LE PROBLÈME DE M. HADAMARD RELATIF À LA DIFFUSION DES ONDES.

PAR

MYRON MATHISSON

à VARSOVIE.

§ 1. Introduction.

En donnant au *principe de Huygens* la forme d'un syllogisme, M. Hadamard a établi une hiérarchie dans les énoncés divers et nullement équivalents de ce principe, pour s'attacher ensuite à l'étude de la proposition qu'il appelle la *mineure* de Huygens.[1] On peut présenter le *problème de M. Hadamard* sous la forme suivante. Un problème de Cauchy soit posé pour l'équation générale

$$\text{(A)} \qquad \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{m} A_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=0}^{m} B_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C u = T$$

du type hyperbolique normal, c'est-à-dire, ayant la forme caractéristique indéfinie, à m dimensions positives ou à m dimensions négatives; $A_{\alpha\beta}$, B_α, C sont des fonctions connues des x_α. Soit $\Delta(O)$ le cône caractéristique rétrograde issu du point $O(\xi) = O(\xi_0, \ldots, \xi_m)$ et qui découpe à la surface qui porte les données de Cauchy une portion S. Envisageons les équations (A) *homogènes: T* (qui est, en général, une fonction donnée des x_α) égal à zéro. Admettons ensuite que, dans le domaine S, les données de Cauchy sont nulles partout excepté une région ϱ située tout entière à l'intérieur de S et n'ayant avec $\Delta(O)$ de points communs. Il est des équations, par exemple l'équation des ondes hypersphériques

[1] *voir* ses *Lectures on Cauchy's Problem* et l'édition française de cet ouvrage: *Le problème de Cauchy* (Paris, Hermann, 1932), pp. 75, 239, 324. Voir aussi l'exposé de M. Hadamard dans le *Bull. Soc. Math. Fr.* tome LII, p. 610 (1924).

32—3932. *Acta mathematica.* 71. Imprimé le 11 septembre 1939.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right) = T \tag{E$_m$}$$

telles que leur intégrale $u(\xi)$ ayant pour argument le point $O(\xi)$ est pour un problème ainsi posé nulle *identiquement*, c'est-à-dire en tous les points-arguments, pour toutes les régions ϱ et pour toutes les données de Cauchy (fonctions, surfaces qui les portent) qui satisfont aux conditions énumérées. *Le problème de M. Hadamard consiste en la recherche des équations de cette espèce.* Nous les nommerons des *équations à ondes pures*, en les opposant ainsi aux équations des ondes *à diffusion*. (Ces deux espèces représentent ensemble la totalité des équations du type hyperbolique normal qui sont des équations des ondes).

Les équations dont il est question étant linéaires, si les données de Cauchy se composent additivement de deux parties régulières portées par la même surface, la solution est la somme de deux solutions correspondantes, et comme, dans le cas des ondes pures, les données situées à l'intérieur du cône $\Delta(O)$ et qui ne touchent pas à sa surface mèneraient, à elles seules, à une solution qui s'annule au sommet $O(\xi)$ du cône $\Delta(O)$, on a le principe suivant qui est en même temps la définition d'une équation à ondes pures:

Principe de variation des données. *Une équation à ondes pures étant donnée, on peut varier d'une façon quelconque les données de Cauchy dans une région ϱ intérieure au cône $\Delta(O)$ et n'ayant avec lui de points communs, sans que l'intégrale $u(\xi)$ au sommet de ce cône en soit changée, supposé que la variation ne fait pas perdre aux données leur régularité requise par la théorie d'intégration.*

Et voici comment le problème de M. Hadamard se rattache à la *mineure* de Huygens. L'ensemble des points $O(\xi)$ dans lesquels l'intégrale $u(\xi)$ n'est pas nulle identiquement est défini, pour les équations à ondes pures, par la propriété que les cônes $\Delta(O)$ coupent notre domaine ϱ. Tous ces points sont donc au voisinage, d'autant plus étroit que ϱ est plus petit, d'un cône caractéristique *ouvert sur l'avenir* (si nous regardons $\Delta(O)$ comme *ouvert dans le passé*) et issu d'un point à l'intérieur de ϱ. La *mineure* de Huygens ne fait que traduire cette image de propagation d'une impulsion localisée initialement dans ϱ.

Le problème que M. Hadamard s'était posé d'abord était de signaler les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire une équation du type hyperbolique normal pour être une équation à ondes pures. M. Hadamard a résolu ce problème interprété en son sens large. Il a démontré d'une part que toute équation (A) à un nombre impair de variables indépendantes est une équation à diffusion: contrairement à ce qui se présente pour les équations à ondes pures, les régions à l'intérieur du cône $\Delta(O)$ contribuent ici à la valeur $u(\xi)$ de l'intégrale en $O(\xi)$. D'autre part, pour les équations à un nombre de variables pair et égal à 4, 6, etc. (le cas de deux variables est toujours un cas à diffusion, comme le montre déjà la méthode d'intégration de Riemann), M. Hadamard a trouvé une condition qui doit être remplie et qui suffit pour que la diffusion n'apparaisse pas. De cette condition qui s'exprime au moyen de sa *solution élémentaire*, M. Hadamard dit qu'elle donne *une* réponse à son problème, mais non *la* réponse, et qu'on le souhaiterait »beaucoup plus résolu» qu'il ne venait de l'être. En effet, ce qu'on désirerait savoir avant tout, c'est s'il existe des équations à ondes pures en dehors des équations (E_m) et, naturellement, en dehors des équations qu'on peut en déduire par des transformations évidentes. La condition de M. Hadamard ne nous en dit rien; et, en général, il semble fort malaisé d'en tirer des indications plus précises sur la *forme* des équations à ondes pures. C'est pourquoi nous restreindrons, avec M. Hadamard, son problème, en nous proposant de *former toutes les équations à ondes pures, c'est-à-dire de les écrire explicitement, dans leur forme générale.*

Nous nous bornons ici au cas de quatre variables et des coefficients $A_{\alpha\beta}$ constants. Cela nous permettra de présenter notre méthode avec le plus de simplicité, et il suffit de modifications plutôt techniques pour traiter d'une manière analogue le cas des $A_{\alpha\beta}$ variables, ce que nous faisons ailleurs.

La propriété qui distingue la classe d'équations cherchée est une propriété de leurs intégrales. On n'abordera donc pas le problème que nous venons d'énoncer autrement qu'à travers une théorie d'intégration des équations hyperboliques. La méthode d'intégration créée par M. Hadamard s'inspirait des équations à nombre de variables impair. C'est pour cela, peut-être, que cette méthode s'est montrée assez mal adaptée au problème des ondes pures qui n'existait, comme M. Hadamard l'a montré, que pour un nombre pair de variables.

Nous aborderons le problème de M. Hadamard en prenant pour point de départ la méthode d'intégration que nous avons développée pour les équations à nombre des variables *pair* et aux $A_{\alpha\beta}$ *variables*.[1] Il faudra la décharger cependant du calcul différentiel absolu (dont nous nous sommes servi d'une façon essen-

[1] M. Mathisson: *Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischem Typus*, Math. Annalen, Bd. 107, page 400 (1932) et une correction dans le même volume.
M. Mathisson: *Die Parametrixmethode in Anwendung auf hyperbolische Gleichungssysteme*, Prace Matematyczno-Fizyczne, vol. 41, page 177, Warszawa 1933.

tielle dans nos travaux cités) qui forme, d'ailleurs, un obstacle pour plusieurs mathématiciens, — un remaniement réalisable sans difficultés dans le cas des $A_{\alpha\beta}$ constants. Il faudra aussi renoncer au problème de Cauchy simplifié qui nous a suffi pour présenter notre méthode d'intégration mais qui est insuffisant pour les applications que nous avons en vue.[1]

Nous avons à intégrer l'équation

$$(1,1) \qquad F(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + \sum_{\alpha=0}^{3} A^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C u = T,$$

avec les valeurs initiales

$$(1,2) \qquad u(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial u}{\partial x_0}(0, x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3)$$

sur le plan (ou, plus exactement, l'hyperplan) $x_0 = 0$. Les coefficients A^α, C et le second membre T sont des fonctions connues des variables x_α et d'une régularité que nous supposons suffisante pour justifier nos opérations.

L'équation adjointe a la forme

$$(1,3) \qquad G(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}\right) - \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial (A^\alpha v)}{\partial x_\alpha} + C v = 0.$$

On a, d'après le théorème connu,

$$(1,4) \quad \int\limits_D [v F(u) - u G(v)]\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int\limits_\Delta \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u v\right) d\Delta,$$

où D signifie un domaine à quatre dimensions et Δ la surface qui le renferme; $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée dans la direction de la *conormale* de Δ; k^α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ sont les cosinus directeurs de cette conormale. Les A_α à indices inférieurs sont définis par

$$A_0 = A^0, \quad A_i = -A^i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Pour D nous prenons le domaine limité par le cône caractéristique $\Delta(O)$ dont le sommet est le point[2] $O(\xi)$, par la surface S de Cauchy (le plan $x_0 = 0$) et

[1] Nous devons à Mme Irène Mathisson la présentation que nous donnons ici de notre méthode d'intégration.

[2] Nous écrivons (x) et (ξ) au lieu de (x_0, x_1, x_2, x_3) et $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

par le cylindre mince Γ construit autour de l'axe du cône (Fig. 1). (Il est à peine nécessaire de remarquer qu'il s'agit d'hypercône et d'hypercylindre.)

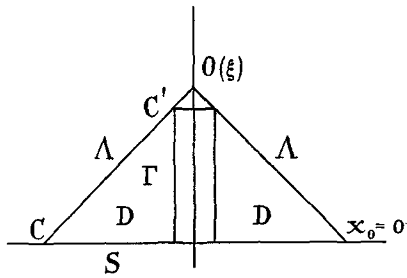

Fig. 1.

Le théorème (1, 4) a maintenant la forme

$$(1,5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_D [v\,F(u) - u\,G(v)]\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int\limits_\Lambda \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u v\right) d\Lambda + \\ \displaystyle + \int\limits_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u v\right) d\Gamma + \int\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u v\right) dS. \end{cases}$$

Nous allons transformer chaque terme de la somme du second membre.

1) *L'intégrale étendue au cône Λ.*

Soit

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}.$$

Les k^α sont proportionnels à

$$-1, \quad \frac{x_1 - \xi_1}{r}, \quad \frac{x_2 - \xi_2}{r}, \quad \frac{x_3 - \xi_3}{r}.$$

La conormale a la direction de la génératrice du cône; les équations d'une génératrice ont la forme

$$(1,6)\qquad \frac{\partial x_0}{\partial r} = -1, \quad \frac{\partial x_i}{\partial r} = \frac{x_i - \xi_i}{r} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Le long d'une génératrice, une fonction $f(x)$ quelconque devient fonction de r seul, et on a, en vertu de (1, 6),

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i - \xi_i}{r} = \frac{df}{dr}.$$

Nous réservons le signe $\frac{d}{d\,r}$ *aux dérivations le long d'une génératrice de* $\mathcal{A}$. Dans la formule (1, 5) il faut poser

$$d\,\mathcal{A} = r^2\, d\,r\, d\,\omega,$$

où $d\,\omega$ est un angle solide élémentaire.

Un calcul facile donne

$$(1,7)\qquad \int\limits_{\mathcal{A}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u\, v \right) d\,\mathcal{A} = \int\limits_{\mathcal{A}} \left[-\frac{d\,(r^2\,u\,v)}{d\,r} + 2\,r^2\,u\,\Pi(v) \right] d\,r\,d\,\omega,$$

où

$$(1,8)\qquad \Pi(v) \equiv \frac{d\,v}{d\,r} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha \right) v.$$

Nous définissons la fonction auxiliaire v de façon qu'il y ait

$$(1,9)\qquad \Pi(v) = 0.$$

L'intégrale de cette équation differentielle ordinaire donne la fonction v le long d'une génératrice de $\mathcal{A}$ et dépend d'une constante arbitraire. En fixant cette constante, nous posons pour toutes les génératrices

$$(1,10)\qquad v = \frac{1}{r}\, e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^r A_\alpha k^\alpha d\,r}.$$

Ainsi, la fonction auxiliaire se trouve définie pour deux points-arguments $O(\xi)$ et $A(x)$ dont le premier est le sommet d'un cône $\mathcal{A}(O)$ et le second se trouve sur la nappe du même cône. Nous définissons la fonction $v(\xi, x)$ pour deux points $O(\xi)$ et $A(x)$ quelconques par la construction suivante (dont la précédente est un cas particulier). La droite

$$(1,11)\qquad x_1 = \xi_1,\quad x_2 = \xi_2,\quad x_3 = \xi_3$$

étant l'axe de $\mathcal{A}(O)$, nous construisons le cône $\mathcal{A}(O')$ dont la nappe passe par $A(x)$ et dont le sommet $O'(\xi')$ se trouve sur la droite (1, 11). La fonction $v(\xi, x)$ sera donnée par la formule (1, 10) à cela près que l'intégration de 0 à r sera à effectuer le long de la génératrice du cône $\mathcal{A}(O')$. Il est important de remarquer que, le point auxiliaire $O'(\xi')$ restant le même quand $O(\xi)$ se déplace le long de l'axe (1, 11), on a

$$\frac{\partial v(\xi, x)}{\partial \xi_0} = 0.$$

Grâce à notre choix de la fonction v, on peut intégrer par rapport à ξ_0 le second membre de l'égalité (1, 7), et on a

$$\int_{\Lambda} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u v \right) d \Lambda = + \int_{C_1} r^2 u v \, d \omega - \int_{C} r^2 u v \, d \omega,$$

où C_1 est la surface d'intersection du cône $\Lambda(O)$ et du cylindre Γ, et C est la trace du cône $\Lambda(O)$ sur le plan S. Quand on contracte le cylindre Γ en le faisant coïncider à la limite avec son axe, l'intégrale $\int_{C_1} r^2 u v \, d\omega$ tend vers zéro, et on a

$$\int_{\Lambda} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u v \right) d \Lambda = - \int_{C} r^2 u v \, d \omega. \tag{1, 12}$$

2) *L'intégrale étendue au cylindre Γ.*

On a

$$d \Gamma = r^2 \, d \omega \, d x_0,$$

$$k^0 = 0, \quad k^i = - \frac{x_i - \xi_i}{r} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial r}.$$

En contractant le cylindre $(r \to 0)$, nous obtenons

$$\int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u v \right) d \Gamma = 4 \pi \int_0^{\xi_0} u(x_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \, d x_0. \tag{1, 13}$$

3) *L'intégrale étendue à la surface de Cauchy.*

On a

$$d S = r^2 \, d r \, d \omega,$$

$$k^0 = + 1, \quad k^1 = k^2 = k^3 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x_0}.$$

Donc,

$$\int\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} - \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha k^\alpha u v\right) dS = \tag{1, 14}$$

$$= - \int\limits_S r^2 \left[u\left(A^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\frac{\partial u}{\partial x_0}\right] dr\, d\omega.$$

En rassemblant les formules (1, 12), (1, 13) et (1, 14) et en supposant que la fonction u est l'intégrale de l'équation (1, 1), nous déduisons de l'égalité (1, 5)

$$\int\limits_D [v\,T - u\,G(v)]\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = - \int\limits_C r^2 \varphi\, v\, d\omega + 4\pi \int\limits_0^{\xi_0} u\, dx_0 -$$

$$- \int\limits_S r^2 \left[\varphi\left(A^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\psi\right] dr\, d\omega.$$

En différentiant cette égalité par rapport à ξ_0, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi u(\xi) &= -\frac{\partial}{\partial \xi_0}\int\limits_D u\,G(v)\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \frac{\partial}{\partial \xi_0}\int\limits_D v\,T\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_0}\int\limits_S r^2\left[\varphi\left(A^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\psi\right] dr\,d\omega + \frac{\partial}{\partial \xi_0}\int\limits_C r^2 \varphi\, v\, d\omega. \end{aligned}\right. \tag{1, 15}$$

On peut effectuer la différentiation dans les trois premières intégrales. On a d'abord, en décomposant le champ d'intégration D en des couches côniques dont l'épaisseur dans la direction x_0 est dx_0:

$$\int\limits_D u\,G(v)\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int\limits_0^{\xi_0}\left[\int\limits_{A(O')} u\,G(v)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\right] dx_0,$$

$$O' \equiv O'(x_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

On obtient, en différentiant, la fonction sous le signe d'intégration étant indépendante de ξ_0:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0}\int\limits_D u\,G(v)\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int\limits_A u\,G(v)\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

D'une manière analogue,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} \int\limits_D v\, T\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int\limits_A v\, T\, dx_1\, dx_2\, dx_3 .$$

Enfin,

$$\int\limits_S r^2 \left[\varphi \left(A^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\psi\right] dr\, d\omega = \int\limits_0^{\xi_0} \left\{ \int\limits_c r^2 \left[\varphi \left(A^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + \psi v\right] d\omega \right\} dr ,$$

les c étant des sphères de rayon $r < \xi_0$; dans cette intégrale, nous avons décomposé le champ d'intégration en des couches sphériques d'épaisseur $dr - d\xi_0$. La différentiation par rapport à ξ_0 donne

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} \int\limits_S r^2 \left[\varphi \left(A^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\psi\right] dr\, d\omega = \int\limits_C r^2 \left[\varphi \left(A^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\psi\right] d\omega .$$

L'équation (1, 15) prend donc la forme

$$(1, 16) \qquad \begin{cases} 4\pi\, u(\xi) = - \int\limits_A u\, G(v)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \int\limits_A v\, T\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ + \int\limits_C r^2 \left[\varphi \left(A^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\psi\right] d\omega + \frac{\partial}{\partial \xi_0} \int\limits_C r^2 \varphi\, v\, d\omega . \end{cases}$$

C'est une équation de Fredholm au noyau $G(v)$. Ce noyau a un infini $\frac{1}{r^2}$ tout au plus, car les termes qui auraient éventuellement l'infini $\frac{1}{r^3}$ disparaissent (le laplacien de $\frac{1}{r}$ étant égal à zéro). On pourrait nommer (1, 16) *la formule de Poisson généralisée.*

§ 2. Une transformation d'intégrales.

Une équation

$$(2, 1) \qquad F(u) = T$$

avec les conditions initiales

$$(2, 2) \qquad \begin{cases} u(0, x_1, x_2, x_3,) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{\partial u}{\partial x_0}(0, x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

étant donnée, la solution du problème de Cauchy se trouve amenée à la solution de l'équation de Fredholm

$$(2,\ 3)\qquad u(\xi) = -\frac{1}{4\pi}\int_A u\, G(v)\, d\, V + f^{(1)}(\xi) + f^{(2)}(\xi),$$

$$d\, V = d\, x_1\, d\, x_2\, d\, x_3,$$

où G est l'adjointe de (2, 1),

$$(2,\ 4)\qquad f^{(1)}(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_A v\, T\, d\, V$$

et

$$f^{(2)}(\xi) = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_C r^2\left(v\,\psi - \varphi\frac{\partial v}{\partial x_0} + A^0\,\varphi\, v\right) d\,\omega + \frac{\partial}{\partial \xi_0}\int_C r^2\,\varphi\, v\, d\,\omega\right\}.$$

En effectuant la différentiation par rapport à ξ_0, on a en vertu de

$$d\,\xi_0 = d\, r,$$

$$(2,\ 5)\qquad f^{(2)}(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_C r^2\left[v\left(A^0\,\varphi + \frac{2\,\varphi}{r} + \psi + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right)\right] d\,\omega.$$

Les fonctions $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ offrent une analogie parfaite avec les potentiels retardés de l'équation des ondes sphériques. Les données du problème de Cauchy étalées sur S et leurs dérivées rencontrées par le cône $\varDelta(O)$ issu de $O(\xi)$ définissent la fonction

$$(2,\ 6)\qquad f(\xi) = f^{(1)}(\xi) + f^{(2)}(\xi)$$

de notre équation intégrale. Si les données s'annulent, tout en restant régulières, en dehors d'une région ϱ intérieure à la trace C de $\varDelta(O)$, alors, pour une équation (2, 1) homogène ($f^{(1)} = 0$),

$$f(\xi) = 0,$$

comme on voit immédiatement des formules (2, 4) et (2, 5). On peut dire, par conséquent, que, d'après notre équation intégrale (2, 3), chaque élément de la surface des données émet une onde pure en première approximation (pour une équation intégrale qui se résout par approximations successives, comme la nôtre, la fonction connue $f(\xi)$ étant une première approximation).

Envisageons le cas de $T = 0$, c'est-à-dire de

$$f(\xi) = f^{(2)}(\xi). \tag{2, 7}$$

C'est à partir de ce cas que nous avons donné, en suivant M. Hadamard, la définition d'une équation à ondes pures. D'après la remarque que nous venons de faire, il suffirait que l'équation intégrale se réduisît à

$$u(\xi) = f(\xi), \tag{2, 8}$$

pour que l'équation hyperbolique correspondante fût une équation à ondes pures. On s'attend à ce que l'équation (2, 8) en soit aussi la condition nécessaire. Car si l'équation

$$\int_{\varDelta} u\, G(v)\, d\, V = 0 \tag{2, 9}$$

(qui a pour conséquence l'équation (2, 8)) n'était pas vraie, les $u(x)$ sous le signe d'intégrale qui dépendent par l'intermédiaire de leur cônes $\varDelta(O)$ issus de points $P(x)$ des données intérieures à $\varDelta(O)$, introduiraient, en vertu de l'équation (2, 3), ces données dans $u(\xi)$, ce qui serait incompatible avec l'hypothèse des ondes pures. Pour arriver à une démonstration rigoureuse des formules (2, 8) et (2, 9), il faut examiner de plus près la solution de l'équation intégrale (2, 3).

Les expressions

$$v(\xi, x), \quad \frac{\partial v(\xi,\, x)}{\partial x_\alpha}, \quad G[v(\xi, x)],$$

regardées comme fonctions de deux points-arguments seront désormais considérées, pour un point $P(\xi)$ fixe, comme ayant le cône $\varDelta(P)$ pour surface de discontinuité et s'annulant pour des points qui n'appartiennent pas à $\varDelta(P)$. L'expression $G[v(\xi, x)]$ ainsi définie sera le noyau de l'équation intégrale (2, 3); $-\dfrac{1}{4\pi}$ en est alors le paramètre.

Soit maintenant

$$\varPhi(\xi) = \varPhi_1(\xi) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varDelta} G[v(\xi, x)] f^{(2)}(x)\, d\, V, \tag{2, 10}$$

$$\varPhi_p(\xi) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varDelta} G[v(\xi, x)]\, \varPhi_{p-1}(x)\, d\, V. \tag{2, 11}$$

La solution de l'équation (2, 3) est alors donnée par la série

$$u(\xi) = f^{(2)}(\xi) + \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(\xi) \tag{2, 12}$$

dont la convergence devient évidente, si on compare l'équation intégrale (2, 3) à une équation de Volterra convenablement choisie.

Pour une mise en formule du *principe de variation des données* du § 1, il faut trouver la variation $\delta\Phi$ que subit $\Phi(\xi)$ en conséquence d'une variation des données de Cauchy. Or, la forme primitive (2, 10) de Φ se prête mal à un pareil calcul. Les données qui entrent dans $f^{(2)}(\xi)$ sont intégrées sur une trace variable d'un cône $\Delta(O)$, comme on le voit dans la formule (2, 5). Ce que nous devons chercher à réaliser, c'est évidemment une forme de Φ où une intégration étendue à la surface des données S apparaisse explicitement.[1]

On arrive à la représentation cherchée de $\Phi(\xi)$ par une transformation que nous allons décrire. Soit $\zeta(\mu, x)$ une fonction de la seule variable x et qui dépend en outre d'un paramètre continu μ. On peut admettre que $\zeta(\mu, x)$ est continue ainsi que toutes ses dérivées, pour $\mu \neq 0$. Pour le passage à la limite $\mu = 0$ notre fonction doit avoir la propriété intégrale suivante:

$$\lim_{\mu=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\mu, x) F(x)\, dx = F(0), \tag{2, 13}$$

$F(x)$ étant une fonction continue, finie pour $x = \pm\infty$, d'ailleurs quelconque. La courbe de la fig. 2 indique la réalisation possible de $\zeta(\mu, x)$; pour $\mu \to 0$ elle doit s'étirer vers le haut (le long de l'axe des ζ), en gardant au cours de cette déformation une aire constante égale à 1. On peut choisir, par exemple,

$$\zeta(\mu, x) = \frac{1}{\mu\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^2}. \tag{2, 14}$$

(Aux fonctions $F(x)$ de la formule (2, 13) qui ne seront pas définies dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ on pourra adjoindre un prolongement fictif convenable.)

---

[1] Nous engageons le lecteur à prendre dès maintenant connaissance de la formule (2, 31) et de la figure schématique 5 (dont la légende est la formule (2, 36) et son explication dans le texte). On voit qu'il faut intervertir l'ordre des intégrations dans $\Phi(\xi)$, ce qu'on peut faire en suivant une méthode indiquée par M. Hadamard (*Leçons sur le problème de Cauchy* p. 422). Nous suivrons une autre méthode.

Soient $O(\xi)$ et $A(x)$ deux points arbitraires de l'espace (x) et soit $\varDelta(P)$ le cône qui passe par le point $A(x)$ et dont le sommet $P(\xi')$ est situé sur une parallèle à l'axe des x_0, menée par $O(\xi)$. Nous définissons

$$(2,\ 15) \qquad \bar{v}(\xi, x) = v(\xi', x)\cdot\zeta(\mu, \xi_0 - \xi_0').$$

La nouvelle fonction $\bar{v}$ est une *fonction v diluée*, continue par rapport à son argument $A(x)$, débarrassée de la surface de discontinuité qu'avait $v(\xi, x)$ *pour* $O(\xi)$ *fixe*. Lorsqu'il s'agit d'une expression qui renferme des dérivées de v, il est facile de trouver le procédé convenable de dilution. On remplacera, par exemple, $\dfrac{\partial v}{\partial x_\alpha}$ par

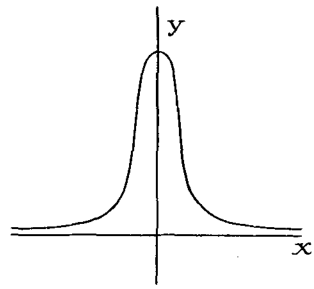

Fig. 2.

$$(2,\ 16) \qquad \overline{\frac{\partial v(\xi, x)}{\partial x_\alpha}} = \frac{\partial v(\xi', x)}{\partial x_\alpha}\zeta(\mu, \xi_0 - \xi_0').$$

Il est aisé de vérifier que la formule (2, 5) se déduit par un passage à la limite $\mu = 0$ de la formule

$$(2,\ 17) \qquad f^{(2)}(\xi;\mu) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left[\bar{v}\left(A^0\varphi + \frac{2\varphi}{r} + \psi + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \varphi\left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \overline{\frac{\partial v}{\partial x_0}}\right)\right] dS$$

(dS est l'élément de la surface S), dans laquelle l'argument composé $(\xi;\mu)$ indique un remplacement de v et de ses dérivées par les expressions (2, 15) et (2, 16). (La surface à laquelle s'étend l'intégration, c'est la surface S de Cauchy et non la trace C de $\varDelta(O)$.) On a, en effet,

$$\lim_{\mu=0}\int\limits_S \left[\varphi\left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \overline{\frac{\partial v}{\partial x_0}}\right) + \bar{v}\left(A^0\varphi + \frac{2\varphi}{r} + \psi + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right] dS =$$

$$= \lim_{\mu=0}\int\limits_0^{\xi_0}\left\{\int\limits_c \left[\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\left(A^0\varphi + \frac{2\varphi}{r} + \psi + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right] r^2\, d\omega\right\}\zeta(\mu, \xi_0 - \xi_0')\, d\xi_0 =$$

$$= \int\limits_C \left[\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) + v\left(A^0\varphi + \frac{2\varphi}{r} + \psi + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right] r^2\, d\omega$$

(les c sont les traces des cônes intérieurs à $\varDelta(O)$). La fonction $\Phi(\xi)$ que nous avons introduite par la formule (2, 10) est, d'après ce que nous venons de dire, la limite pour $\mu = 0$ de

$$\Phi(\xi, \mu) = -\frac{1}{4\pi}\int_A G[v(\xi, x)] f^{(2)}(x; \mu)\, d\, V. \tag{2, 18}$$

Ecrivons explicitement la fonction

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(\xi) = &-\frac{1}{4\pi}\lim_{\mu=0}\int_A \left\{G\,[v(\xi, x)]\int_S \varphi(y)\left(\frac{\overline{\partial\, v(x, y)}}{\partial\, r'} - \frac{\overline{\partial\, v(x, y)}}{\partial\, x_0}\right) d\, S\right\} d\, V \\ &-\frac{1}{4\pi}\lim_{\mu=0}\int_A \left\{G\,[v(\xi, x)]\int_S \bar{v}(x, y)\,\cdot \right. \\ &\qquad \left. \cdot\left(A^0\,\varphi(y) + \frac{2\,\varphi(y)}{r'} + \psi(y) + \frac{\partial\,\varphi(y)}{\partial\, r'}\right) d\, S\right\} d\, V. \end{aligned}\right. \tag{2, 19}$$

Les x étant les coordonnées des points de A, nous avons choisi les y pour les points de S. On a évidemment

$$r' = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

On peut faire entrer G sous l'intégrale intérieure et intervertir les intégrations. Le résultat de ces opérations est

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(\xi) = &-\frac{1}{4\pi}\lim_{\mu=0}\int_S \varphi(y)\int_A \left\{G\,[v(\xi, x)]\left[\frac{\overline{\partial\, v(x, y)}}{\partial\, r'} - \frac{\overline{\partial\, v(x, y)}}{\partial\, x_0}\right] d\, V\right\} d\, S \\ &-\frac{1}{4\pi}\lim_{\mu=0}\int_S \left\{\left(A^0\,\varphi(y) + \frac{2\,\varphi(y)}{r'} + \psi(y) + \frac{\partial\,\varphi(y)}{\partial\, r'}\right)\cdot \right. \\ &\qquad \left. \int_A G\,[v(\xi, x)]\,\bar{v}(x, y)\, d\, V\right\} d\, S. \end{aligned}\right. \tag{2, 20}$$

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$I(\xi, y; \mu) = \int_A G\,[v(\xi, x)]\cdot \bar{v}(x, y)\, d\, V \tag{2, 21}$$

dont le champ d'intégration est constitué par la surface $A(O)$ (coordonnées x). Soit $A'(B)$ le cône de l'avenir issu du point $B(y)$ de la surface S (fig. 3). Contrairement à ce qui arrive à la fonction $v(x, y)$ pour un argument (y) fixe, la fonction $\bar{v}(x, y)$ définie par la formule (2, 15) ne s'annule pas en un point $A(x)$ extérieur à $\Lambda'(B)$. Le segment AA' de la droite parallèle à l'axe des x_0 ayant une longueur σ (le point $A'(x')$ est le point où cette parallèle rencontre le cône $\Lambda'(B)$), on a, par définition:

$$\bar{v}(x, y) = v(x', y) \cdot \zeta(\mu, \sigma). \tag{2, 22}$$

Décomposons l'élément dV en un produit d'un élément $r^2 d\omega$ d'une sphère et d'un facteur scalaire $d\tau$

$$dV = r^2 d\omega\, d\tau. \tag{2, 23}$$

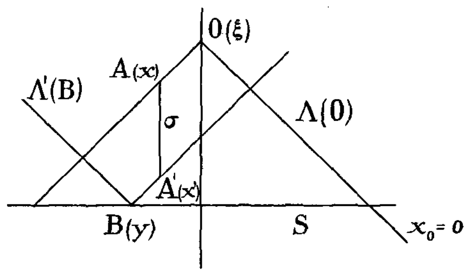

Fig. 3.

Quand le point $A(x)$ subit, tout en restant sur $\Lambda(O)$ un déplacement aus composantes

$$dx_\alpha = k^\alpha d\tau, \tag{2, 24}$$

(où k^α sont les cosinus directeurs d'une génératrice de $\Lambda(O)$), σ qui figure dans (2, 22) prend un accroissement $d\sigma$. Nous allons établir la relation entre $d\sigma$ et $d\tau$. (Nous suivrons une méthode fort élégante indiquée par M. Hadamard). Les coordonnées (x') d'un point $A'(x')$ s'expriment régulièrement par les coordonnées du point $A(x)$ et par la longueur σ du segment AA' de la manière suivante:

$$x_0' = x_0 - \sigma, \quad x_i' = x_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2, 25}$$

d'où

$$dx_0' = dx_0 - d\sigma, \quad dx_i' = dx_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2, 26}$$

Les k^α sont proportionnels à

$$-1, \quad \frac{x_1 - \xi_1}{r}, \quad \frac{x_2 - \xi_2}{r}, \quad \frac{x_3 - \xi_3}{r}. \tag{α}$$

Soient χ^α les cosinus directeurs de la génératrice $A'B$ du cône $\varDelta'(B)$; ils sont proportionnels à

$$(\beta) \qquad 1, \quad \frac{x_1 - y_1}{r'}, \quad \frac{x_2 - y_2}{r'}, \quad \frac{x_3 - y_3}{r'}.$$

Les $d x'_\alpha$ issus de $A'(x')$ qui définissent le plan tangent de $\varDelta'(B)$ en $A'(x')$ satisfont à l'équation

$$(2,\ 27) \qquad \chi^0\, d x'_0 - (\chi^1\, d x'_1 + \chi^2\, d x'_2 + \chi^3\, d x'_3) = 0.$$

Les $d x'_\alpha$ ayant les valeurs (2, 26), substituons-les dans l'équation (2, 27). On aura, en utilisant (2, 24),

$$(2,\ 28) \qquad d\tau = q\, d\sigma,$$

où

$$q = \frac{-1}{1 + \frac{x_1 - \xi_1}{r} \cdot \frac{x_1 - y_1}{r'} + \frac{x_2 - \xi_2}{r} \cdot \frac{x_2 - y_2}{r'} + \frac{x_3 - \xi_3}{r} \cdot \frac{x_3 - y_3}{r'}}.$$

L'équation du plan tangent à $\varDelta(O)$ en $A(x)$ étant

$$X_0 - x_0 + \frac{x_1 - \xi_1}{r}(X_1 - x_1) + \frac{x_2 - \xi_2}{r}(X_2 - x_2) + \frac{x_3 - \xi_3}{r}(X_3 - x_3) = 0,$$

le dénominateur de q ne s'annule que si la direction (β) est parallèle à ce plan. Or, cela ne peut arriver que si les génératrices OA et BA' sont parallèles et, par conséquent, situées dans le plan qui passe par l'axe de $\varDelta(O)$ et le point B. Pour O et B fixes, nous trouvons ainsi une génératrice critique OA. Nous pouvons l'exclure d'abord de l'intégrale (2, 21) avec un segment étroit de $\varDelta(O)$ qui la renferme et poser ensuite ce segment égal à zéro dans (2, 30) où le dénominateur de q est différent de zéro sans restrictions.

Les formules (2, 23) et (2, 28) donnent

$$(2,\ 29) \qquad d V = q\, r^2\, d\omega\, d\sigma.$$

En utilisant la formule (2, 29), nous arrivons à la forme suivante de l'intégrale $I(\xi, y; \mu)$:

$$I(\xi, y; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{\vartheta(\sigma)} G[v(\xi, x)]\, v(x', y)\, q\, r^2\, d\omega \right\} \zeta(\mu, \sigma)\, d\sigma,$$

$\vartheta(\sigma)$ étant le lieu des points de $\varDelta(O)$ pour lesquels $\sigma = const.$ D'après la formule (2, 13), l'intégrale tend, pour $\mu \to 0$, vers l'expression en accolades prise pour $\mu = 0$. On a

$$I(\xi, y) = \lim_{\mu=0} I(\xi, y; \mu) = \int_{\vartheta} G[v(\xi, x)]\, v(x, y)\, q\, r^2\, d\omega, \tag{2, 30}$$

où ϑ est le lieu des points de $\varDelta(O)$ pour lesquels $\sigma = 0$; autrement dit, ϑ est la surface d'intersection des cônes $\varDelta(O)$ et $\varDelta'(B)$.

En effectuant la même transformation sur les autres termes de la formule (2, 20), nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(\xi) = &-\frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\varphi(y)\int_{\vartheta} G[v(\xi, x)]\left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial r'} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x_0}\right] q\, r^2\, d\omega\right\} dS \\ &-\frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\left[A^0 \varphi(y) + \frac{2\varphi(y)}{r'} + \psi(y) + \frac{\partial \varphi(y)}{\partial r'}\right] \cdot \right. \\ &\qquad\qquad \left. \cdot \int_{\vartheta} G[v(\xi, x)]\, v(x, y)\, q\, r^2\, d\omega\right\} dS. \end{aligned}\right. \tag{2, 31}$$

Il est clair que les intégrales étendues à la surface ϑ sont continues par rapport aux y à l'intérieur de $\varDelta(O)$. Lorsque B tend vers un point $A(x)$ de $\varDelta(O)$, la fonction $G[v(\xi, x)]\dfrac{\partial v(x, y)}{\partial r'}$ a un infini $\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{1}{r'^2}$ tout au plus, et les fonctions $G(v)\dfrac{\partial v}{\partial x_0}$ et $G(v)\, v$ ont un infini $\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{1}{r'}$ tout au plus. Les intégrales

$$I_1 = \int_{\vartheta} \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{r'^2}\, r^2\, d\omega \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\vartheta} \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{r'}\, r^2\, d\omega$$

sont finies pour B tendant vers un point de $\varDelta(O)$. Pour le démontrer, remarquons que la surface ϑ est le lieu des cercles d'intersection de deux sphères dont l'une se propage et l'autre se contracte avec la même vitesse, de sorte que l'on a pour leurs rayons à un moment x_0

$$r = \xi_0 - x_0; \quad r' = x_0 - \xi'_0. \tag{2, 32}$$

Donc, à chaque moment

$$r + r' = \xi_0 - \xi'_0 = \Theta \tag{2, 33}$$

et notre surface ϑ est un ellipsoïde de révolution. La figure 4 nous fournit la relation

$$r'^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos\gamma. \tag{2, 34}$$

Des formules (2, 33) et (2, 34) on tire

$$r = \frac{\Theta}{2} \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha\cos\gamma}; \quad r' = \frac{\Theta}{2} \cdot \frac{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2}{1-\alpha\cos\gamma}, \tag{2, 35}$$

où

$$\alpha = \frac{\varrho}{\Theta}.$$

L'élément de surface prend la forme

$$d\omega = \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi; \quad 0 \leq \gamma \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

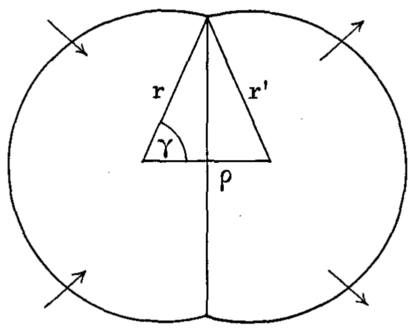

Fig. 4.

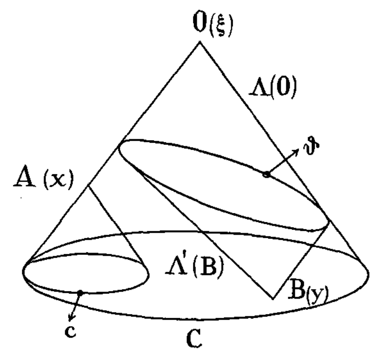

Fig. 5.

Il est à présent facile de vérifier que les intégrales I_1 et I_2 restent finies pour B tendant vers un point de $\Lambda(O)$, c'est-à-dire, pour $\alpha \to 1$. On a, en effet,

$$I_1 = \frac{2\pi}{\Theta^2}\left\{2 - 2\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\log\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{(1-\alpha^2)^2}{2\alpha}\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{1}{(1+\alpha)^2}\right]\right\} \to \frac{8\pi}{\Theta^2},$$

$$I_2 = \frac{2\pi}{\Theta}\left\{2 - \frac{1-\alpha^2}{\alpha}\log\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right\} \to \frac{4\pi}{\Theta}.$$

La transformation d'intégrales

$$I(c \cdot \Lambda) \to I(\vartheta \cdot S) \tag{2, 36}$$

que nous venons d'effectuer sur un exemple particulier peut être résumée ainsi (fig. 5):

(1) forme primitive: c, champ de la première intégration, variable avec $A(x)$; Λ champ fixe de la seconde intégration;

(2) forme transformée: ϑ, champ de la première intégration, variable avec $B(y)$; S champ fixe de la deuxième intégration.

Comme l'intégrale à transformer était bien la limite, pour le passage $\mu \to 0$, de l'intégrale (2, 21), l'inversion que nous sommes permis de l'ordre de deux opérations, du passage à la limite $\mu = 0$ et de l'intégration étendue à S, ne prête à aucune objection.

§ 3. Lemme fondamental. Condition nécessaire et suffisante.

Lemme: *Pour une équation à ondes pures homogène, l'intégrale du problème de Cauchy se réduit à la fonction connue de l'équation intégrale correspondante.*

Autrement dit, on a, au lieu de l'équation (2, 3), la formule

$$u(\xi) = f^{(2)}(\xi). \tag{3, 1}$$

En effet, la formule (2, 31) peut être écrite sous la forme

$$\Phi_1(\xi) = \Phi(\xi) = \int_S I'(\xi, y)\,\varphi(y)\,dS + \\ + \int_S I(\xi, y)\left[A^0\,\varphi(y) + \frac{2\,\varphi(y)}{r'} + \psi(y) + \frac{\partial\,\varphi(y)}{\partial\, r'}\right] d\,S,$$

où I a la valeur (2, 30) et

$$I'(\xi, y) = \int_\vartheta G\,[v\,(\xi,\,x)]\left[\frac{\partial\, v\,(x,\,y)}{\partial\, r'} - \frac{\partial\, v\,(x,\,y)}{\partial\, x_0}\right] q\, r^2\, d\,\omega.$$

Dans les itérations Φ_p de la formule (2, 11) le rôle de I et de I' sera joué par leurs itérations

$$I_1(\xi, y) = \int_A G[v(\xi, x)]\, I(x, y)\, d\,V,\ \ I_2,\ \ I_3, \ldots,$$

et

$$I_1'(\xi, y),\ \ I_2',\ \ I_3', \ldots.$$

On aura la formule (2, 12) sous la forme

$$u(\xi) = f^{(2)}(\xi) + \int_S \left\{\gamma'(x, y)\,\varphi(y) + \gamma(\xi,\, y)\,\psi(y) + \gamma(\xi,\, y)\,\frac{\partial\,\varphi(y)}{\partial r'}\right\} d\,S, \tag{3, 2}$$

où

$$\gamma(\xi, y) = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(\xi, y),$$

$$\gamma'(\xi, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ I'_p(\xi, y) + \left(A^0 + \frac{2}{\gamma'}\right) I(\xi, y) \right\}.$$

Comme l'intégration s'étend à présent à la surface S de Cauchy, le *principe de variation des données* du § 1 est immédiatement appliquable. Des deux données de Cauchy qui peuvent être variées indépendemment l'une de l'autre, varions d'abord ψ. Comme la variation $\delta u(\xi)$ est nulle, on a évidemment

$$\gamma(\xi, y) = 0.$$

Varions ensuite l'autre donnée de Cauchy, φ; le même principe nous donne

$$\gamma'(\xi, y) = 0.$$

Notre lemme est démontré.

Théorème: *Pour qu'une équation du type hyperbolique normal soit une équation à ondes pures, il faut et il suffit que la fonction v correspondante annule l'équation adjointe.*

Il faut donc et il suffit qu'on ait identiquement en $O(\xi)$ et en $A(x)$

$$G[v(\xi, x)] = 0. \tag{3, 3}$$

La condition est évidemment suffisante, car elle annule le noyau de l'équation intégrale (2, 3), et on a pour $T = 0$ la solution du problème de Cauchy sous la forme (3, 1) (voir ce qui a été dit à propos des formules (2, 4) et (2, 5)).

D'autre part, la formule (3, 1) a pour conséquence l'équation

$$\int_A G[v(\xi, x)]\, u(x)\, dV = 0. \tag{3, 4}$$

Or, on peut prescrire arbitrairement (sous réserve de régularité) la fonction $u(x)$ sur notre cône $\mathcal{A}(O)$. Cela reviendra à chercher les données de Cauchy desquelles elle résultera, c'est-à-dire, à la modification suivante du problème de Cauchy: une intégrale de l'équation (2, 1) étant donnée sur $\mathcal{A}(O)$, on la cherche à l'intérieur de $\mathcal{A}(O)$. De la solution de ce problème on tirera les valeurs que $u(x)$ et sa dérivée doivent prendre sur S pour qu'on ait, en effet, aux points de $\varDelta(O)$ la fonction $u(x)$ voulue. Du caractère arbitraire de $u(x)$ dans l'équation (3, 4) on déduit la condition (3, 3) qui se montre ainsi nécessaire.

Passage aux variations de T. Nos raisonnements se bornaient jusqu'à présent à une équation (2, 1) homogène. Comme la condition (3, 3) annule le noyau de l'équation intégrale (2, 3), on aura pour une équation à ondes pures non homogène

$$u(\xi) = f(\xi) = f^{(1)}(\xi) + f^{(2)}(\xi).$$

La partie $f^{(1)}$ qui est donnée par la formule (2, 4) s'annule évidemment, si T s'annule en dehors d'une région ϱ' intérieure (sans points communs avec les frontières) au domaine D ayant pour frontières $\varDelta(O)$ et la surface des données S. Nous arrivons ainsi au suivant

Théorème de la variation de T: *Pour une équation à ondes pures la variation $\delta u(\xi)$, en un point $O(\xi)$, de l'intégrale est nulle, si elle provient d'une variation δT qui s'annule en dehors d'une région ϱ' intérieure au cône $\varDelta(O)$ et n'ayant pas avec lui de points communs.*

Invariances. On peut indiquer deux classes de transformations évidentes qui changent une équation à ondes pures de la forme (2, 1) en une équation à ondes pures de la même forme. Ce sont:

(a) les transformations de Lorentz qui laissent invariante l'équation des ondes sphériques,

(b) les transformations de la fonction cherchée u en une fonction cherchée u' données par les substitutions

$$u(x) = u'(x)\lambda(x),$$

avec une fonction $\lambda(x)$ donnée (régulière).

La substitution (b) change l'équation (2, 1) en

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_i^2} + \sum_{\alpha=0}^{3} A'^{\alpha} \frac{\partial u'}{\partial x_\alpha} + C' u' = \frac{T}{\lambda}, \tag{3, 5}$$

où

$$A'^0 = A^0 + 2\frac{\partial}{\partial x_0}\log\lambda; \quad A'^i = A^i - 2\frac{\partial}{\partial x_i}\log\lambda \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3, 6}$$

$$C' = C + \sum_{\alpha=0}^{3} A^{\alpha}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x_\alpha} + \frac{\Box\lambda}{\lambda}, \quad \left(\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right). \tag{3, 7}$$

Pour les indices inférieurs, on aura

$$A'_\alpha = A_\alpha + 2\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\log\lambda \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{3, 8}$$

La condition $G(v) = 0$, ainsi que les conséquences qu'on peut en tirer, doit être invariante par rapport aux transformations (a) et (b). Nous profiterons de cette circonstance dans le paragraphe suivant.

§ 4. La méthode du développement de $G(v)$.

Revenons au problème de M. Hadamard. La condition $G(v) = 0$ indique à notre recherche une direction à prendre. Voici le plan qu'on conçoit tout naturellement.

1°. Développer, au voisinage d'un point $O(\xi)$, la fonction v suivant les puissances de r.

2°. Calculer, d'après ce développement, le développement analogue de $G(v)$.

3°. Egaler à zéro les termes consécutifs du développement de $G(v)$ et utiliser chaque équation ainsi obtenue à la simplification des suivantes.

4°. Profiter de la circonstance que le point $O(\xi)$ peut être arbitrairement choisi.

Il semble raisonnable d'espérer qu'un petit nombre de puissances de r ainsi traitées au développement de $G(v)$ suffira à caractériser complètement les coefficients d'une équation à ondes pures.

Commençons par le développement de A_λ en série de Taylor au voisinage du point $O(\xi)$. Remplaçons, pour simplifier ce développement, l'équation (2, 1) par une équation qui en résulte par une transformation (b), avec une fonction λ dont nous allons indiquer le choix. La formule (3, 8) donne successivement

$$(4, 1)\quad \left\{\begin{aligned} A'_\alpha &= A_\alpha + 2\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\log\lambda, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial A'_\beta}{\partial x_\alpha}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}\right) + 2\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \\ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 A'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 A'_\beta}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\right) &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 A_\beta}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial^3 \log\lambda}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^3 A'_\mu}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\gamma}+\frac{\partial^3 A'_\alpha}{\partial x_\beta\,\partial x_\gamma\,\partial x_\mu}+\frac{\partial^3 A'_\beta}{\partial x_\gamma\,\partial x_\mu\,\partial x_\alpha}+\frac{\partial^2 A'_\gamma}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)=\\&=\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^3 A_\mu}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\gamma}+\frac{\partial^3 A_\alpha}{\partial x_\beta\,\partial x_\gamma\,\partial x_\mu}+\frac{\partial^3 A_\beta}{\partial x_\gamma\,\partial x_\mu\,\partial x_\alpha}+\frac{\partial^3 A_\gamma}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)+\\&\qquad+\frac{1}{3}\frac{\partial^4 \log\lambda}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\gamma\,\partial x_\mu}.\end{aligned}\right.$$

On voit donc qu'en donnant, en un point, aux dérivées de $\log\lambda$ jusqu'à celles du quatrième ordre des valeurs qui annulent les seconds membres des équations (4, 1) on impose certaines relations qui sont toujours réalisables en un seul point déterminé, aux A'_α et à leurs dérivées jusqu'à celles du troisième ordre. Les dérivées de $\log\lambda$ que nous trouvons ainsi définissent les termes du premier jusqu'au quatrième ordre au développement de $\log\lambda$ autour du point choisi. Posons en $O(\xi)$

$$(4,\,2)\qquad\left\{\begin{aligned}&\mathring{H}_{\lambda\mu}=\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x_\mu}-\frac{\partial' A_\mu}{\partial x_\lambda}\qquad(\mathring{H}_{\lambda\mu}=-\mathring{H}_{\mu\lambda};\ \mathring{H}_{\lambda\lambda}=0),\\&\alpha_{\lambda\mu\nu}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A'_\lambda}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu},\\&\alpha_{\lambda\mu\nu\omega}=\frac{1}{6}\frac{\partial^3 A'_\lambda}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu\,\partial x_\omega}.\end{aligned}\right.$$

Nous aurons en $O(\xi)$

$$(4,\,3)\qquad\left\{\begin{aligned}&A'_\alpha=0,\\&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial A'_\beta}{\partial x_\alpha}\right)=0,\\&\alpha_{\lambda\mu\nu}+\alpha_{\mu\nu\lambda}+\alpha_{\nu\lambda\mu}=0,\\&\alpha_{\lambda\mu\nu\omega}+\alpha_{\mu\nu\omega\lambda}+\alpha_{\nu\omega\lambda\mu}+\alpha_{\omega\lambda\mu\nu}=0.\end{aligned}\right.$$

Soient X^λ les coordonnées relatives d'un point $P(x)$ par rapport à $O(\xi)$. Nous aurons le développement, *la sommation par rapport aux indices égaux étant sous-entendue* (une convention que nous garderons désormais),

$$(4,\,4)\qquad A'_\lambda=\frac{1}{2}\mathring{H}_{\lambda\mu}X^\mu+\alpha_{\lambda\mu\nu}X^\mu X^\nu+\alpha_{\lambda\mu\nu\omega}X^\mu X^\nu X^\omega+\cdots.$$

Le calcul devient plus symétrique, si on introduit le vecteur a^λ parallèle à l'axe des x_0:

(4, 5) $$a^0 = 1,\quad a^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et la variable s définie par

(4, 6) $$s = X^0 + r,$$
$$\left(r = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2}\right).$$

On vérifie facilement la relation

(4, 7) $$X^\lambda = a^\lambda s + k^\lambda r.$$

Notre fonction à développer est

$$v = \frac{1}{r} e^{\frac{1}{2}\int_0^r A_\lambda k^\lambda dr}.$$

Les cônes $\varDelta(O')$ dont le sommet O' se trouve sur la droite $r = 0$ ont pour équation $s = const$, de sorte que l'intégration le long d'une génératrice de $\varDelta(O')$ sera à effectuer en supposant s constant. En substituant (4, 7) dans (4, 4) et en intégrant le long d'une génératrice, c'est-à-dire pour des k^λ constants, nous aurons

(4, 8) $$v = \frac{1}{r} + \frac{1}{4}\mathring{H}_{\lambda\mu} k^\lambda a^\mu s + \alpha_{\lambda\mu\nu}\left(\frac{1}{2} k^\lambda k^\mu a^\nu r s + \frac{1}{2} k^\lambda a^\mu a^\nu s^2\right).$$

Nous avons omis, en nous appuyant sur (4, 2) et (4, 3), les termes ayant pour facteur

$$\mathring{H}_{\lambda\mu} k^\lambda k^\mu = \frac{1}{2} k^\lambda k^\mu (\mathring{H}_{\lambda\mu} + \mathring{H}_{\mu\lambda}) = 0,$$

$$\alpha_{\lambda\mu\nu} k^\lambda k^\mu k^\nu = \frac{1}{3} k^\lambda k^\mu k^\nu (\alpha_{\lambda\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu\lambda} + \alpha_{\nu\lambda\mu}) = 0,$$

et nous avons renoncé, pour y revenir plus tard, aux termes du troisième ordre.

Introduisons, pour abréger nos calculs et les rendre plus symétriques, les 20 nombres $g^{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ définis par

$$\left.\begin{aligned} g^{00} = 1,\quad g^{0i} = 0,\quad g^{ik} &= \begin{cases} -1 \text{ pour } i = k \\ 0 \text{ pour } i \neq k, \end{cases} \\ g_{00} = 1,\quad g_{0i} = 0,\quad g_{ik} &= \begin{cases} -1 \text{ pour } i = k \\ 0 \text{ pour } i \neq k \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

et définissons les opérations d'abaissement et d'élévation des indices par

$$v^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots} = g^{\lambda\mu} v^{\cdots}_{\cdots\mu\cdots}, \quad w^{\cdots}_{\cdots\mu\cdots} = g_{\lambda\mu} w^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots}.$$

Nous avons indiqué par les points l'existence possible d'autres indices. Remarquons que

$$w_\lambda v^\lambda = w^\lambda v_\lambda,$$

$$g^{\alpha\nu} g_{\beta\nu} = \delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha = \beta \\ 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

L'opérateur $\Box$ étant défini par

$$\Box = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

l'adjointe $G(u)$ est donnée par

$$G(u) = \Box u - \frac{\partial (A^\alpha u)}{\partial x_\alpha} + Cu. \tag{4, 9}$$

Pour avoir le développement de $G(v)$, nous développons les coefficients A'_λ d'après (4, 4) et substituons

$$\left\{\begin{aligned} C' &= (C')_0 + \left(\frac{\partial C'}{\partial x_\lambda}\right)_0 X^\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C'}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right) X^\lambda X^\mu + \cdots, \\ \frac{\partial A'^\nu}{\partial x_\nu} &= \alpha^\nu_{\cdot\nu\lambda} X^\lambda + \frac{1}{2}\alpha^\nu_{\cdot\nu\lambda\mu} X^\lambda X^\mu + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{4, 10}$$

Dans la seconde des formules (4, 10) nous avons utilisé la seconde des relations (4, 3) ou, plus exactement, sa conséquence: $\dfrac{\partial A'^\nu}{\partial x_\nu} = 0$ en $O(\xi)$.

Voici le calcul à faire: dans

$$\left\{\begin{aligned} G(v) = \Box v &- \left(\frac{1}{2}\mathring{H}^\lambda_{\cdot\mu} X^\mu + \alpha^\lambda_{\cdot\mu\nu} X^\mu X^\nu + \alpha^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega} X^\mu X^\nu X^\omega\right)\frac{\partial v}{\partial x_\lambda} + \\ &+ \left\{(C')_0 + \left[\left(\frac{\partial C'}{\partial x_\lambda}\right)_0 - \alpha^\nu_{\cdot\nu\lambda}\right] X^\lambda + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 C'}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)_0 - \alpha^\nu_{\cdot\nu\lambda\mu}\right] X^\lambda X^\mu\right\} v \end{aligned}\right. \tag{4, 11}$$

nous aurons à substituer X^λ d'après (4, 7) et v d'après (4, 8). En considérant s et r comme étant d'ordre 1 et $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ comme étant d'ordre -1, -2 respectivement, nous aurons tous les termes de $G(v)$ à partir de l'ordre -2, ce que nous noterons symboliquement en écrivant la condition $G(v)=0$ sous la forme suivante:

$$G(v) \equiv [-2] + [-1] + [0] + [1] + \cdots = 0. \tag{4, 12}$$

Le calcul se fait commodément, si on établit d'abord quelques formules intermédiaires. En partant des relations

$$\begin{cases} k^0 = -1, \quad k^i = \dfrac{X^i}{r} \\ \dfrac{\partial s}{\partial x_\lambda} = -k_\lambda, \\ \dfrac{\partial r}{\partial x_\lambda} = -(a_\lambda + k_\lambda), \\ k_\lambda k^\lambda = 0, \quad a_\lambda a^\lambda = 1, \quad k_\lambda a^\lambda = -1 \end{cases} \tag{4, 13}$$

faciles à contrôler, nous arrivons à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{1}{r^2}(a_\lambda + k_\lambda), \\ \dfrac{\partial k_\lambda}{\partial x_\mu} = \dfrac{1}{r}(g_{\lambda\mu} + k_\lambda a_\mu + k_\mu a_\lambda + k_\lambda k_\mu), \\ \square\,(k^\lambda k^\mu r) = \dfrac{2}{r}(g^{\lambda\mu} + 2\,k^\lambda k^\mu + 2\,a^\lambda k^\mu + 2\,a^\mu k^\lambda), \\ \square\,(k^\lambda k^\mu r\, s) = s\,\square\,(k^\lambda k^\mu r) - 4\,k^\lambda k^\mu, \\ \square\,(k_\lambda s^2) = 2\,s^2 \dfrac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\dfrac{1}{r}\right) - \dfrac{4}{r}\,s\,k_\lambda. \end{cases} \tag{4, 14}$$

En spécialisant les relations que nous venons d'indiquer, on arrive à des relations de contrôle fort simples et assez nombreuses. En voici quelques-unes:

$$a^\lambda \frac{\partial k_\mu}{\partial x_\lambda} = 0, \quad a^\mu \frac{\partial k_\mu}{\partial x_\lambda} = 0,$$

$$\square\,(k^\lambda k_\lambda r) = 0,$$

$$a_\lambda a_\mu \,\square\,(k^\lambda k^\mu r) = \square\, r,$$

$$a^\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

En utilisant les relations (4, 14), nous calculons facilement les trois premiers termes du développement (4, 12):

$$(4,\,15)\qquad \begin{cases} [-2] \equiv 0, \\ [-1] \equiv \dfrac{(C')_0}{r} = 0, \\ [0] \equiv \left\{\dfrac{1}{3}(\alpha_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\mu} - \alpha^{\mu}_{\cdot\mu\lambda}) + \left[\left(\dfrac{\partial C'}{\partial x_\lambda}\right)_0 - \alpha^{\mu}_{\cdot\mu\lambda}\right]\right\} k^\lambda = 0. \end{cases}$$

Nous avons utilisé la formule

$$(4,\,16)\qquad \alpha_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\nu} + 2\,\alpha_{\nu\cdot\lambda}^{\cdot\nu} = 0$$

qui est la conséquence de la troisième des relations (4, 3). Si on tient compte de la signification des k^λ donnée par la première des formules (4, 13), on voit immédiatement que la troisième des équations (4, 15) ne peut subsister pour un k^λ quelconque que si l'expression en accolades s'annule. On tire ainsi de (4, 15) les conditions suivantes:

$$(4,\,17)\qquad \begin{cases} (C')_0 = 0 \\ \dfrac{1}{3}\left[\alpha_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\mu} - \alpha^{\mu}_{\cdot\mu\lambda}\right] + \left[\left(\dfrac{\partial C'}{\partial x_\lambda}\right)_0 - \alpha^{\mu}_{\cdot\mu\lambda}\right] = 0. \end{cases}$$

Appelons *expression invariante par rapport à* (b) une expression dont la valeur numérique ne change pas lors d'une transformation (b). On a la proposition évidente: *si une expression invariante par rapport à* (b) *s'annule en un point pour une certaine fonction λ, elle s'annule en ce point pour une fonction λ quelconque.*

Ce point admis, envisageons l'expression

$$(4,\,18)\qquad C - \frac{1}{2}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} - \frac{1}{4} A_\mu A^\mu.$$

Les formules (3, 6), (3, 7) et (3, 8) appliquées à l'expression (4, 18) qui a subi une transformation (b) montrent qu'elle est invariante par rapport à (b). D'autre part, en $O(\xi)$ et pour la fonction λ qui nous a permis d'établir les relations (4, 3) en $O(\xi)$, l'expression (4, 18) se réduit à $(C')_0$ qui est égal à zéro, d'après (4, 17). Donc, en $O(\xi)$,

(4, 19)
$$\boxed{C - \frac{1}{2}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} - \frac{1}{4} A_\mu A^\mu = 0}.$$

Le point $O(\xi)$ étant un point quelconque, la condition (4, 19) subsiste partout.

La seconde des conditions (4, 17) se compose de deux termes dont le second peut être écrit sous la forme

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(C' - \frac{1}{2}\frac{\partial A'^\mu}{\partial x_\mu}\right)\right]_0$$

ce qui, d'après (4, 19), est égal à

$$\left[\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(A'_\mu A'^\mu)\right]_0$$

qui s'annule, en vertu de la première des formules (4, 3). Il ne reste dans la seconde condition (4, 17) que

(4, 20)
$$\frac{1}{3}(\alpha_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\mu} - \alpha^{\mu}_{\cdot\mu\lambda}) \equiv \frac{1}{3}\left(\Box A'_\lambda - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\frac{\partial A'^\mu}{\partial x_\mu}\right)_0 = 0.$$

Envisageons les expressions

(4, 21)
$$\begin{cases} H_{\lambda\mu} = \dfrac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}, \\ s_\lambda = \dfrac{\partial H_\lambda^{\cdot\mu}}{\partial x_\mu} \equiv \Box A_\lambda - \dfrac{\partial}{\partial x_\lambda}\dfrac{\partial A^\nu}{\partial x_\nu}. \end{cases}$$

La première, *le rotationnel* de A_λ, est manifestement invariant par rapport à la transformation (b), d'où la même invariance pour la seconde. Or, en $O(\xi)$ et pour une fonction λ déterminée, $s_\lambda = 0$, d'après (4, 20). Par invariance, cette équation subsiste pour une fonction λ quelconque; $O(\xi)$ étant quelconque, on a sans restrictions

(4, 22)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_\lambda^{\cdot\mu}}{\partial x_\mu} = 0, \\ H_{\lambda\mu} = \dfrac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}. \end{cases}$$

Si on interprète les $H_{\lambda\mu}$ comme les composantes du champ électromagnétique exprimées par les potentiels A_λ, les équations (4, 22) ne sont autre chose que les équations de Maxwell dans le vide, sous la forme qui est habituelle en relativité restreinte.[1]

La condition (4, 22) est formée par un système de 4 équations, elle est donc plus riche que la condition (4, 19). Et cependant les 5 conditions dont nous disposons déjà ne caractérisent pas suffisemment les coefficients d'une équation à ondes pures; nous le verrons quand nous aurons la condition nécessaire et suffisante. Pour arriver à celle-ci, il faut tenir compte du terme du troisième ordre resté inexploité dans le développement (4, 4) et pousser, en conséquence, jusqu'au quatrième ordre le développement de $e^{\frac{1}{2}\int_0^r A_\lambda k^\lambda dr}$. Soit Q l'ensemble de ces termes. Alors

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\int_0^r k^\lambda \mathring{H}_{\lambda\mu} X^\mu \, dr\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^r k^\lambda \alpha_{\lambda\mu\nu\omega} X^\mu X^\nu X^\omega \, dr.$$

Nous ne nous intéresserons qu'aux termes qui peuvent donner dans $G(v)$ des termes du premier ordre en r. Soit $[r]$ l'ensemble de ces termes. Comme les variables s et r sont indépendantes l'une de l'autre, il est permis de tirer de l'équation $[1] = 0$ la conséquence $[r] = 0$. Le terme $[1]$ étant du premier ordre en r et s ensemble, $[r]$ ne renferme pas s. Un terme de Q en $s^3 r$ ne nous intéressera donc pas, les deux différentiations dont nous disposons dans $G(v)$ ne pouvant nous débarrasser que de s^2 tout au plus. Il est facile cependant de voir que le terme en $s^2 r^2$ ne nous intéressera pas non plus: les deux différentiations dont nous disposons produiront, en effet, la combinaison

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial s}{\partial x_\alpha} \frac{\partial s}{\partial x_\beta}$$

[1] Je dois à M. Hadamard la remarque suivante. Les transformations (b) forment un groupe, et il en est de même des transformations qu'elles induisent sur les A_α et leurs dérivées partielles, — dérivées premières, pour commencer. Dans ces conditions, on peut former tous les invariants de ce groupe par la méthode classique de *l'homologue réduit:* il suffit de choisir le facteur λ par des conditions qui le déterminent au troisième ordre près, c'est-à-dire que toutes les déterminations de λ ainsi conditionnées aient entre elles un contact du second ordre. C'est précisément le cas pour les deux premières conditions (4, 3). Ceci fait, les nouvelles valeurs C' et $\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x_\beta}$ seront précisément les invariants cherchés. Naturellement, on retrouve ainsi les quantités (4, 18) et (4, 21). Une méthode toute semblable s'applique à la recherche des invariants différentiels du second ou du troisième ordre en A_α, à l'aide de la troisième et quatrième condition (4, 3).

qui s'annule, en vertu de la seconde et de la quatrième des formules (4, 13). Le premier terme de Q est justement de cette catégorie, puisque, en vertu de (4, 7)

$$k^\lambda \mathring{H}_{\lambda\mu} X^\mu = k^\lambda \mathring{H}_{\lambda\mu} a^\mu s,$$

le terme $k^\lambda \mathring{H}_{\lambda\mu} k^\mu \grave{r}$ s'annulant en conséquence de l'antisymétrie de $\mathring{H}_{\lambda\mu}$. Il ne nous reste donc, dans Q, que les termes en sr^3 et en r^4. Ce dernier est égal à $\frac{1}{8} r^4$ multiplié par

$$\alpha_{\lambda\mu\nu\omega} k^\lambda k^\mu k^\nu k^\omega = \frac{1}{4} k^\lambda k^\mu k^\nu k^\omega (\alpha_{\lambda\mu\nu\omega} + \alpha_{\mu\nu\omega\lambda} + \alpha_{\nu\omega\lambda\mu} + \alpha_{\omega\lambda\mu\nu}) = 0, \tag{4, 23}$$

en vertu de la quatrième des relations (4, 3). Le seul terme de Q qui reste, c'est

$$\frac{1}{2} \alpha_{\lambda\mu\nu\omega} k^\lambda a^\mu k^\nu k^\omega r s^3,$$

d'où on calcule facilement l'ensemble $[v]$ des termes de v qui peuvent contribuer à $[r]$:

$$[v] = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mathring{H}_{\lambda\mu} k^\lambda a^\mu s + \frac{1}{2} \alpha_{\lambda\mu\nu\omega} k^\lambda a^\mu k^\nu k^\omega s r^2,$$

(cf. le développement (4, 8), dont nous omettons à présent le terme du second ordre qui ne pourrait produire, dans $G(v)$, qu'un terme d'ordre zéro après une double différentiation, ou bien un terme d'ordre deux après une seule différentiation, cette dernière ne pouvant avoir lieu qu'en même temps qu'une multiplication par un coefficient A_λ dont le développement (4, 4) commence par un terme d'ordre un, ou enfin un terme d'ordre deux qui proviendrait de Cv).

La formule (4, 11) nous permet d'écrire[1]

$$\left\{\begin{aligned} [r] = {} & \frac{1}{2} \alpha_{\lambda\mu\nu\omega} k^\lambda a^\mu k^\nu k^\omega \left(r^2 \square s + 2 g^{\alpha\beta} \frac{\partial s}{\partial x_\alpha} \frac{\partial (r^2)}{\partial x_\beta} \right) - \alpha^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega} k^\mu k^\nu k^\omega r^3 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\frac{1}{r} \right) \\ & - \overset{=}{H}{}^\lambda_{\cdot\mu} k^\mu r \cdot \frac{1}{2} \mathring{H}_{\alpha\beta} k^\alpha a^\beta \frac{\partial s}{\partial x_\lambda} + \frac{1}{2} k^\mu k^\nu r \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \left(C' - \frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda} \right) \right]_0 . \end{aligned}\right. \tag{4, 24}$$

---

[1] Il semble que $\square(k^\lambda k^\nu k^\omega s r^2)$ fournit un terme de $[r]$, si la première différentiation porte sur s, l'autre sur un des k^ε. Or, il s'agit de $g^{\mu\nu} \frac{\partial s}{\partial x_\mu} \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial x_\nu}$, ce qui est égal à

$$- k^\nu \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial x_\nu} = - \frac{d k^\varepsilon}{d r} = 0$$

(le vecteur k^ε est constant le long d'une génératrice).

Les formules (4, 13), (4, 14), (4, 23) et les relations

$$\Box s = -\frac{\partial k^\alpha}{\partial x_\alpha} = -\frac{2}{r}, \quad 2 g^{\alpha\beta}\frac{\partial s}{\partial x_\alpha}\frac{\partial (r^2)}{\partial x_\beta} = -2\frac{d(r^2)}{dr} = -4r,$$

$$\mathring{H}^{\lambda}_{\cdot\mu} k^\mu \frac{\partial s}{\partial x_\lambda} = -\mathring{H}_{\lambda\mu} k^\lambda k^\mu = 0$$

nous permettent de trouver

$$\frac{1}{r}[r] = -3\,\alpha_{\lambda\mu\nu\omega} k^\lambda a^\mu k^\nu k^\omega - \alpha_{\lambda\mu\nu\omega} a^\lambda k^\mu k^\nu k^\omega + \frac{1}{2} k^\mu k^\nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(C' - \frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda}\right)\right]_0.$$

Transformons cette expression. On a

$$\alpha_{\lambda\mu\nu\omega} k^\lambda k^\nu k^\omega = \frac{1}{3} k^\lambda k^\nu k^\omega (\alpha_{\lambda\mu\nu\omega} + \alpha_{\nu\mu\omega\lambda} + \alpha_{\omega\mu\nu\lambda}),$$

d'où la somme des deux premiers termes:

$$-a^\mu k^\lambda k^\nu k^\omega (\alpha_{\lambda\mu\nu\omega} + a_{\nu\mu\omega\lambda} + \alpha_{\omega\mu\nu\lambda} + \alpha_{\mu\lambda\nu\omega}).$$

Or, $\alpha_{\lambda\mu\nu\omega}$ est symétrique par rapport aux trois derniers indices, d'après (4, 2), et le coefficient de $-a^\mu k^\lambda k^\nu k^\omega$ disparaît, en vertu de la dernière des formules (4, 3). Ce qui nous reste de $\frac{1}{r}[r]$ peut être décomposé de la façon suivante:

$$\frac{1}{r}[r] = \frac{1}{2} k^\mu k^\nu \left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(C' - \frac{1}{2}\frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda}\right)\right]_0.$$

Utilisons la relation qui peut être tirée de la dernière des formules (4, 3):

$$\alpha^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\lambda} + \alpha^{\cdot\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu\lambda} + \alpha^{\cdot\cdot\lambda}_{\nu\lambda\cdot\mu} + \alpha^{\lambda}_{\cdot\lambda\mu\nu} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left[2\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Box A'_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Box A'_\nu\right]_0 = 0.$$

Nous aurons

$$-k^\mu k^\nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda}\right)\right]_0 = k^\mu k^\nu \left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Box A'_\mu\right]_0,$$

d'où

$$(4,\ 25) \quad \frac{1}{r}[r] = \frac{1}{2} k^\mu k^\nu \left[\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Box A'_\mu - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(C' - \frac{1}{2}\frac{\partial A'^\lambda}{\partial x_\lambda}\right)\right]_0.$$

Pour transformer (4, 25), donnons aux équations (4, 22) une forme qui résulte de (4, 21):

$$\square A_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\nu}\right) = 0. \tag{4, 26}$$

Appliquées à nos A'_λ en $O(\xi)$ et différentiées par rapport à x_β, elles permettent d'écrire, au lieu de (4, 25),

$$\frac{1}{r}[r] = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(C' - \frac{1}{2}\frac{\partial A'^\nu}{\partial x_\nu}\right)\right]_0 k^\alpha k^\beta = 0. \tag{4, 27}$$

De la condition (4, 19) appliquée à nos A'_λ et C', nous tirons, en la différentiant en $O(\xi)$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(C' - \frac{1}{2}\frac{\partial A'^\nu}{\partial x_\nu}\right)\right]_0 - \frac{1}{8} g^{\lambda\mu} \mathring{H}_{\lambda\alpha} \mathring{H}_{\lambda\beta} = 0 \tag{4, 28}$$

(Il faut tenir compte de

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(A'_\nu A'^\nu)\right]_0 = \frac{1}{8} g^{\lambda\mu} \mathring{H}_{\lambda\alpha} \mathring{H}_{\mu\beta}$$

qui résulte de la première et de la seconde formule (4, 3).) De (4, 27) et (4, 28) résulte

$$g^{\lambda\mu} \mathring{H}_{\lambda\alpha} \mathring{H}_{\mu\beta} k^\alpha k^\beta = 0. \tag{4, 29}$$

Le coefficient de $k^\alpha k^\beta$ est symétrique en α, β. Or, une condition

$$h_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0 \tag{4, 30}$$

qui subsiste, en $O(\xi)$, pour un $h_{\alpha\beta}$ symétrique et pour tous les k^λ issus de $O(\xi)$ a pour conséquence

$$h_{\alpha\beta} = h\, g_{\alpha\beta} \qquad \left(h = \frac{1}{4} h^\nu_\nu\right). \tag{4, 31}$$

En effet, la proportionnalité de $h_{\alpha\beta}$ et de $g_{\alpha\beta}$ résulte de la confrontation de (4, 30) et de $g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0$: ces deux équations sont satisfaites par l'ensemble des génératrices du même cône.

Une conséquence de (4, 31) est que $h_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, d'où la conclusion

$$g^{\lambda\mu} \mathring{H}_{\lambda\alpha} \mathring{H}_{\mu\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta. \tag{4, 32}$$

Soit maintenant k^λ choisi de sorte qu'on ait

$$(4, 33) \qquad k^0 = -1, \quad k^1 = 1, \quad k^2 = k^3 = 0,$$

ce qui revient à donner à k^λ une direction qui se projette sur l'espace des X^1, X^2, X^3 le long de l'axe des X^1. Si on tient compte de (4, 32) et de (4, 33), on trouve facilement que l'équation (4, 29) devient

$$g^{\lambda\mu}(\overset{\circ}{H}_{\lambda 0}\, \overset{\circ}{H}_{\mu 0} + \overset{\circ}{H}_{\lambda 1}\, \overset{\circ}{H}_{\mu 1}) \equiv -\left[(\overset{\circ}{H}_{20})^2 + (\overset{\circ}{H}_{30})^2 + (\overset{\circ}{H}_{21})^2 + (\overset{\circ}{H}_{31})^2\right] = 0,$$

d'où

$$\overset{\circ}{H}_{20} = \overset{\circ}{H}_{30} = \overset{\circ}{H}_{21} = \overset{\circ}{H}_{31} = 0.$$

Si on choisit k^λ de sorte qu'on ait

$$k^0 = -1, \quad k^1 = k^3 = 0, \quad k^2 = 1,$$

on arrive, par un calcul analogue au précédent, à

$$\overset{\circ}{H}_{10} = \overset{\circ}{H}_{30} = \overset{\circ}{H}_{12} = \overset{\circ}{H}_{32} = 0.$$

Donc, tous les $\overset{\circ}{H}_{\alpha\beta}$ s'annulent:

$$\overset{\circ}{H}_{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A'_\beta}{\partial x_\alpha}\right)_0 = 0.$$

Les $H_{\alpha\beta}$ étant invariants par rapport à (b) et le point $O(\xi)$ étant quelconque, on a

$$(4, 34) \qquad \boxed{H_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} = 0}.$$

Les équations (4, 34) sont les conditions d'intégrabilité des équations aux différentielles totales pour une fonction cherchée $\log \lambda$

$$(4, 35) \qquad 2\frac{\partial \log \lambda}{\partial x_\alpha} + A_\alpha = 0.$$

Il existe donc une fonction λ qui satisfait aux équations (4, 35) et qui, choisie comme fonction génératrice de la transformation (b), permet d'arriver, par une transformation (b), à une équation (1, 1) aux

$$A'_\alpha = 0$$

dans tout le domaine de régularité des A_α. Mais, l'équation primitive étant une équation à ondes pures, le coefficient C' de notre équation transformée doit satisfaire à la condition (4, 19), c'est-à-dire, à

$$C' - \frac{1}{2}\frac{\partial A'^\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{4} A'_\alpha A'^\alpha = 0,$$

d'où

$$C' = 0,$$

dans le même domaine. Nous arrivons donc au théorème suivant:

Les équations à ondes pures du type (2, 1) *sont identiques à l'équation des ondes sphériques, ou se transforment en l'équation des ondes sphériques par la substitution* $u = \lambda u'$, *où* λ *est une fonction convenablement choisie.*

Qu'il me soit permis d'adresser mes bien vifs remerciements à M. Hadamard qui a bien voulu s'intéresser de très près à mon travail et le rendre plus clair par des remarques que seul l'inégalable connaisseur de ces recherches a pu faire.