\frac{D_\lambda}{|x_\nu|} < 2\left(\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{g_\lambda} - 1\right)\frac{1-\delta}{2} \leqq 2\left(\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{n} - 1\right)\frac{1-\delta}{2}.$$

Or, pour $0 \leqq x \leqq \delta$, on a

$$((1+x)^n - (1-x)^n)' = n\,((1+x)^{n-1} + (1-x)^{n-1}) \leqq n\,((1+\delta)^{n-1} + (1-\delta)^{n-1}).$$

Donc, en appliquant le théorème des accroissements finis,

$$(1+\delta)^n - (1-\delta)^n \leqq n\,\delta\,((1+\delta)^{n-1} + (1-\delta^{n-1}));$$

$$(1-\delta)\left(\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{n} - 1\right) \leqq n\,\delta\left(\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{n-1} + 1\right).$$

Or, supposons que l'on ait $(2\,n - 1)\,\delta \leqq 1$; alors:

$$\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{n-1} \leqq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e < 3.$$

Donc

(73, 7°)
$$\frac{D_\lambda}{|x_\nu|} < n\,\delta\,(e+1) < 4\,n\,\delta,$$

$$(73, 8) \quad \left|1 - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| < \Big(n(e+1) - 1\Big)\delta(\tau) < 4n\delta(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, n; \quad (2n-1)\delta(\tau) \leqq 1.$$

Donc, eu égard à (73, 5), on a pour τ: $(4n-1)\tau^{\frac{1}{n}} \leqq 1$ et ensuite:

$$(73, 9) \quad \left|1 - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| < \Big((e+1)n - 1\Big)\frac{2\tau^{\frac{1}{n}}}{1 - \tau^{\frac{1}{n}}} < (7{,}4366\,n + 0{,}1456)\tau^{\frac{1}{n}}, \quad (4n-1)\tau^{\frac{1}{n}} \leqq 1.$$

74. En simplifiant un peu les constantes dans (73, 9), on obtient l'énoncé suivant, extrêmement remarquable par sa généralité:

XXXI. **Quatrième théorème fondamental.** *Soit* $n > 1$ *et*

$$(74, 1) \qquad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 a_n \neq 0$$

un polynôme aux racines

$$(74, 2) \qquad x_1, \ldots, x_n.$$

Soit

$$(74, 3) \qquad g(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n$$

un autre polynôme, dont les coefficients peuvent être écrits dans la forme

$$(74, 4) \qquad b_\nu = a_\nu(1 + \vartheta_\nu), \quad |\vartheta_\nu| \leqq \tau, \quad 0 < \tau < 1,$$

ou plus généralement satisfont à la condition

$$(74, 5) \qquad f(z) - g(z) \ll \tau\,\mathfrak{M}_f(z), \quad 0 < \tau < 1,$$

en désignant par $\mathfrak{M}_f(z)$ *la majorante newtonienne de* $f(z)$.

Alors il existe une fonction $\eta(\tau)$ *ne dépendant que de* n, *positive et diminuant vers* 0 *avec* τ, *telle que si* τ *est suffisamment petit, on a en numérotant convenablement les* n *racines* y_μ *de* $g(z)$:

$$(74, 6) \qquad \left|1 - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| \leqq \eta(\tau), \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

En particulier, si l'on a

$$(74, 7) \qquad 4n\tau^{\frac{1}{n}} \leqq 1$$

on peut poser

$$(74, 8) \qquad \eta(\tau) = 8n\tau^{\frac{1}{n}}.$$

On peut donc dire que les logarithmes des racines d'une équation algébrique du degré n sont des fonctions continues des logarithmes des coefficients, *uniformément pour l'ensemble de toutes les équations du degré exact n sans racines à l'origine.*

75. L'évaluation de l'erreur relative donnée par (74, 8) parait pratiquement très désavantageuse. Il importe donc de montrer par exemples numériques que l'ordre de grandeur de notre évaluation peut très bien être atteint, bien que seulement dans quelques cas exceptionnels, il est vrai.

Nous nous bornons à l'exemple numérique suivant qui est facile à généraliser:

Considérons le polynôme

$$f(z) = z^4 - 4z^3 + (6 - 4{,}9 \cdot 10^{-5})z^2 - 4z + 1. \tag{75, 1}$$

En conduisant le calcul avec 4 chiffres décimales, on remplacera $f(z)$ par le polynôme $g(z) = (z-1)^4$ dont les quatres racines sont égaux à *un. Mais l'erreur relative sera alors plus de 8 %.* En effet, les quatre racines de $f(z)$ sont

$$z_1 = 1{,}08723918\ldots, \quad z_2 = 0{,}91976082\ldots;$$

$$z_3,\ z_4 = 0{,}9965 \pm 0{,}08359276\ldots i$$

et l'on a

$$|1 - z_\nu| \geqq 0{,}08, \quad \nu = 1, \ldots, 4.$$

Le calcul de $z_1, \ldots, z_4$ s'effectue presque immédiatement en décomposant l'équation $f(z) = 0$ en deux équations:

$$z^2 - 2{,}007z + 1 = 0, \quad z^2 - 1{,}993z + 1 = 0$$

qui deviennent, en posant $u = 100(z-1)$:

$$u^2 - 0{,}7u - 70 = 0, \quad u^2 + 0{,}7u + 70 = 0.$$

Les racines de la première équation sont

$$u_1 = 8{,}723918\ldots; \quad u_2 = -8{,}023918\ldots.$$

Pour les racines u_3, u_4 de la seconde on a évidemment

$$|u_3| = |u_4| = \sqrt{70} = 8{,}3666003\ldots,$$

et par un calcul élémentaire

$$u_3,\ u_4 = -0{,}35 \pm 8{,}359276\ldots i.$$

76. On peut obtenir des considérations du No. 72 des relations plus précises si l'on ne s'intéresse qu'aux *modules des racines* comme c'est souvent le cas dans la pratique de la méthode de Graeffe. En effet, il suffit que $q > 0$ satisfasse à la relation (72, 8) pour $\tau < 1$ pour que le produit de gauche en (72, 6) ne soit pas vide. Il existe donc alors pour notre $|y| = r$ du moins un r_ν, tel que $\frac{r}{q} > r_\nu > q\,r$, ou bien, ce qui revient au même, $\frac{r_\nu}{q} > r > q\,r_\nu$. Il en résulte immédiatement, en faisant tendre q vers $\frac{1 - \tau^{\frac{1}{n}}}{1 + \tau^{\frac{1}{n}}}$, que notre r est situé dans un des intervalles

$$(76,\ 1) \qquad I_\nu(\tau): \frac{1 + \tau^{\frac{1}{n}}}{1 - \tau^{\frac{1}{n}}} r_\nu \geqq r \geqq \frac{1 - \tau^{\frac{1}{n}}}{1 + \tau^{\frac{1}{n}}} r_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Or, certains des intervalles $I_\nu(\tau)$ peuvent empiéter l'un sur l'autre. Chaque groupe d'intervalles $I_\nu(\tau)$ qui s'empiètent forme un intervalle composé $S_\lambda(\tau)$, $\lambda = 1, \ldots, l$ de manière que nous obtenons un certain nombre d'intervalles composés qui ne possèdent pas de points intérieurs en commun, tandis que chaque point intérieur d'un intervalle composé est aussi un point intérieur d'un des intervalles $I_\nu(\tau)$.

Or, si l'on remplace $g(z)$ par le polynôme

$$(76,\ 2) \qquad f(z) - t(f(z) - g(z)), \quad 0 \leqq t < 1,$$

les intervalles $I_\nu(\tau)$ deviennent $I_\nu(t\tau)$ et se rétrécissent. Alors à chaque $S_\lambda(\tau)$ correspond un ensemble $S_\lambda^{(t)}$ qu'on obtient en remplaçant les intervalles $I_\nu(\tau)$ dont $S_\lambda(\tau)$ est composé, par des intervalles correspondants. Mais alors les ensembles $S_\lambda^{(t)}$ ne possèdent plus de points en commun et les modules des racines de (76, 2) se distribuent sur ces ensembles $S_\lambda^{(t)}$. Il en résulte, en faisant t tendre vers 0, que chacun de ces ensembles contient autant de modules des racines de (76, 2) qu'il contient de nombres r_ν. Donc, on voit, en faisant t tendre vers *un*, que les n modules des racines de $g(z)$ se distribuent en l groupes dont chacun correspond à un des intervalles composé $S_\lambda(\tau)$, y est contenu et contient autant de modules de racines de $g(z)$, que $S_\lambda(\tau)$ contient de modules de racines de $f(z)$. Il résulte de ce résultat en particulier, en désignant les modules des racines de $g(z)$ par $\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_n$:

$$(76,3)\qquad \left(\frac{1+\tau^{\frac{1}{n}}}{1-\tau^{\frac{1}{n}}}\right)^n \geqq \frac{\varrho_\nu}{r_\nu} \geqq \left(\frac{1-\tau^{\frac{1}{n}}}{1+\tau^{\frac{1}{n}}}\right)^n, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Mais en appliquant notre résultat on obtient naturellement des relations plus serrées en considérant des ensembles $S_\lambda(\tau)$ — dès que les modules r_ν sont connus.

On obtient:

XXXII. *Sous les conditions du théorème* XXXI *soient*

$$(76,4)\qquad r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_n$$

les n modules des racines de $f(z)$ et

$$(76,5)\qquad \varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_n$$

les n modules des racines de $g(z)$. Considérons les intervalles (76, 1) *et réunissons ceux de ces intervalles qui empiètent les uns sur les autres en intervalles composés $S_\lambda(\tau)$, $\lambda = 1, \ldots, n$, sans points intérieurs en commun. Alors, si l'intervalle $S_\lambda(\tau)$ contient n_λ des nombres* (76, 4) *il contient aussi n_λ des nombres* (76, 5) *affectés des mêmes indices. En particulier, on a la relation* (76, 3).

77. En écrivant la relation (76, 3) dans la forme

$$\left(\frac{1+\tau^{\frac{1}{n}}}{1-\tau^{\frac{1}{n}}}\right)^n - 1 \geqq \frac{\varrho_\nu}{r_\nu} - 1 \geqq \left(\frac{1-\tau^{\frac{1}{n}}}{1+\tau^{\frac{1}{n}}}\right)^n - 1$$

on obtient des bornes pour $\frac{\varrho_\nu}{r_\nu} - 1$ qui, pour $\tau \downarrow 0$, sont resp. équivalentes à $2n\tau^{\frac{1}{n}}$, $-2n\tau^{\frac{1}{n}}$. Donc ces bornes sont un peu plus avantageuses que celles de la formule (73, 9). On pourra cependant dans beaucoups de cas améliorer considérablement l'évaluation (73, 9) en appliquant *d'abord* le théorème XXXII *pour évaluer $k-l$* et en se servant *après*, des relations correspondantes à (72, 9) et des considérations générales du No. 71.

Toutefois l'application de cette méthode suppose qu'on ait déjà calculé les modules des x_ν. Donc, si l'on cherche des évaluations générales pour le calcul approché des racines des équations algébriques on ne pourra utiliser, sans faire des hypothèses spéciales, que les évaluations des théorèmes XXXI, XXXII, dont les bornes sont trop faibles pour être utilisés dans les calcules avec les logarithmes ou la machine à calculer.

D'ailleurs, c'est le cas pour beaucoup d'évaluations de l'analyse supérieure et l'on est habitué dans le calcul numérique de ne pas utiliser des évaluations générales mais de commencer le calcul pour chercher *après* une borne de l'erreur.

On parvient donc à considérer deux espèces d'évaluations des erreurs dans le calcul approché:

1) *Les évaluations à priori* dans lesquelles on part d'un certain domaine d'indétermination des paramètres entrant dans le calcul et cherche des bornes d'indétermination pour le résultat du calcul, *avant de commencer le calcul.* Ces évaluations représentent l'idéal de l'analyse mais sont généralement par leur généralité même trop faibles pour le calcul pratique puisqu'elles embrassent tous les cas exceptionnels.

2) *Les évaluations à posteriori* dans lesquelles on cherche les bornes de l'erreur *après* avoir effectué le calcul approché et en utilisant son résultat. — Des évaluations de ce genre sont utilisées beaucoup p. ex. dans le calcul approché des systèmes d'équations linéaires et d'équations intégrales.

L'application combinée des formules (76, 3) et (73, 9), esquissée plus haut, est un exemple d'évaluations à posteriori puisqu'elle suppose connus les modules des x_ν, des valeurs approchées des zéros de $g(z)$.

Si l'on s'intéresse non seulement aux modules des x_ν mais à leurs arguments aussi, on pourra se servir dans la plupart des cas des évaluations du No. 72 en utilisant la relation suivante, tirée des formules (72, 3), (72, 4):

$$(77,\ 1)\qquad \prod_{\nu=l+1}^{k}\left|1-\frac{y}{x_\nu}\right| \leqq \tau \prod_{\nu=1}^{l}\frac{1+\dfrac{r}{r_\nu}}{\left|1-\dfrac{y}{x_\nu}\right|}\prod_{\nu=k+1}^{n}\frac{1+\dfrac{r_\nu}{r}}{\left|1-\dfrac{x_\nu}{y}\right|}\prod_{\nu=l+1}^{k}\left(1+\frac{r}{r_\nu}\right).$$

Du reste, on peut aussi améliorer le résultat général du théorème XXXII en utilisant les valeurs numériques des r_ν. En effet, pour que le produit de gauche en (72, 6) ne soit pas vide, il suffit que l'expression de droite dans cette relation soit < 1, c'est-à-dire

$$(77,\ 2)\qquad \prod_{\nu=1}^{l}\frac{1-\dfrac{r}{r_\nu}}{1+\dfrac{r}{r_\nu}}\prod_{\nu=k+1}^{n}\frac{1-\dfrac{r_\nu}{r}}{1+\dfrac{r_\nu}{r}} > \tau,$$

où l'on pourra naturellement supposer $k = l$, puisque autrement il n'y avait rien à démontrer. Or, dans ce cas on a

$$q\, r_k \geqq r \geqq \frac{r_{k+1}}{q},$$

et les facteurs

$$\frac{1 - \dfrac{r}{r_\nu}}{1 + \dfrac{r}{r_\nu}}, \quad \frac{1 - \dfrac{r_\nu}{r}}{1 + \dfrac{r_\nu}{r}}$$

sont resp. $\geqq$

$$\frac{1 - q\dfrac{r_k}{r_\nu}}{1 + q\dfrac{r_k}{r_\nu}}, \quad \frac{1 - q\dfrac{r_\nu}{r_{k+1}}}{1 + q\dfrac{r_\nu}{r_{k+1}}}.$$

La condition $(77, 2)$ se réduit donc à

$$\prod_{\nu=1}^{k} \frac{1 - q\dfrac{r_k}{r_\nu}}{1 + q\dfrac{r_k}{r_\nu}} \prod_{\nu=k+1}^{n} \frac{1 - q\dfrac{r_\nu}{r_{k+1}}}{1 + q\dfrac{r_\nu}{r_{k+1}}} > \tau. \tag{77, 3}$$

Il suffira donc de choisir q, $0 < q < 1$, de sorte que $(77, 3)$ soit vérifié pour chaque k, $k = 1, \ldots, n$, pour être assuré que chaque ϱ_ν est contenu dans au moins un des intervalles $\left(q\, r_\nu, \dfrac{r_\nu}{q}\right)$. On pourra alors tirer de ce fait des conclusions complètement analogues à celles contenues dans le théorème XXXII.

Nous allons, dans ce qui suit, discuter en détail le cas des équations quadratiques qui est le plus important dans la pratique de la méthode de Graeffe.

Supposons que nous avons une équation quadratique

$$f(z) \equiv (z - x_1)(z - x_2) = 0$$

dont les racines x_1, x_2 sont supposées connues. Un polynôme quadratique

$$g(z) \equiv (z - y_1)(z - y_2),$$

dont les racines y_1, y_2 sont à déterminer, satisfait à la relation

$$g(z) - f(z) \ll \tau\, \mathfrak{M}_f(z), \quad 0 < \tau < 1.$$

Posons

$$|x_1| = r_1, \quad |x_2| = r_2$$

et supposons que l'on ait pour un $\delta > 0$

(77, 3 a) $$\left|\frac{x_1}{x_2} - 1\right| \geqq \delta; \quad \left|\frac{x_2}{x_1} - 1\right| \geqq \delta.$$

Alors je dis que, si τ satisfait à l'inégalité

(77, 4) $$\frac{\delta^2}{4} > \tau\left(3 + 3\,\delta + \frac{\delta^2}{2}\right),$$

$g(z)$ possède exactement une racine dans chacun des cercles

(77, 5) $$\left|\frac{z}{x_1} - 1\right| < \frac{\delta}{2}, \left|\frac{z}{x_2} - 1\right| < \frac{\delta}{2},$$

qui sont évidemment sans point commun. En effet, posons $\delta_1 = \dfrac{|x_2 - x_1|}{r_1} \geqq \delta$ et considérons la circonférence K:

$$|z - x_1| = \frac{\delta}{2} r_1.$$

On a sur K

$$|z - x_1| = \frac{\delta}{2} r_1, \quad |z - x_2| \geqq \delta_1 r_1 - \frac{\delta}{2} r_1.$$

Donc

$$|f(z)| \geqq \frac{\delta}{2}\left(\delta_1 - \frac{\delta}{2}\right) r_1^2.$$

De l'autre côté on a d'après le théorème II

$$\mathfrak{M}_f(z) - z^2 \ll (r_1 + r_2) z + r_1 r_2 \ll r_1 (2 + \delta_1) z + (1 + \delta_1) r_1^2.$$

Donc, sur K et *à l'intérieur de* K

$$|\mathfrak{M}_f(z) - z^2| \leqq r_1^2\left\{\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)(2 + \delta_1) + 1 + \delta_1\right\} = r_1^2\left(3 + 2\,\delta_1 + \delta + \frac{\delta\,\delta_1}{2}\right),$$

(77, 6) $$|g(z) - f(z)| \leqq \tau\, r_1^2\left(3 + 2\,\delta_1 + \delta + \frac{\delta\,\delta_1}{2}\right).$$

Il résulte maintenant par le théorème de Rouché que $g(z)$ possède exactement une racine à l'intérieur de K si l'on a

$$\tau < \frac{\frac{\delta}{2}\left(\delta_1 - \frac{\delta}{2}\right) r_1^2}{r_1^2\left(3 + 2\,\delta_1 + \delta + \frac{\delta\,\delta_1}{2}\right)} = \frac{\delta\left(\delta_1 - \frac{\delta}{2}\right)}{(4+\delta)\,\delta_1 + 2\,\delta + 6}.$$

Or, l'expression de droite est une fonction linéaire de δ_1 au déterminant positif

$$\delta\,(2\,\delta + 6) + \frac{\delta^2}{2}(4 + \delta).$$

Donc elle croît pour $\delta_1 \geqq \delta$ avec δ_1 et possède sa valeur minimum pour $\delta_1 = \delta$. Donc la condition (77, 4) est suffisante pour que $g(z)$ possède exactement une racine à l'intérieur de K et, le même raisonnement étant applicable au second des cercles (77, 5), notre assertion est démontrée.

Désignons les racines de $g(z)$ dans les cercles (77, 5) respectivement par y_1, y_2. En posant $\left|\frac{y_1}{x_1} - 1\right| = \xi_1$, on a évidemment

$$\xi_1 < \frac{\delta}{2}; \quad |y_1 - x_1| = \xi_1\,r_1; \quad |y_1 - x_2| \geqq (\delta_1 - \xi_1)\,r_1.$$

Donc, puisque (77, 6) est valable au point y_1, nous avons pour $z = y_1$

$$\xi_1\,(\delta_1 - \xi_1)\,r_1^2 \leqq \tau\,r_1^2\left(3 + 2\,\delta_1 + \delta + \frac{\delta\,\delta_1}{2}\right).$$

Donc

$$\xi_1^2 - \delta_1\,\xi_1 + \tau\left(3 + 2\,\delta_1 + \delta + \frac{\delta\,\delta_1}{2}\right) \geqq 0. \tag{77, 6 a}$$

Ici le coefficient de δ_1 est

$$\tau\left(2 + \frac{\delta}{2}\right) - \xi_1. \tag{77, 7}$$

Or, faisons à côté de (77, 4) l'hypothèse que

$$\xi_1 \geqq 2\,\frac{\tau}{\delta}\left(3 + 3\,\delta + \frac{\delta^2}{2}\right). \tag{77, 7 a}$$

Alors (77, 7) est négatif et (77, 6 a) reste valable si l'on y remplace δ_1 par $\delta \leqq \delta_1$. On obtient alors

$$\xi_1^2 - \delta\,\xi_1 + \tau\left(3 + 3\,\delta + \frac{\delta^2}{2}\right) \geqq 0. \tag{77, 8}$$

Les deux racines du polynôme de gauche,

$$\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \tau\left(3 + 3\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)}$$

sont à cause de (77, 4) réelles et positives. Donc, ξ_1 étant $< \frac{\delta}{2}$, il résulte de (77, 8)

$$\xi_1 \leqq \frac{\delta}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \tau\left(3 + 3\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)} = \frac{\tau\left(3 + 3\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)}{\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \tau\left(3 + 3\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)}} <$$

$$< 2\frac{\tau}{\delta}\left(3 + 3\delta + \frac{\delta^2}{2}\right),$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse (77, 7 a). Donc on a

$$\left|\frac{y_\nu}{x_\nu} - 1\right| < 2\frac{\tau}{\delta}\left(3 + 3\delta + \frac{\delta^2}{2}\right), \qquad \nu = 1, 2 \tag{77, 9}$$

la démonstration de cette inégalité pour $\nu = 2$ étant complètement analogue.

En rassemblant ces résultats nous obtenons:

XXXIII. *Supposons que sous les conditions du théorème* XXXI *on a* $n = 2$, $a_0 = b_0 = 1$. *Alors, si pour un* $\delta > 0$ (77, 3 a) *et* (77, 4) *sont satisfaits, on a pour les racines de* $g(z)$ *les relations* (77, 9).

§ 17. La méthode de Graeffe. Calcul des modules des racines.

78. Nous abordons maintenant la théorie de la méthode de Graeffe. On part dans cette méthode d'un polynôme du degré n

$$f(z) \equiv a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n = 1, \tag{78, 1}$$

dont les racines sont désignées par $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ et rangées dans l'ordre des modules croissants. Nous posons $|\zeta_\nu| = r_\nu$ de sorte qu'on ait $r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots \leqq r_n$. Formons le polynôme du degré n dont les racines soient les carrés de ζ_ν:

$$f_1(z) \equiv a'_n z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a'_0, \quad a'_n = 1. \tag{78, 2}$$

On obtient alors les a'_ν au moyen des formules

$$a'_\nu = (-1)^{n-\nu}(a_\nu^2 - 2\,a_{\nu-1}\,a_{\nu+1} + 2\,a_{\nu-2}\,a_{\nu+2} - \cdots). \tag{78, 3}$$

Ici, comme dans la suite, les coefficients a_ν aux indices $> n$ et < 0 sont à considérer comme égaux à 0.

Le polynôme $f_1(z)$ sera appelé *la première transformée de Graeffe* du polynôme $f(z)$. Plus généralement nous appellerons la k-ième transformée de Graeffe du polynôme $f(z)$ le polynôme

$$f_k(z) \equiv \prod_{\nu=1}^{n}\left(z - \zeta_\nu^{2^k}\right) = a_n^{(k)} z^n + a_{n-1}^{(k)} z^{n-1} + \cdots + a_0^{(k)}, \quad a_n^{(k)} = 1. \tag{78, 4}$$

On calcule successivement les transformées de Graeffe de $f(z)$ en utilisant les formules (78, 3).

Pour évaluer le nombre des opérations élémentaires nécessaires pour le passage d'une transformée $f_k(z)$ à la transformée suivante $f_{k+1}(z)$, nous négligerons les opérations d'addition, subtraction et multiplication par 2 et ne compterons que les multiplications entre les a_ν. Alors on voit facilement que le passage de f_k à f_{k+1} exige le nombre des calculs élémentaires égal au plus grand entier contenu dans $\frac{(n+1)^2}{4}$.[1]

79. Supposons maintenant que l'on ait pour un indice ν: $r_{\nu+1} > r_\nu$. Alors on peut écrire $a_\nu^{(k)}$ dans la forme

$$a_\nu^{(k)} = (-1)^{n-\nu}(\zeta_n \ldots \zeta_{\nu+1})^{2^k}\left(1 + \cdots + \left\{\left(\frac{r_\nu}{r_{\nu+1}}\right)^{2^k}\right\} + \cdots\right),$$

où la somme entre parenthèses contient $\binom{n}{\nu}$ termes, dont le premier est égal à *un*, tandis que chacun des suivants est la 2^k-ième puissance d'un nombre dont le module est $\leqq \frac{r_\nu}{r_{\nu+1}}$. Il en résulte

$$\left|\frac{(-1)^{n-\nu}\,a_\nu^{(k)}}{(\zeta_n \ldots \zeta_{\nu+1})^{2^k}} - 1\right| < \binom{n}{\nu}\left(\frac{r_\nu}{r_{\nu+1}}\right)^{2^k}, \quad r_{\nu+1} > r_\nu, \tag{79, 1}$$

---

[1] Ce nombre peut être abaissé si l'on fait $a_0 = 1$ par une transformation de la forme $x = \eta y$, $\eta = \sqrt[n]{a_0}$. Cet artifice a été indiqué par ENCKE (1), p. 174 et CARVALLO (1), p. 9.

$$(\zeta_n \ldots \zeta_{\nu+1})^{2^k} \sim (-1)^{n-\nu} a_\nu^{(k)}, \quad r_{\nu+1} > r_\nu, \tag{79, 2}$$

si k croît à l'infini, donc en particulier:

$$\frac{|a_\nu^{(k)}|}{(r_n \ldots r_{\nu+1})^{2^k}} = 1 + \theta \binom{n}{\nu} \left(\frac{r_\nu}{r_{\nu+1}}\right)^{2^k}, \tag{79, 3}$$

où θ désigne, comme dans la suite, un nombre de module $\leqq 1$, *pas toujours le même,* et ensuite:

$$\frac{|a_\nu^{(k)}|^{2^{-k}}}{r_n \ldots r_{\nu+1}} = \left(1 + \theta \binom{n}{\nu} \left(\frac{r_\nu}{r_{\nu+1}}\right)^{2^k}\right)^{2^{-k}}. \tag{79, 4}$$

Or, on vérifie aisément, en passant aux logarithmes, les inégalités suivantes valables pour $-\frac{2}{3} \leqq \varepsilon \leqq \frac{2}{3}$; $n \geqq 2$:

$$1 - 2\frac{|\varepsilon|}{n} \leqq \sqrt[n]{1 + \varepsilon} \leqq 1 + \frac{|\varepsilon|}{n}, \quad |\varepsilon| \leqq \frac{2}{3}. \tag{79, 5}$$

En appliquant cette inégalité à (79, 4) il vient, si $\frac{3}{2}\binom{n}{\nu} \leqq \left(\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu}\right)^{2^k}$:

$$-\binom{n}{\nu} 2^{-k+1} \left(\frac{r_\nu}{r_{\nu+1}}\right)^{2^k} \leqq \frac{|a_\nu^{(k)}|^{2^{-k}}}{r_n \ldots r_{\nu+1}} - 1 \leqq \binom{n}{\nu} 2^{-k} \left(\frac{r_\nu}{r_{\nu+1}}\right)^{2^k}. \tag{79, 6}$$

Cette relation permet de calculer $r_n \ldots r_{\nu+1}$ avec une très grande précision, en calculant la suite des transformées de Graeffe. *Mais elle n'est applicable que si l'inégalité $r_\nu < r_{\nu+1}$ est assurée.*

Plus généralement, supposons que les indices ν pour lesquels on a $r_\nu < r_{\nu+1}$, sont $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_l$. Alors on a en posant $0 = \nu_0$, $n = \nu_{l+1}$:

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_l < n = \nu_{l+1} \tag{79, 7}$$

et l'on obtient pour un ν avec $\nu_\lambda < \nu \leqq \nu_{\lambda+1}$, $\lambda = 0, \ldots, l$

$$\left|\frac{a_{\nu_\lambda}^{(k)}}{a_{\nu_{\lambda+1}}^{(k)}}\right|^{2^{-k}} \to r_\nu^{\nu_{\lambda+1}-\nu_\lambda}, \quad \nu_\lambda < \nu \leqq \nu_{\lambda+1}. \tag{79, 8}$$

C'est la formule fondamentale de la méthode de Graeffe.[1]

[1] Polya (2), p. 277.

Toutefois, si $\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu}$ ne diffère pas de *un* que d'une quantité relativement petite, il faudra pousser assez loin le calcul des transformées de Graeffe pour obtenir une approximation satisfaisante. Si l'on a p. ex. $\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = 1{,}08$, k doit être choisi conformément à l'inégalité $1{,}08^{2^k} > \frac{3}{2}\binom{n}{\nu}$, donc, en prenant le maximum de $\binom{n}{\nu}$,

$$1{,}08^{2^k} > \frac{3}{2}\left(\begin{matrix} n \\ \left[\frac{n}{2}\right]\end{matrix}\right).$$

Pour $n = 4$ p. ex. cette inégalité ce réduit à $1{,}08^{2^k} > 9$ et est satisfaite à partir de $k = 5$. Dans ce cas on a à effectuer 30 multiplications et il est facile à voir que tous les calculs se réduisent à 50 consultations des tables logarithmiques, si le calcul est conduit avec logarithmes. Les erreurs données par la formule (79, 6) sont dans ce cas $< 0{,}033$. Mais déjà pour $k = 6$ les bornes (79, 6) deviennent $< 0{,}003$.

80. Le raisonnement du No. précédent n'est rigoureusement applicable que si l'on connait déjà les indices ν_λ en (79, 7). C'est pour remédier à cette difficulté fondamentale, que les recherches théoriques de ce mémoire ont été entreprises.

On obtient tout d'abord des évaluations à priori en étudiant les diagrammes de Newton des transformées de Graeffe et en utilisant le premier théorème fondamental ou plutôt le théorème IX qui en est un corollaire immédiat. Soit la majorante newtonienne de $f(z)$

$$\mathfrak{M}_f = \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu z^\nu, \quad T_n = 1,$$

et désignons resp. par R_ν, D_ν les inclinaisons numériques et les déviations de $f(z)$. Plus généralement posons $\mathfrak{M}_{f_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{k} T_\nu^{(k)} z^\nu$, $T_n^{(k)} = 1$, et désignons resp. les inclinaisons numériques et les déviations de la k-ième transformée de Graeffe par $R_\nu^{(k)}$, $D_\nu^{(k)}$. Alors on obtient du théorème IX pour chaque k

$$(80,\ 1) \qquad \varrho(\nu) < \frac{|\zeta_\nu|^{2^k}}{R_\nu^{(k)}} < \frac{1}{\varrho(n-\nu+1)}, \quad \nu = 1, \ldots, n$$

où l'on peut écrire d'après (23, 1)

$$\varrho(\nu) = \varrho^{(\nu)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}} \geqq \frac{1}{2\nu}. \tag{80, 2}$$

Mais maintenant il résulte de (80, 1), (80, 2)

$$\frac{1}{\sqrt[2^k]{2\nu}} < \frac{|\zeta_\nu|}{\sqrt[2^k]{R_\nu^{(k)}}} < \sqrt[2^k]{2(n-\nu+1)}, \tag{80, 3}$$

$$1 - \frac{2n-1}{2^k} < \frac{1}{\sqrt[2^k]{2n}} < \frac{|\zeta_\nu|}{\sqrt[2^k]{R_\nu^{(k)}}} < \sqrt[2^k]{2n} < 1 + \frac{2n-1}{2^k}, \tag{80, 4}$$

et les deux bornes dans cette dernière inégalité convergent vers *un* avec $k \uparrow \infty$. Les relations (80, 3) et (80, 4) possèdent le caractère d'évaluations à priori mais sont naturellement beaucoup trop faibles pour le calcul pratique.

81. On obtient généralement des évaluations beaucoup plus favorables en calculant les déviations $D_\nu^{(k)}$ et en utilisant le deuxième et le troisième théorème fondamentaux. Tout d'abord, supposons que pour un certain k les deux déviations $D_\nu^{(k)}$, $D_{\nu-1}^{(k)}$ deviennent plus grandes que $3 + \sqrt{13} = 6{,}6\ldots$. Alors il résulte du théorème XVI, en posant $\operatorname{Min}(D_\nu^{(k)}, D_{\nu-1}^{(k)}) = M$:

$$\left|\frac{\zeta_\nu^{2^k}}{a_{\nu-1}^{(k)}/a_\nu^{(k)}} + 1\right| < \frac{4}{M},$$

donc en utilisant (79, 5)

$$\left||\zeta_\nu| - \sqrt[2^k]{\left|\frac{a_{\nu-1}^{(k)}}{a_\nu^{(k)}}\right|}\right| \leqq \frac{\sqrt[2^k]{\left|\frac{a_{\nu-1}^{(k)}}{a_\nu^{(k)}}\right|}}{2^{k-3}M}.[1] \tag{81, 1}$$

Si M est seulement plus grand que la constante $M_0 = 6{,}357\ldots$ du théorème XVI on conclut de ce théorème qu'en tout cas la racine ζ_ν de $f_k(z)$ est une racine simple et la seule racine de $f(z)$ située dans la couronne circulaire

[1] Dès que M est suffisamment grand on obtiendra des évaluations plus avantageuses en appliquant le troisième théorème fondamental.

$$\frac{1}{\sqrt[2^k]{\tau_2(M)}} < \frac{|z|}{\sqrt[2^k]{\left|\frac{a_{\nu-1}^{(k)}}{a_\nu^{(k)}}\right|}} < \sqrt[2^k]{\tau_2(M)}. \tag{81, 2}$$

Si pour un certain k *toutes* les déviations $D_\nu^{(k)}$ de $f_k(z)$ deviennent plus grandes que la constante $v^2 = 4{,}81\ldots$ de M. Valiron ou du moins la constante v_n^2 du § 9, les théorèmes de ce § deviennent applicables et l'on peut conclure que ζ_ν est pour chaque ν la seule racine de $f(z)$ située dans la couronne circulaire

$$\frac{1}{\sqrt[2^k]{v_n}} \leqq \frac{|z|}{\sqrt[2^k]{\left|\frac{a_{\nu-1}^{(k)}}{a_\nu^{(k)}}\right|}} \leqq \sqrt[2^k]{v_n}. \tag{81, 3}$$

En particulier, il résulte alors, si les coefficients de $f(z)$ sont réels, que $f(z)$ ne possède que des racines réelles de modules différents.

Le deuxième théorème fondamental est applicable à partir d'une certaine valeur de k si l'on a

$$r_{\nu-1} < r_\nu < r_{\nu+1}.$$

En effet, on a en vertu du théorème IX en écrivant $\varrho(\nu)$ pour $\varrho^{(\nu)}$:

$$R_\nu^{(k)} > \varrho(n-\nu+1)\, r_\nu^{2^k}, \quad R_{\nu-1}^{(k)} < \frac{1}{\varrho(\nu-1)} r_{\nu-1}^{2^k},$$

$$D_{\nu-1}^{(k)} = \frac{R_\nu^{(k)}}{R_{\nu-1}^{(k)}} > \varrho(\nu-1)\,\varrho(n-\nu+1)\left(\frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}\right)^{2^k}. \tag{81, 4}$$

De même, on a

$$D_\nu^{(k)} > \varrho(\nu)\,\varrho(n-\nu)\left(\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu}\right)^{2^k}. \tag{81, 5}$$

Donc la relation $M > 3 + \sqrt{13}$ est satisfaite dès qu'on a

$$\left(\frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}\right)^{2^k} > \frac{3+\sqrt{13}}{\varrho(\nu-1)\,\varrho(n-\nu+1)}, \quad \left(\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu}\right)^{2^k} > \frac{3+\sqrt{13}}{\varrho(\nu)\,\varrho(n-\nu)},$$

et, en vertu de (80, 2), il suffit de choisir k de façon que les inégalités

$$\left(\frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}\right)^{2^k} > 4(3+\sqrt{13})(\nu-1)(n-\nu+1), \quad \left(\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu}\right)^{2^k} > 4(3+\sqrt{13})\,\nu(n-\nu) \tag{81, 6}$$

sont vérifiées. Notons enfin que la valeur de k, déduite de (81, 6), est généralement plus petite que celle nécessaire pour (79, 6).

82. Dans le cas où le module r_ν d'une racine ζ_ν est trop approché de $r_{\nu-1}$ ou $r_{\nu+1}$, il faudra prendre k trop grand pour séparer ζ_ν des racines $\zeta_{\nu-1}$, $\zeta_{\nu+1}$ et cette séparation devient même impossible si $r_\nu = r_{\nu+1}$ ou $r_\nu = r_{\nu-1}$. Dans ce cas on pourra généralement séparer *un groupe des racines*, contenant ζ_ν, au moyen du théorème XXI en cherchant un k pour lequel il existe deux déviations $D_q^{(k)}$, $D_{q'}^{(k)}$ avec $q < \nu \leqq q'$, qui sont toutes les deux > 9. On aura alors une couronne circulaire, contenant les nombres $\zeta_{q+1}^{2^k}, \ldots, \zeta_{q'}^{2^k}$, et l'on obtiendra alors des bornes généralement assez serrées pour $r_{q+1}, \ldots, r_{q'}$, donc en particulier pour r_ν.

Si l'on veut pousser le calcul de r_ν plus loin, on utilisera le troisième théorème fondamental en choisissant k de la sorte que la plus petite des deux déviations

$$D_q^{(k)},\ D_{q'}^{(k)} \qquad q < \nu \leqq q'$$

devienne $\geqq 18{,}7$ resp., si $q = 0$ ou $q' = n$, $\geqq 13{,}5$. On obtiendra alors un polynôme $\varphi(z)$ du degré $q' - q$ aux racines

$$\zeta_{q+1}^{2^k}, \ldots, \zeta_{q'}^{2^k}$$

avec une erreur relative donnée resp. par (61, 6), (61, 7) ou (62, 4), (62, 5). Il suffira alors de poursuivre le calcul avec le polynôme $\varphi(z)$ du degré $q' - q < n$.

83. Toutefois, en appliquant la méthode de Graeffe au polynôme $\varphi(z)$ du No. précédent, il faudra tenir compte du fait que les coefficients de $\varphi(z)$ ne sont pas connus rigoureusement mais seulement avec une erreur relative relativement petite.

Or, ce fait se présent déjà en vérité dans le calcul des transformées de Graeffe du polynôme $f(z)$, puisqu'on ne peut que rarement exécuter ces calculs sans »arrondissement» des chiffres. On se borne dans ce calcul généralement à $4 - 9$ chiffres significatifs de chaque coefficient, en admettant toutefois sans le dire explicitement, que l'influence de cet arrondissement des chiffres ne s'accumule pas trop.

Mais dans le cas le plus général, l'opération de l'arrondissement des chiffres pourrait devenir beaucoup plus dangereuse, qu'on ne parait le soupçonner, et peut rendre illusoire tout le calcul.

Considérons, pour en donner un exemple, le polynôme du No. 75 que nous désignons maintenant par $g(z)$:

$$g(z) = z^4 - 4z^3 + (6 - 4{,}9 \cdot 10^{-5})z^2 - 4z + 1.$$

En négligeant la cinqième décimale, on remplacera $g(z)$ par

$$f(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = (z-1)^4,$$

où l'on a

$$g(z) - f(z) \ll \varepsilon\, \mathfrak{M}_f(z), \quad \varepsilon = 4{,}9 \cdot 10^{-5}.$$

Nous allons calculer les transformées de Graeffe $g_k(z)$, $f_k(z)$ de $g(z)$, $f(z)$ afin d'évaluer pour les k correspondants le plus petit ε_k positif avec lequel on a

$$g_k(z) - f_k(z) \ll \varepsilon_k\, \mathfrak{M}_{f_k}.$$

Or, chaque transformée $f_k(z)$ est évidemment identique à $f(z)$. Quant aux $g_k(z)$, voici ces transformées pour $k = 1, \ldots, 5$ avec les bornes des ε_k correspondants. Les coefficients de ces transformées sont exacts chacun à la moitié de la dernière décimale près:

$$f_1(z) = z^4 - 4{,}000098\, z^3 + 5{,}999412\, z^2 - 4{,}000098\, z + 1, \quad \varepsilon_1 > 9{,}4 \cdot 10^{-5},$$

$$f_2(z) = z^4 - 4{,}00196\, z^3 + 5{,}991376\, z^2 - 4{,}00196\, z + 1, \quad \varepsilon_2 > 1{,}4 \cdot 10^{-3},$$

$$f_3(z) = z^4 - 4{,}0329\, z^3 + 5{,}8652\, z^2 - 4{,}0329\, z + 1, \quad \varepsilon_3 > 2{,}2 \cdot 10^{-2},$$

$$f_4(z) = z^4 - 4{,}534\, z^3 + 3{,}872\, z^2 - 4{,}534\, z + 1, \quad \varepsilon_4 > 0{,}354,$$

$$f_5(z) = z^4 - 12{,}8\, z^3 + 24{,}1\, z^2 - 12{,}8\, z + 1, \quad \varepsilon_5 > 5.$$

Comme on voit, l'erreur relative pour le troisième transformée de Graeffe devient > 2 %, pour la quatrième > 35 %, pour la cinqième > 500 %.

Toutefois, notre exemple, qui peut d'ailleurs être facilement généralisé, est tout à fait exceptionnel. Généralement l'influence des erreurs »d'arrondissement» est beaucoup moins prononcée.

Dans les numéros suivants nous allons étudier la »propagation» de ces erreurs dans le passage d'une transformée de Graeffe à la transformée suivante

84. En passant de (78, 1) à (78, 2) il résulte de la formule (78, 3):

$$(84,\ 1) \qquad |a'_\nu| \leqq T_\nu^2 + 2\, T_{\nu-1}\, T_{\nu+1} + 2\, T_{\nu-2}\, T_{\nu+2} + \cdots,$$

où le nombre de termes de droite est égal à $\nu + 1$ ou $n - \nu + 1$ suivant que $\nu \leqq \frac{n}{2}$ ou $\nu \geqq \frac{n}{2}$. De l'autre côté, on a, d'après (15, 7),

$$T_{\nu-k}\, T_{\nu+k} \leqq T_\nu^2.$$

Il en résulte l'évaluation

$$(84,\ 2) \qquad |a'_\nu| \leqq \alpha_\nu T_\nu^2, \quad \alpha_\nu = \begin{cases} 2\nu + 1, & \nu \leqq \frac{n}{2} \\ 2(n-\nu) + 1, & \nu \geqq \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Or, la suite des nombres $\alpha_\nu T_\nu^2$, $\nu = 0, \ldots, n$ *est la suite des coefficients d'un polynôme normal.* En effet, on a

$$\frac{(\alpha_\nu T_\nu^2)^2}{(\alpha_{\nu-1} T_{\nu-1}^2)(\alpha_{\nu+1} T_{\nu+1}^2)} = \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1}} \left(\frac{T_\nu^2}{T_{\nu-1}\, T_{\nu+1}}\right)^2.$$

Le deuxième facteur est ici $\geqq 1$, la majorante newtonienne de $f(z)$ étant normale. Quant au premier facteur, il a une des quatre formes

$$\frac{(2\nu+1)^2}{(2\nu-1)(2\nu+3)} = \frac{(2\nu+1)^2}{(2\nu+1)^2 - 4},$$

$$\frac{(2(n-\nu)+1)^2}{(2(n-\nu)+1)^2 - 4}, \quad \frac{\left(2\frac{n}{2}+1\right)^2}{\left(2\frac{n}{2}-1\right)^2}, \quad \frac{2\frac{n-1}{2}+1}{2\frac{n-3}{2}+1},$$

donc reste toujours > 1.

Donc il résulte de (84, 2) la même évaluation pour les coefficients T'_ν de la majorante newtonienne de $f_1(z)$:

$$(84,\ 3) \qquad T'_\nu \leqq \alpha_\nu T_\nu^2, \quad \alpha_\nu = \begin{cases} 2\nu + 1, & \nu \leqq \frac{n}{2} \\ 2(n-\nu) + 1, & \nu \geqq \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Il est facile à montrer que les valeurs des coefficients α_ν dans cette évaluation ne peuvent pas être améliorées. Il suffit en effet de faire tous les a_ν égaux à ± 1 et à choisir les signes de manière à faire chaque terme entre les parenthèses dans (78, 3) positif. Mais pratiquement les α_ν peuvent se réduire considérablement.

85. La détermination d'une *borne inférieure* de T'_ν est un peu plus difficile. On peut utiliser à cet effet les inégalités du théorème IX. On a en appliquant ce théorème aux polynômes $f(z)$ et $f_1(z)$

$$\varrho(n-\nu+1) \leq \frac{R'_\nu}{|\zeta_\nu|^2} \leq \frac{1}{\varrho(\nu)},$$

$$\varrho(\nu) \leqq \frac{|\zeta_\nu|}{R_\nu} \leqq \frac{1}{\varrho(n-\nu+1)}.$$

En élevant la seconde inégalité au carré et en la multipliant terme à terme par la première, il vient

$$(85,1) \qquad \varrho(\nu)^2\varrho(n-\nu+1) \leqq \frac{R'_\nu}{R^2_\nu} \leqq \frac{1}{\varrho(\nu)\,\varrho(n-\nu+1)^2}.$$

De l'autre côté il résulte de (10, 5), puisque $T_n = 1$:

$$(85,2) \qquad T_\nu = \frac{T_0}{R_1\ldots R_\nu}, \quad T_\nu = R_{\nu+1}\ldots R_n.$$

En appliquant ces formules à $f(z)$ et $f_1(z)$ et en observant que T'_0 est toujours égal à T^2_0, il vient

$$\frac{T'_\nu}{T^2_\nu} = \prod_{\mu=\nu+1}^{n} \frac{R'_\mu}{R^2_\mu} = \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{R^2_\mu}{R'_\mu};$$

donc par (85, 1):

$$(85,3) \qquad \begin{cases} T'_\nu \geqq T^2_\nu \prod\limits_{\mu=\nu+1}^{n} (\varrho(\mu)^2\varrho(n-\mu+1)), \\[2ex] T'_\nu \geqq T^2_\nu \prod\limits_{\mu=1}^{\nu} (\varrho(\mu)\,\varrho(n-\mu+1)^2), \end{cases}$$

où l'on utilisera naturellement pour chaque ν le plus grand des produits de droite. Les évaluations (85, 3) deviennent, en tenant compte de l'inégalité $\varrho(\nu) \geqq \frac{1}{2\nu}$:

(85, 4)
$$T'_\nu \geqq T_\nu^2 \frac{1}{8^\nu (\nu!)^3 \binom{n}{\nu}^2},$$

$$T'_\nu \geqq T_\nu^2 \frac{1}{8^{n-\nu} ((n-\nu)!)^3 \binom{n}{\nu}^2}.$$

On obtient des bornes un peu plus avantageuses en utilisant les théorèmes du § 7. Il résulte de (29, 2), en tenant compte de (85, 2),

$$\frac{T_0}{T_\nu |\zeta_1 \ldots \zeta_\nu|} \geqq \frac{1}{\binom{n}{\nu}}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

De l'autre côté, l'inegalité (30, 2) peut s'écrire dans la forme

$$\frac{T_\nu |\zeta_1 \ldots \zeta_\nu|}{T_0} \geqq \sqrt{\frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}}}.$$

La seconde inégalité sera écrite pour $f_1(z)$, en remplaçant T_ν par T'_ν, T_0 par $T'_0 = T_0^2$ et $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ par $\zeta_1^2, \ldots, \zeta_\nu^2$; la première inégalité sera élevée au carré. En multipliant les inégalités ainsi obtenues, il vient

(85, 5)
$$\frac{T'_\nu}{T_\nu^2} \geqq \frac{1}{\sqrt{\frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{\nu^\nu}}} \frac{1}{\binom{n}{\nu}^2}.$$

Le premier facteur de droite est ici, comme on sait, $\geqq \frac{1}{\sqrt{e(\nu+1)}}$.

Or, introduisons maintenant, à côté de $f(z)$, le polynôme

$$f^*(z) = \frac{1}{a_0} z^n f\left(\frac{1}{z}\right),$$

où l'on suppose $a_0 \neq 0$. D'après ce que nous avons dit au No. 13, on a

$$\mathfrak{M}_{f^*}(z) = \frac{z^n}{T_0} \mathfrak{M}_f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Désignons la première transformée de Graeffe de $f^*(z)$ par $f_1^*(z)$. Les racines de $f_1^*(z)$ sont les carrés des inverses des racines de $f(z)$. On a donc

$$f_1^*(z) = \frac{z^n}{a_0^2} f_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

et

$$\mathfrak{M}_{f_1^*}(z) = \frac{z^n}{T_0^2} \mathfrak{M}_{f_1}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Il en résulte qu'en posant

$$\mathfrak{M}_{f^*} = \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu^* z^\nu, \quad \mathfrak{M}_{f_1^*} = \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu^{*\prime} z^\nu,$$

T_ν^* et $T_\nu^{*\prime}$ s'expriment comme suit:

$$T_\nu^* = \frac{T_{n-\nu}}{T_0}, \quad T_\nu^{*\prime} = \frac{T'_{n-\nu}}{T_0^2}.$$

Appliquons maintenant à f^* et f_1^* l'inégalité (85, 5), en y remplaçant ν par $n-\nu$. Il vient

$$\frac{T_{n-\nu}^{*\prime}}{T_{n-\nu}^{*2}} \geqq \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-\nu+1)^{n-\nu+1}}{(n-\nu)^{n-\nu}}}} \frac{1}{\binom{n}{\nu}^2},$$

donc en remplaçant T_ν^* et $T_\nu^{*\prime}$ par leur valeurs:

$$\frac{T'_\nu}{T_\nu^2} \geqq \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-\nu+1)^{n-\nu+1}}{(n-\nu)^{n-\nu}}}} \frac{1}{\binom{n}{\nu}^2}.$$

Nous obtenons donc en fin de compte la relation suivante

$$(85, 6) \qquad \binom{n}{\nu}^2 \frac{T'_\nu}{T_\nu^2} \geqq \operatorname{Max}\left(\sqrt{\frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}}}, \quad \sqrt{\frac{(n-\nu)^{n-\nu}}{(n-\nu+1)^{n-\nu+1}}}\right),$$

une inégalité qui est plus précise que (85, 4), bien que probablement pas encore la plus précise. La borne de droite en (85, 6) est en tout cas $\geqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{\sqrt{e(\nu+1)}}, \frac{1}{\sqrt{e(n-\nu+1)}}\right)$. D'ailleurs, on voit sur l'exemple du polynôme $f(z) = (z-1)^n$ que le produit $\binom{n}{\nu}\frac{T'_\nu}{T_\nu^2}$ peut atteindre la valeur *un*.

86. Supposons maintenant que l'on ait deux polynômes $f(z)$, $g(z)$ du degré *exact* n

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad g(z) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu z^\nu, \quad a_n = b_n = 1$$

et que l'on ait

$$g(z) - f(z) \ll \varepsilon\, \mathfrak{M}_f(z).$$

Alors, si, comme toujours, $\mathfrak{M}_f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu z^\nu$, on peut écrire

$$b_\nu = a_\nu + \theta_\nu \varepsilon T_\nu, \quad |\theta_\nu| \leqq 1, \quad \nu = 0, \ldots, n-1.$$

Donc, en formant les coefficients b'_ν de la première transformée $g_1(z)$ de $g(z)$, on obtient

$$(-1)^{n-\nu}(b'_\nu - a'_\nu) = 2(\theta_\nu T_\nu a_\nu - \theta_{\nu-1} T_{\nu-1} a_{\nu+1} - \theta_{\nu+1} T_{\nu+1} a_{\nu-1} + \theta_{\nu-2} T_{\nu-2} a_{\nu+2} +$$
$$+ \theta_{\nu+2} T_{\nu+2} a_{\nu-2} - \cdots)\varepsilon + (\theta_\nu^2 T_\nu^2 - 2\theta_{\nu-1}\theta_{\nu+1} T_{\nu-1} T_{\nu+1} + 2\theta_{\nu-2}\theta_{\nu+2} T_{\nu-2} T_{\nu+2} - \cdots)\varepsilon^2,$$

donc, puisque $|a_\mu| \leqq T_\mu$:

$$|b'_\nu - a'_\nu| \leqq 2\varepsilon(T_\nu^2 + 2T_{\nu-1}T_{\nu+1} + 2T_{\nu-2}T_{\nu+2} + \cdots) + \varepsilon^2(T_\nu^2 + 2T_{\nu-1}T_{\nu+1} + \cdots).$$

Or, chaque terme $T_{\nu-\varkappa} T_{\nu+\varkappa}$ de l'expression entre parenthèses est $\leqq T_\nu^2$. Quant au nombre de ces termes il est égal à $\nu + 1$ si $\nu \leqq \frac{n}{2}$ et à $n - \nu + 1$ si $\nu \geqq \frac{n}{2}$, donc

$$|b'_\nu - a'_\nu| \leqq \operatorname{Min}(2\nu + 1,\ 2(n-\nu) + 1)\, T_\nu^2 (2\varepsilon + \varepsilon^2). \tag{86, 1}$$

Il s'agit maintenant d'évaluer le rapport de la borne (86, 1) à T'_ν, ce qu'on peut faire en utilisant la relation (85, 6) d'après laquelle

$$T_\nu^2 \leqq \binom{n}{\nu}^2 T'_\nu \operatorname{Min}\left(\sqrt{\frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{\nu^\nu}},\ \sqrt{\frac{(n-\nu+1)^{n-\nu+1}}{(n-\nu)^{n-\nu}}}\right).$$

Il vient alors, en remarquant que $\frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{\nu^\nu}$ croît avec ν:

$$|b'_\nu - a'_\nu| \leqq (4\varepsilon + 2\varepsilon^2)\binom{n}{\nu}^2 T'_\nu \operatorname{Min}\left(\frac{(\nu+1)^{\frac{\nu+3}{2}}}{\nu^{\frac{\nu}{2}}},\ \frac{(n-\nu+1)^{\frac{n-\nu+3}{2}}}{(n-\nu)^{\frac{n-\nu}{2}}}\right), \tag{86, 2}$$

et ensuite, en utilisant l'inégalité $\frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{\nu^\nu} < e(\nu+1)$:

$$(86,\ 3)\qquad |b_\nu' - a_\nu'| < 2(2\varepsilon + \varepsilon^2)\binom{n}{\nu}^2 T_\nu' \operatorname{Min}\left(\sqrt{e(\nu+1)^3},\ \sqrt{e(n-\nu+1)^3}\right).$$

Il en résulte donc en fin de compte

$$(86,\ 4)\qquad g_1(z) - f_1(z) \ll \varepsilon_1 \mathfrak{M}_{f_1}(z),$$

où, en posant $\left[\frac{n}{2}\right] = m$:

$$(86,\ 5)\qquad \varepsilon_1 < 2\varepsilon(2+\varepsilon)\binom{n}{m}^2 \frac{(m+1)^{\frac{m+3}{2}}}{m^{\frac{m}{3}}}.$$

Si p. ex. $n = 3,\ 4,\ 5$ on obtient resp.

$$\varepsilon_1 < 72(2+\varepsilon)\varepsilon;\quad \varepsilon_1 < 324\sqrt{3}(2+\varepsilon)\varepsilon;\quad \varepsilon_1 < 900\sqrt{3}(2+\varepsilon)\varepsilon.$$

Comme on voit, les erreurs calculées relativement à la majorante newtonienne deviennent très rapidement grandes en passant d'une transformée de Graeffe à la suivante. Toutefois, nos évaluations ne sont pas probablement suffisamment précises. Dans l'exemple du No. 83, dans lequel pour $n = 4$ les conditions les plus désavantageuses sont probablement réalisées, les quotients $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \ldots \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_4}$ ont resp. les valeurs 19, 2; 14, 9; 15, 7; 16, 1; 14, 1.

D'ailleurs, dans le calcul pratique on calculera les valeurs approximatives des T_ν'. On pourra donc utiliser directement les inégalités (86, 1) sans se servir de la relation (85, 6).

Mais même en utilisant ces valeurs de $T_\nu^{(k)}$ on n'obtiendra que des bornes des ε_k trop élevées pour être utilisé directement, en appliquant le quatrième théorème fondamental. Il faudra donc utiliser pour l'estimation des erreurs relatives des racines les artifices spéciaux indiquées au No. 77 pour obtenir des évaluations à posteriori.

D'ailleurs, dans le calcul pratique on se trouve généralement dans des circonstances beaucoup plus favorables. Dès qu'on a calculé les 2 ou 3 premières transformées, il se trouvera que dans l'expression

$$a_\nu^2 - 2a_{\nu-1}a_{\nu+1} + 2a_{\nu-2}a_{\nu+2} - \cdots$$

les premiers termes dominent de sorte que les erreurs dont sont affectés les autres termes n'exercent plus aucune influence sur les erreurs de la somme quand on se borne à un nombre convenable de chiffres significatifs. C'est pourquoi il suffit généralement de commencer le calcul avec 1 ou 2 chiffres significatifs de plus, si l'on veut avoir les racines avec un nombre défini de chiffres significatifs. Si le nombre des transformées à former est élevé, on perd plus de 2 chiffres significatifs en route, mais ceci est compensé par le fait qu'en extrayant une racine d'exposant 2^k, on aura généralement à diviser l'erreur relative par 2^k.

Comme on voit, il s'agit ici d'un cas où l'on est forcé à se borner à l'évaluation *à posteriori* des erreurs.

§ 18. **La méthode de Graeffe. Détermination complète des racines et exemples.**

87. Le mérite de Graeffe vis à vis de ses prédecesseurs Dandelin et Lobatschewski consiste surtout en ceci, qu'il développe des méthodes pratiques pour la détermination des arguments des racines.

Dans cette discussion Graeffe se borne, il est vrai, au cas »général», mais pas le plus général, dans lequel les modules des couples des racines complexes sont différents entre eux.

Dans cette hypothèse Graeffe indique les 5 artifices suivants dont le premier et le quatrième supposent que les coéfficients de $f(z)$ soient réels:

a) Si le nombre des racines complexes est 2 ou 4, on obtient leurs arguments $\pm\varphi$, $\pm\psi$ en observant que les coefficients a_1, a_{n-1} sont linéaires en $\cos\varphi$, $\cos\psi$ (les modules de toutes les racines étant déterminés).[1]

Si le nombre des racines complexes est 6, on obtient, d'après une remarque d'Encke, de la considération des coefficients a_1, a_{n-1}, a_2 une équation quadratique en $\cos\varphi$.[2]

b) Supposons que la plus petite des différences positives entre les modules des racines soit $\geqq 2k$, $k > 0$. On calculera alors les modules des racines de l'équation

$$f(z-k)=0$$

et en désignant ces modules en ordre croissant par $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, et les modules des racines de $f(z)=0$ ordonnés de la même façon par $r_1, \ldots, r_n$, on obtiendra par les formules

[1] Cf. GRAEFFE (1) pp. 21, 22, 24.

[2] ENCKE (1) pp. 140, 141.

$$(87,\ 1) \qquad x_\nu = \frac{\varrho_\nu^2 - r_\nu^2 - k^2}{2k}, \quad y_\nu = \pm \sqrt{r_\nu^2 - a_\nu^2}$$

les parties réelles et imaginaires des racines correspondantes.[1]

c) Si l'on choisit pour k un nombre positif qui n'est pas suffisamment petit, on pourra encore obtenir par les formules (87, 1) les racines de $f(z)$ à condition de changer convenablement l'ordre des modules ϱ_ν.

Dans ce cas il est difficile de donner à priori une règle pour ce changement d'ordre, mais en pratique ça ne présente pas de grandes difficultés. Il suffit de vérifier si pour l'argument φ_ν de la $\nu^{\text{ième}}$ racine de $f(z)$, tirée des formules (87, 1), les multiples $2^m\varphi_\nu$ coïncident avec les valeurs tirées directement de la considération de la $m^{\text{ème}}$ transformée de Graeffe pour m suffisamment élevé.[2]

d) En développant les équations

$$\Re f(r_\nu e^{i\varphi_\nu}) = 0, \quad \Im f(r_\nu e^{i\varphi_\nu}) = 0$$

suivant les puissances de cos φ_ν et en les combinant convenablement, on obtient 2 équations d'ordres $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, dont on cherchera la racine commune par la méthode du plus grand commun diviseur.[3]

e) Il n'est point nécessaire de pousser le calcul de φ par ces méthodes trop loin. Supposons en effet qu'on ait trouvé pour l'argument φ d'une racine de $f(z)$ la valeur approchée φ_0 de sorte qu'on ait $\varphi = \varphi_0 + \delta$, $|\delta| < \frac{\pi}{2^{m+1}}$, et que de l'autre côté l'argument $2^m\varphi$ de la racine correspondante de la transformée $f_m(z)$ a pu être calculé à ε_0 près, $\varepsilon_0 > 0$. Si cette valeur de $2^m\varphi$ est $= \varphi^*$, on a évidemment

$$2^m\varphi = \varphi^* + \theta\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad |\theta| \leqq 1,$$

$$2^m\delta = \varphi^* + 2n\pi - 2^m\varphi_0 + \theta\varepsilon_0,$$

où l'entier n est univoquement déterminé par la condition que l'expression de droite soit en module $\leqq$ à la borne de $2^m\delta$, donc en particulier $< \frac{\pi}{2}$. De l'autre côté, la possibilité de déterminer l'entier n par cette condition pré-

---

[1] Graeffe (1) pp. 24, 25.
[2] Graeffe (1) p. 27.
[3] Graeffe (1) pp. 29—31.

sente un contrôle de calcul. Dès que l'entier n a été déterminé, on obtient δ par la formule

$$\delta = \frac{\varphi^* - 2^m \varphi_0 + 2\pi n}{2^m}$$

et par là φ à $\frac{\varepsilon_0}{2^m}$ près.

88. Faisons quelques remarques sur les artifices énumérés:

ad b). Les formules (87, 1) restent encore valable même si les modules r_ν ne sont pas tous différents entre eux. En effet, ordonnons les racines $z_\nu = x_\nu + i y_\nu$ de $f(z)$ dans l'ordre des modules croissants et, quant aux racines ayant le même module, dans l'ordre des parties réelles x_ν croissantes, on a

$$((x_{\nu+1} + k)^2 + y_{\nu+1}^2)) - ((x_\nu + k)^2 + y_\nu^2) = r_{\nu+1}^2 - r_\nu^2 + 2(x_{\nu+1} - x_\nu) k = \varrho_{\nu+1}^2 - \varrho_\nu^2;$$

or, si $r_{\nu+1} > r_\nu$:

$$r_{\nu+1}^2 - r_\nu^2 - 2(r_{\nu+1} + r_\nu) k \geqq r_{\nu+1}^2 - r_\nu^2 - 2(r_{\nu+1} + r_\nu) \frac{(r_{\nu+1} - r_\nu)}{2} = 0$$

et si $r_{\nu+1} = r_\nu$, $x_{\nu+1} > x_\nu$:

$$\varrho_{\nu+1}^2 - \varrho_\nu^2 = 2(x_{\nu+1} - x_\nu) k > 0.$$

Donc les nombres

$$(x_\nu + k)^2 + y_\nu^2$$

vont en croissant, et l'on a

$$\varrho_\nu^2 = (x_\nu + k)^2 + y_\nu^2 = r_\nu^2 + k^2 + 2 k x_\nu,$$

d'où les formules (87, 1).

Cependant dans ce cas la méthode ne sera plus praticable si k est trop petit, car alors, si z_ν et $z_{\nu+1}$ sont 2 racines différentes du même module, mais qui ne sont pas conjuguées, on a

$$\frac{\varrho_{\nu+1}^2}{\varrho_\nu^2} - 1 = \frac{2(x_{\nu+1} - x_\nu) k}{\varrho_\nu^2}$$

et il faudrait calculer les transformées de Graeffe d'ordre trop élevé pour séparer ϱ_ν et $\varrho_{\nu+1}$.

ad c). Cet artifice est aussi applicable même s'il y a des couples de racines complexes du même module. Mais la détermination de l'ordre »convenable» des

ϱ_ν d'après les indications de Graeffe exige des calculs trop compliqués. On parvient généralement plus simplement au but, en utilisant la somme des réciproques des racines, si les coefficients de $f(z)$ sont réels. En effet on aura d'après (87, 1)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{r_\nu^2} = \frac{1}{2k} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^2}{r_\nu^2} - \frac{n}{2k} - \frac{nk}{2},$$

donc on aura à ordonner les ϱ_ν de façon que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^2}{r_\nu^2} = 2k \frac{a_{n-1}}{a_n} + n(1 + k^2). \tag{88, 1}$$

De l'autre côté, on a évidemment pour chaque couple r_ν, ϱ_ν correspondant à la même racine

$$|\varrho_\nu - r_\nu| \leqq k. \tag{88, 2}$$

Quant à la méthode indiquée par C. Runge[1] pour trouver »l'ordre convenable des ϱ_ν« en utilisant la valeur commune de la somme $\sum\limits_{\nu=1}^{n} z_\nu$, elle est évidemment impraticable. En effet, il est évident que la somme des n valeurs de (87, 1) est indépendante de l'ordre des ϱ_ν. Si cette méthode paraît marcher dans un exemple calculé par Runge[2], ceci n'est dû qu'à une faute de calcul.

ad d). La méthode la plus simple pour obtenir les équations en question pour $\cos \varphi_\nu$, est de développer les parties réelles et imaginaires de

$$z^{-\left[\frac{n+1}{2}\right]} f(z) \text{ pour } z = r_\nu e^{i\varphi_\nu}.$$

Dans le cas où il y a plusieurs couples de racines complexes correspondant au même module, la méthode sera encore praticable; mais en calculant le plus grand commun diviseur des deux polynômes ainsi obtenus, on obtiendra un polynôme du degré > 1, mais $< n$.

89. En développant ses méthodes pour le calcul complet des racines, Graeffe se place généralement au point de vue que les transformées de Graeffe ne servent directement qu'au calcul des *modules* des racines.

---

[1] RUNGE (1), pp. 156—158; RUNGE u. KÖNIG, p. 173.

[2] Cf. RUNGE (1), p. 158.

C'est en se plaçant à un point de vue tout à fait différent que Carvallo a pu parvenir à une solution en principe complète et tout à fait générale du problème.[1] Carvallo suppose qu'une des transformées de Graeffe a été *complètement* résolue, et développe un procédé pour obtenir des racines de cette transformée les racines de l'équation $f(z) = 0$. Le procédé repose sur la remarque suivante: L'équation donnée $f(z) = 0$ peut être écrite, en séparant les termes du degré pair de ceux du degré impair dans la forme suivante:

$$f(z) \equiv \varphi(z^2) + z\,\psi(z^2) = 0 \qquad (89, 1)$$

où $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des polynômes des degrés $\left[\frac{n}{2}\right]$, $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Il en résulte que, si z_ν^2 est une racine de la première transformée de Graeffe de $f(z)$, on obtient z_ν par la formule

$$z = -\frac{\varphi(z_\nu^2)}{\psi(z_\nu^2)}. \qquad (89, 2)$$

(Si $\varphi(z_\nu^2) = \psi(z_\nu^2) = 0$, z_ν et $-z_\nu$ sont évidemment toutes les deux racines de $f(z)$.) Donc on peut, en utilisant les formules correspondantes, déduire de la racine $z_\nu^{2^m}$ de $f_m(z)$ successivement les nombres

$$z_\nu^{2^{m-1}},\ z_\nu^{2^{m-2}},\ \ldots,\ z_\nu^2,\ z_\nu.$$

La méthode de Carvallo nécessite parfois des calculs assez étendus. Si l'on connait $u_\nu = z_\nu^2$, on en obtient z_ν par une extraction de la racine carrée du module, en divisant l'argument de u_ν par 2; il ne reste qu'à déterminer »le signe» de z_ν, puisque l'argument de z n'est déterminé par le calcul indiqué qu'à un multiple de π près. Or, pour ceci il suffit naturellement de calculer les valeurs de $\varphi(z_\nu^2)$, $\psi(z_\nu^2)$, avec une très petite précision. Mais, comme dans ce calcul les premiers chiffres peuvent se détruire (cf. l'exemple du No. 92), il faudra généralement utiliser *plusieurs* chiffres de z_ν. De l'autre côté, si l'on calcule les valeurs de $\varphi(z_\nu^2)$ et $\psi(z_\nu^2)$ avec une grande précision, on vérifie par cela même directement que z_ν est une racine de $f(z)$. Le procédé de Carvallo permet donc en partie de contrôler les calculs nécessaires pour la formation des transformées de Graeffe.

90. L'application de la méthode de Carvallo suppose la détermination complète des racines d'une des transformées de Graeffe. Cette détermination

[1] Carvallo (1), p. 6.

est immédiate, si une des transformées de Graeffe se décompose au sens des théorèmes fondamentaux II et III en équations des degrés 1 et 2. Il reste donc de traiter le cas où les transformées calculées restent pratiquement indécomposables, ou bien une des équations en lesquelles une de ces transformées se décompose, ait le degré > 2.

Il suffit évidemment de considérer le premier cas. Il se présente, si, après avoir calculé un certain nombre de transformées de Graeffe, on constate que toutes les déviations de leurs diagrammes restent $\leqq 9$ — dans le cas contraire on peut être assuré qu'en formant un nombre défini de transformées ultérieures, on arrive à une décomposition. —

On a alors en tout cas une valeur approchée r pour tous les modules des racines de $f(z)$. En introduisant la nouvelle variable $z - r$ on obtient l'équation

$$f(u + r) = g(u) = 0 \tag{90, 1}$$

dont les racines seront approximativement

$$2r \sin \frac{\varphi_\nu}{2} i e^{i\frac{\varphi_\nu}{2}}$$

si $re^{i\varphi_\nu}$ sont les valeurs approchées des racines de $f(z)$.

Généralement, si les modules de tous les φ_ν ne sont pas sensiblement les mêmes, l'équation $g(u) = 0$ aura des racines de modules sensiblement différents, et l'on obtiendra une décomposition en formant un certain nombre de transformées de $g(u)$.[1]

Si les transformées de $g(u)$, elles aussi, restent indécomposables, il faut conclure que les modules de tous les $\frac{\varphi_\nu}{2}$ sont près d'une même valeur $\frac{\varphi}{2}$, c'est à dire que toutes les racines de $f(z)$ sont situés dans le voisinage des deux valeurs $re^{\pm i\varphi}$.

Pour pousser plus loin le calcul des racines situées au voisinage de $re^{\pm i\varphi}$ on pourra mettre

$$z = re^{i\varphi} + z' \tag{90, 2}$$

et appliquer la méthode de Graeffe à l'équation obtenue.[2] En calculant la suite des transformées de cette nouvelle équation, on pourra séparer les racines de

[1] KRYLOFF (1), pp. 47, 48.
[2] Cf. ENCKE (1), pp. 163—168.

$f(z)$ situées au voisinage de $r e^{i\varphi}$ de celles situées au voisinage de $r e^{-i\varphi}$. Seulement dans le cas où toutes les racines de $f(z)$ sont situées au voisinage d'une seule des valeurs $r e^{\pm i\varphi}$, les transformées de Graeffe de notre équation pourraient rester pratiquement indécomposables. Mais dans ce cas on arrivera du moins à dégager »la partie principale de z'», c'est à dire à pousser plus loin le calcul de z, et ainsi de suite.

91. La méthode exposée au No. précédent repose sur l'application de la transformation *complexe* (90, 2) ce qui présente de grands inconvénients si les coefficients de $f(z)$, donc aussi ceux de $g(z)$, sont réels. On peut alors utiliser l'artifice suivant, qui permet de rester dans le domaine réel.

Soit $a + ib$ la valeur approchée d'une racine de $f(z)$. Alors, en posant

$$f(u + a) = g(u)$$

on obtient un polynôme $g(u)$ possédant des racines au voisinage de ib. En formant pour $v = u^2$ la première transformée de Graeffe de $g(u)$, $g_1(v)$, on obtient un polynôme en v possédant des racines dans le voisinage de $-b^2$. Enfin, en posant $v = w - b^2$, on obtient un polynôme

$$g_1(w - b^2) = h(w)$$

possédant au moins une racine au voisinage de 0.

Si w_0 est une telle racine, on obtient une racine correspondante z_0 de $f(z)$, en appliquant en particulier pour le passage de $g_1(v)$ à $g(u)$ l'artifice de Carvallo.

Notre transformation peut évidemment être écrite dans la forme

$$w = (z - a)^2 + b^2; \quad z = a \pm \sqrt{w - b^2}. \tag{91, 1}$$

En appliquant cette transformation au cas discuté au No. précédent, où les différences entre les x_ν, ainsi que celles entre les y_ν^2, sont très petites, on peut faire usage d'une règle plus simple. En effet, si $-a_1$ est la somme de toutes les racines de $f(z)$, une valeur approchée de leurs parties réelles est évidemment $\frac{-a_1}{n}$. Pour passer de $f(z)$ à $g(u)$ il suffira donc d'effectuer la transformation connue, pour faire 0 le coefficient de u^{n-1} en $g(u)$. De même on passe de $g_1(v)$ à $h(w)$ en transformant $g_1(v)$ de manière à rendre nul le coefficient de w^{n-1} en $h(w)$.

92. Nous allons traiter à titre d'exemple par la méthode indiquée au No. précédent l'équation suivante, considérée par Encke et Carvallo:[1]

$$f(z) \equiv z^4 + 4{,}002\,z^3 + 14{,}018\,01\,z^2 + 20{,}038\,02\,z + 25{,}070\,05. \tag{92, 1}$$

Les racines exactes de cette équation ont les valeurs

$$-1 + 2i \quad ; \quad -1 - 2i \quad ;$$

$$-1{,}001 + 2{,}003\,i; \quad -1{,}001 - 2{,}003\,i.$$

Donc les deux couples de racines complexes sont très approchés. On s'en aperçoit directement en formant les transformées de Graeffe de cette équation. En effet, voici la 8[ième] transformée $f_8(z)$ de $f(z)$, calculée par Carvallo avec 2 chiffres significatifs:

$$f_8(z) \equiv z^4 + 1{,}1 \cdot 10^{90} z^3 + 3{,}0 \cdot 10^{179} z^2 + 1{,}3 \cdot 10^{269} z + 1{,}5 \cdot 10^{358} = 0.$$

Ici toutes les déviations du diagramme de $f_8(z)$ sont évidemment < 3. On appliquera donc à $f(z)$ la transformation

$$z + 1{,}000\,5 = u \tag{92, 2}$$

et $f(z)$ devient

$$g(u) \equiv u^4 + 8{,}012\,008\,5\,u^2 - 12{,}009 \cdot 10^{-6}\,u + 16{,}048\,038\,003\,002\,312\,5. \tag{92, 3}$$

Il en résulte évidemment pour la 1[ière] transformée de Graeffe $g_1(v)$ de $g(u)$ l'expression

$$g_1(v) \equiv (v^2 + 8{,}012\,008\,5\,v + 16{,}048\,038\,003\,002\,312\,5)^2 - 12{,}009^2 \cdot 10^{-12}\,v.$$

Avant de développer cette expression, faisons ici la transformation

$$v + 4{,}006\,004\,25 = \frac{w}{1000}, \tag{92, 4}$$

de manière à rendre 0 le coefficient de la 3[ième] puissance de l'inconnue. Il vient après la multiplication par 10^{12}

$$h(w) \equiv (w^2 - 32{,}048\,015\,75)^2 - 0{,}120\,09^2 \cdot 10\,w + 4{,}006\,004\,25 \cdot 12{,}009^2.$$

[1] Cf. Encke (1), pp. 185—187, Carvallo (1), pp. 22, 23.

On peut enfin rendre la convergence du procédé de Graeffe pour $h(w)$ plus rapide par la transformation

$$w = w_1 + \alpha, \quad \alpha = \sqrt{32{,}048\,015\,75} = 5{,}661\,096\,691\,454\,8.$$

Alors $h(w)$ devient

$$k(w_1) \equiv w_1^4 + 4\,\alpha\, w_1^3 + 128{,}192\,063\, w_1^2 - 0{,}144\,216\,081\, w_1 + 576{,}913\,812\,225,$$

le dernier coefficient étant exact à $\frac{1}{2} \cdot 10^{-9}$ près.

En calculant les transformées de Graeffe de $k(w_1)$ on obtient

$$k_1(w_1) \equiv w_1^4 + 256{,}384\,126\, w_1^3 + 17\,593{,}564\,010\,0\, w_1^2 -$$
$$- 147\,911{,}522\,727\, w_1 + 332\,829{,}546\,736.$$

Le coefficient de w_1^3 est ici exact. Les 3 derniers coefficients sont exacts à la moitié de la dernière unité décimale près, et le même est vrai pour les coefficients de w_1^3, w_1^2, w_1^1, w_1^0 dans les expressions suivantes de $k_2(w_1)$ et $k_3(w_1)$:

$$k_2(w_1) \equiv w_1^4 + 30\,545{,}622\,045\, w_1^3 + 386\,043\,486{,}8\, w_1^2 +$$
$$+ 1\,016\,650\,269 \cdot 10^1\, w_1 + 1\,107\,755\,072 \cdot 10^2,$$

$$k_3(w_1) \equiv w_1^4 + 16{,}1 \cdot 10^7\, w_1^3 + 14{,}840\,871 \cdot 10^{16}\, w_1^2 + 17{,}8 \cdot 10^{18}\, w_1 + 12{,}271\,213 \cdot 10^{21}.$$

Pour cette dernière équation on a évidemment

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{122{,}7\ldots}{14{,}84\,\ldots}} \cdot 10^2 = 287, \ldots$$

$$R_3 = R_4 = \sqrt{14{,}84\ldots} \cdot 10^8 = 3{,}85\ldots \cdot 10^8;$$

$$D_1 = D_3 = 1; \quad D_2 = \frac{3{,}85\ldots}{2{,}87\ldots} \cdot 10^6 = 1{,}34\ldots \cdot 10^6.$$

Le 3$^{\text{ième}}$ théorème fondamental est donc applicable et $k_3(w_1)$ se décompose en 2 polynômes quadratiques $Q_1(w_1)$, $Q_2(w_1)$ approximativement égaux à

$$w_1^2 + 16{,}1 \cdot 10^7\, w_1 + 14{,}840\,871 \cdot 10^{16};$$

$$w_1^2 + \frac{17{,}8}{14{,}840\,871} \cdot 10^2\, w_1 + \frac{12{,}271\,213}{14{,}840\,871} \cdot 10^5,$$

où la borne de l'erreur, relativement à la majorante de Newton, est d'après (61, 7) $\leqq \frac{1}{1{,}34\ldots\cdot 10^6}$. On obtient donc:

$$Q_1(w_1) \equiv w_1^2 + 10^7 \cdot 16{,}1\, w_1 + 10^{16} \cdot 14{,}840\,87\,(\pm\ 1{,}3),^1$$

$$Q_2(w_1) \equiv w_1^2 + 10^2 \cdot 1{,}2\, w_1 + 10^4 \cdot 8{,}268\,526\,(\pm\ 6{,}5).$$

Les racines de ces deux polynômes étant complexes on a donc pour les racines w_1', w_1'' de $k(w_1)$ avec $\Im w_1' > 0$; $\Im w_1'' > 0$:

$$(92,\ 5)\qquad \begin{aligned} |w_1'|^{16} &= 10^{16} \cdot 14{,}840\,87\,(\pm\ 1{,}3), & |w_1''|^{16} &= 10^4 \cdot 8{,}268\,526\,(\pm\ 6{,}5),\\ |w_1'|^2 &= 140{,}098\,15\,(\pm\ 2{,}2), & |w_1''|^2 &= 4{,}117\,925\,(\pm\ 2). \end{aligned}$$

En posant

$$w_1' = x_1 + i\,y_1, \quad w_1'' = x_2 + i\,y_2$$

on obtient du polynôme $k(w_1)$ les relations suivantes pour x_1 et x_2:

$$x_1 + x_2 = -2\,\alpha = -11{,}322\,193\,243,$$

$$2\,|w_1''|^2 x_1 + 2\,|w_1'|^2 x_2 = 0{,}144\,216\,081,$$

et de ces relations les valeurs

$$(92,\ 6)\qquad \begin{aligned} x_1 &= -11{,}665\,596\,4\,(\pm\ 4),\\ x_2 &= 0{,}343\,403\,2\,(\pm\ 3). \end{aligned}$$

On obtient de ces valeurs celles de y_1, y_2:

$$y_1 = 2{,}000\,000\,(\pm\ 1),$$

$$y_2 = 2{,}003\,000\,(\pm\ 4{,}3).$$

Donc, d'après $w = w_1 + \alpha$, les racines correspondantes de $h(w)$ sont

$$w' = -6{,}004\,500\,0\,(\pm\ 4{,}5) + i \cdot 2{,}003\,000\,(\pm\ 4{,}3),$$

$$w'' = 6{,}004\,500\,0\,(\pm\ 4{,}5) + i \cdot 2{,}000\,000\,(\pm\ 1),$$

---

[1] Pour indiquer les limites d'indétermination d'un nombre, nous plaçons l'écart correspondant, exprimé en unités de la dernière décimale indiqué explicitement, entre parenthèses après le nombre; p. ex.: 2,0170 ($\pm$ 0,3) désigne $2{,}0170 \pm 0{,}3 \cdot 10^{-4}$.

et l'on a pour les racines correspondantes v', v'' de $g_1(v)$, en raison de (92, 4):

$$(92, 7) \qquad \begin{aligned} v' &= -4{,}012\,008\,750\,00\,(\pm 4{,}5) + i\cdot 0{,}002\,000\,000\,(\pm 1), \\ v'' &= -3{,}999\,999\,750\,0\;\,(\pm 4{,}5) + i\cdot 0{,}002\,003\,000\,(\pm 4{,}3). \end{aligned}$$

Pour déduire enfin de ces valeurs les valeurs correspondantes u', u'' de u, on pourrait appliquer l'artifice de Carvallo, en utilisant la formule suivante qui résulte de (92, 3):

$$u = \frac{10^6}{12{,}009}(v^2 + 8{,}012\,008\,5\,v + 16{,}048\,038\,003\,002\,312\,5);$$

or les modules de u', u'' étant approximativement égaux à 2, on voit que le module de l'expression entre paranthèses est $\leqq \frac{1}{4}\cdot 10^{-4}$. Donc en conduisant le calcul avec 4 chiffres significatifs — plus exactement avec 10^{-4} comme erreur relative — on n'obtiendra que la valeur 0 pour u et l'artifice de Carvallo n'est pas applicable. De l'autre côté, si le calcul est conduit avec les valeurs complètes (92, 7), on voit facilement qu'on n'obtient qu'au plus 7 chiffres significatifs exacts pour u.

Dans ces circonstances il est préférable de conduire tout le calcul différemment. Au moyen de la relation

$$v = -4{,}006\,004\,25 + 10^{-3}\alpha + 10^{-3}w_1$$

on calcule directement $|v'|^2$, $|v''|^2$ en n'utilisant que les valeurs de $|w_1'|^2$, $|w_1''|^2$, x_1, x_2. De là on obtient $|u'|^2$, $|u''|^2$ en extrayant une racine carrée, et les parties réelles et imaginaires de u', u'' sont alors aisément obtenues en partant de $g(u)$.

En effet, posons

$$\beta = -4{,}006\,004\,25 + 10^{-3}\alpha = -4{,}000\,343\,153\,309.$$

On a

$$|v'|^2 = 10^{-6}|w_1'|^2 + 2\beta\cdot 10^{-3}x_1 + \beta^2.$$

Donc, en tenant compte des valeurs (92, 6):

$$|v'|^2 = 16{,}096\,218\,220\,0\,(\pm 21),$$
$$|v''|^2 = 16{,}000\,002\,000\,0\,(\pm 22)$$

et

$$|u'|^2 = |v'| = 4{,}012\,009\,250\,0\,(\pm 4{,}5),$$
$$|u''|^2 = |v''| = 4{,}000\,000\,250\,0\,(\pm 3).$$

Or, posons

$$u' = \xi_1 + i\eta_1, \quad u'' = \xi_2 + i\eta_2.$$

Il résulte de (92, 3)

$$\xi_1 = -\xi_2,$$
$$2|u''|^2\xi_1 + 2|u'|^2\xi_2 = 2(|u'|^2 - |u''|^2)\xi_2 = 12{,}009 \cdot 10^{-6},$$
$$(2 \cdot 0{,}012\,009 \pm 15 \cdot 10^{-10})\xi_2 = 10^{-6} \cdot 12{,}009,$$
$$\xi_2 = -\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \pm 3{,}2 \cdot 10^{-11}.$$

Il en résulte maintenant

$$\eta_1^2 = 4{,}012\,009 \pm 4{,}6 \cdot 10^{-10}, \quad \eta_1 = 2{,}003 \pm 2 \cdot 10^{-10}$$

et

$$\eta_2^2 = 4 \pm 3{,}1 \cdot 10^{-10}, \quad \eta_2 = 2 \pm 10^{-10}.$$

On obtient maintenant en raison de (92, 2) pour z_1 et z_2:

$$z_1 = -1{,}001 + 2{,}003\,i, \quad z_2 = -1 + 2i$$

les valeurs obtenues étant exactes à 2 unités de la 10ième décimale près.

93. Comme deuxième exemple nous allons analyser un cas dans lequel, probablement, le calcul des transformées de Graeffe a été poussé le plus loin, jusqu'à la treizième transformée. Il s'agit de l'équation

$$f(z) \equiv z^{13} - z^2 - z - 1 = 0,$$

rencontrée par M. E. J. Gumbel[1] dans ses recherches sur la statistique des populations.

Pour démontrer que la seule racine positive de cette équation

$$z_1 = 1{,}096\,1$$

est plus grande que les modules de toutes les autres racines[2] M. Gumbel calcule

---

[1] GUMBEL (1), pp. 259—262.

[2] Il n'est pas inutile de remarquer que ce fait se démontre aisément sans aucun calcul. En effet l'équation de M. GUMBEL possède d'après la règle de DESCARTES une seule racine positive R. Or, si z est une autre racine de cette équation on a évidemment $|z^{13}| \leqq |z^2| + |z| + 1$, $|z|^{13} - |z|^2 - |z| - 1 \leqq 0$. Donc on a en tout cas $|z| \leqq R$. Mais le signe d'égalité n'est possible que si l'on a $\frac{z^2}{z} = \frac{|z|^2}{|z|}$, c'est à dire pour z positif.

les 13 transformées de Graeffe de cette équation, en calculant les coefficients des 4 premières transformées exactement et en se bornant ensuite pour chaque coefficient à 3 chiffres significatifs.

Pour pouvoir contrôler directement les résultats du calcul de M. Gumbel, nous avons calculé par une méthode particulière les 13 racines de $f(z)$ et en déduit les valeurs des coefficients de la 9-ième et de la 13-ième transformées.

$f(z)$ possède, sauf la racine réelle z_1, 12 racines complexes que nous avons ordonnées dans l'ordre des modules décroissants.

Dans ce qui suit nous désignons par $f_9(z)$ et $f_{13}(z)$ la 9-ième et la 13-ième transformées, calculées par M. Gumbel; par $f_9^*(z)$ et $f_{13}^*(z)$ la 9-ième et la 13-ième transformées, calculées en partant des valeurs des racines.

Dans $f_9^*(z)$ nous avons conservé dans chaque coefficient 3 chiffres significatifs, dans $f_{13}^*(z)$ nous n'en avons retenu que 2.

Nous avons rassemblé les résultats dans les 2 tables suivantes.

Table I.

	φ	ϱ	$\varrho(f_9)$	$\varrho(f_{13})$
z_1	$0°\ 00'\ 00'',00$	1,0961290	1,0962	1,09611
$z_{2,3}$	$30°\ 08'\ 49'',98$	1,0875214	1,0874	1,08747
$z_{4,5}$	$60°\ 14'\ 22'',16$	1,0593267	1,05939	1,05939
$z_{6,7}$	$90°\ 00'\ 00'',00$	1,0000000	1,0000	1,0003
$z_{8,9}$	$165°\ 00'\ 55'',94$	0,9941513	0,9942	0,99383
$z_{10,11}$	$135°\ 59'\ 02'',24$	0,9357966	0,9358	0,93578
$z_{12,13}$	$115°\ 18'\ 34'',57$	0,8911842	0,8912	0,89119

Dans la table I on trouve dans la première colonne les arguments des racines situées dans le demiplan supérieur, dans la 2ième colonne les modules des racines avec 7 décimales, dans la 3ième les valeurs des modules des racines déduits de $f_9(z)$, et dans la 4ième ceux déduits de $f_{13}(z)$ avec 4 ou 5 décimales.

Dans la table II on trouve les valeurs des coefficients a_ν de $z^{13-\nu}$ pour $f_9^*(z)$, $f_9(z)$, $f_{13}^*(z)$, $f_{13}(z)$.[1]

En analysant la table II on voit que les erreurs relatives des coefficients de $f_9(z)$ comportent au plus 13 %. Quant aux indices impairs — qui sont les seuls utilisés pour le calcul des modules des racines — les erreurs correspon-

[1] Nous avons seulement changé la valeur de a_6 qui contient chez M. GUMBEL une faute évidente d'impression.

Table II.

	$f_9^*(z)$	$f_9(z)$	$f_{13}^*(z)$	$f_{13}(z)$
a_1	$2{,}63\ 10^{20}$	$2{,}61\ 10^{20}$	$3{,}5\ 10^{326}$	$3{,}13\ 10^{326}$
a_2	$1{,}64\ 10^{39}$	$1{,}63\ 10^{39}$	$1{,}26\ 10^{625}$	$1{,}28\ 10^{625}$
a_3	$5{,}3\ 10^{57}$	$4{,}96\ 10^{57}$	$3{,}5\ 10^{923}$	$1{,}34\ 10^{923}$
a_4	$-3{,}15\ 10^{70}$	$-2{,}78\ 10^{70}$	$1{,}6\ 10^{1128}$	$4{,}02\ 10^{1128}$
a_5	$2{,}23\ 10^{83}$	$2{,}25\ 10^{83}$	$4{,}3\ 10^{1333}$	$4{,}29\ 10^{1333}$
a_6	$4{,}4\ 10^{83}$	$4{,}7\ 10^{83}$	$8{,}6\ 10^{1333}$	$9{,}6\ 10^{1335}$
a_7	$2{,}1\ 10^{83}$	$2{,}14\ 10^{83}$	$4{,}3\ 10^{1333}$	$1{,}17\ 10^{1336}$
a_8	$-8{,}4\ 10^{81}$	$-7{,}3\ 10^{81}$	$1{,}15\ 10^{1313}$	$1{,}8\ 10^{1311}$
a_9	$5{,}54\ 10^{80}$	$5{,}62\ 10^{80}$	$7{,}9\ 10^{1291}$	$9{,}96\ 10^{1291}$
a_{10}	$-1{,}57\ 10^{66}$	$-1{,}59\ 10^{66}$	$-1{,}0\ 10^{1056}$	$-1{,}24\ 10^{1056}$
a_{11}	$1{,}71\ 10^{51}$	$1{,}71\ 10^{51}$	$5{,}4\ 10^{819}$	$5{,}3\ 10^{819}$
a_{12}	$8{,}27\ 10^{25}$	$7{,}8\ 10^{25}$	$1{,}3\ 10^{410}$	$7{,}9\ 10^{409}$

dantes sont un peu plus petites, l'erreur relative maximum comportant — pour a_3 — 6,4 %, ce qui limite le nombre de décimales exactes des racines à 4.

Dans le cas de $f_{13}(z)$ les valeurs a_6, a_7, a_8 sont affectées d'erreurs relativement grandes qui proviennent peut-être d'erreurs de calcul.

C'est pourquoi les modules de $z_{6,7}$ et $z_{8,9}$ déduits de $f_{13}(z)$ sont moins précis que ceux déduits de $f_9(z)$.

Quant aux coefficients de $f_{13}(z)$, ils sont encore affectés d'erreurs allant jusqu'à 150 %, mais celles des coefficients d'ordre impair comportent au plus 25 %, ce qui limite la précision des valeurs des modules des racines correspondantes à la $5^{\text{ième}}$ décimale.

Le diagramme de Newton de $f_9(z)$ est reproduit dans la fig. 2 où les valeurs des déviations sont inscrites à côté des points correspondants du diagramme.

Les déviations aux indices pairs étant toutes $\geqq 42 > 18{,}6$, on parvient donc déjà avec $f_9(z)$ à une séparation de la racine réelle et des couples de racines complexes, et le $2^{\text{ième}}$ et le $3^{\text{ième}}$ théorèmes fondamentaux deviennent applicables.

La borne de l'erreur pour la racine réelle, déduite de (33, 9), est ici 5,5 %, donc pour la $512^{\text{ième}}$ racine 0,01 %, ce qui est d'accord avec la table I.

En appliquant le troisième théorème fondamental B, on aura pour δ_0 chaque fois $\delta_0 \leqq \frac{1}{34{,}5} < 0{,}03$. Donc, en décomposant $f_9(z)$ en produit d'un facteur linéare et de 6 facteurs quadratiques, on aura les coefficients de ces facteurs exactes à

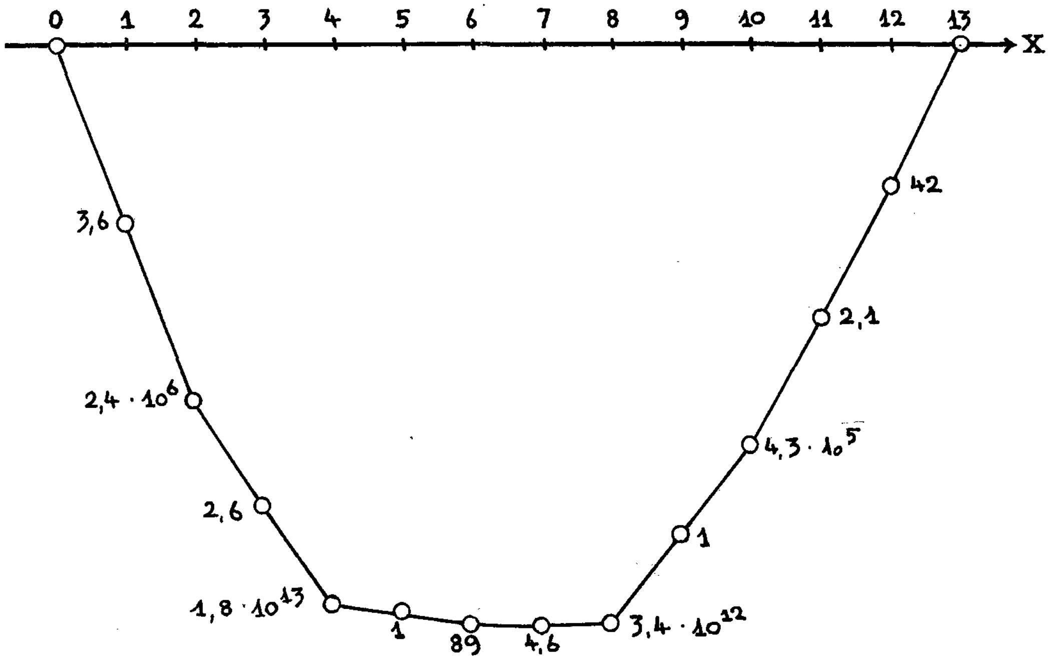

Fig. 2.

3 % près. Dès lors on vérifie immédiatement que $f_9(z)$ possède une racine réelle et 5 couples de racines complexes, seulement pour la racine $z_{6,7}$ la question ne peut pas être résolue — il s'agit des racines correspondant à la double racine $z = 1$ de $f_9^*(z)$, puissance des racines $\pm i$ de $f(z)$.

En tout cas, les bornes des erreurs données par le 3ième théorème fondamental B sont pour les modules des racines $z_2, \ldots, z_{13}$ d'accord avec la table I.

Toutefois, puisque plusieurs coefficients de $f_9(z)$ sont affectés d'une erreur de 3 %, on améliore le résultat en décomposant $f_9(z)$ en 3 facteurs quadratiques, un facteur cubique et un facteur biquadratique, situés respectivement »au dessus» des segments

$$\langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 8, 10 \rangle, \langle 10, 13 \rangle, \langle 4, 8 \rangle$$

de l'axe de x dans le diagramme de Newton.

En effet, les erreurs relatives des coefficients de ces facteurs, déduites de (62, 5), sont plus petites que 10^{-5}, c'est à dire négligeables vis à vis des erreurs dont les coefficients de $f_9(z)$ sont déjà affectés.

C'est pourquoi les modules des racines $z_{4,5}$, $z_{10,11}$, $z_{12,13}$, déduits de $f_{13}(z)$, ne présentent aucune amélioration vis-à-vis des valeurs déduites de $f_9(z)$.

94. Comme dernier exemple nous allons traiter l'équation

$$f_0(x) \equiv x^5 - 16\,x^4 + 86{,}19\,x^3 - 202{,}28\,x^2 + 207{,}65\,x - 76{,}56 = 0.$$

En calculant les 4 premières transformées de $f_0(x)$ on a:

$$f_1(x) \equiv x^5 - 83{,}62\,x^4 + 1\,371{,}056\,1\,x^3 - 7\,572{,}411\,4\,x^2 + 12\,145{,}409\,x - 5\,861{,}433\,6$$

$$f_2(x) \equiv x^5 - 4\,250{,}192\,2\,x^4 + 637\,675{,}56\,x^3 - 25\,017\,606\,x^2 + 58\,740\,587\,x - \\ - 34\,356\,404,$$

$$f_3(x) \equiv x^5 - 16\,788\,783\,x^4 + 1{,}940\,883\,3\,(\pm\,2{,}5)\cdot 10^{11}\,x^3 - 5{,}512\,577\,8\,(\pm\,2{,}6)\cdot 10^{14}\,x^2 + \\ + 1{,}731\,426\,6\,(\pm\,2)\cdot 10^{15}\,x - 1{,}180\,362\,5\,(\pm\,1{,}5)\cdot 10^{15},$$

$$f_4(x) \equiv x^5 - 2{,}814\,750\,6\cdot 10^{14}\,x^4 + 1{,}916\,039\,(\pm\,1{,}1)\cdot 10^{22}\,x^3 - \\ - 3{,}032\,130\,8\,(\pm\,3{,}5)\cdot 10^{29}\,x^2 + 1{,}696\,470\,0\,(\pm\,8{,}4)\cdot 10^{30}\,x - \\ - 1{,}393\,255\,6\,(\pm\,4)\cdot 10^{30}.$$

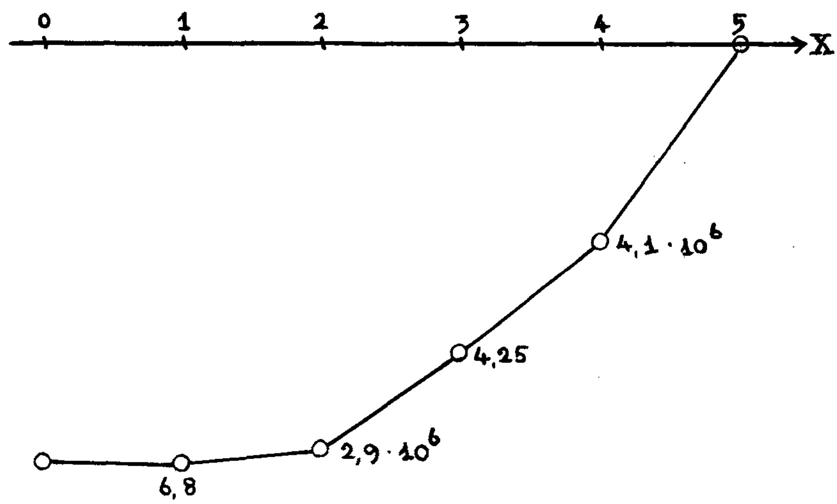

Fig. 3.

On trouve le diagramme de Newton de $f_4(x)$ dans la fig. 3. Les inclinaisons numériques correspondantes sont:

$$R_1 = 0{,}82, \quad R_2 = 5{,}6, \quad R_3 = 1{,}6\cdot 10^7,$$
$$R_4 = 6{,}8\cdot 10^7, \quad R_5 = 2{,}8\cdot 10^{14}.$$

Tous les sommets du diagramme correspondent aux indices principaux et les déviations correspondantes sont:

$$D_1 = 6{,}8, \quad D_2 = 2{,}9 \cdot 10^6, \quad D_3 = 4{,}25, \quad D_4 = 4{,}1 \cdot 10^6.$$

Donc, d'après le troisième théorème fondamental, $f_4(x)$ se décompose en produit d'un facteur linéaire et de 2 facteurs quadratiques:

$$L(x) \equiv x - 2{,}814\,750\,6\,(\pm\,2{,}5) \cdot 10^{14},$$
$$Q_1(x) \equiv x^2 - 6{,}807\,136\,(\pm\,9) \cdot 10^7 x + 1{,}077\,228\,9\,(\pm\,9) \cdot 10^{15},$$
$$Q_2(x) \equiv x^2 - 5{,}594\,976\,(\pm\,7)\,x + 4{,}594\,971\,(\pm\,4),$$

où les erreurs relatives de $L(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sont d'après (61, 7) et (62, 5) respectivement

$$2{,}4 \cdot 10^{-7}; \quad 6{,}9 \cdot 10^{-7}; \quad 3{,}45 \cdot 10^{-7}.$$

Il en résulte pour la racine de module maximum

$$x_1^{16} = 2{,}814\,750\,6\,(\pm\,2{,}5) \cdot 10^{14}.$$

Les racines de $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sont respectivement

$$x_2^{16} = 4{,}304\,67\,(\pm\,4{,}7) \cdot 10^7, \quad x_3^{16} = 2{,}502\,47\,(\pm\,4{,}7) \cdot 10^7,$$
$$x_4^{16} = 4{,}594\,98\,(\pm\,2{,}4), \quad x_5^{16} = 1\,(\pm\,2{,}4) \cdot 10^{-5}.$$

Donc on obtient comme racines de $f_0(x)$:

$$x_1 = 8 \pm 10^{-6}, \quad x_2 = 3 \pm 3 \cdot 10^{-6}, \quad x_3 = 2{,}9 \pm 4 \cdot 10^{-6},$$
$$x_4 = 1{,}1 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-6}, \quad x_5 = 1 \pm 1{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

Le quotient des 2 racines de $Q_1(x)$ étant 1,7, il aurait fallu aller jusqu'à la huitième transformée de $f_0(x)$ pour »séparer» toutes les racines à 10^{-3} près.

95. Disons, pour finir, quelques mots sur un procédé pour améliorer les résultats de la méthode de Graeffe, qui a été appliqué dans quelques exemples numériques par C. Runge.[1]

Si $x_1', \ldots, x_n'$ sont respectivement des valeurs approchées des n racines $x_1, \ldots, x_n$ du polynôme

95, 1) $$f(z) \equiv z^n + \cdots = \prod_{\nu=1}^{n} (z - x_\nu),$$

[1] Runge (1), pp. 141, 148; Runge u. König (1), pp. 173—176.

il en résulte

$$x_1' - x_1 = \frac{f(x_1')}{\prod_{\nu=2}^{n} (x_1' - x_\nu)}.$$

Donc, en remplaçant les racines inconnues $x_2, \ldots, x_n$ par leurs valeurs approchées $x_2', \ldots, x_n'$, on obtient comme une valeur approchée de $x_1' - x_1$ l'expression

$$\frac{f(x_1')}{\prod_{\nu=2}^{n} (x_1' - x_\nu')}, \tag{95, 2}$$

qui est assez facile à calculer.

Dans quelles circonstances ce procédé sera-t-il avantageux?

Le procédé de Runge consiste évidemment à remplacer la première approximation x_1' par

$$x_1'' = x_1' - \frac{f(x_1')}{\prod_{\nu=2}^{n} (x_1' - x_\nu')} \tag{95, 3}$$

comme seconde approximation de x_1. Or cette formule se déduit évidemment de la formule de Newton $\bar{x}_1 = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}$ en remplaçant $f'(x_1')$ par sa valeur approchée $\prod_{\nu=2}^{n} (x_1' - x_\nu')$.

On a donc

$$x_1'' - x_1' = (1 + \varepsilon)(\bar{x}_1 - x_1') \tag{95, 4}$$

où ε est défini par

$$(1 + \varepsilon) \prod_{\nu=2}^{n} (x_1' - x_\nu') = f'(x_1'). \tag{95, 5}$$

Pour déterminer la valeur de ε, on peut utiliser les identités suivantes:

$$\lg f'(x_1') - \lg \prod_{\nu=2}^{n} (x_1' - x_\nu) = \lg \left\{1 + (x_1' - x_1) \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{x_1' - x_\nu}\right\}, \tag{95, 6}$$

$$\lg \prod_{\nu=2}^{n} (x_1' - x_\nu) - \lg \prod_{\nu=2}^{n} (x_1' - x_\nu') = \sum_{\nu=2}^{n} \lg \left\{1 + \frac{x_\nu' - x_\nu}{x_1' - x_\nu'}\right\}. \tag{95, 7}$$

Il en résulte évidemment pour ε la relation

$$(95, 8)\qquad \lg(1+\varepsilon)=\lg\left\{1+(x_1'-x_1)\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{x_1'-x_\nu}\right\}+\sum_{\nu=2}^{n}\lg\left\{1+\frac{x_\nu'-x_\nu}{x_1'-x_\nu'}\right\}.$$

Or, posons

$$\delta_\nu = x_\nu' - x_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

et supposons que les carrés des δ_ν sont négligables vis-à-vis des δ_ν. Alors on obtient évidemment

$$(95, 9)\qquad \varepsilon \sim \sum_{\nu=2}^{n}\frac{\delta_1+\delta_\nu}{x_1-x_\nu}.$$

Mais on sait que la différence $\bar{x}_1 - x_1$ a l'ordre de δ_1^2. Donc l'erreur commise en remplaçant $\bar{x}_1$ par x_1'' sera négligeable si ε est sensiblement de l'ordre de δ_1. Or, l'expression de ε contient à côté de δ_1 tous les autres δ_ν et en plus les différences $x_1 - x_\nu$ aux dénominateurs, qui pourraient être bien petites.

Donc on voit que l'emploi du procédé de Runge ne présente des avantages que si

1. tous les δ_ν sont sensiblement du même ordre de grandeur;
2. si les différences $x_\mu - x_\nu$ des racines ne sont pas trop petites.

En tous cas ce procédé ne parait pas avantageux si l'on veut améliorer considérablement l'approximation.