ÜBER DIE W-KURVEN IM DREIDIMENSIONALEN RAUME.

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

§ 1.

Verschiedene Typen von reellen W-Kurven.

1. Die Bahnkurven einer eingliedrigen projektiven Gruppe werden bekanntlich als W-Kurven bezeichnet. Je nach der Dimension hat man also W-Kurven in der Ebene, im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume und in den verschiedenen Hyperräumen. Die allgemeine Aufmerksamkeit auf solche Kurven haben zuerst F. KLEIN und S. LIE gelenkt, welche dieselben in einigen gemeinsamen Arbeiten untersucht haben.[1] Doch wurden gelegentlich schon früher in der Litteratur Beispiele von W-Kurven betrachtet.[2] In dieser Abhandlung wollen wir besonders einige liniengeometrische Gebilde behandeln, welche mit den doppelt gekrümmten W-Kurven in Zusammenhang stehen. Als *mit der W-Kurve assoziiert* bezeichnen wir eine Regelfläche, wenn dieselbe aus Sehnen der W-Kurve erzeugt wird und die zugehörige eingliedrige Gruppe gestattet. Hier ist es natürlich eine Bedingung für eine algebraische Regelfläche, dass auch die W-Kurve algebraisch sein muss. Aus diesem Grunde wollen wir in erster Instanz unsere Aufmerksamkeit auf die algebraischen W-Kurven zuwenden. Wir wollen aber

---

[1] Diese Publikationen findet man in Paris C. R. 70 (1870) und Math. Ann. 4 (1871).

[2] Man findet vielfache Litteraturnachweise über W-Kurven in zwei Artikeln in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, in denen auch auf die Eigenschaften der W-Kurven eingegangen wird, und zwar bei G. SCHEFFERS »*Besondere transcendente Kurven*» (III D 4), Nr. 13—20 und 35, sowie K. ROHN und L. BERZOLARI, »*Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen*» (III C 9), Nr. 58.

auch *gewisse Kongruenzen* in Betracht ziehen, welche sich durch die Tangenten eines ∞^1-Systems von W-Kurven erzeugen lassen. Das einfachste Beispiel hat man in den sog. HIRSTschen Kongruenzen, für welche die Brennfläche aus zwei Flächen 2. Grades $(= F_2)$ mit einem gemeinsamen windschiefen Vierseit besteht. Wir können auch dementsprechend die fraglichen Kongruenzen allgemein so definieren, dass die Brennfläche sich in zwei Flächen eines Büschels

$$x^p w^q - \lambda y^r z^s = 0 \qquad (p + q = r + s)$$

zerlegen soll. Hierbei sind, was natürlich zu erwarten ist, die W-Kurven, durch deren Tangenten die Kongruenz sich erzeugen lässt, im allgemeinen Transzendent. Der algebraische Fall tritt mithin in diesem Teile der Untersuchungen weniger in den Vordergrund. Für die algebraischen doppelt gekrümmten W-Kurven gilt nun die Eigenschaft, dass die charakteristische Gleichung einer Operation der zugehörigen eingliedrigen Gruppe vier getrennte Wurzeln haben soll. Dieselbe Eigenschaft charakterisiert noch die transzendenten W-Kurven, auf welche wir in der obigen Weise geführt werden. Die eingliedrige Gruppe G_1 lässt dann die Ecken und Ebenen eines nicht ausgearteten Tetraeders in Ruhe. Wird dieses Tetraeder als Koordinatentetraeder gewählt, so lauten die Gleichungen der ∞^2 Bahnkurven[1]

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1 e^{\alpha_1 t} : c_2 e^{\alpha_2 t} : c_3 e^{\alpha_3 t} : c_4 e^{\alpha_4 t}.$$

2. Man hat *drei Hauptklassen von reellen W-Kurven im Raume*, je nachdem die charakteristische Gleichung einer Operation von G_1 vier reelle Wurzeln, zwei reelle und ein Paar konjugiert imaginärer Wurzeln oder endlich zwei Paare konjugiert imaginärer Wurzeln besitzt.

Im ersten Falle sind sämtliche Ebenen und Ecken des obigen Koordinatentetraeders reell. Wenn wir oben e^t durch t ersetzen, bekommen wir die Gleichungen der W-Kurven in der Gestalt

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1 t^{\alpha_1} : c_2 t^{\alpha_2} : c_3 t^{\alpha_3} : c_4 t^{\alpha_4}, \tag{1}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 reelle Grössen bedeuten. Hat man $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$, so nähern sich die Kurven unbegrenzt für $t \to 0$ der Ecke $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und für $t \to \infty$ der Ecke $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Die Tangenten haben dabei offenbar als Grenzlagen $x_1 = x_2$ bzw. $x_3 = x_4 = 0$, und ebenso sind $x_1 = 0$ bzw. $x_4 = 0$ die

[1] Man sehe das soeben zitierte Referat von SCHEFFERS, Nr. 20.

Grenzlagen der Schmiegungsebenen. Wenn sämtliche Verhältnisse zwischen den Differenzen der Grössen α_1, α_2, α_3 und α_4 rational sind, so ist die Kurve algebraisch und zwar unikursal. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist die Kurve transzendent. *Für das reelle Gebiet* hat man aber hier auf Grund der übereinstimmenden asymptotischen Eigenschaften bei Annäherung an den singulären Punkten $t = 0$ und $t = \infty$ *eine ganz analoge Theorie für die algebraischen und die transzendenten W-Kurven.* Die algebraischen Kurven sind für sowohl positive als negative t-Werte definiert. Auch die transzendenten Kurven lassen sich in geeigneter Weise so definieren, dass dieselben bei negativen t-Werten reell existieren. Hierfür hat man, wie wir später finden werden, eine endliche Anzahl von Möglichkeiten.

Im zweiten Falle sind unter den Ebenen des Koordinatentetraeders zwei reell, und die beiden übrigen bilden ein konjugiertes Paar. Die reellen Ebenen seien $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$. Wir setzen $x_1, x_2 = \bar{x}_1 \pm i\bar{x}_2$ und $\alpha_1, \alpha_2 = \bar{\alpha}_1 \pm i\bar{\alpha}_2$. Die Konstanten c_1 und c_2 sollen auch konjugiert imaginär sein. Die Gleichungen der W-Kurven lassen sich jetzt auf die folgende reelle Gestalt bringen

$$\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : x_3 : x_4 = \bar{c}_1 t^{\bar{\alpha}_1} \cos(\bar{\alpha}_2 \log t) : \bar{c}_2 t^{\bar{\alpha}_1} \sin(\bar{\alpha}_2 \log t) : \bar{c}_3 t^{\alpha_3} : c_4 t^{\alpha_4}. \tag{2}$$

Es ist erlaubt anzunehmen, es sei $\alpha_3 > \alpha_4$. Die W-Kurve nähert sich dann für $t \to 0$ unbegrenzt der Ebene $x_3 = 0$ und für $t \to \infty$ der Ebene $x_4 = 0$, und zwar geschieht dies in spiralförmigen Windlungen. Betreffs des näheren Verlaufes hat man drei Hauptmöglichkeiten zu unterscheiden. Bei der ersten hat man $\alpha_3 > \bar{\alpha}_1 > \alpha_4$. Die Windlungen ziehen sich dann um den Punkt $x_3 = \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ bzw. $x_4 = \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ zusammen, wobei die W-Kurve sich asymptotisch an eine Kurve in der Ebene $x_3 = 0$ bzw. $x_4 = 0$ anschmiegt. Bei der zweiten Möglichkeit haben wir entweder $\bar{\alpha}_1 > \alpha_3$ oder $\bar{\alpha}_1 < \alpha_4$. Ist etwa $\bar{\alpha}_1 > \alpha_3$, so nähern sich für $t \to \infty$ die Windlungen asymptotisch der geraden Linie $x_3 = x_4 = 0$. Für $t \to 0$ zieht sich dagegen die Kurve immer enger um die Gerade $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ zusammen, so dass die Annäherung an den Punkt $x_3 = \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ hier asymptotisch längs dieser Linie geschieht. Hieraus findet man auch für $\bar{\alpha}_1 < \alpha_4$ die Resultate, indem man die Rollen der Ebenen $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ vertauscht. Bei der noch übrigen dritten Möglichkeit ist entweder $\bar{\alpha}_1 = \alpha_3$ oder $\bar{\alpha}_1 = \alpha_4$. Hat man z. B. $\bar{\alpha}_1 = \alpha_3$, so nähern sich für $t \to \infty$ die Windlungen asymptotisch dem Kegelschnitte

$$x_4 = \frac{\bar{x}_1^2}{\bar{c}_1^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{c}_2^2} - \frac{x_3^2}{\bar{c}_3^2} = 0.$$

Die W-Kurve liegt sogar auf dem Kegel 2. Grades

$$\frac{\bar{x}_1^2}{\bar{c}_1^2}+\frac{\bar{x}_2^2}{\bar{c}_2^2}-\frac{x_3^2}{\bar{c}_3^2}=0,$$

wodurch sich leicht das Verhältniss der Kurve auch für $t\rightarrow 0$ charakterisieren lässt. Wir bemerken noch hierzu, dass die obigen Resultate betreffs der ersteren beiden Möglichkeiten damit zusammenhängen, dass die W-Kurve stets auf einer Fläche

$$\left[\frac{\bar{x}_1^2}{\bar{c}_1^2}+\frac{\bar{x}_2^2}{\bar{c}_2^2}\right]^{\alpha_3-\alpha_4}-\left(\frac{x_3^2}{\bar{c}_3^2}\right)^{\bar{\alpha}_1-\alpha_4}\left(\frac{x_4^2}{\bar{c}_4^2}\right)^{\alpha_3-\bar{\alpha}_1}=0$$

liegt.

Im dritten Falle enthält das Koordinatentetraeder zwei Paare konjugierter Ebenen. Um die Gleichungen der W-Kurven in reeller Gestalt zu bekommen setzen wir noch $x_3, x_4=\bar{x}_3\pm i\bar{x}_4$, $\alpha_3, \alpha_4=\bar{\alpha}_3\pm i\bar{\alpha}_4$ und erhalten alsdann

$$(3)\quad \bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3:\bar{x}_4=\bar{c}_1 t^{\bar{\alpha}_1}\cos(\bar{\alpha}_2\log t):\bar{c}_2 t^{\bar{\alpha}_1}\sin(\bar{\alpha}_2\log t):\bar{c}_3 t^{\bar{\alpha}_3}\cos(\bar{\alpha}_4\log t): \\ :\bar{c}_4 t^{\bar{\alpha}_3}\sin(\bar{\alpha}_4\log t).$$

Es sei $\bar{\alpha}_1>\bar{\alpha}_3$. Für $t\rightarrow 0$ macht dann die W-Kurve wiederholte Umläufe längs der Linie $\bar{x}_1=\bar{x}_2=0$, welcher dieselbe sich asymptotisch nähert, und für $t\rightarrow\infty$ steht die Kurve in einem ähnlichen Verhältniss zur Geraden $\bar{x}_3=\bar{x}_4=0$. In einem speziellen Falle haben wir $\bar{\alpha}_1=\bar{\alpha}_3$, und der gemeinsame Faktor $t^{\bar{\alpha}_1}$ rechts in (3) lässt sich wegschaffen. Mit diesem Falle werden wir uns später vielfach, besonders im 3. Abschnitte, beschäftigen. Hier sei nur vorab bemerkt, dass die Kurve auf einer F_2 liegt und entweder algebraisch ist oder eine überall dichte Punktmenge auf der F_2 darstellt.

3. Lassen sich die vier Exponenten α_i in zwei Paare α_i, α_k und α_l, α_m aufteilen, so dass $\alpha_i+\alpha_k=\alpha_l+\alpha_m$, so bezeichnen wir die Kurve als eine *ausgezeichnete W-Kurve*. Die gemeinsame Summe der beiden Paare lässt sich offenbar beliebig wählen. Wir setzen dieselbe $=0$ und erhalten dann die Exponenten in der Gestalt $\pm\alpha$, $\pm\beta$. Die fragliche Benennung rührt von H. Mohrmann her. Freilich hat dieser Verfasser dabei nur die algebraischen W-Kurven berücksichtigt. Unter den charakteristischen Eigenschaften der ausgezeichneten W-Kurven heben wir hervor, dass jede solche Kurve auf einer F_2 liegt, welche vier Kanten des bei der eingliedrigen Gruppe invarianten Tetraeders enthält. Hiermit steht

in Zusammenhang, dass die ausgezeichneten W-Kurven in enger Beziehung zu den HIRSTschen Kongruenzen stehen, welche wir im 4. Abschnitte behandeln werden.

Unter den ausgezeichneten W-Kurven gibt es *vier reelle Klassen*, nämlich zu den ersten beiden Fällen der vorigen Nummer je eine und zum dritten zwei. Im ersten Falle hat man die reelle Darstellung

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1 t^{\alpha} : c_2 t^{\beta} : c_3 t^{-\beta} : c_4 t^{-\alpha}. \tag{4}$$

In gleicher Weise erhält man bei einiger Modifikation der Bezeichnungen in der vorigen Nummer für den zweiten Fall

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1 \cos(\beta \log t) : c_2 \sin(\beta \log t) : c_3 t^{\alpha} : c_4 t^{-\alpha}. \tag{5}$$

Im dritten Falle hat man die beiden Möglichkeiten $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_3$ und $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_4$. Dies bedeutet nach unseren ursprünglichen Bezeichnungen $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ und $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$. Für die entsprechenden Gleichungen erhalten wir die folgenden reellen Gestalten

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1 \cos \alpha\theta : c_2 \sin \alpha\theta : c_3 \cos \beta\theta : c_4 \sin \beta\theta; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1 t^{\alpha} \cos(\beta \log t) &: c_2 t^{\alpha} \sin(\beta \log t) : \\ &: c_3 t^{-\alpha} \cos(\beta \log t) : c_4 t^{-\alpha} \sin(\beta \log t). \end{aligned} \tag{7}$$

In (6) haben wir einen neuen Parameter $\theta = \log t$ eingeführt. Wie unmittelbar einzusehen ist, stellt dieser Fall eine algebraische Kurve dar, wenn zwischen den Grössen α und β ein rationales Verhältniss besteht.

Diese W-Kurven sind dadurch charakterisiert, dass dieselben in zwei ganz verschiedenen Weisen reelle Züge erhalten können. Am einfachsten sieht man dies ein, wenn man die Gleichungen sämtlicher vier Klassen in der Gestalt (4) schreibt, wobei natürlich nur für die erste Klasse α und β beide reell sind. Wünscht man dann hiervon zu den übrigen drei reellen Darstellungen zu gelangen, so müssen für α und β die folgenden Bedingungen gelten. Wünscht man die reelle Gestalt (5), so müssen von den Grössen α und β in (4) eine reell und die andere rein imaginär sein. Ebenso ist für (6) und (7) erforderlich, dass α und β beide rein imaginär sind bzw. zwei konjugiert imaginäre Grössen darstellen. Wir führen jetzt vermittelst der Substitution

$$\tau = t^i \tag{8}$$

einen neuen Parameter τ ein. Wie man sieht, hat man, wenn t die reelle positive Achse durchläuft, $|\tau| = 1$ und umgekehrt. Will man jetzt in (4) t durch τ ersetzen, so werden in den Exponenten reelle Grössen in rein imaginäre übergeführt und umgekehrt. Im komplexen Gebiete gehören somit die reellen Darstellungen (4) und (6) zu derselben Kurvenklasse. Ersetzt man dagegen in (5) und (7) die reellen Grössen α und β durch αi und βi, so wird jedesmal die neue Darstellung von derselben Art. Es werden nur die Rollen von α und β vertauscht.

4. Wir betrachten jetzt eine besondere W-Kurve (1) und setzen voraus, dass sämtliche Exponenenten α_1, α_2, α_3 und α_4 reell sind. Wir führen leicht die Gleichung in die Gestalt

$$x : y : z : w = t^n : t^{n_1} : t^{n_2} : 1 \qquad (n > n_1 > n_2 > 0) \tag{9}$$

über. Für *algebraische W-Kurven*, welche wir besonders berücksichtigen wollen, können wir n, n_1 und n_2 als ganze rationale Zahlen annehmen, die nicht alle einen gemeinsamen Faktor besitzen.[1]

Die algebraischen W-Kurven lassen sich in *fünf verschiedene Klassen* aufteilen. Zunächst hat man sieben Möglichkeiten für die Exponenten n, n_1 und n_2, je nachdem dieselben gerade oder ungerade ganze Zahlen bedeuten.

Erstens haben wir drei Fälle, in denen unter den Zahlen n, n_1 und n_2 *eine* gerade und die beiden übrigen ungerade sind.

1) n und n_2 ungerade, n_1 gerade.

2) n_1 und n_2 ungerade, n gerade.

3) n und n_1 ungerade, n_2 gerade.

In den übrigen vier Fällen gibt es unter n, n_1 und n_2 entweder keine oder zwei gerade Zahlen.

4) n_2 ungerade, n und n_1 gerade.

5) n_1 ungerade, n und n_2 gerade.

6) n, n_1 und n_2 sind alle ungerade.

7) n ungerade, n_1 und n_2 gerade.

Setzt man $w = 1$, so sind diese sieben Fälle durch die Zeichen charakterisiert, welche x, y und z bei negativen t-Werten erhalten. Nun lässt sich die

[1] Für den allgemeinen Fall eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen hat MOHRMANN die algebraischen W-Kurven bestimmt. Man sehe seine Arbeit »*Bestimmung aller algebraischen W-Kurven*», Math. Ann. 89 (1923), p. 260—271.

Gleichung der W-Kurve natürlich eben so gut durch den Parameter $t_1 = t^{-1}$ ausdrücken. Es werden dann die Punkte mit den Argumenten 0 und ∞ vertauscht und die Exponenten n, n_1 und n_2 durch n, $n - n_2$ und $n - n_1$ ersetzt. Die Fälle 4 und 5 sowie 6 und 7 erweisen sich mithin als äquivalent, so dass wir bloss fünf Klassen von algebraischen W-Kurven erhalten. Ausgezeichnete W-Kurven können offenbar nur in den drei ersten Fällen vorkommen.

Für positive t-Werte versteht man ohne weiteres, dass die Exponenten n, n_1 und n_2 sich durch drei beliebige reelle Zahlen ν, ν_1 und ν_2 ersetzen lassen, wenn nur die Bedingung

$$\nu : \nu_1 : \nu_2 = n : n_1 : n_2$$

erfüllt wird. Man kann dabei z. B. immer $\nu_2 = 1$ setzen, so dass ν und ν_1 die Bedeutung von $n : n_2$ und $n_1 : n_2$ erhalten. Es ergibt sich dann eine überall dichte Menge von Paaren rationaler Zahlen ν, ν_1 im Bereiche $\nu > \nu_1 > 1$. Auch jede der sieben Teilmengen, die den obigen Fällen 1—7 entsprechen, ist offenbar überall dicht. Daraus entsteht für das System von rationalen Kurven (9) die entsprechende Eigenschaft, dass nämlich die Kurven in den Bereichen $x < y < z < 1$ und $x > y > z > 1$ überall dicht auftreten.

Auch für negative t-Werte lassen sich in solcher Weise allgemeinere Exponenten ν, ν_1 und ν_2 einführen. Wenn wir uns auf reelle Grössen beschränken, können wir ja die Ausdrücke $t^{2\varkappa}$ und $t^{2\lambda+1}$ durch $|t|^{2\varkappa}$ und $\operatorname{sgn} t . |t|^{2\lambda+1}$ ersetzen, wobei $\operatorname{sgn} t = +1$ oder -1, je nachdem $t > 0$ oder $t < 0$. Dementsprechend schreiben wir, wenn wir die Exponenten ν, ν_1 und ν_2 benutzen, $|t|^{\nu_i}$ bzw. $\operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_i}$, je nachdem in (9) n_i eine gerade oder ungerade ganze Zahl bedeutet.

5. Hierbei brauchen wir uns offenbar keineswegs auf solche Exponenten ν, ν_1 und ν_2 zu beschränken, welche zu einander in rationalen Verhältnissen stehen. Wir können in der Tat für ν, ν_1 und ν_2 *drei ganz beliebige positive reelle Zahlen* wählen und setzen nur fest, dass $\nu > \nu_1 > \nu_2$ sein soll. Wir haben dann keinen Grund einen der Ausdrücke $|t|^{\nu_i}$ oder $\operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_i}$ vor dem anderen zu bevorzugen. Unter den in solcher Weise möglichen acht Kombinationen soll aber $|t|^{\nu}$, $|t|^{\nu_1}$, $|t|^{\nu_2}$ ausgeschlossen werden, da bei dieser die Kurvenzweige für positive und negative t-Werte zusammenfallen. Zu jedem Wertesystem von ν, ν_1 und ν_2 bekommen wir somit sieben verschiedene *reelle* W-Kurven. Wir wollen jetzt die Gleichungen dieser W-Kurven vermittelst eines Parameters ausdrücken. Wir nehmen dieselben in der Reihenfolge, in welcher in der vorigen Nummer die entsprechenden algebraischen Fälle aufgezählt wurden.

(A_1) $\quad x : y : z : w = \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu} : |t|^{\nu_1} : \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_2} : 1 .$

(A_2) $\quad x : y : z : w = |t|^{\nu} : \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_1} : \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_2} : 1 .$

(A_3) $\quad x : y : z : w = \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu} : \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_1} : |t|^{\nu_2} : 1 .$

(A_4) $\quad x : y : z : w = |t|^{\nu} : |t|^{\nu_1} : \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_2} : 1 .$

$(\bar{A}_4)$ $\quad x : y : z : w = |t|^{\nu} : \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_1} : |t|^{\nu_2} : 1 .$

(A_5) $\quad x : y : z : w = \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu} : \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_1} : \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu_2} : 1 .$

$(\bar{A}_5)$ $\quad x : y : z : w = \operatorname{sgn} t . |t|^{\nu} : |t|^{\nu_1} : |t|^{\nu_2} : 1 .$

Ebenso wie die entsprechenden Fälle von algebraischen Kurven in der vorigen Nummer gehen durch die Transformation $t_1 = t^{-1}$ (A_4) und $(\bar{A}_4)$ sowie (A_5) und $(\bar{A}_5)$ in einander über. Wir haben also hiermit *die Verallgemeinerungen der fünf Hauptklassen von algebraischen W-Kurven* erhalten.

Für die positiven t-Werte sind die obigen sieben Darstellungen identisch, und die Kurven liegen in demjenigen Bereiche des Raumes, wo sämtliche Koordinaten $x, y, z > 0$ sind. Durch die Koordinatenebenen werden sieben andere Bereiche abgegrenzt, und die sieben Darstellungen lassen sich durch den Bereich charakterisieren, in welchem die Kurve für negative t-Werte liegt. Es ist leicht zu sehen, wie die sieben Kurven $(A_1), \ldots (\bar{A}_5)$ sich durch Spiegelungen aus dem gemeinsamen Teile für positive t-Werte vervollständigen lassen. Diese Spiegelungen erfolgen für $(A_1), (A_2), (A_3)$ an den Achsen $x = z = 0$, $y = z = 0$, $x = y = 0$, für $(A_4), (\bar{A}_4), (\bar{A}_5)$ an den Ebenen $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ und für (A_5) an der Ebene $w = 0$ (oder am Punkte $x = y = z = 0$). Die sieben Kurven gehören zu sieben verschiedenen eingliedrigen *reellen* Gruppen, für welche jedoch die Substitutionen

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = t^{\nu} x : t^{\nu_1} y : t^{\nu_2} z : w,$$

die den positiven t-Werten zugeordnet sind, mit einander übereinstimmen. Die Erweiterung auf negative t-Werte geschieht aber in sieben verschiedenen Weisen, nämlich

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = \pm |t|^{\nu} x : \pm |t|^{\nu_1} y : \pm |t|^{\nu_2} z : w,$$

wo die einzige Zeichenkombination $+ + +$ ausgeschlossen wird.

Sind ν, ν_1 und ν_2 kommensurabel, so wird eine von den sieben Kurven $(A_1), \ldots (\bar{A}_5)$ eine algebraische Kurve. Für die sechs anderen werden die Hälften für $t > 0$ und $t < 0$ aus verschiedenen algebraischen Kurven herrühren. Die drei Exponenten ν, ν_1 und ν_2 lassen sich stets in solcher Weise als Grenzwerte von drei Folgen rationaler Zahlen erhalten, dass die zusammengehörigen Tripel gemeinsame Nenner und ungerade bzw. gerade Zähler besitzen, je nachdem sgn t als Faktor der betreffenden Potenz auftritt oder nicht. Hierin liegt die Bedeutung, dass *jede von unseren verallgemeinerten W-Kurven als Grenzkurve einer Folge von algebraischen W-Kurven aufgefasst werden kann.* Nun kann man offenbar zu jedem Punkte in einem der Bereiche $0 < x < y < z < 1$ und $x > y > z > 1$ die Verhältnisse $\nu : \nu_1 : \nu_2$ so bestimmen, dass die zugehörigen Kurven $(A_1), \ldots (\bar{A}_5)$ durch den Punkt gehen. Die algebraischen W-Kurven stehen mithin in derselben Beziehung zu den hier gegebenen Verallgemeinerungen wie eine überall dichte Menge zu einem Kontinuum.

Wenn wir im nächsten Abschnitte die zu den W-Kurven assoziierten Regelflächen studieren und dabei uns auf das reelle Gebiet beschränken wollen, so erweist es sich als vorteilhaft für die fünf Hauptklassen von verallgemeinerten W-Kurven gewisse algebraische Repräsentanten $(B_1), \ldots (B_5)$ auszuwählen. Wir untersuchen dann zunächst bei diesen Repräsentanten die Eigenschaften und suchen hiervon vermittelst Stetigkeitsbetrachtungen Schlüsse betreffs der zugehörigen Klassen zu ziehen. Am einfachsten geschieht wohl diese Wahl in der folgenden Weise

$$(B_1) \qquad x : y : z : w = t^3 : t^2 : t : 1.$$

$$(B_2) \qquad x : y : z : w = t^4 : t^3 : t : 1.$$

$$(B_3) \qquad x : y : z : w = t^5 : t^3 : t^2 : 1.$$

$$(B_4) \qquad x : y : z : w = t^4 : t^2 : t : 1.$$

$$(B_5) \qquad x : y : z : w = t^5 : t^3 : t : 1.$$

Doch werden die Verhältnisse bei der Klasse (A_4) nicht immer in befriedigender Weise durch den Repräsentanten (B_4) wiedergegeben, und zwar gilt dies für $3\nu_2 > \nu + \nu_1$. Für solche Fälle nehmen wir einen besonderen Repräsentanten

$$(B'_4) \qquad x : y : z : w = t^8 : t^6 : t^5 : 1.$$

Man hätte auch für die repräsentierenden Kurven aller fünf Klassen $\nu = 3$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$ wählen können. Dann würde man aber nur für (A_1) eine algebraische C_3 als Repräsentanten erhalten. In den anderen vier Fällen würde die Kurve für $t > 0$ und $t < 0$ zu zwei verschiedenen algebraischen C_3 gehören.

6. Wir wollen hier als Ordnung einer Kurve (9) die höchste Anzahl der *reellen* Schnittpunkte mit einer Ebene bezeichnen. Wir fragen also, was sich über die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung

$$c_0 t^n + c_1 t^{n_1} + c_2 t^{n_2} + c_3 = 0 \tag{10}$$

sagen lässt. Die Antwort folgt unmittelbar aus der Zeichenregel von DESCARTES. Es sei nämlich

$$f(t) = 0 \tag{11}$$

eine allgemeine Gleichung mit ganzzahligen Exponenten, deren Glieder nach fallenden Exponenten geordnet sind. Für jedes Paar aufeinanderfolgender Glieder der Funktion $f(t)$ betrachten wir nun die Zeichen der Koeffizienten. Dabei gibt es die folgenden Möglichkeiten.

1) Beide Glieder haben entweder gerade oder ungerade Exponenten. Es mögen ϱ_1 solche Paare mit demselben Zeichen und σ_1 Paare mit verschiedenen Zeichen der Koefficienten vorkommen.

2) Ein Glied ist von geradem Typus und das andere von ungeradem Typus. Die Anzahl solcher Paare mit demselben Zeichen sei ϱ_2 und mit verschiedenen Zeichen σ_2.

Die Zeichenregel won DESCARTES besagt nun, dass die Gleichung $f(t) = 0$ höchstens $\sigma_1 + \sigma_2$ positive und $\sigma_1 + \varrho_2$ negative Wurzeln besitzen kann. Nun erhält man in den Fällen 1—7 der 4. Nummer für σ_1 und $\varrho_2 + \sigma_2$:

$$
\begin{array}{rll}
1) & \sigma_1 = 0, & \varrho_2 + \sigma_2 = 3; \\
2) & \sigma_1 = 1, & \varrho_2 + \sigma_2 = 2; \\
3) & \sigma_1 = 2, & \varrho_2 + \sigma_2 = 1; \\
4,\ 5) & \sigma_1 = 1, & \varrho_2 + \sigma_2 = 2; \\
6,\ 7) & \sigma_1 = 2, & \varrho_2 + \sigma_2 = 1.
\end{array}
$$

Dabei sind die Angaben für σ_1 als Maximalzahlen zu betrachten. Als die höchste Anzahl von reellen Wurzeln bekommt man also drei im Falle 1, vier in den Fällen 2, 4, 5 und fünf in den Fällen 3, 6, 7.

Die obigen Auseinandersetzungen gelten noch, wenn man in (11) bei ganz beliebigen positiven Exponenten $\alpha_\varkappa$, β_λ Glieder

$$a_\varkappa \,.\, |t|^{\alpha_\varkappa}, \quad b_\lambda \,.\, \operatorname{sgn} t \,.\, |t|^{\beta_\lambda}$$

von geradem bzw. ungeradem Typus einführt. Das Beweisverfahren der Zeichenregel von DESCARTES, welches man erhält, wenn man diese Regel als einen Spezialfall des BUDAN-FOURIERschen Theoremes betrachtet, lässt sich ja ohne Schwierigkeit auf solche verallgemeinerte Gleichungen überführen. Von einem anderen Gesichtspunkte lässt sich eine solche Gleichung (11) als Grenzgleichung einer Folge von algebraischen Gleichungen auffassen. Wir betrachten eine Folge von unbegrenzt wachsenden ungeraden ganzen Zahlen $2N_i + 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Für die Exponenten $\alpha_\varkappa$ der Glieder von geradem Typus nehmen wir Näherungswerte $\frac{2\,a_\varkappa^{(i)}}{2\,N_i + 1}$ und für diejenigen von ungeradem Typus Näherungswerte $\frac{2\,b_\lambda^{(i)} + 1}{2\,N_i + 1}$, wobei $a_\varkappa^{(i)}$ und $b_\lambda^{(i)}$ ganze rationale Zahlen bedeuten. Setzen wir diese Exponenten in (11) ein, so bekommen wir eine Folge von Gleichungen $f_i(t) = 0$, wobei für $i \to \infty$ die Exponenten unbegrenzt gegen die zugehören Exponenten in $f(t)$ konvergieren. Es lässt sich dann auch beweisen, dass für $i \to \infty$ die Wurzeln von $f_i(t) = 0$ sich den Wurzeln von (11) unbegrenzt nähern. Man kann auch in jeder Gleichung $f_i(t) = 0$ die Substitution

$$t = t_i^{2\,N_i + 1}$$

machen. Da es sich hier bloss um reelle Grössen handelt, so ist jede solche Substitution umkehrbar eindeutig. Wir bekommen so eine Folge von algebraischen Gleichungen $F_i(t_i) = 0$, und für jede von diesen lässt sich die Zeichenregel von DESCARTES unmittelbar anwenden.[1]

Aus den obigen Resultaten lässt sich schliessen, dass *für sämtliche fünf Hauptklassen von verallgemeinerten W-Kurven die Ordnung mit derjenigen der zugehörigen algebraischen Repräsentanten übereinstimmen muss. Es gibt also eine Hauptklasse von der Ordnung* 3, *für welche die Darstellung* (A_1) *gilt, zwei Hauptklassen von der Ordnung* 4, *für welche die Darstellungen* (A_2) *und die mit einander äquivalenten* (A_4) *und* $(\bar{A}_4)$ *gelten, und endlich zwei Hauptklassen von der Ordnung* 5, *für welche die Darstellungen* (A_3) *und die mit einander äquivalenten* (A_5) *und* $(\bar{A}_5)$ *gelten.*

[1] Man vergleiche unsere Arbeit »*Über eine Verallgemeinerung der algebraischen Gleichungen*«, Math. Ann. 108 (1933), p. 111.

§ 2.

Die assoziierten Regelflächen.

7. Wir nehmen zunächst eine algebraische W-Kurve (9) in Betracht. Die drei Exponenten n, n_1 und n_2 seien demgemäss ganze rationale Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Die Substitution

$$t' = kt \tag{12}$$

bestimmt ein Element der eingliedrigen Gruppe, welche die W-Kurve zulässt. Wenn wir die dabei einander entsprechenden Punkte der W-Kurve durch gerade Linien verbinden, so bekommen wir eine Regelfläche, welche wir als eine mit der W-Kurve *assoziierte Regelfläche* bezeichnen wollen. Unter diesen assoziierten Regelflächen tritt auch die abwickelbare Fläche auf, welche man für $k \to 1$ als Grenzfläche bekommt.

Um den Grad einer solchen Regelfläche zu bestimmen, untersuchen wir, wie oft eine Erzeugende von anderen Erzeugenden getroffen wird. Als Bedingung, damit die Verbindungsgeraden zweier Punktpaare t_1, kt_1 und t, kt in derselben Ebene liegen, erhält man

$$\begin{aligned} & t^{n+n_1-n_2}(k^{n_1}-k^n)(1-k^{n_2}) - t^n t_1^{n_1-n_2}(k^{n_2}-k^n)(1-k^{n_1}) + \\ & + t^{n_1} t_1^{n-n_2}(k^{n_2}-k^{n_1})(1-k^n) + t^{n-n_2} t_1^{n_1}(k^{n_2}-k^{n_1})(1-k^n) - \\ & - t^{n_1-n_2} t_1^n (k^{n_2}-k^n)(1-k^{n_1}) + t_1^{n+n_1-n_2}(k^{n_1}-k^n)(1-k^{n_2}) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Wenn man sich hier t_1 als gegeben denkt, bekommt man also für t eine Gleichung vom Grade $n + n_1 - n_2$ Nun lässt sich aus dem linken Glied von (13) der Faktor

$$(k-1)^2 (t-t_1)^2 (t-kt_1)(kt-t_1)$$

immer ausscheiden. Es bleibt eine in t und t_1 symmetrische Gleichung vom Grade $n + n_1 - n_2 - 4$ übrig. Eine Erzeugende begegnet demnach $n + n_1 - n_2 - 2$ anderen Erzeugenden, nämlich ausser denjenigen beiden, welche durch die Stützpunkte gehen, noch $n + n_1 - n_2 - 4$. Da bekanntlich eine Erzeugende einer Regelfläche des Grades m von $m-2$ anderen Erzeugenden getroffen wird, so erhält man, wenigstens im allgemeinen,

$$(14) \qquad n + n_1 - n_2$$

als Grad der assoziierten Regelfläche.

Dieses Resultat steht in Zusammenhang mit den folgenden Tatsachen. Man hat im allgemeinen $2(m - 1)$ als Grad einer Regelfläche, wenn die Erzeugenden Bisekanten einer rationalen Kurve des Grades m sind, und durch jeden Punkt der Kurve zwei Erzeugende gehen. Doch wird der Grad jedesmal um eine Einheit herabgesetzt, wo die Stützpunkte einer Erzeugenden in einem Doppelpunkte der Kurve zusammenfallen. Sollen dabei die Stützpunkte unmittelbar auf einander folgen, so muss der Doppelpunkt durch einen Rückkehrpunkt ersetzt werden. Im vorliegenden Falle gilt also die Frage, mit wie vielen stationären Punkten die Punkte mit den Argumenten $t = 0$ und $t = \infty$ äquivalent sind. Die Antwort hierzu ist bekanntlich $n_2 - 1$ bzw. $n - n_1 - 1$. Von diesem Ausgangspunkte erhält man mithin als Grad der assoziierten Regelfläche

$$2(n - 1) - (n_2 - 1) - (n - n_1 - 1) = n + n_1 - n_2,$$

was mit (14) übereinstimmt.

Eine assoziierte Regelfläche muss sich aus Bahnkurven der zu Grunde liegenden eingliedrigen Gruppe erzeugen lassen. *Insbesondere wird die Doppelkurve in solche Bahnkurven zerlegt.* Aus Symmetriegründen hat (13) gleichzeitig die Lösungen $t : t_1 = \lambda$ und $t : t_1 = \frac{1}{\lambda}$. Diese Lösungen gehören offenbar zu demselben Teile der Doppelkurve, da dieselben in einander übergehen, wenn man t mit t_1 vertauscht. Eine Erzeugende, welche die Punkte (t_1, kt_1) von (9) verbindet, trifft demgemäss, den Lösungen λ und $\frac{1}{\lambda}$ entsprechend, zweimal den fraglichen Teil der Doppelkurve. Ist $n + n_1 - n_2$ eine ungerade ganze Zahl, so hat (13) die Lösung $t : t_1 = -1$. In diesem Falle hat man $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, und der zugehörige Teil der Doppelkurve wird von einer Erzeugenden nur einmal getreffen.

Für eine Bahnkurve, welche durch den Punkt x_0, y_0, z_0, w_0 geht, hat man die Gleichung

$$x : y : z : w = x_0 t^n : y_0 t^{n_1} : z_0 t^{n_2} : w_0.$$

Sind sämtliche Grössen x_0, y_0, z_0, w_0 von Null verschieden, so ist diese Kurve doppelt gekrümmt. Eine assoziierte Regelfläche lässt sich als assoziiert in bezug auf jede solche doppelt gekrümmte Doppelkurve, welche dieselbe besitzt, betrachten. Die vier Koordinatenebenen werden durch ebene Bahnkurven erfüllt. So hat man z. B. für $z_0 = 0$

$$x : y : w = x_0 t^n : y_0 t^{n_1} : w_0 ; \quad z = 0.$$

Diese Bahnkurve ist als μ-fache Kurve zu betrachten, wenn μ den grössten gemeinsamen Faktor von n und n_1 bedeutet. Doch wird dieselbe bei reellen t-Werten, falls μ ungerade ist, nur einmal durchgelaufen. Ist aber μ gerade, so wird die eine Hälfte der Kurve bei reellen t-Werten doppelt durchgelaufen; zur anderen Hälfte gehören rein imaginäre t-Werte. Unter den Bahnkurven treten auch die sechs Kanten des Koordinatentetraeders auf. Als Beispiel nehmen wir

$$x : w = x_0 t^n : w_0 : \quad y = z = 0.$$

Hierbei spielt n dieselbe Rolle wie μ im vorigen Beispiel.

8. Eine assoziierte Regelfläche wird durch das System

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & w \\ t^n, & t^{n_1}, & t^{n_2}, & 1 \\ k^n t^n, & k^{n_1} t^{n_1}, & k^{n_2} t^{n_2}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Führen wir aus, so erhalten wir die Gleichungen

$$(15_1) \qquad x(k^{n_2} - k^{n_1}) + y\, t^{n-n_1}(k^n - k^{n_2}) + z\, t^{n-n_2}(k^{n_1} - k^n) = 0;$$

$$(15_2) \qquad y(1 - k^{n_2}) + z\, t^{n_1-n_2}(k^{n_1} - 1) + w\, t^{n_1}(k^{n_2} - k^{n_1}) = 0;$$

$$(15_3) \qquad x(1 - k^{n_1}) + y\, t^{n-n_1}(k^n - 1) + w\, t^n (k^{n_1} - k^n) = 0;$$

$$(15_4) \qquad x(1 - k^{n_2}) + z\, t^{n-n_2}(k^n - 1) + w\, t^n (k^{n_2} - k^n) = 0.$$

Die Gleichung der Regelfläche bekommt man am einfachsten durch Elimination von t zwischen den ersten beiden Gleichungen, und man bestätigt dabei, dass ihr Grad für allgemeine k-Werte $n + n_1 - n_2$ sein muss. Man ersieht unmittelbar, dass man als Schnitt der Regelfläche mit der Ebene $z = 0$ eine μ-fache Kurve bekommt wenn μ den grössen gemeinsamen Teiler von n und n_1 bedeutet. Ebenso hat die Regelfläche in der Ebene $w = 0$ eine μ_1-fache Kurve, in der Ebene $y = 0$ eine μ_2-fache Kurve und in der Ebene $x = 0$ eine μ_3-fache Kurve, wobei μ_1, μ_2 und μ_3 die Bedeutung von grössten gemeinsamen Teilern haben, und zwar μ_1 von $n - n_1$ und $n - n_2$, μ_2 von n und n_2 und μ_3 von n_1 und n_2. Da

n, n_1 und n_2 keinen gemeinsamen Teiler haben dürfen, so muss offenbar jedes Paar von den Zahlen μ, μ_1, μ_2 und μ_3 teilerfremd sein.

Besondere Verhältnisse treten bei denjenigen k-Werten ein, für welche gewisse Glieder der Gleichungen (15) verschwinden. Dieselben müssen einer oder mehreren von den Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} &k^{n-n_1} = 1; \quad k^{n_2} = 1; \\ &k^{n-n_2} = 1; \quad k^{n_1} = 1; \\ &k^{n_1-n_2} = 1; \quad k^n = 1 \end{aligned}$$

genügen. Von der Lösung $k = 1$ soll dabei abgesehen werden. Jedesmal, wenn eine Relation (16) befriedigt wird, erweisen sich zwei von den Gleichungen (15) als identisch. Die Bedeutung hiervon deckt sich damit, dass in einem solchen Falle die Regelfläche eine Kante des Koordinatentetraeders als Leitlinie hat. In solcher Weise bekommt man als Leitlinien:

$$\begin{aligned} x = y = 0 \quad &\text{für} \quad k^{n-n_1} = 1; \\ z = w = 0 \quad &\text{für} \quad k^{n_2} = 1; \\ x = z = 0 \quad &\text{für} \quad k^{n-n_2} = 1; \\ y = w = 0 \quad &\text{für} \quad k^{n_1} = 1; \\ y = z = 0 \quad &\text{für} \quad k^{n_1-n_2} = 1; \\ x = w = 0 \quad &\text{für} \quad k^n = 1. \end{aligned}$$

Diese Leitlinien werden in der gegebenen Reihenfolge n_2-, $(n - n_1)$-, n_1-, $(n-n_2)$-, n-, $(n_1 - n_2)$-fach.

In den beiden ersten Fällen wird der Grad der Regelfläche erniedrigt. Für $k^{n-n_1} = 1$ reduziert sich das System (15) auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &x - y\,t^{n-n_1} = 0; \\ &y\,(1 - k^{n_2}) + z\,t^{n_1-n_2}(k^{n_1} - 1) + w\,t^{n_1}(k^{n_2} - k^{n_1}) = 0. \end{aligned}$$

Als entsprechendes Resultat für $k^{n_2} = 1$ hat man

$$\begin{aligned} &z - w\,t^{n_2} = 0; \\ &x\,(1 - k^{n_1}) + y\,t^{n-n_1}(k^n - 1) + z\,t^{n-n_2}(k^{n_1} - k^n) = 0. \end{aligned}$$

Die Gradzahl wird in beiden Fällen n und hat sich mithin um $n_1 - n_2$ vermindert. Vergleichen wir dieses Resultat mit (13), so ist zu beachten, dass für die hier in Rede stehenden k-Werte unter den $n + n_1 - n_2$ Lösungen $t:t_1$ $n_1 - n_2$ in $t = 0$ und eben so viele in $t = \infty$ übergehen. Es lässt sich beweisen, dass die Erzeugenden für $t = 0$ und $t = \infty$ im allgemeinen als $(n_1 - n_2)$-fache Linien der Regelfläche zu betrachten sind. Für die angegebenen besonderen k-Werte ist nun eine von diesen Linien Leitgerade, aber die andere, welche überdies ihre Lage ändert, nicht. So ist für $k^{n-n_1} = 1$ die dem Argumente $t = 0$ entsprechende Erzeugende $x = y = 0$ Leitlinie, und die Erzeugende für $t = \infty$, als welche sonst $z = w = 0$ auftritt, nimmt die neue Lage $y = w = 0$ an. In diesem Falle entspricht also nur den $n_1 - n_2$ Lösungen $t = \infty$ von (13), aber nicht den Lösungen $t = 0$, eine Reduktion des Grades der Regelfläche. Für $k^{n_2} = 1$ wird die Rolle der Lösungen $t = 0$ und $t = \infty$ vertauscht.

Nun können n, n_1 und n_2 solche Werte haben, dass gleichzeitig zwei neben einander stehende Gleichungen (16) befriedigt werden. Die Regelfläche besitzt dann zwei windschiefe Leitlinien. Wir nehmen die drei Möglichkeiten in der folgenden Reihenfolge.

1) $k^{n-n_2} = k^{n_1} = 1$. Die Leitlinien sind $x = z = 0$ und $y = w = 0$. Das System (15) nimmt die einfache Gestalt

$$(17_1) \qquad x - z\,t^{n-n_2} = 0; \quad y - w\,t^{n_1} = 0.$$

2) $k^n = k^{n_1 - n_2} = 1$. Als Leitlinien erhält man $y = z = 0$ und $x = w = 0$. Als bestimmende Relationen erhält man

$$(17_2) \qquad y - z\,t^{n_1 - n_2} = 0; \quad x - w\,t^n = 0.$$

3) $k^{n_2} = k^{n-n_1} = 1$. Als Leitlinien hat man $x = y = 0$ und $z = w = 0$ und als bestimmende Relationen

$$(17_3) \qquad x - y\,t^{n-n_1} = 0; \quad z - w\,t^{n_2} = 0.$$

Der Grad der Regelfläche ist also hier nur $n - n_1 + n_2$. Die Erniedrigung des Grades um $2(n_1 - n_2)$ steht in Zusammenhang damit, dass jetzt keine der Erzeugenden für $t = 0$ und $t = \infty$ mit einer Leitlinie zusammenfällt.

Hieran reihen sich noch vier Fälle, in denen gleichzeitig drei unter den Relationen (16) erfüllt werden. Die Regelfläche degeneriert dann in einen Kegel.

4) $k^n = k^{n_1} = k^{n-n_1} = 1$. Die Spitze des Kegels ist $x = y = w = 0$, und die bestimmenden Relationen sind

$$(17_4) \qquad x - y t^{n-n_1} = 0; \quad y - w t^{n_1} = 0.$$

5) $k^n = k^{n_2} = k^{n-n_2} = 1$. Hier hat man als Kegelspitze $x = z = w = 0$ und als bestimmende Gleichungen

$$(17_5) \qquad x - z t^{n-n_2} = 0; \quad z - w t^{n_2} = 0.$$

6) $k^{n-n_1} = k^{n-n_2} = k^{n_1-n_2} = 1$. Die Spitze des Kegels ist $x = y = z = 0$, und als bestimmende Relationen hat man

$$(17_6) \qquad x - y t^{n-n_1} = 0; \quad y - z t^{n_1-n_2} = 0.$$

7) $k^{n_1} = k^{n_2} = k^{n_1-n_2} = 1$. Als Kegelspitze erhält man $y = z = w = 0$ und als bestimmende Gleichungen

$$(17_7) \qquad y - z t^{n_1-n_2} = 0; \quad z - w t^{n_2} = 0.$$

Als Gradzahlen der Kegel hat man in den Fällen 4 und 5 n, im Falle 6 $n - n_2$ und im Falle 7 n_1.

Wir haben oben nicht die Möglichkeit $k = -1$ berücksichtigt. Man findet leicht, dass je nachdem n, n_1 und n_2 den Bedingungen 1 — 7 der 4. Nummer genügen, so befriedigt $k = -1$ die Relationen an der entsprechenden Stelle dieser Nummer. Die Stützpunkte t und $-t$ gehören zu derselben Erzeugenden, und man kann den Parameter t durch $t_1 = t^2$ ersetzen. Der Grad der Regelfläche reduziert sich somit auf die Hälfte.

Bei der Elimination von t aus (17_1)—(17_7) erhält man in jedem Falle eine ganz bestimmte einfache Fläche. Aus dieser in einer gebührenden Vielfachheit genommenen Fläche erhält man also jedes mal die zugehörigen assoziierten Regelflächen. Für die Fälle 1, 2, 3 ist diese Vielfachheit $\varkappa$, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, wobei diese Zahlen als grösste gemeinsame Teiler definiert werden, und zwar $\varkappa$ von n_1 und $n - n_2$, $\varkappa_1$ von n und $n_1 - n_2$ und $\varkappa_2$ von n_2 und $n - n_1$. In den Fällen 4, 5, 6 und 7 hat man für die Vielfachheit μ, μ_2, μ_1 und μ_3, welche Zahlen nach den zu Anfang dieser Nummer gegebenen Regeln sich bestimmen lassen. Man sieht leicht, dass kein Paar unter den sieben Zahlen $\varkappa - \mu_3$ einen gemeinsamen Teiler haben kann. Unter diesen Zahlen sind sechs ungerade (oder $= 1$) und nur eine einzige gerade. Ist z. B. $\varkappa$ eine ungerade Zahl, so gehören hierzu

$\frac{\varkappa - 1}{2}$ assoziierte Regelflächem, den (von 1 verschiedenen) Paaren von Lösungen, k, k^{-1} der Gleichung $k^\varkappa - 1 = 0$ entsprechend. Ist aber andererseits $\varkappa$ eine gerade Zahl, so ist die Anzahl solcher Paare nur $\frac{\varkappa - 2}{2}$. Hierzu kommt noch die besondere Lösung $k = -1$, für welche die Erzeugenden nur $\frac{\varkappa}{2}$ mal durchgelaufen werden.

9. Für die *Hauptsehnen* einer Kurve ist es charakteristisch, dass dieselben den Schmiegungsebenen ihrer beiden Stützpunkte angehören. Existieren bei einer W-Kurve eigentliche Hauptsehnen, so muss es solche in unendlicher Anzahl geben, da die eingliedrige Gruppe eine Hauptsehne in ∞ andere überführt. Mit den Hauptsehnen der algebraischen W-Kurven hat sich Mohrmann eingehend beschäftigt[1], und zwar für den allgemeinen Fall eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen. Für die Existenz von Hauptsehnen gilt die Bedingung $n = n_1 + n_2$. Solche Sehnen kommen mithin nur bei ausgezeichneten W-Kurven vor. Die Bedeutung der fraglichen Bedingung deckt sich damit, dass eine ausgezeichnete W-Kurve immer zu einem linearen Komplexe gehört. Die Komplexebene eines Kurvpunktes ist dann die Schmiegungsebene, und eine Sehne in der Schmiegungsebene des einen Stützpunktes muss auch in der Komplexebene, d. h. der Schmiegungsebene des anderen Stützpunktes liegen.

Wir wollen zeigen, dass sogar die allgemeinen mit einer ausgezeichneten W-Kurve assoziierten Regelflächen zu linearen Komplexen gehören. Bei Benutzung der gewöhnlichen Bezeichnungen für die Koordinaten einer geraden Linie erhält man

$$p_{14} : p_{23} = \frac{x_1 w_2 - x_2 w_1}{y_1 z_2 - y_2 z_1}.$$

Hat man für die Punkte x_1, y_1, z_1, w_1 und x_2, y_2, z_2, w_2 die Parameterwerte t und kt, so ergibt sich hieraus

$$p_{14} : p_{23} = \begin{vmatrix} t^n, & 1 \\ k^n t^n, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t^{n_1}, & t^{n_2} \\ k^{n_1} t^{n_1}, & k^{n_2} t^{n_2} \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhält man für $n = n_1 + n_2$ die Gleichung

[1] »*Über die algebraischen W-Kurven im r-dimensionalen Raum*», Rend. Circ. Mat. 47 (1923), p. 153—181.

$$(18) \qquad (k^{n_1} - k^{n_2}) p_{14} = (k^n - 1) p_{23}$$

eines linearen Komplexes. Für $k \to 1$ ergibt sich hieraus, dass die abwickelbare Fläche zum Komplexe

$$(19) \qquad (n_1 - n_2) p_{14} = (n_1 + n_2) p_{23}$$

gehören muss.

Die Bedingung $n - n_1 = n_2$ (oder $n - n_2 = n_1$) bedeutet, dass die beiden singulären Zweige der W-Kurve für $t = 0$ und $t = \infty$ mit einander projektiv äquivalent sind. Hieraus folgt, dass für die ausgezeichneten W-Kurven die eingliedrige Gruppe sich durch eine Schar von involutorischen Kollineationen erweitern lässt, welche die fraglichen beiden Zweige vertauschen. Im Parameter t hat man für diese Schar den einfachen Ausdruck

$$t' = k t^{-1}.$$

Übrigens hat Mohrmann nicht nur die direkten sondern auch die reziproken Verwandtschaften, welche eine W-Kurve in sich überführen, untersucht.

In seiner Arbeit hat Mohrmann noch für den allgemeinen r-dimensionalen Raum die Regelfläche behandelt, welche durch die Hauptsehnen einer ausgezeichneten W-Kurve erzeugt wird. Dabei hat er einen Satz gegeben, der für den dreidimensionalen Raum die Bedeutung hat, dass bei geradem n die Regelfläche der Hauptsehnen in zwei getrennte Bestandteile zerfällt, von denen einer (der dem Falle $k = -1$ entspricht) den Grad $n - n_2$ hat, und der restierende Teil vom Grade $(n-4)(n-n_2)$ ist. Er fügt hinzu, dass bei ungeradem n »die Hauptsehnenfläche eine irreduzible Fläche der Ordnung $(n-3)(n-n_2)$ ist«.[1]

Hierbei scheint Mohrmann nicht beachtet zu haben, dass *die Hauptsehnenfläche stets in assoziierte Regelflächen zerfallen muss.* Bei geradem n wird dementsprechend die restierende Fläche in $\frac{n-4}{2}$ assoziierte Regelflächen vom Grade $2(n - n_2) = 2 n_1$ zerlegt, und ebenso zerfällt bei ungeradem n die Hauptsehnenfläche in $\frac{n-3}{2}$ assoziierte Regelflächen. Diese Resultate lassen sich bereits aus einer Arbeit von V. Snyder entnehmen.[2]

---

[1] l. c. p. 165.

[2] »*On certain unicursal twisted curves*«, American Journal 28 (1906), p. 237—242.

10. Snyder hat auch eine Eigentümlichkeit der durch Hauptsehnen erzeugten assoziierten Regelflächen hervorgehoben. Wir bezeichnen eine Kurve als *Berührungsdoppelkurve*, wenn längs derselben zwei Schalen einer Fläche einander berühren. Als Bedingung dafür, dass eine Kurve Berührungsdoppelkurve einer Regelfläche ist, hat man, dass dieselbe Ebene die Tangente in einem beliebigen Punkte der Kurve und die beiden von Punkte ausgehenden Erzeugenden enthalten muss. *Sind die Erzeugenden Hauptsehnen, so ist mithin die W-Kurve eine Berührungsdoppelkurve der Regelfläche.* Eine solche Kurve lässt sich offenbar als zwei unmittelbar auf einander folgende Doppelkurven auffassen. Wenn also die W-Kurve für einen speziellen k-Wert Berührungsdoppelkurve wird, so muss sich eine zweite Doppelkurve der Regelfläche mit der W-Kurve vereinigt haben. Man versteht die Möglichkeit, dass eine assoziierte Regelfläche eine andere Berührungsdoppelkurve als die W-Kurve, von welcher ausgegangen wird, haben kann. Wie wir hier finden werden, können *die W-Kurven im allgemeinen und also nicht bloss diejenigen, welche einem linearen Komplexe angehören, als Berührungsdoppelkurven assoziierter Regelflächen auftreten.* Nur in den drei Fällen, wo die Ordnung $n < 5$ ist, gibt es keine assoziierte Regelfläche mit Berührungsdoppelkurve.

Die Schnittpunkte einer Kurve (9) mit einer Ebene

$$ax + by + cz + dw = 0$$

werden durch die Gleichung

$$at^n + bt^{n_1} + ct^{n_2} + d = 0 \tag{20}$$

bestimmt. Im Falle einer Berührungsdoppelkurve soll es eine Ebene geben, welche die Tangente in einem Punkte $t = \alpha$ enthält und überdies für einen geeigneten Wert von k noch durch zwei Punkte mit den Argumenten $k\alpha$ und $k^{-1}\alpha$ hindurchgeht. Da α hier beliebig ist, so können wir $\alpha = 1$ setzen. Schreiben wir

$$k + k^{-1} = h,$$

so erhalten wir die Bedingung, dass das linke Glied von (20) durch

$$(t - 1)^2 (t^2 - ht + 1)$$

teilbar sein soll. Wir setzen

$$at^n + bt^{n_1} + ct^{n_2} + d = (t - 1)^2 (t^2 - ht + 1)(\alpha_0 t^{n-4} + \alpha_1 t^{n-5} + \cdots + \alpha_{n-4}). \tag{21}$$

Rechts sollen hier die Koeffizienten für $n-3$ verschiedene Potenzen verschwinden. Man bekommt so $n-3$ homogene lineare Gleichungen in den $n-3$ Parametern $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-4}$, in denen noch h linear eingeht. Durch Elimination erhält man hieraus eine Gleichung für h vom Grade $n-3$. *Für eine W-Kurve von der Ordnung n gibt es also höchstens $n-3$ assoziierte Regelflächen, welche dieselbe als Berührungsdoppelkurve enthalten.* Im allgemeinen haben aber nicht sämtliche $n-3$ Lösungen für h eine solche Bedeutung. Erstens hat man, wenn die Tangenten der W-Kurve in den Punkten $t=1$ und $t=-1$ einander treffen, was, wie leicht einzusehen ist, in den Fällen 4, 5, 6 und 7 der 4. Nummer eintrifft, die Lösung $h=-2$. Für die entsprechende assoziierte Regelfläche ist $k=-1$, und die W-Kurve ist für dieselbe nur als einfache Kurve zu betrachten. Für die beiden zu einander reziproken Fälle $n=4$, $n=2$, $n_2=1$ und $n=4$, $n_1=3$, $n_2=2$ ist nun $h=-2$ die einzige Lösung; Berührungsdoppelkurven kommen also hier nicht vor. Andere Ausnahmen hat man, wenn die drei Punkte mit den Argumenten t, kt und $k^{-1}t$ in gerader Linie liegen, und die Regelfläche mithin in eine mehrfache Fläche übergeht. Es muss dann k offenbar eine Einheitswurzel sein, und die fraglichen Flächen sind in der Tat dieselben, welche in der 8. Nummer unter 1—7 behandelt worden sind, woselbst wir auch ihre Anzahl angegeben haben. Im Falle $n=4$, $n_1=3$, $n_2=1$ hat man so als einzige Lösung die dreifache Regelschar, welche aus den Trisekanten der Kurve erzeugt wird.

Wir können auch unmittelbar die Bedingung dafür aufsuchen, dass für eine Kurve (9) die Tangente in einem Punkte t sowie die Punkte kt und $k^{-1}t$ in derselben Ebene enthalten werden.[1] Es ergibt sich

$$\tag{22}\begin{aligned}&(n_1-n_2)(k^{2n}-1)-(n-n_2)k^{n-n_1}(k^{2n_1}-1)+(n-n_1)k^{n-n_2}(k^{2n_2}-1)+\\&+n k^{n-n_1+n_2}(k^{2n_1-2n_2}-1)-n_1 k^{n_2}(k^{2n-2n_2}-1)+n_2 k^{n_1}(k^{2n-2n_1}-1)=0.\end{aligned}$$

Man bestätigt leicht, dass das linke Glied den Faktor $(k-1)^5(k+1)$ enthält. Wird dieser Faktor beseitigt, so bleibt eine Gleichung vom Grade $2n-6$ übrig, die $n-3$ Paare von Wurzeln k, k^{-1} besitzt und mit der oben betrachteten Gleichung für h vom Grade $n-3$ äquivalent ist. Man findet dementsprechend, dass in den Fällen 4, 5, 6 und 7 der 4. Nummer das linke Glied von (22)

[1] Dasselbe Resultat erhält man, wenn man die Bedingung dafür sucht, dass in (13) der Faktor $(t-kt_1)(kt-t_1)$ doppelt auftritt.

sogar durch $(k-1)^5(k+1)^3$ teilbar ist. Hierzu kommt noch, was leicht zu beweisen ist, die Teilbarkeit durch die Faktoren

$$k^{\varkappa}-1,\ k^{\varkappa_1}-1,\ k^{\varkappa_2}-1,\ k^{\mu}-1,\ k^{\mu_1-1},\ k^{\mu_2}-1,\ k^{\mu_3}-1,$$

wobei die sieben Zahlen $\varkappa, \ldots \mu_3$ nach den Angaben am Ende der 8. Nummer sich bestimmen lassen. Sind wir also in den Fällen 1, 2, 3 der 4. Nummer, so bekommen wir für die Anzahl der assoziierten Regelflächen, welche die W-Kurve als eine eigentliche Berührungsdoppelkurve besitzen,

$$n-3-\frac{\varkappa+\varkappa_1+\varkappa_2+\mu+\mu_1+\mu_2+\mu_3-8}{2}=$$
$$=n+1-\frac{\varkappa+\varkappa_1+\varkappa_2+\mu+\mu_1+\mu_2+\mu_3}{2}.$$

In den Fällen 4, 5, 6, 7 der 4. Nummer wird diese Zahl um Eins vermindert, so dass wir erhalten

$$n-\frac{\varkappa+\varkappa_1+\varkappa_2+\mu+\mu_1+\mu_2+\mu_3}{2}.$$

Da eine von den Zahlen $\varkappa, \ldots \mu_3$ gerade und mithin $\geqq 2$ ist, so muss

$$\varkappa+\varkappa_1+\varkappa_2+\mu+\mu_1+\mu_2+\mu_3 \geqq 8$$

sein.

Im ausgezeichneten Falle hat man $n_1 = n - n_2$ und $n_2 = n - n_1$. Hieraus bekommt man $\varkappa = n_1$ und $\varkappa_2 = n_2$. Wenn wir dann aus dem linken Gliede von (22) den Faktor $(k^{n_1}-1)(k^{n_2}-1)$ ausscheiden, so ergibt sich die Gleichung

$$n_1(k^{n_1}+1)(k^{n_2}-1)-n_2(k^{n_2}+1)(k^{n_1}-1)=0. \tag{23}$$

Das linke Glied ist hier durch $(k-1)^3$ teilbar, wozu noch, wenn $n = n_1 + n_2$ gerade ist, ein Faktor $k+1$ hinzukommt. Die Anzahl der assoziierten Regelflächen, für welche die W-Kurve eine eigentliche Berührungsdoppelkurve darstellt ist demnach $\frac{n-3}{2}$ bzw. $\frac{n-4}{2}$, je nachdem n eine ungerade bzw. gerade Zahl bedeutet. Hieraus folgt, dass *im ausgezeichneten Falle die assoziierten Regelflächen, für welche die W-Kurve Berührungsdoppelkurve ist, sich aus Hauptsehnen erzeugen lassen.*

11. Bei den weiteren Untersuchungen über die assoziierten Regelflächen wollen wir uns auf *reelle Gebilde* beschränken. In diesem Abschnitte sei (9) die reelle Darstellung der W-Kurve. In der 5. Nummer haben wir durch Hinzunahme der Grenzgebilde aus den algebraischen W-Kurven fünf Hauptklassen von verallgemeinerten W-Kurven erhalten, welche wir mit (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) und (A_5) bezeichnet haben. Wir bemerkten, dass jede von diesen Hauptklassen als ein Kontinuum aufzufassen ist, in welchem die algebraischen W-Kurven überall dicht eingebettet liegen. Wir werden finden, dass *für jede Hauptklasse die assoziierten Regelflächen sich durch übereinstimmende Eigenschaften der Doppelkurve charakterisieren lassen.*

Dies ist für die Hauptklasse (A_1) unmittelbar evident. Nach der 6. Nummer ist ja für diese die Ordnung 3. Durch einen ausserhalb der Kurve gelegenen Punkt kann also höchstens eine Bisekante der Kurve gezogen werden. Hieraus folgt, dass *im Falle der Hauptklasse* (A_1) *die Doppelkurve einer assoziierten Regelfläche keinen anderen (reellen) Bestandteil als die zu Grunde liegende W-Kurve hat.* Hierbei wird k als reell vorausgesetzt.

Für algebraische W-Kurven gibt es aber offenbar noch eine andere Art von reellen assoziierten Regelflächen, bei welcher man $|k| = 1$ hat. Setzt man nämlich $k = e^{2\varkappa i}$, so geht bei (12) der Parameterwert $he^{-\varkappa i}$ in $he^{\varkappa i}$ über. Die zugehörige Erzeugende der Regelfläche ist die Verbindungsgerade zweier konjugiert imaginärer Punkte und folglich reell. Lässt man h die reellen Werte von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen, so erhält man eine reelle Regelfläche, für welche die W-Kurve eine isolierte Kurve und keine wirkliche Doppelkurve darstellt. Da die Verbindungsgerade zweier konjugierter Punkte einen reellen Punkt der W-Kurve enthalten kann, so hat dessen ungeachtet in Ausnahmefällen die W-Kurve ihre Lage auf der Regelfläche. Man versteht, wie sich für die in der 5. Nummer für das reelle Gebiet definierten verallgemeinerten W-Kurven auch diese Art von reellen assoziierten Regelflächen, und zwar durch Grenzbetrachtungen herleiten lässt. In der Fortsetzung dieses Abschnittes wollen wir nur solche assoziierte Regelflächen betrachten, für welche der Parameter k reell ist. Da aber eine Regelfläche sowohl eine wirkliche als eine isolierte Doppelkurve besitzen kann, so ist zu beachten, dass in solchen Fällen die Fläche zu beiden Arten von reellen Regelflächen gehört. Wenn man von der wirklichen Doppelkurve den Ausgangspunkt nimmt, so bekommt man ja ein reelles k; geht man dagegen von der isolierten Kurve aus, so muss $|k| = 1$ sein.

12. Wir wollen untersuchen, wie *für dieselbe W-Kurve* (9) Änderungen in der Realität der Doppelkurve bei Variation von k zu erklären sind. Für die Doppelkurve ist die Gleichung (13) bestimmend. Diese schreiben wir jetzt, indem wir $t : t_1 = u$ setzen, in der Gestalt

$$
\begin{aligned}
& u^{n+n_1-n_2}(k^{n_1} - k^n)(1 - k^{n_2}) - u^n(k^{n_2} - k^n)(1 - k^{n_1}) + \\
(24) \qquad & + u^{n_1}(k^{n_2} - k^{n_1})(1 - k^n) + u^{n-n_2}(k^{n_2} - k^{n_1})(1 - k^n) - \\
& - u^{n_1-n_2}(k^{n_2} - k^n)(1 - k^{n_1}) + (k^{n_1} - k^n)(1 - k^{n_2}) = 0.
\end{aligned}
$$

Hier enthält das linke Glied immer den Faktor

$$(u - 1)^2 (u - k)(ku - 1).$$

Da (24) eine reziproke Gleichung ist, so treten immer Wurzeln $u = l$ und $u = l^{-1}$ gleichzeitig auf. Sehen wir einstweilen von den Fällen ab, wo $l = \pm 1$ ist, so kommen also die Wurzeln in Paare l, l^{-1} vor, und jedem solchen *reellen* Wurzelpaare entspricht eine wirkliche doppelt gekrümmte Doppelkurve der Regelfläche.[1] Wir nehmen nun an, dass bei Variation von k zwei reelle Wurzeln der Gleichung durch zwei konjugiert imaginäre ersetzt werden. Beim Übergange muss man einen k-Wert haben, für welchen gleiche Wurzeln auftreten. Da aber eine Doppelwurzel l von einer Doppelwurzel l^{-1} begleitet wird, so muss die Änderung in der Realität der Wurzeln durch einen Faktor

$$(u - l)^2 (u - l^{-1})^2 \tag{25}$$

vermittelt werden. Die entsprechende Bedeutung für die assoziierten Regelflächen lässt sich so ausdrücken, dass *zwei reelle doppelt gewundene Doppelkurven sich in eine Berührungsdoppelkurve vereinigen und bei weiterer Veränderung von k in zwei konjugiert imaginäre übergehen.* Hat man $l = k$, so dass k und k^{-1} die Doppelwurzeln von (24) sind, so ist die ursprüngliche W-Kurve eine Berührungsdoppelkurve. Da hier von jeder Doppelwurzel eine (als $= k$ oder k^{-1}) von vornherein gegeben ist, so ist mit diesem Falle keine Änderung in der Realität der Doppelkurve verbunden. *In diesem Abschnitte werden wir in keinem Falle eine von der ursprünglichen W-Kurve verschiedene reelle Berührungsdoppelkurve erhalten;*

[1] Die Lösungen l und l^{-1} bezeichnen eben die Werte, welche k und k^{-1} annehmen würden, wenn die fragliche Doppelkurve als Grundkurve angenommen wird. Man sieht dies ein, wenn man die Operation der eingliedrigen Gruppe in Betracht zieht, durch welche man von der einen zur anderen Erzeugenden übergeht, die in einem Punkte der Doppelkurve zusammenstossen.

man wird nämlich nie vier reelle von ± 1 und k, k^{-1} verschiedene Wurzeln der Gleichung (24) von demselben Zeichen, wie ein Faktor (25) erheischt, bekommen können. Dagegen spielen im nächsten Abschnitt, wo die Gleichung der W-Kurve in der reellen Gestalt (6) gegeben wird, solche Doppelkurven eine grosse Rolle.

Wie bereits erwähnt, enthält das linke Glied von (24) immer den Faktor $(u-1)^2$. Hierzu kann noch unter einer gewissen Bedingung ein zweites Quadrat

$$(u-1)^2 \tag{25$_1$}$$

hinzukommen. Die Bedeutung hiervon ist, dass zwei unmittelbar auf einander folgende Erzeugende einander treffen oder in anderen Worten, dass *die Regelfläche abwickelbar ist.* Eine andere Doppelkurve als die zu Grunde liegende W-Kurve ist dabei in die Kuspidalkurve übergegangen; letztere Kurve wird ja eine Kuspidalkurve für $k \to 1$. Nun vermittelt der Faktor (25$_1$) den Übergang von zwei reellen zu zwei konjugiert imaginären Wurzeln. Letztere müssen offenbar ein inverses Paar l, l^{-1} bilden und mithin den Betrag 1 besitzen. Wie leicht zu verstehen ist, bedeutet also hier *die Kuspidalkurve den Übergang zwischen einer wirklichen und einer isolierten Doppelkurve,* wobei an der Realität der Doppelkurve selbst nichts geändert wird.

Die Bedingung für einen solchen neuen Faktor (25$_1$) erhält man leicht durch zwei Derivationen von (24). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & n_1(n-n_2)(1-k^{n_1-n_2})(1-k^n) - n(n_1-n_2)(1-k^{n-n_2})(1-k^{n_1}) = \\ & = n_2(n-n_1)k^{n+n_1-n_2} - n_1(n-n_2)k^n + n(n_1-n_2)k^{n_1} + \\ & + n(n_1-n_2)k^{n-n_1} - n_1(n-n_2)k^{n_1-n_2} + n_2(n-n_1) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Dieser Bedingung kann man durch Hinzunahme der Identität

$$(k^{n_1}-k^n)(1-k^{n_2}) - (k^{n_2}-k^n)(1-k^{n_1}) + (k^{n_2}-k^{n_1})(1-k^n) = 0 \tag{27}$$

andere Gestalten geben. In (26) hat man, wie leicht zu verifizieren ist, einen Faktor $(k-1)^4$. Die Zeichenregel lehrt weiter, dass diese Gleichung keine andere positive Wurzel als die vierfache $k=1$ besitzen kann. Für etwa auftretende abwickelbare Flächen muss demnach $k<0$ sein, was man übrigens auch daraus folgern kann, dass keine Ebene vier Punkte der W-Kurve mit $t>0$ enthalten kann.

Es lässt sich noch weiter behaupten, dass *es für jede von den fünf Hauptklassen verallgemeinerter W-Kurven eine bestimmte Anzahl assoziierter Regelflächen gibt, welche abwickelbar sind.* Wenn es, wie hier, sich nur um reelle Wurzeln handelt, können wir ja leicht der Gleichung (24) eine solche Gestalt geben, dass dieselbe sich sofort auf die verallgemeinerten W-Kurven überführen lässt. Wir ersetzen in den verschiedenen Potenzen von u ganz einfach u durch den Betrag $|u|$ und fügen noch den Faktor $\operatorname{sgn} u$ dazu, falls der betreffende Exponent in (24) ungerade ist. Nachher kann man n, n_1 und n_2 durch ν, ν_1 und ν_2 ersetzen und bekommt so aus (24) Gleichungen, welche noch für die in der 5. Nummer eingeführten verallgemeinerten W-Kurven Gültigkeit haben. Für die fünf Hauptklassen unterscheiden sich diese Gleichungen durch die Glieder, in denen der Faktor $\operatorname{sgn} u$ auftritt. Da nur die Verhältnisse von ν, ν_1 und ν_2 hier von Bedeutung sind, so kann man etwa $\nu_2 = 1$ setzen. Da man ν, ν_1 und ν_2 stetig variieren kann, so *stellen jetzt die Gleichungen* (24) *für jede der fünf Hauptklassen ein Kontinuum dar.* Bezüglich der Doppelkurve der assoziierten Regelflächen muss offenbar eine gewisse Übereinstimmung betreffs der W-Kurven gelten, die derselben Hauptklasse angehören. Änderungen hierin sind nur dann möglich, wenn für das Auftreten von Faktoren (25), (25_1) und (25_2) besondere Bedingungen in ν, ν_1 und ν_2 erforderlich sind. In der Tat verhalten sich die W-Kurven, die der Hauptklasse (A_4) angehören, in dieser Hinsicht verschiedenartig, indem (25_2) als Faktor in (24) auftreten kann, aber nur unter Bedingung einer gewissen Ungleichung in n, n_1 und n_2.

Die Gleichung (26) lässt sich in derselben Weise wie (24) verallgemeinern. Wir ersetzen demgemäss k mit $|k|$ und fügen zu einem Gliede mit einem ungeraden Exponenten den Faktor $\operatorname{sgn} k$ hinzu. Nachher führen wir statt der ganzen Exponenten n, n_1 und n_2 die allgemeinen reellen Exponenten ν, ν_1 und ν_2 ein. Wir erhalten dann für jede Hauptklasse eine Gleichung, durch welche die Werte des Parameters k für die unter den assoziierten Regelflächen auftretenden abwickelbaren Flächen bestimmt werden. Wir werden finden, dass die Anzahl dieser Wurzeln sich nicht ändert, wenn wir in derselben Hauptklasse bleiben. Für eine Änderung wäre nämlich erforderlich, dass im Übergangsfalle das linke Glied von (26) einen von den beiden Faktoren

$$(k + l)^2 (k + l^{-1})^2, \quad (k + 1)^2$$

enthielte. Bei sämtlichen Hauptklassen wird es sich aber als unmöglich erweisen eine solche Bedingung zu erfüllen.

Es lässt sich noch denken, dass die Anzahl der reellen Wurzeln von (24) durch Vermittlung eines Faktors

$$(u + 1)^2 \tag{25$_2$}$$

geändert werden kann. Setzt man in (24) $u = -1$, so findet man für die Hauptklassen (A_1), (A_2) und (A_3) bzw. die Bedingungen

$$(k^{n_2} - k^n)(1 - k^{n_1}) = 0; \quad (k^{n_2} - k^{n_1})(1 - k^n) = 0; \quad (k^{n_1} - k^n)(1 - k^{n_2}) = 0.$$

Hier hat man die feste Lösung $k = -1$ und keine reelle Lösung, welche von n, n_1 und n_2 abhängt. Da k und k^{-1} zusammengehörig sind, so liegt überdies $k = -1$ in einem Endpunkte des Variationsbereiches für k, und man sieht ein, dass für die drei ersten Hauptklassen ein Faktor (25_2) keine Bedeutung von der hier in Rede stehenden Art haben kann. Für die beiden letzten Hauptklassen ist $u = -1$ von vornherein eine Lösung der Gleichung (24). Es gilt also hier die Bedingung für einen Faktor $(u + 1)^3$. Wir verschieben diese Frage auf die besondere Behandlung dieser Klassen.

13. Wir untersuchen jetzt der Reihe nach die assoziierten Regelflächen für die noch übrigen vier Hauptklassen (A_2), ... (A_5). Dabei behandeln wir zunächst die in der 5. Nummer gegebenen speziellen algebraischen Repräsentanten (B_2), ... (B_5), um später die bei diesen gewonnenen Ergebnisse auf die zugehörigen Klassen zu überführen.

Es gilt also die Frage, unter welchen Bedingungen vier verschiedene Punkte mit den Argumenten t_1, kt_1, t_2, kt_2 in derselben Ebene liegen. Es lässt sich hier auf Grund der eingliedrigen Gruppe t_2 beliebig wählen, so dass man für $k > 0$ $kt_2^2 = 1$ und für $k < 0$ $kt_2^2 = -1$ setzen kann. Schreiben wir weiter $t_1 : t_2 = \alpha$, so reduziert sich die Frage für den Repräsentanten (B_2) und $k > 0$ auf die Möglichkeit einer Identität

$$t^4 + At^3 + Bt + C = (t^2 - ht + 1)(t^2 - h\alpha t + \alpha^2). \tag{28}$$

Man erhält die Bedingung

$$\alpha^2 + h^2\alpha + 1 = 0. \tag{29}$$

Die Lösungen α von (29) sind reell für

$$h^2 \geqq 2. \tag{30}$$

Man hat

(31) $$h = k^{\frac{1}{2}} + k^{-\frac{1}{2}}; \quad k + k^{-1} = h^2 - 2.$$

Für $k > 0$ ist mithin

(32) $$h^2 \geqq 4.$$

Gilt (32), so haben die beiden Gleichungen

(33) $$t^2 - ht + 1 = 0; \quad t^2 - h\alpha t + \alpha^2 = 0$$

reelle Wurzeln. Dieselben bestimmen zwei Punktpaare auf der Kurve (B_2), deren Verbindungslinien einander treffen, und die Treffpunkte erzeugen eine neue *wirkliche* Doppelkurve der Regelfläche. Für $h^2 = 4$ erhalten wir die *abwickelbare Fläche*, welche (B_2) als Kuspidalkurve hat. Gilt von (30) und (32) nur die erste, so bestimmen die Gleichungen (33) zwei Paare von konjugiert imaginären Punkten. Da die Verbindungsgeraden immer noch reell sind, so ist auch in diesem Falle die hinzutretende Kurve eine wirkliche Doppelkurve. Die zu Grunde liegende W-Kurve (B_2) spielt aber jetzt nur die Rolle einer isolierten Kurve. Im Grenzfalle $h^2 = 2$ hat man nach (31) $k^2 + 1 = 0$. Wie bereits aus der 8. Nummer hervorgeht, hat die Regelfläche in diesem Falle die Linie $x = w = 0$ als *Leitgerade.* Die bewegliche Doppelkurve ist in diese Linie übergegangen. Nun wurde jene Kurve von den Erzeugenden in zwei Punkten getroffen. Diese Eigenschaft geht in der Tat auf die Leitgerade über, und zwar in solcher Weise, dass die beiden Punkte unmittelbar auf einander folgen. Es handelt sich nämlich um eine *Berührungsleitgerade*, auf welcher die ebenen Querschnitte der Regelfläche Berührungsknoten besitzen. Dies hängt damit zusammen, dass, wie leicht zu ersehen ist, die Ebene durch zwei Erzeugende, die in einem Punkte der Leitlinie zusammenstossen, auch die Leitlinie enthalten. Hat man endlich $h^2 < 2$, so dass auch (30) nicht gilt, so sind die Lösungen α von (29) imaginär. Da man $|k| = 1$ findet, so ist die Regelfläche immer noch reell. *Beide Doppelkurven sind aber jetzt in isolierte Kurven übergegangen.* Aus (31) ersieht man, dass diese beiden Fälle mit nur einer oder zwei isolierten Doppelkurven sich dadurch unterscheiden, dass im ersten Falle der reelle Teil von $k > 0$ und im zweiten < 0 ist.

Für $k < 0$ wird in derselben Weise die Frage auf Erfüllung einer Identität

(28_1) $$t^4 + At^3 + Bt + C = (t^2 - ht - 1)(t^2 - h\alpha t - \alpha^2)$$

zurückgeführt. Auch in diesem Falle wird α durch (29) bestimmt. Gilt die Bedingung (30), so wird α reell, und die Regelfläche hat *eine zweite wirkliche Doppelkurve.* Für $h^2 = 2$ bekommt man $\alpha = 1$, und die beiden Faktoren rechts in (28_1) werden identisch. Die beiden einander schneidenden Sekanten der Kurve (B_2) folgen also unmittelbar auf einander, und *die Regelfläche geht in eine abwickelbare Fläche über, welche die hinzutretende Doppelkurve als Kuspidalkurve hat.* Zuletzt kann $h^2 < 2$ sein; als zweite Doppelkurve hat man in diesem Falle *eine isolierte Kurve.*

Der Ausgangspunkt von (28_1) hat uns jedoch zu keinen eigentlich neuen Regelflächen geführt. Wird nämlich hier die Regelfläche auf die zweite wirkliche Doppelkurve als Ausgangskurve bezogen, so muss man offenbar, da diese in eine Kuspidalkurve übergehen kann, $k > 0$ haben. *Wenn zwei wirkliche Doppelkurven vorkommen, so gilt also $k > 0$ oder $k < 0$, je nachdem die Fläche auf die eine oder andere als assoziierte Regelfläche bezogen wird.* Ein Unterschied besteht darin, dass man von (28_1) zu keinem Falle mit zwei isolierten Doppelkurven gelangen kann. Solches war auch von vornherein zu erwarten, da die Doppelkurve, welche beim Übergange in eine Berührungsleitgerade übergehen sollte, hier als fest angenommen wird.

Nun gilt es, in wie weit wir diese Resultate für den Repräsentanten (B_2) auf die ganze Hauptklasse (A_2) überführen können. Wir beschränken uns auf reelle k-Werte und bestimmen aus den Zeichenfolgen der Glieder bei verschiedenen Zeichen für u und k eine Maximalzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (24). Als Zeichenfolge für $u < 0$ bezeichnen wir dann diejenige, welche man erhält, wenn man in der Gleichung $u = -v$ einsetzt. In diesem Falle, wo n_1 und n_2 als ungerade ganze Zahlen anzusehen sind, findet man dieselben Änderungen in der Zeichenfolge für $k > 0$ und $k < 0$. Es genügt also mit den Angaben für $u > 0$ und $u < 0$:[1]

$$+ - + + - + \qquad (u > 0);$$
$$+ - - - - + \qquad (u < 0).$$

Ausser der Doppelwurzel 1 nebst den Wurzeln k und k^{-1} gibt es mithin nur die Möglichkeit von zwei reellen Wurzeln, deren Zeichen überdies von demjenigen von k verschieden sein müssen. Die Regelfläche kann also nur noch

[1] Wenn das erste Glied mit dem Zeichen — anfängt, denken wir uns sämtliche Zeichen umgeändert.

eine reelle Doppelkurve besitzen, und es kann kein Faktor (25) in (24) auftreten. Für (26), welche die abwickelbaren Flächen bestimmt, findet man für $k > 0$ und $k < 0$ dieselben Zeichenwechsel wie oben für $u > 0$ und $u < 0$. Unter den assoziierten Regelflächen für $k < 0$ kann also höchstens eine abwickelbar sein. Eine solche gibt es auch immer, da ein Faktor $(k+1)^2$ in (26) hier die nicht zu erfüllende Bedingung $n(n_1 - n_2) = 0$ voraussetzt. Hierbei ist es von Bedeutung, dass, wie unmittelbar einzusehen ist, die obigen Resultate bezüglich der Zeichenfolgen auch für die verallgemeinerten W-Kurven mit stetig veränderlichen Exponenten ν, ν_1 und ν_2 gelten. Für die folgenden Hauptklassen gilt die entsprechende Bemerkung.

Wenn es sich um wirkliche Doppelkurven handelt, ist es also zulässig die oben hergeleiteten Resultate betreffs der Repräsentanten (B_2) auf die ganze Hauptklasse (A_2) zu übertragen. Da k und k^{-1} zusammengehörig sind, so können wir dabei die reellen k-Werte zwischen den Grenzen 0 und ± 1 annehmen. Wir machen die Zusammenfassung in dem folgenden Satze.

Für $k > 0$ hat die Regelfläche immer noch eine zweite wirkliche Doppelkurve. Geht man von dieser letzteren Kurve als Grundkurve aus, so wird $k < 0$ und variiert von 0 bis $-K$, wobei für $k = -K$ die Regelfläche abwickelbar wird und erstere Kurve als Kuspidalkurve hat. Für $-K > k > -1$ hat die Regelfläche nur eine wirkliche Doppelkurve.

In der reziproken Gleichung (24) kann man die Substitution $u + u^{-1} = z$ ausführen; handelt es sich dabei um die Hauptklassen (A_4) und (A_5), so soll zuvor der Faktor $u + 1$ ausgeschieden werden. Man bekommt in solcher Weise eine Gleichung für z. Den reellen Lösungen z entsprechen nun wirkliche und isolierte Doppelkurven, und zwar wirkliche für Beträge $\geqq 2$ und isolierte für Beträge < 2. Da für eine abwickelbare Fläche $z = 2$ ist, so geht hervor, wie eine Kuspidalkurve den Übergang von einer wirklichen zu einer isolierten Doppelkurve bildet. Für den Repräsentanten (B_2) haben wir nach (14) 6 als Grad der assoziierten Regelflächen. Nur zwei Doppelkurven, welche von den Erzeugenden in zwei Punkten getroffen werden, sind also möglich, und über diese haben wir in der obigen Übersicht Klarheit gewonnen. Es soll hier nicht vergessen werden, dass wir keine allgemeine Schlüsse über die Anzahl der Wurzeln von (24) mit $|u| = 1$ oder $-2 < u + u^{-1} = z < 2$ gezogen haben. Übereinstimmung betreffs der Anzahl der isolierten Doppelkurven für die ganze Klasse (A_2) mit dem Repräsentanten (B_2) soll also nicht erwartet werden. Es ist auch nicht bewiesen, dass die isolierten Kurven gleichzeitig mit den Verhältnissen von n, n_1 und n_2 immer gewissen Grenzlagen zustreben.

Wenn zwei wirkliche Doppelkurven sich in eine Berührungsdoppelkurve vereinigen, so müssen offenbar auch die Werte der zugehörigen Parameter k zusammenrücken. Hier bei (A_2) ist aber dies unmöglich, da die Zeichen verschieden sind. *Wenn man sich auf reelle Gebilde beschränkt, so können also bei der Hauptklasse (A_2) keine Berührungsdoppelkurven auftreten.*

14. Wir untersuchen jetzt die assoziierten Regelflächen für den Repräsentanten (B_3) der dritten Hauptklasse (A_3). Wir beginnen, nach dem Beispiel der vorigen Nummer, für $k > 0$ mit dem Ansatz

$$t^5 + At^3 + Bt^2 + C = (t^2 - ht + 1)(t^2 - h\alpha t + \alpha^2)(t + h(1 + \alpha)). \tag{34}$$

Für die Bestimmung von α ergibt sich die Relation

$$h^2(\alpha + 1)^2 - \alpha = 0. \tag{35}$$

Die Realität von α erheischt die Bedingung

$$h^2 \leqq \frac{1}{4} \cdot \tag{36}$$

Andererseits muss nach (31) bei reellem k

$$h^2 \geqq 4$$

sein, wobei das untere Zeichen $k = 1$ gibt, so dass wir die abwickelbare Fläche erhalten. *Für $k > 0$ gibt es mithin keine zweite wirkliche Doppelkurve.* Für $h^2 = \frac{1}{4}$ hat man $\alpha = 1$, und wir bekommen noch einmal eine abwickelbare Fläche. Für dieselbe ist aber die zu Grunde liegende Kurve eine isolierte Kurve, und die Rolle der Kuspidalkurve wird von einer neuen W-Kurve übernommen. Wie man jetzt leicht einsieht, behandelt man bei $h^2 \leqq \frac{1}{4}$ denselben Fall wie bei $h^2 \geqq 4$. Es sind nur die Ausgangspunkte verschieden, indem als Grundkurve für $h^2 \geqq 4$ die wirkliche Doppelkurve und für $h^2 \leqq \frac{1}{4}$ die isolierte Doppelkurve gewählt werden. Hat man endlich $4 > h^2 > \frac{1}{4}$, so sind beide Doppelkurven isolierte Kurven.

Für $k < 0$ setzen wir

$$(34_1) \qquad t^5 + At^3 + Bt^2 + C = (t^2 - ht - 1)(t^2 - hat - a^2)(t + h(1 + a))$$

und bekommen für a die Gleichung

$$(35_1) \qquad h^2(a + 1)^2 + a = 0.$$

Da (35_1) für a immer reell lösbar ist, *so gibt es für $k < 0$ immer noch eine zweite wirkliche Doppelkurve.* Man hat hier offenbar noch $k < 0$, wenn von dieser zweiten Kurve als Grundkurve ausgegangen wird.

Unter Voraussetzung der Hauptklasse (A_3) erhalten wir für (24) die Zeichenfolgen:

$$\begin{array}{ll} + - + + - + & (u > 0,\ k > 0); \\ + + - - + + & (u < 0,\ k > 0); \\ + + - - + + & (u > 0,\ k < 0); \\ + - + + - + & (u < 0,\ k < 0). \end{array}$$

Man sieht hieraus, wie in der vorhergehenden Nummer, dass ausser der Grundkurve höchstens eine wirkliche Doppelkurve denkbar ist, und dass kein Faktor (25) im linken Gliede von (24) auftreten kann. Die Gleichung (26) hat dieselben Zeichenfolgen wie (24) für $k > 0$. Nun hat für den Repräsentanten (B_3) (26) keine negativen Wurzeln. Nach der Zeichenfolge sind aber deren zwei erlaubt. Bei stetiger Veränderung der Exponenten sollte der Übergang zu zwei negativen Wurzeln durch einen Faktor $(k + 1)^2$ vermittelt werden. Hierfür würde aber die unmögliche Bedingung $n_2(n - n_1) = 0$ nötig sein. *Die zur Hauptklasse (A_3) gehörigen assoziierten Regelflächen haben demnach für $k > 0$ niemals, für $k < 0$ immer eine zweite wirkliche Doppelkurve.*

Es gibt eine *reelle* assoziierte Regelfläche, für welche die Kurve (B_3) eine Berührungsdoppelkurve darstellt. Nach (21) wird die Frage auf eine Identität

$$t^5 + At^3 + Bt^2 + C = (t - 1)^2(t^2 - ht + 1)(t + h + 2)$$

zurückgeführt. Hieraus erhält man die Bedingung

$$(h + 2)^2 - 1 = 0.$$

Nur die Lösung $h = -3$ ist hier von Bedeutung. Man bekommt weiter

$$k + k^{-1} = -3; \quad k, k^{-1} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Auch für eine allgemeine W-Kurve der Klasse (A_3) *gilt es, dass dieselbe als Berührungsdoppelkurve für eine und nur eine assoziierte reelle Regelfläche auftritt.* Der Beweis hierfür lässt sich vielleicht am leichtesten geometrisch führen. Man betrachtet die beiden Ebenen durch die Punkte $t = 0$ und $t = \infty$, welche die Tangente im Punkte $t = 1$ enthalten. In einem Winkelraum schneiden die Ebenen des so bestimmten Büschels zwei Punkte der Kurve mit negativen Argumenten aus. Bewegt man die Ebene von $t = 0$ zu $t = \infty$, so wachsen beide diese Argumente nach ihren Beträgen stets, und es gibt mithin eine und nur eine Ebene, für welche das Produkt der Argumente $= 1$ ist.

15. Bei den beiden noch übrigen Hauptklassen (A_4) und (A_5) besitzt (24) die Lösung $u + 1 = 0$ oder $t + t_1 = 0$. Die W-Kurven sind in diesen Fällen symmetrisch in bezug auf eine Koordinatenebene und die gegenüberliegende Ecke. Nach der Darstellung in der 5. Nummer ist diese Ebene $z = 0$ für die Hauptklasse (A_4). Die Erzeugenden der assoziierten Regelflächen treten dann auch in symmetrischen Paaren auf, und man bekommt in der Symmetrieebene eine Doppelkurve, welche von den Erzeugenden *in nur einem Punkte* getroffen wird.

Betrachten wir jetzt den Repräsentanten (B_4) ($n = 4$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$), so hat man nach (14) 5 als Grad der assoziierten Regelflächen. Man versteht schon hieraus, dass in diesem Falle eine assoziierte Regelfläche keine andere Doppelkurve als die Grundkurve und die ebene Doppelkurve in $z = 0$, welche überdies ein Kegelschnitt sein muss, besitzen kann.

Es ist die Frage, in wie weit diese einfachen Verhältnisse auch für die allgemeine Klasse (A_4) gelten. Wollen wir hier für (24) die Zeichenregel benutzen, so hat man, da $n - n_1 - n_2$ ungerade ist, für $u < 0$ zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $n - n_2 \gtrless n_1$ ist.

a) $n - n_2 > n_1$. Wir erhalten die Zeichenfolgen:

$+ - + + - +$	$(u > 0,\ k > 0)$;
$+ + + - - -$	$(u < 0,\ k > 0)$;
$+ + - - + +$	$(u > 0,\ k < 0)$;
$+ - - + + -$	$(u < 0,\ k < 0)$.

Sowohl für $k > 0$ als $k < 0$ bekommen wir mithin insgesamt fünf Zeichenwechsel. Die Gleichung (24) kann also keine anderen reellen Wurzeln als die bereits bekannten besitzen, nämlich die Doppelwurzel 1 und die einfachen Wurzeln k, k^{-1} und -1. Hieraus folgt, dass in diesem Falle keine neuen reellen wirklichen Doppelkurven auftreten können. *Wenn man für die Hauptklasse* (A_4) $n - n_2 > n_1$ *hat, so existiert sowohl für* $k > 0$ *als* $k < 0$ *ausser der Grundkurve und der ebenen Doppelkurve keine wirkliche Doppelkurve.*

b) $n - n_2 < n_1$. Für $u < 0$ bekommt man jetzt die Zeichenfolgen:

$$+ + - + - - \qquad (u < 0,\ k > 0);$$
$$+ - + - + - \qquad (u < 0,\ k < 0).$$

Durch die Substitution $u = -v$ wird (24) in

$$\begin{aligned}(37)\qquad &(v^{n+n_1-n_2} - 1)(k^{n_1} - k^n)(1 - k^{n_2}) + \\ &+ v^{n_1-n_2}(v^{n-n_1+n_2} - 1)(k^{n_2} - k^n)(1 - k^{n_1}) - \\ &- v^{n-n_2}(v^{n_1-n+n_2} - 1)(k^{n_2} - k^{n_1})(1 - k^n) = 0\end{aligned}$$

übergeführt. Wenn hier der Faktor $v - 1$ ausgeschieden wird, so resultiert auf der linken Seite ein Ausdruck, dessen alle Koeffizienten für $k > 0$ positiv sind. Man beachte dabei die Identität (27). Es ist also auch in diesem Falle $u = -1$ die einzige negative Wurzel von (24). *Hat man* $k > 0$, *so verhält sich mithin die Doppelkurve in derselben Weise für* $n - n_2 < n_1$ *wie für* $n - n_2 > n_1$.

Im noch übrigen Falle substituieren wir in (37) $k = -K$, wo also $K > 0$ ist. In der so erhaltenen Gleichung ist es erlaubt die ganzen Exponenten n, n_1 und n_2 durch die in der 5. Nummer eingeführten stetig veränderlichen ν, ν_1 und ν_2 zu ersetzen. Man erhält in solcher Weise

$$\begin{aligned}(38)\qquad &(v^{\nu+\nu_1-\nu_2} - 1)(K^{\nu_1} - K^{\nu})(1 + K^{\nu_2}) - \\ &- v^{\nu_1-\nu_2}(v^{\nu-\nu_1+\nu_2} - 1)(K^{\nu_2} + K^{\nu})(1 - K^{\nu_1}) + \\ &+ v^{\nu-\nu_2}(v^{\nu_1+\nu_2-\nu} - 1)(K^{\nu_2} + K^{\nu_1})(1 - K^{\nu}) = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln 1, K und K^{-1}. Es ist die Frage, unter welchen Umständen dieselbe noch zwei positive Wurzeln besitzen kann. Nach den bereits erhaltenen Resultaten können keine solche Wurzeln für $\nu_1 + \nu_2 < \nu$ auftreten. Auf Grund der stetigen Veränderlichkeit muss nun der Übergang von drei zu fünf positiven Wurzeln der Gleichung (38) durch ein Paar gleicher Wurzeln erfolgen. Da die Gleichung reziprok ist, so müssen diese gleiche Wurzeln $= 1$ sein; es handelt sich in der Tat um einen hinzukommenden Faktor (25_2). Die Frage gilt also zunächst die Bedingung für eine dreifache Wurzel $v = 1$ von (38). Durch Derivation bekommen wir hierfür

$$(39)\qquad \begin{aligned} &\nu_1(1 + K^{\nu_1-\nu_2})(1 - K^\nu) - \nu(1 + K^{\nu-\nu_2})(1 - K^{\nu_1}) = \\ &= (\nu - \nu_1) K^{\nu+\nu_1-\nu_2} - \nu_1 K^\nu + \nu K^{\nu_1} - \nu K^{\nu-\nu_2} + \nu_1 K^{\nu_1-\nu_2} - (\nu - \nu_1) = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung (39) hat eine dreifache Wurzel $K = 1$, und durch die Zeichenfolge finden wir, dass nur für $\nu_1 + \nu_2 > \nu$ noch zwei positive Wurzeln denkbar sind. Existieren nun wirklich Fälle mit solchen Wurzeln, so muss es auf Grund der stetigen Veränderlichkeit von ν, ν_1 und ν_2 auch einen Übergangsfall mit zwei neuen gleichen Wurzeln geben, welche, da die Gleichung reziprok ist, nur $= 1$ sein können. Nach dreimaliger Derivation erhält man als Bedingung für eine fünffache Wurzel $K = 1$

$$(40)\qquad 3\nu_2 = \nu + \nu_1.$$

Bei der Entwicklung des linken Gliedes von (39) nach $K - 1$ hat auf Grund des Faktors $3\nu_2 - \nu - \nu_1$ der Koeffizient für $(K - 1)^3$ verschiedene Zeichen für $3\nu_2 - \nu - \nu_1 > 0$ und $3\nu_2 - \nu - \nu_1 < 0$. Man versteht leicht hieraus, dass im einen Falle (39) zwei neue reelle Wurzeln hat, im anderen aber nicht. Nun ist offenbar, da $\nu_2 < \nu_1 < \nu$, für $\nu_2 + \nu_1 - \nu < 0$ die Ungleichung $3\nu_2 - \nu_1 - \nu < 0$ eine Voraussetzung. Hieraus ist ersichtlich, dass, falls

$$(40_1)\qquad 3\nu_2 < \nu + \nu_1$$

gilt, (39) ausser der dreifachen Wurzel $K = 1$ keine reellen Wurzeln besitzen kann. Es kann mithin in diesem Falle keine neue Doppelkurve hinzukommen. Hat man andererseits

$$(40_2)\qquad 3\nu_2 > \nu + \nu_1,$$

so gibt es einen Wert $K = K_0 < 1$, für welchen (39) befriedigt wird. Gehört K zum Intervalle $1 > K > K_0$ (oder zu dem damit äquivalenten reziproken Intervalle $1 < K < K_0^{-1}$), so hat die Gleichung (38) noch zwei positive Wurzeln, und die assoziierte Regelfläche hat als neue Doppelkurve eine doppelt gekrümmte Bahnkurve. Für $K = K_0$ wird letztere Doppelkurve in zwei unmittelbar auf einander folgende Kurven deformiert, welche sich der ebenen Doppelkurve in $z = 0$ unbegrenzt nähern. Diese Kurve können wir dann als eine *Oskulationsdoppelkurve* bezeichnen, da die ebenen Querschnitte in den Schnittpunkten mit derselben Oskulationsknoten bekommen.

Nur unter der Bedingung (40_2) *und für* $k < 0$ *gibt es mithin assoziierte Regelflächen, welche ausser der Grundkurve und der ebenen Doppelkurve in* $z = 0$ *noch eine dritte Doppelkurve besitzen. Für den Parameter* k *muss dann die Beschränkung* $-1 < k < -K_0$ *(oder die äquivalente* $-1 > k > -K_0^{-1}$*) gelten, wo* K_0 *und* K_0^{-1} *Lösungen von* (39) *bedeuten. Für die Grenze* $k = -K_0$, $-K_0^{-1}$ *ist die ebene Doppelkurve in eine Oskulationsdoppelkurve übergegangen.*

In der Gleichung (24) treten u und k symmetrisch auf. Dies ist unmittelbar ersichtlich, wenn man dieselbe in der Gestalt

$$(41)\qquad (u^n - 1)(u^{n_1-n_2} - 1)(k^{n_2} - 1)(k^{n-n_1} - 1)\,k^{n_1-n_2} - \\ - (u^{n_2} - 1)(u^{n-n_1} - 1)\,u^{n_1-n_2}(k^n - 1)(k^{n_1-n_2} - 1) = 0$$

schreibt. Die Parameter für die feste und die bewegliche Doppelkurve im Intervalle von $-K_0$ bis -1 werden mit k bzw. u bezeichnet. Aus den obigen Entwicklungen geht hervor, dass die Werte $k = -K_0$ und $u = -1$ einander entsprechen. Dasselbe gilt folglich auch für $k = -1$ und $u = -K_0$. Hieraus lässt sich schliessen, dass, falls k sich von $-K_0$ zu -1 bewegt, so geht u den umgekehrten Weg von -1 zu $-K_0$, und zwar monoton, da einem Wert u nur *ein* Wert k entspricht. Man erhält also einmal und nur einmal $u = k$. In diesem Falle folgen die feste und die bewegliche Doppelkurve unmittelbar auf einander. *Gilt also für die Hauptklasse* (A_4) *die Ungleichung* (40_2), *so gibt es eine reelle assoziierte Regelfläche, für welche die W-Kurve die Bedeutung einer Berührungsdoppelkurve hat.* Von Interesse ist es vielleicht zu beobachten, wie die Fläche verschiedenartige Eigenschaften bekommt, je nachdem man für die feste Doppelkurve $k = -K_0$ oder $k = -1$ hat. Im ersten Falle rückt die bewegliche Doppelkurve in die Ebene $z = 0$, im zweiten aber, wo die Regelfläche ein Kegel wird, in die gegenüberliegende Ecke $x = y = w = 0$. Offenbar sind sonst immer zwei Flächen, für welche u und k die Werte wechseln, mit einander projektiv äquivalent. Wenn man sich den Grenzen $-K_0$ und -1 nähert, wird aber die Determinante der dazu erforderlichen Transformation gegen 0 oder ∞ streben.

16. Auch bei der noch übrigen Hauptklasse (A_5) hat (24) die Wurzel $u = -1$, und die assoziierten Regelflächen besitzen dementsprechend immer eine

ebene Doppelkurve. Dieselbe liegt, wenn wir von der Darstellung in der 5. Nummer ausgehen, in der Ebene $w = 0$. Wie bei den Klassen (A_2) und (A_3) führen wir zunächst die Untersuchung für den Repräsentanten (B_5) aus.

Für $k > 0$ gilt es eine Identität

$$t^5 + At^3 + Bt + C = (t^2 - ht + 1)(t^2 - h\alpha t + \alpha^2)(t + h(1 + \alpha)). \tag{42}$$

Als Bedingung für α bekommen wir

$$h(1 + \alpha)[\alpha^2 + 1 + \alpha(h^2 - 1)] = 0.$$

Da der Lösung $\alpha = -1$ die eben erwähnte Doppelkurve in der Ebene $w = 0$ entspricht, so bleibt übrig die Bedingung

$$\alpha^2 + \alpha(h^2 - 1) + 1 = 0 \tag{43}$$

zu diskutieren. Da (43) für

$$h^2 \geqq 3 \tag{44}$$

reelle Lösungen hat, so ist (44) die Bedingung für eine neue wirkliche Doppelkurve. Die Grundkurve ist aber nur für $h^2 \geqq 4$ eine wirkliche Doppelkurve; für $h^2 = 4$ ist dieselbe die Kuspidalkurve einer abwickelbaren Fläche und für $h^2 < 4$ eine isolierte Kurve. Hat man insbesondere $h^2 = 3$, so bekommt man in (43) die Doppellösung $\alpha = -1$. Der dreifachen Lösung $\alpha = -1$, welche man erhält, wenn man die frühere Lösung mitnimmt, entspricht, wie in der vorigen Nummer, *eine ebene Oskulationsdoppelkurve;* dabei ist aber hier, zum Unterschiede vom Falle der vorigen Nummer, die Grundkurve eine isolierte Kurve. Für $h^2 < 3$ sind beide Doppelkurven in isolierte Kurven übergegangen.

Hat man dagegen $k < 0$, so können wir von einer Identität

$$t^5 + At^3 + Bt + C = (t^2 - ht - 1)(t^2 - h\alpha t - \alpha^2)(t + h(1 + \alpha)) \tag{42_1}$$

ausgehen. Betreffs der Bestimmung von α wird jetzt (43) durch

$$\alpha^2 - \alpha(h^2 + 1) + 1 = 0 \tag{43_1}$$

ersetzt. Nur für $h^2 \geqq 1$ erhält man hier reelle Wurzeln und also eine zweite wirkliche Doppelkurve, welche für $h^2 = 1$ in eine Kuspidalkurve und für $h^2 < 1$ in eine isolierte Kurve übergeht. Diese Fälle haben wir jedoch schon früher mit dem Ausgangspunkte von (42) hergeleitet. Nur ist hier die dort bewegliche

Doppelkurve als feste Grundkurve gewählt. Als solche kann dieselbe sich nicht doppelt zusammenbiegen und mit der ebenen Doppelkurve vereinigen. Darum lässt sich hier der Übergang zum Falle mit zwei isolierten Kurven auch nicht ausführen.

Wenn wir jetzt für die Gleichung (24) die Zeichenfolgen bestimmen wollen, so ist zu bemerken, dass, da n, n_1 und n_2 als ungerade ganze Zahlen anzunehmen sind, bei einer Zeichenänderung von k die Koeffizienten nur die entgegengesetzten Zeichen annehmen. Wir brauchen darum nicht besondere Folgen für $k > 0$ und $k < 0$ anzugeben. Wir erhalten die Zeichenfolgen:

$$+ - + + - + \qquad (u > 0);$$
$$+ - - + + - \qquad (u < 0,\ n - n_2 > n_1);$$
$$+ - + - + - \qquad (u < 0,\ n - n_2 < n_1).$$

Die fünf Zeichenwechsel in der letzten Folge können jedoch höchstens drei reelle Wurzeln bedeuten. Schreiben wir nämlich $n = -v$, so geht (24) in

$$\tag{45} \begin{gathered} (v^{n+n_1-n_2} - 1)(k^{n_1} - k^n)(1 - k^{n_2}) - \\ - v^{n_1-n_2}(v^{n-n_1+n_2} - 1)(k^{n_2} - k^n)(1 - k^{n_1}) + \\ + v^{n-n_2}(v^{n_1+n_2-n} - 1)(k^{n_2} - k^{n_1})(1 - k^n) = 0 \end{gathered}$$

über. Verkürzt man hier mit $v - 1$, so erhalten (für $k > 0$) die ersten und letzten Glieder das Zeichen + und die nach beiden Seiten angrenzenden das Zeichen —; die mittleren Glieder verschwinden aber auf Grund der Identität (27). Für $k < 0$ gilt dasselbe bei Änderung der Zeichen. Nach der Verkürzung sind somit bloss zwei Zeichenwechsel übrig, so dass also durch dieselbe deren drei beseitigt worden sind.

Die höchste Anzahl der Wurzeln von (24) ist mithin im Falle (A_5) sieben, und zwar sowohl für $n - n_2 > n_1$ als $n - n_2 < n_1$. Wir kennen bereits fünf Wurzeln, nämlich die Doppelwurzel 1 und die einfachen Wurzeln k, k^{-1} und -1. Es kann also nur *eine* bewegliche doppelt gekrümmte Doppelkurve existieren, und die Bedingung hierfür ist, dass (24) noch zwei reelle Wurzeln besitzt.

Es gilt jetzt klarzulegen, in wie weit die Verhältnisse bei den allgemeinen W-Kurven der Klasse (A_5) sich in ähnlicher Weise gestalten wie bei dem Repräsentanten (B_5). Ohne weiteres ist ersichtlich, dass auch hier kein Faktor (25) in (24) auftreten kann. Die nächste Frage ist, ob die Gleichung (26) für die abwickelbaren Flächen immer dieselbe Anzahl von Lösungen mit $k < 0$ hat. Für den Repräsentanten (B_5) ist diese Anzahl drei, nämlich -1 und $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Da n, n_1 und n_2 sich durch die stetig veränderlichen ν, ν_1 und ν_2 ersetzen lassen, so versteht man, dass beim Übergange zu einer anderen Anzahl ein Faktor $(k+1)^2$ auftreten muss. Dies ist aber ausgeschlossen, da man als Bedingung hierfür $(\nu-\nu_1)(\nu-\nu_2)(\nu_1-\nu_2)=0$ erhalten würde. Zuletzt ist zu entscheiden, ob (24) einen Faktor (25_2) enthalten kann. Für $k < 0$ ist dies offenbar unmöglich, da wir oben gefunden haben, dass höchstens drei negative Wurzeln von (24), also in diesem Falle keine anderen als -1, k und k^{-1} auftreten können. Für $k > 0$ erhält man die Bedingung durch Derivation des linken Gliedes von (45). Nachdem wir n, n_1 und n_2 durch die stetig veränderlichen ν, ν_1 und ν_2 ersetzt haben, lautet diese

$$
(46)\quad \begin{aligned}
&\nu_2(k^{\nu_1-\nu_2}-k^{\nu-\nu_2})(1-k^{\nu_2})-\nu_1(1-k^{\nu-\nu_2})(1-k^{\nu_1})+\nu(1-k^{\nu_1-\nu_2})(1-k^{\nu})=\\
&(\nu-\nu_1)k^{\nu+\nu_1-\nu_2}-(\nu-\nu_2)k^{\nu}+(\nu_1-\nu_2)k^{\nu_1}+(\nu_1-\nu_2)k^{\nu-\nu_2}-(\nu-\nu_2)k^{\nu_1-\nu_2}+\nu-\nu_1=0.
\end{aligned}
$$

Man sieht sofort, dass diese Gleichung $k=1$ als Doppelwurzel hat. Da die Anzahl der Zeichenwechsel vier ist, so entsteht die Frage, ob noch zwei positive Wurzeln auftreten können. Nun ist dies für den Repräsentanten (B_5) nicht der Fall. Sollen jetzt zwei neue positive Wurzeln auftauchen, so müssen diese anfänglich gleich und auf Grund der Reziprozität der Gleichung $=1$ sein. Eine zweimalige Derivation von (46) führt aber hier noch einmal zur Bedingung $(\nu-\nu_1)(\nu-\nu_2)(\nu_1-\nu_2)=0$, welche sich nicht erfüllen lässt. Ein Übergang von einer wirklichen zu einer isolierten Doppelkurve, indem im Zwischenfalle dieselbe sich mit der ebenen Doppelkurve zu einer Oskulationsdoppelkurve vereinigt, ist also nicht möglich, es sei denn, wie wir beim Repräsentanten (B_5) gefunden haben, dass die feste Grundkurve eine isolierte Kurve für die Regelfläche bedeutet.

Bei der Hauptklasse (A_5) *haben also die assoziierten Regelflächen für* $k > 0$ *immer eine zweite wirkliche doppelt gekrümmte Doppelkurve. Für* $k < 0$ *gilt dies nur für* $-k \leqq K < 1$ (oder, was hiermit äquivalent ist, $-k \geqq K^{-1} > 1$). *Für* $k = -K, -K^{-1}$ *erhalten wir als Übergangsfall eine abwickelbare Fläche, welche als Kuspidalkurve die bewegliche Doppelkurve hat.* Man beachte hierbei die Übereinstimmung zwischen den Hauptklassen (A_2) und (A_5). Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei der Klasse (A_5) noch eine ebene Doppelkurve existiert.

Es hat auch der Beweis, den wir für die Klasse (A_2) ausgeführt haben, dass sich nie zwei wirkliche Doppelkurven in eine Berührungsdoppelkurve vereinigen können, für die Klasse (A_5) Gültigkeit.

§ 3.

Der besondere ausgezeichnete Fall.

17. Wir haben in der 3. Nummer gefunden, dass die ausgezeichneten W-Kurven in zwei wesentlich verschiedenen Weisen auf reelle Gestalt gebracht werden können. Von besonderem Interesse sind hier die ausgezeichneten algebraischen W-Kurven, welche wir im vorhergehenden Abschnitte für $n = n_1 + n_2$ erhalten haben. Für dieselben haben wir bereits in (6) eine zweite reelle Darstellung gefunden, welche wir leicht auf die Gestalt

$$x : w : y : z = \cos(n_1 + n_2)\theta : \sin(n_1 + n_2)\theta : \cos(n_1 - n_2)\theta : \sin(n_1 - n_2)\theta \tag{47}$$

bringen können. Die W-Kurven in der reellen Darstellung (47) bezeichnen wir als *den besonderen ausgezeichneten Fall.* Für die Kurve (47) ist das Verhältniss $n_2 : n_1$ bestimmend. Wenn dieses Verhältniss kommensurabel ist, bekommt man eine algebraische Kurve, und wir wollen in einem solchen Falle n_2 und n_1 als teilerfremde ganze Zahlen > 0 annehmen. Wie man unmittelbar findet, liegt jede Kurve des Systems (47) auf der F_2

$$x^2 + w^2 - y^2 - z^2 = 0. \tag{48}$$

Eine algebraische Kurve (47) hat *auch in reeller Hinsicht* die Ordnung $n_1 + n_2$. Für die Schnittpunkte mit einer Ebene $x - aw = 0$ gilt ja

$$\operatorname{tg}(n_1 + n_2)\theta - a = 0,$$

und diese Gleichung besitzt (mod π) $n_1 + n_2$ inkongruente Lösungen. Übrigens schneidet jede Berührungsebene der Fläche (48) die Kurve in $n_1 + n_2$ reellen Punkten. In der Tat enthält jede Erzeugende des einen Systems n_1 Punkte und jede des anderen Systems n_2 Punkte der Kurve. Die Schnittpunkte mit den Erzeugenden lassen sich ja bzw. durch Gleichungen

$$\operatorname{tg} n_1\theta = \alpha, \qquad \operatorname{tg} n_2\theta = \beta$$

bestimmen.

Dagegen hat jede Ebene $y - az = 0$, nur $n_1 - n_2$ Schnittpunkte mit der Kurve. Es lässt sich auch beweisen, dass die Kurve den *Index* $n_1 - n_2$ hat, d. h. dass jede Ebene *mindestens* $n_1 - n_2$ *Schnittpunkte* mit der Kurve besitzt. Diese Frage lässt sich offenbar auf die Diskussion der Wurzeln einer Gleichung

$$\cos[(n_1 + n_2)x + a] - c\cos[(n_1 - n_2)x + b] = 0$$

in irgend einem Intervalle $x_0 \leqq x < x_0 + \pi$ zurückführen. Äquivalent hiermit ist die Bestimmung der Schnittpunkte der beiden Kurven

$$y = \cos[(n_1 + n_2)x + a]$$

und

$$y = c\cos[(n_1 - n_2)x + b].$$

Für das fragliche Intervall lässt sich nun die zweite Kurve durch die Schnittpunkte mit der X-Achse in $n_1 - n_2$ Halbperioden zerlegen, und in gleicher Weise bekommt man für die erste Kurve $n_1 + n_2$ Halbperioden. Unter diesen letzteren gibt es $n_1 - n_2$, deren Anfangspunkte und Endpunkte zu zwei verschiedenen von den ersteren $n_1 - n_2$ Halbperioden gehören, und für ein solches Teilintervall haben die Kurven offenbar einen und nur einen Schnittpunkt gemeinsam. Wenn es dagegen für noch andere von den $n_1 + n_2$ Halbperioden Schnittpunkte gibt, so müssen dieselben augenscheinlich paarweise auftreten. Mit leichten Abänderungen lässt sich diese Schlussweise auch auf die Ausnahmefälle übertragen, wo die betreffenden Kurven einander auf der X-Achse schneiden. Der Index kann nicht grösser als $n - 2$ sein. Diesen Index erhalten wir für $n_2 = 1$.

Ist andererseits die Kurve (47) transzendent, d. h. sind n_1 und n_2 inkommensurabel, so ist ihre Ordnung unendlich. In der Tat definiert in diesem Falle die Kurve eine auf der Fläche (48) überall dichte Punktmenge. Dies folgt ganz einfach daraus, dass, falls n_1 und n_2 inkommensurabel sind, man bei beliebig gegebenen α und β (mod π) die Kongruenzen

$$(n_1 + n_2)\theta \equiv \alpha, \qquad (n_1 - n_2)\theta \equiv \beta$$

mit irgend welcher gewünschten Genauigkeit gleichzeitig lösen kann.

Für eine algebraische Kurve (47) gilt noch die Eigenschaft, dass *jede Schmiegungsebene* $n_1 - n_2 + 2$ *reelle Punkte der Kurve enthält*, wobei der Berührungspunkt dreimal gezählt wird. Da sämtliche Punkte der Kurve mit einander projektiv äquivalent sind, so genügt es, wenn wir den Beweis für den Punkt $\theta = 0$ ausführen. Als Bedingung für drei Wurzeln $\theta = 0$ einer Gleichung

$$c_0 \cos(n_1 + n_2)\theta + c_1 \sin(n_1 + n_2)\theta + c_2 \cos(n_1 - n_2)\theta + c_3 \sin(n_1 - n_2)\theta = 0$$

findet man

$$c_0 = c_2 = 0; \qquad c_1(n_1 + n_2) + c_3(n_1 - n_2) = 0.$$

Als Schmiegungsebene bekommt man mithin

$$(n_1 + n_2)z - (n_1 - n_2)w = 0,$$

und es handelt sich um die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung

$$(49) \qquad (n_1 + n_2)\sin(n_1 - n_2)\theta - (n_1 - n_2)\sin(n_1 + n_2)\theta = 0$$

für $0 \leqq \theta < \pi$. Die Antwort unserer Frage beruht darauf, wie sich die Anzahl der gemeinsamen reellen Punkte einer Ebene

$$(50) \qquad z - aw = 0$$

und der Kurve (47) mit a ändert. Wir wissen, dass diese Anzahl für $a = 0$ $n_1 - n_2$ ist und für $a = \infty$ $n_1 + n_2$ ist. Es ist auch evident, dass bei stetiger Variation von a eine Änderung der Anzahl nur durch eine Zwischenlage vermittelt werden kann, bei welcher die Kurve (47) berührt wird. Suchen wir jetzt dementsprechend die Bedingung für eine Doppelwurzel der Gleichung

$$(51) \qquad \sin(n_1 - n_2)\theta - a\sin(n_1 + n_2)\theta = 0,$$

so ergibt sich

$$(52) \qquad (n_1 + n_2)\,\mathrm{tg}\,(n_1 - n_2)\theta - (n_1 - n_2)\,\mathrm{tg}\,(n_1 + n_2)\theta = 0.$$

Es sei $\theta = \theta_0$ eine Lösung, für welche die beiden Glieder von (52) weder verschwinden noch unendlich werden. Für die Ebene (50), welche durch den Kurvpunkt mit dem Parameter θ_0 geht, hat man dann

$$a = \frac{\sin(n_1 - n_2)\theta_0}{\sin(n_1 + n_2)\theta_0} = \frac{(n_1 - n_2)\cos(n_1 - n_2)\theta_0}{(n_1 + n_2)\cos(n_1 + n_2)\theta_0}.$$

Nach (52) muss

$$|\mathrm{tg}\,(n_1 - n_2)\theta_0| < |\mathrm{tg}\,(n_1 + n_2)\theta_0|$$

sein. Hieraus erhält man

$$|\sin(n_1 - n_2)\theta_0| < |\sin(n_1 + n_2)\theta_0|; \qquad |\cos(n_1 - n_2)\theta_0| > |\cos(n_1 + n_2)\theta_0|.$$

Man bekommt folglich für den Punkt $\theta = \theta_0$

$$|a| > \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

Andererseits geht es auch aus den obigen Ungleichungen hervor, dass man

$$|a| < 1$$

hat. Nun haben wir bereits gefunden, dass für die Schmiegungsebene im Punkte $\theta = 0$

$$a = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

ist. Wenn wir dieses Resultat mit den obigen Ungleichungen vergleichen, so verstehen wir, dass für $0 \leqq a < \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ die Anzahl der Schnittpunkte nur $n_1 - n_2$ ist, und dass erst für $a = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, d. h. für die Schmiegungsebene, diese Anzahl noch mit 2 erhöht wird. Ist dagegen $a < 0$, so erhält man das erste mal eine Doppelwurzel von (51) für $-a > \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$. Wenn für eine Doppellösung von (51) die beiden Glieder von (52) unendlich werden, so muss offenbar $|\sin(n_1 - n_2)\theta_0| = |\sin(n_1 + n_2)\theta_0| = 1$ sein, und man bekommt $|a| = 1$. Für die Anzahl ϱ der Schnittpunkte der Ebene (50) mit der Kurve (47) haben wir jetzt die folgenden Resultate:

1) $\varrho = n_1 - n_2$ für $|a| < \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$;

2) $\varrho = n_1 + n_2$ für $|a| \geqq 1$;

3) $n_1 - n_2 \leqq \varrho \leqq n_1 + n_2$ für $\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \leqq |a| < 1$.

18. Wir betrachten jetzt die assoziierten Regelflächen einer W-Kurve, für welche (47) die reelle Darstellung bedeutet. Im ausgezeichneten Falle geht man von (9) zu (47) durch die Substitution

$$t = e^{2\theta i}$$

über, und in Übereinstimmung hiermit wird (12) durch

$$\theta' = \theta + \varkappa \tag{53}$$

ersetzt. Es ist also $k = e^{2\varkappa i}$ zu setzen, und man hat $|k| = 1$, falls die W-Kurve eine wirkliche Doppelkurve der Regelfläche bedeuten soll. Die ausgezeichneten W-Kurven gestatten noch, wie Mohrmann hervorgehoben hat, eine Schar von involutorischen Kollineationen in sich, welche sich durch die Substitutionen

$$(12_1) \qquad t' = kt^{-1}$$

ausdrücken lassen, und bei denen die singulären Punkte $t = 0$ und $t = \infty$ vertauscht werden. Bei der reellen Darstellung (47) geht (12_1) in

$$(53_1) \qquad \theta' = -\theta + \varkappa$$

über. Für die Regelflächen, welche man erhält, wenn man entsprechende Punkte der Kurve bei einer Transformation (12_1) oder (53_1) verbindet, ist die W-Kurve natürlich nur eine einfache Kurve.

Auch bei der reellen Darstellung (47) gibt es *reelle* assoziierte Regelflächen, für welche die W-Kurve eine isolierte Doppelkurve bedeutet, und zwar hat man dabei k reell und > 0. Setzt man nämlich $k = e^{2\varkappa_1}$, so erhält (53) die Gestalt

$$\theta' = \theta - \varkappa_1 i.$$

Die konjugierten Punkte $\theta \pm \frac{\varkappa_1 i}{2}$ entsprechen also einander, und ihre Verbindungsgerade ist eine reelle Erzeugende der Regelfläche. Dagegen bekommt man hier für $k < 0$ keine reellen assoziierten Regelflächen.

Die bestimmende Gleichung (13) für die Doppelkurve einer assoziierten Regelfläche vereinfacht sich für $n = n_1 + n_2$, besonders wenn man nach den obigen Substitutionen t, t_1 und k durch θ, θ_1 und $\varkappa$ ersetzt. Eine leichte Umformung von (13) ergibt zunächst

$$(t^{n_1} - t_1^{n_1})(t^{n-n_2} - t_1^{n-n_2})(k^{n_1} - k^n)(1 - k^{n_2}) -$$
$$- t^{n_1-n_2} t_1^{n_1-n_2}(t^{n_2} - t_1^{n_2})(t^{n-n_1} - t_1^{n-n_1})(k^{n_2} - k^n)(1 - k^{n_1}) = 0.$$

Setzt man hier $\theta - \theta_1 = \varphi$, so ergibt sich sofort für $n = n_1 + n_2$

$$(54) \qquad \sin^2 n_1 \varphi \sin^2 n_2 \varkappa - \sin^2 n_2 \varphi \sin^2 n_1 \varkappa = 0.$$

Insbesondere erhält man für $\varkappa \to 0$, d. h. für die abwickelbare Fläche

$$(55) \qquad n_2^2 \sin^2 n_1 \varphi - n_1^2 \sin^2 n_2 \varphi = 0.$$

Wie man sieht, lässt sich (54) in zwei verschiedene Gleichungen auflösen:

$$(54_1)\qquad \sin n_1\varphi \sin n_2 \varkappa - \sin n_2 \varphi \sin n_1 \varkappa = 0;$$

$$(54_2)\qquad \sin n_1\varphi \sin n_2 \varkappa + \sin n_2 \varphi \sin n_1 \varkappa = 0,$$

und man hat insbesondere für (55) die Zerlegung:

$$(55_1)\qquad n_2 \sin n_1 \varphi - n_1 \sin n_2 \varphi = 0;$$

$$(55_2)\qquad n_2 \sin n_1 \varphi + n_1 \sin n_2 \varphi = 0.$$

Wünscht man jetzt die Anzahl der reellen W-Kurven zu bestimmen, welche als Doppelkurven einer assoziierten Regelfläche auftreten, so hat man für $0 \leqq \varphi < \pi$ die Anzahl der reellen Wurzeln von (54) festzustellen. In den Teilgleichungen (54_1) und (54_2) haben wir ein Paar

$$(56)\qquad \sin n_2 \varphi \mp a \sin n_1 \varphi = 0,$$

wobei wir $a \geqq 0$ annehmen können. Für gleiche Wurzeln einer Gleichung (56) gelangen wir zur Bedingung

$$(57)\qquad n_1 \operatorname{tg} n_2 \varphi - n_2 \operatorname{tg} n_1 \varphi = 0,$$

welche wir in

$$(58)\qquad (n_1 + n_2) \sin (n_1 - n_2)\varphi - (n_1 - n_2) \sin (n_1 + n_2)\varphi = 0$$

umformen können. Letztere Gleichung weicht von (49) nur in der Bezeichnung ab, und wir können also aus der Diskussion der vorigen Nummer entnehmen, dass dieselbe eine dreifache Wurzel $\varphi = 0$ und $n_1 - n_2 - 1$ Wurzeln für $0 < \varphi < \pi$ besitzt. Wir können jetzt beweisen, dass, falls a von 0 bis ∞ wächst, die Anzahl der reellen Wurzeln für jede der Gleichungen (56) niemals vermindert wird. Für $a \to 0$ hat ja jede Gleichung im bezeichneten Intervalle n_2 Wurzeln und für $a \to \infty$ deren n_1. Eine Erhöhung um $2(n_1 - n_2)$ reelle Wurzeln hat also stattgefunden. Nun gehören zu den Lösungen von (58) $n_1 - n_2$ a-Werte[1], bei denen eine von den Gleichungen (56) eine Doppelwurzel bekommt, und in jedem von diesen Fällen müssen also, um die Erhöhung der Anzahl der reellen Wurzeln zu

[1] Wie unten im Falle 3 hervorgehoben wird, fallen diese a-Werte, abgesehen von $a = \dfrac{n_2}{n_1}$ und $a = 1$, paarweise zusammen.

erklären, bei steigendem a zwei konjugiert imaginäre in zwei reelle Wurzeln übergehen. Dabei sind drei besondere Fälle zu berücksichtigen, welche wir in den folgenden Nummern näher untersuchen wollen.

1) Für $a=\frac{n_2}{n_1}$ tritt beim Zeichen — in (56) zur festen Wurzel $\varphi=0$ noch eine Doppelwurzel hinzu. Es handelt sich um eine abwickelbare Fläche, für welche die Doppelkurve *Kuspidalkurve* ist.

2) Wenn n_1 und n_2 beide ungerade Zahlen bedeuten, ist $\varphi=\frac{\pi}{2}$ eine Lösung von (58). Man hat in (56) $a=1$, und die Doppelwurzel tritt beim Zeichen — für $n_1-n_2\equiv 0 \pmod 4$ und beim Zeichen + für $n_1-n_2\equiv 2 \pmod 4$ auf. Es ist hier eine Doppelkurve in eine *Berührungsleitgerade* übergegangen.

3) Die übrigen Lösungen von (58) treten paarweise $\varphi=\varphi_0$, $\pi-\varphi_0$ auf. Sind n_1 und n_2 beide ungerade Zahlen, so gehören die entsprechenden Doppelwurzeln zu demselben Zeichen für a in (56), und die Anzahl der Paare ist $\frac{n_1-n_2-2}{2}$. Ist aber eine von den Zahlen n_1 und n_2 gerade, so gehören die Doppelwurzeln eines Paares zu entgegengesetzten Zeichen für a, und man bekommt $\frac{n_1-n_2-1}{2}$ Paare. Man beweist nach der Schlussweise am Ende der vorigen Nummer, dass man hier immer $\frac{n_2}{n_1}<a<1$ hat. Dieser Fall bedeutet die Vereinigung zweier Doppelkurven in eine *Berührungsdoppelkurve.*

Zuletzt möge hier daran erinnert werden, dass für $\sin n_1 \varkappa=0$ bzw. $\sin n_2 \varkappa=0$ $(\varkappa\neq 0)$ die assoziierte Regelfläche sich auf die eine oder andere Regelschar der Fläche (48) reduziert. Die Schar wird dabei n_1-fach bzw. n_2-fach gezählt, doch für $k=\frac{\pi}{2}$, was hier involviert, dass n_1 bzw. n_2 gerade ist, nur $\frac{n_1}{2}$-fach bzw. $\frac{n_2}{2}$-fach. Wie man sieht, ändert der Durchgang durch eine solche Regelschar nichts in der Realität der Doppelkurve.

19. Die Kuspidalkurve einer abwickelbaren Fläche bezeichnet den Übergang von einer wirklichen zu einer isolierten Doppelkurve. Es tritt dabei eine Änderung in der Realität der Schnittpunkte mit den Erzeugenden ein, indem diese zuerst auf der Kuspidalkurve zusammenfallen und dann konjugiert imaginär werden. An der Realität der Doppelkurve selbst wird aber nichts geändert.

Als Bedingung für eine abwickelbare Fläche haben wir im vorhergehenden Abschnitt (26) erhalten. Dieselbe lässt sich auch aus den Entwicklungen der vorigen Nummer herleiten. Als Resultat erhält man, dass für eine abwickelbare Fläche die eine oder andere von den beiden Relationen

$$(59_1) \qquad n_1 \sin n_2 \varkappa - n_2 \sin n_1 \varkappa = 0;$$

$$(59_2) \qquad n_1 \sin n_2 \varkappa + n_2 \sin n_1 \varkappa = 0$$

erfüllt werden muss. Die Lösung $\varkappa = 0$ bedeutet hier, dass als Kuspidalkurve der abwickelbaren Fläche die Grundkurve (47) auftritt. Nun hat jede von den Gleichungen (59_1) und (59_2) für $0 < \varkappa < \pi$ $n_2 - 1$ verschiedene Lösungen. Dieselben verteilen sich in Paare $\varkappa$, $\pi - \varkappa$, und diesen $n_2 - 1$ Paaren sind $n_2 - 1$ abwickelbare Flächen zugeordnet. *Unter den zu einer algebraischen Kurve* (47) *gehörenden assoziierten Regelflächen gibt es mithin n_2 reelle abwickelbare Flächen, wenn man diejenige mitzählt, für welche* (47) *die Kuspidalkurve bezeichnet.*

Es soll für die verschiedenen Lösungen von (59_1) und (59_2) entschieden werden, ob bei wachsendem $\varkappa$ eine wirkliche Doppelkurve in eine isolierte übergeht, oder die Veränderung in der umgekehrten Richtung verläuft. Die Entscheidung hierüber beruht nach den Auseinandersetzungen der vorigen Nummer darauf, ob bei steigendem $\varkappa$ der Betrag

$$(60) \qquad \left| \frac{\sin n_2 \varkappa}{\sin n_1 \varkappa} \right|$$

zunimmt oder abnimmt. Dementsprechend gilt die eine oder andere Möglichkeit je nach der Ungleichung

$$(61) \qquad n_2 \cot n_2 \varkappa - n_1 \cot n_1 \varkappa \gtrless 0.$$

Es ist nun leicht zu beweisen, dass das erste von beiden Gliedern in (61) den grösseren Betrag hat. Da eine von den Relationen (59_1) oder (59_2) Gültigkeit haben muss, so folgert man

$$|\cos n_2 \varkappa| > |\cos n_1 \varkappa|,$$

was für den Beweis ausreicht. *Bei dem fraglichen Übergange wird also eine wirkliche Doppelkurve gewonnen bzw. verloren, je nachdem* $\operatorname{tg} n_2 \varkappa > 0$ *bzw.* $\operatorname{tg} n_2 \varkappa < 0$.

20. Bei einer Berührungsdoppelkurve gehen zwei reelle Doppelkurven in zwei zusammenfallende (d. h. unmittelbar auf einander folgende) und dann in zwei konjugiert imaginäre über. Die Bedingung dafür, dass die Grundkurve eine Berührungsdoppelkurve bedeutet, haben wir bereits in (23) gegeben. Dieselbe erhält im Parameter $\varkappa$ den einfachen Ausdruck

$$n_1 \operatorname{tg} n_2 \varkappa - n_2 \operatorname{tg} n_1 \varkappa = 0, \tag{62}$$

der sich in

$$(n_1 + n_2) \sin (n_1 - n_2) \varkappa - (n_1 - n_2) \sin (n_1 + n_2) \varkappa = 0 \tag{63}$$

umformen lässt.

Letztere Gleichung unterscheidet sich von (49), durch welche die Punkte in der Schmiegungsebene bestimmt werden, nur dadurch, dass hier θ durch $\varkappa$ ersetzt wird. Diese Übereinstimmung findet ihre ganz natürliche Erklärung darin, dass, wenn im ausgezeichneten Falle die W-Kurve eine Berührungsdoppelkurve der Regelfläche ist, so müssen die Erzeugenden in den Schmiegungsebenen ihrer Stützpunkte liegen. Aus der Diskussion über die Gleichung (49) wissen wir bereits, dass (63) $n_1 - n_2 - 1$ Wurzeln für $0 < \varkappa < \pi$ besitzt. Unter diesen hat man, wenn n_1 und n_2 beide ungerade sind, die Lösung $\varkappa = \frac{\pi}{2}\cdot$ Dieselbe bezeichnet aber die assoziierte Regelfläche mit $k = -1$, welche die W-Kurve bloss als einfache Kurve enthält. Die übrigen Wurzeln verteilen sich in Paare $\varkappa$, $\pi - \varkappa$, welche je dieselbe assoziierte Regelfläche definieren. *Die Anzahl der reellen assoziierten Regelflächen, für welche die Grundkurve* (47) *eine Berührungsdoppelkurve darstellt, ist mithin* $\left[\frac{n_1 - n_2 - 1}{2}\right]$. *In den beiden Fällen* $n_2 = n_1 - 1$ *und* $n_2 = n_1 - 2$ *gibt es also derartige reelle Flächen nicht.* Man versteht leicht, dass das Zusammenfallen einer beweglichen Doppelkurve mit der festen Grundkurve keinen Übergang von zwei reellen zu zwei konjugiert imaginären Doppelkurven vermitteln kann.

Für zusammenfallende Doppelkurven einer assoziierten Regelfläche haben wir bereits in (57) und (58) die Bedingungen gegeben. Nur in der Bezeichnung, indem $\varkappa$ durch φ ersetzt wird, weichen (57) und (58) von (62) und (63) ab, und die Lösungen müssen also in beiden Fällen übereinstimmen. Wie wir oben gefunden haben, ist für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ die Anzahl der Lösungen $= \left[\frac{n_1 - n_2 - 1}{2}\right] = \nu$.

Wir bezeichnen dieselben mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\nu$. Es ist erlaubt $\varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_\nu$ anzunehmen. Wollen wir jetzt die assoziierten Regelflächen mit einer anderen Berührungsdoppelkurve als der Grundkurve aufsuchen, so sind zunächst, wenn φ_μ eine beliebige von diesen ν Lösungen bedeutet, die Wurzeln $\varkappa$ der Gleichungen

$$(64) \qquad \sin n_1 \varphi_\mu \sin n_2 \varkappa \mp \sin n_2 \varphi_\mu \sin n_1 \varkappa = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \nu)$$

zu bestimmen. Man hat hier die Doppelwurzeln $\varkappa = \varphi_\mu$, $\pi - \varphi_\mu$. Dieselben treten beide bei dem Zeichen — auf, wenn n_1 und n_2 ungerade ganze Zahlen sind. Wenn aber eine von den Zahlen n_1 und n_2 gerade ist, so gehört die Doppelwurzel $\varkappa = \pi - \varphi_\mu$ zum Zeichen $+$. Durch diese Lösungen bekommen wir offenbar nur die oben besprochenen ν Fälle wieder, in denen die feste Grundkurve sich mit einer anderen Doppelkurve in eine Berührungsdoppelkurve vereinigt hat.

Um die Anzahl der assoziierten Regelflächen zu bestimmen, bei denen eine Berührungsdoppelkurve aus der Vereinigung zweier *beweglichen* Doppelkurven herrührt, hat man also für die ν Paare von Gleichungen (64) die Anzahl der von φ_μ verschiedenen Lösungen mit $0 < \varkappa < \frac{\pi}{2}$ zu ermitteln. Die Antwort hierauf können wir sofort aus den Entwicklungen am Ende der 18. Nummer entnehmen. In den ν Grössen

$$(65) \qquad \left| \frac{\sin n_2 \varphi_\mu}{\sin n_1 \varphi_\mu} \right|$$

haben wir ja eben die zwischen $\frac{n_2}{n_1}$ und 1 gelegenen a-Werte, für welche eine von den Gleichungen (56) eine Doppelwurzel besitzt. Das Paar (56) hat nun für $a \to 0$ $2(n_2 - 1)$ Lösungen zwischen 0 und π, und diese Anzahl erhöht sich für $a > \frac{n_2}{n_1}$ um 2. Jedesmal, wenn für irgend einen μ-Wert a den Ausdruck (65) übersteigt, wird die Anzahl noch um 4 vergrössert. Unter diesen Wurzeln liegt eben die Hälfte zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Anzahl von assoziierten Regelflächen mit einer anderen Berührungsdoppelkurve als der Grundkurve wird hiernach

$$(66) \qquad n_2 + (n_2 + 2) + \cdots (n_2 + 2(\nu - 1)) = \nu (n_2 + \nu - 1).$$

Dieses Resultat lässt sich in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Zu einer festen W-Kurve gibt es, wenn sowohl n_1 als n_2 ungerade sind,

$$(66_1) \qquad \frac{(n_1 - n_2 - 2)(n_1 + n_2 - 4)}{4}$$

assoziierte Regelflächen mit der Eigenschaft, dass zwei reelle bewegliche Doppelkurven sich in eine Berührungsdoppelkurve vereinigt haben, um bei weiterer Veränderung des Parameters $\varkappa$ in zwei konjugiert imaginäre zu übergehen. Wenn aber eine von den Zahlen n_1 und n_2 gerade ist, so hat man

$$(66_2) \qquad \frac{(n_1 - n_2 - 1)(n_1 + n_2 - 3)}{4}$$

derartige Flächen.

Wie man sieht, *existieren für $n_2 = n_1 - 1$ und $n_2 = n_1 - 2$ keine reellen Berührungsdoppelkurven.* Es sei noch an die Bedeutung der Summanden in (66) erinnert. Dieselben stehen zu den ν Regelflächen, welche die feste W-Kurve als Berührungsdoppelkurve haben, in Beziehung. In der Tat werden durch diese Summanden die Anzahlen der reellen gewöhnlichen Doppelkurven ausgedrückt, welche die fraglichen Regelflächen ausser der Grundkurve noch besitzen. In der Tat sind es die ν früheren Regelflächen, welche hier wiederkehren. Nur haben wir als Grundkurve nicht die Berührungsdoppelkurve sondern eine von den gewöhnlichen Doppelkurven gewählt.

Wenn man also bei wachsendem $\varkappa$ gewisse Parameterwerte überschreitet, se gehen entweder zwei konjugiert imaginäre Doppelkurven in zwei reelle oder zwei reelle in zwei konjugiert imaginäre über, und beim Übergange hat man eine Berührungsdoppelkurve. Die Entscheidung, welche von den obigen beiden Möglichkeiten zutrifft, beruht auf die Ungleichung (61), welche in dem betreffenden Falle Gültigkeit hat, und letztere Frage ist damit äquivalent, welches von den beiden Gliedern

$$n_2 \operatorname{tg} n_1 \varkappa, \quad n_1 \operatorname{tg} n_2 \varkappa$$

den grösseren Betrag hat. Nach (64) hat man

$$(67) \qquad |\sin n_2 \varkappa| : |\sin n_2 \varphi_\mu| = |\sin n_1 \varkappa| : |\sin n_1 \varphi_\mu| = h\,.$$

Wir betrachten ganz allgemein Wertepaare α, β, für welche man

$$|\sin\alpha| : |\sin\beta| = |\sin n_2\varphi_\mu| : |\sin n_1\varphi_\mu| = \varrho$$

hat. Solche Wertepaare sind $n_2 \varkappa$ und $n_1 \varkappa$. Wir bekommen

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{\varrho\,|\sin\beta|}{\sqrt{1-\varrho^2\sin^2\beta}} = \frac{\varrho\,|\sin\beta|}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\beta + 1 - \varrho^2}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\left|\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1-\varrho^2}{\varrho^2\cos^2\beta}}} = \sigma.$$

Da nach (57) $\varrho < 1$, so nimmt σ zu oder ab, je nachdem $|\cos\beta|$ zu- oder abnimmt, und für $\alpha = n_2\varphi_\mu$, $\beta = n_1\varphi_\mu$ ist $\sigma = \frac{n_2}{n_1}$. Hieraus lässt sich die Folgerung ziehen, dass für $h > 1$ das erste Glied in (61) und für $h < 1$ das letzte Glied den grösseren Betrag besitzt. *Ist also in* (67) $h > 1$, *so gehen bei wachsendem* $\varkappa$ *für* $\operatorname{tg} n_2\varkappa > 0$ *zwei konjugiert imaginäre Doppelkurven in zwei reelle und für* $\operatorname{tg} n_2\varkappa < 0$ *zwei reelle in zwei konjugiert imaginäre über. Hat man aber* $h < 0$, *so gilt entsprechendes, je nachdem* $\operatorname{tg} n_1\varkappa < 0$ *oder* > 0. Für $\varkappa = \varphi_\mu$ bekommt der Ausdruch (60) einen Extremalwert, was im Zusammenhange damit steht, dass in diesem Falle keine Änderung in der Anzahl der reellen Doppelkurven stattfindet.

21. Im noch übrigen Falle sind n_1 und n_2 ungerade ganze Zahlen, und die Gleichung (58) besitzt die Lösung $\varphi_\mu = \frac{\pi}{2}$. Führen wir diese in (64) ein, so ergibt sich

(68) $$\sin n_2\varkappa \mp \sin n_1\varkappa = 0.$$

Für eine von den Gleichungen (68) ist $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ eine Doppelwurzel, und zwar gilt dies bei dem Zeichen $-$ für $n_1 - n_2 \equiv 0 \pmod 4$ und bei dem Zeichen $+$ für $n_1 - n_2 \equiv 2 \pmod 4$. Durch Zerlegung erhält man aus (68)

$$\sin\frac{n_1 \mp n_2}{2}\varkappa = 0; \quad \cos\frac{n_1 \pm n_2}{2}\varkappa = 0.$$

Jede Lösung von (68) genügt also der einen oder der anderen von den Relationen

$$(69) \qquad \sin(n_1 + n_2)\varkappa = 0; \quad \sin(n_1 - n_2)\varkappa = 0.$$

Hier ist von der gemeinsamen Lösung $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ abzusehen. Indem wir (68) mit (54) kombinieren erhalten wir jetzt die bestimmenden Relationen für die Doppelkurve. Die Gleichungen in φ, welche wir dann bekommen, haben dieselbe Gestalt wie (68). Man gelangt also auch für φ zu einer von den Relationen

$$(70) \qquad \sin(n_1 + n_2)\varphi = 0; \quad \sin(n_1 - n_2)\varphi = 0.$$

Wir wissen bereits aus den Entwicklungen der 8. Nummer dass *die Regelfläche die Gerade $x = w = 0$ bzw. $y = z = 0$ als Leitlinie besitzt, je nachdem der Parameter $\varkappa$ die erste oder die zweite von den Relationen* (69) *befriedigt. Wenn wir etwa den ersten von diesen Fällen näher in Betracht nehmen, so liegen die Erzeugenden, für welche die Differenz $\Theta - \Theta_1 = \varphi$ der ersten von den Gleichungen* (70) *genügt, in derselben Ebene durch die Leitgerade. Die Doppelkurven, welche der zweiten Gleichung* (70) *entsprechen, müssen dann offenbar mit der Leitlinie zusammenfallen, was sich natürlich auch leicht direkt nachweisen lässt: die zusammengehörigen Erzeugenden treffen also einander in einem Punkte der Leitgeraden. Vertauscht man die Rollen der in* (69) *und* (70) *auftretenden Gleichungen, so erhält man hieraus die Resultate im zweiten Falle.*

Die Lösung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist aber beiden Gleichungen (70) gemeinsam. Zwei Erzeugende, für welche die Differenz $\Theta - \Theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ist, gehören mithin sowohl zu derselben Ebene als demselben Punkte der Leitlinie. Hierin liegt die Bedeutung, dass im Treffpunkte dieser Erzeugenden zwei Schalen der Regelfläche einander berühren. Im allgemeinen wird ja eine Duppelkurve von den Erzeugenden in zwei verschiedenen Punkten getroffen. Diese Punkte folgen aber in diesem Übergangsfalle unmittelbar auf einander und werden bei weiterer Veränderung des Parameters $\varkappa$ konjugiert imaginär. *Die Schalen der Regelfläche, welche die Leitgerade durchdringen, berühren also einander paarweise. Man hat die Sache so aufzufassen, dass es unter den verschiedenen Doppelkurven, die sich in die Leitlinie zusammengezogen haben, eine gibt, welche in eine Berührungsdoppelkurve übergeführt worden ist.* Hier hat man noch eine Möglichkeit für die Beseitigung einer wirklichen Doppelkurve, indem dieselbe sich in zwei Hälften aufteilt, welche beim Übergange unmittelbar auf einander folgen. In solcher Weise werden zwei reelle Hälften in zwei konjugiert imaginäre übergeführt; so dass die Doppelkurve nach dem Übergange nullteilig wird.

Es gibt $n_1 - 2$ *assoziierte Regelflächen mit einer derartigen Berührungsleitlinie.* Man hat nämlich, wenn man von 0 und $\frac{\pi}{2}$ absieht, $2(n_1 - 2)$ (mod π) verschiedene Lösungen von (69), und diese verteilen sich in $n_1 - 2$ Paare $\varkappa$, $\pi - \varkappa$, welche je zu derselben Regelfläche gehören.

Auf die Frage, ob bei steigendem $\varkappa$ eine wirkliche Doppelkurve gewonnen oder verloren wird, erhält man die Antwort durch die am Ende der vorhergehenden Nummer benutzten Methode. Hier hat man aber die Vereinfachung, dass auf Grund von (68) das letzte Glied von (61) immer den grösseren Betrag hat. *Eine wirkliche Doppelkurve wird mithin für* $\operatorname{tg} n_1 \varkappa < 0$ *gewonnen und für* $\operatorname{tg} n_1 \varkappa > 0$ *verloren.* Es lässt sich auch jetzt eine einheitliche Antwort für die in sämtlichen drei Nummern 19, 20 und 21 behandelten Fälle formulieren. *Hat man in* (67) $h > 1$, *so ist* $\operatorname{tg} n_2 \varkappa > 0$ *die Bedingung für den Übergang zu wirklichen Doppelkurven bei wachsendem* $\varkappa$. *Hat man dagegen* $h < 1$, *so ist die entsprechende Bedingung* $\operatorname{tg} n_1 \varkappa < 0$. *Gelten aber für* $\operatorname{tg} n_2 \varkappa$ *bzw.* $\operatorname{tg} n_1 \varkappa$ *die entgegengesetzten Zeichen, so gewinnt man wirkliche Doppelkurven bei fallendem* $\varkappa$. In der 19. Nummer ist aber stets $h > 1$, ebenso wie man in dieser Nummer immer $h < 1$ hat.

22. Bei Änderung des Parameters $\varkappa$ wird also für die assoziierten Regelflächen die Anzahl der wirklichen Doppelkurven in, wie es scheint, ziemlich unregelmässiger Weise immer wieder entweder vergrössert oder vermindert. Um einen Überblick über diese Variation zu gewinnen, genügt es das Intervall $0 \leqq \varkappa \leqq \frac{\pi}{2}$ zu untersuchen; für das Intervall zwichen $\frac{\pi}{2}$ und π erhält man ja dieselben Änderungen in der umgekehrten Reihenfolge. Für die Durchführung der Untersuchung empfiehlt sich die Zerlegung in Teilintervalle, welche von den Nullstellen der Funktion $\sin n_1 \varkappa$ begrenzt werden. Je nachdem in einem solchen Teilintervalle $\sin n_2 \varkappa$ eine Nullstelle hat oder nicht, bekommen wir verschiedene Arten von Teilintervallen.

Für $\sin n_1 \varkappa$ ist $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ eine Nullstelle, wenn n_1 eine gerade Zahl bedeutet. Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ hat man dann $\frac{n_1}{2} - 1$ Nullstellen von $\sin n_1 \varkappa$, und die Anzahl der Teilintervalle ist $\frac{n_1}{2}\cdot$ Ist aber n_1 eine ungerade Zahl, so hat $\sin n_1 x$ $\frac{n_1-1}{2}$ Nullstellen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und man hat neben $\frac{n_1-1}{2}$ vollständigen Teilintervallen noch ein halbes Teilintervall für $\frac{n_1-1}{2n_1}\pi < x \leqq \frac{\pi}{2}\cdot$ In entsprechender Weise besitzt $\sin n_2 x$ $\frac{n_2}{2}-1$ bzw. $\frac{n_2-1}{2}$ Nullstellen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, je nachdem n_2 eine gerade bzw. ungerade Zahl darstellt, und im ersteren Falle ist noch $x=\frac{\pi}{2}$ eine Nullstelle.

Als Teilintervalle oder kürzer *Intervalle der zweiten Art* bezeichnen wir diejenigen, für welche $\sin n_2 x$ weder im Inneren noch in einem Endpunkte eine Nullstelle besitzt. Alle übrigen fassen wir als *Intervalle der ersten Art* zusammen. Ein Intervall, das weder an $x=0$ noch an $x=\frac{\pi}{2}$ hinanreicht, nennen wir ein inneres Intervall. Das äussere Intervall, welches $x=0$ als Endpunkt hat, gehört offenbar immer zur ersten Art. Man findet leicht die Antwort auf die Frage, wie viele Intervalle von jeder Art es in den verschiedenen Fällen gibt.

a) n_1 und n_2 sind beide ungerade Zahlen. Von den inneren Intervallen sind $\frac{n_2-1}{2}$ von der ersten Art und $\frac{n_1-n_2}{2}-1$ von der zweiten Art. Überdies existiert ein halbes äusseres Intervall der zweiten Art mit einem Endpunkte in $x=\frac{\pi}{2}\cdot$

b) Von den Zahlen n_1 und n_2 ist n_1 ungerade und n_2 gerade. Man hat $\frac{n_2}{2}-1$ innere Intervalle der ersten Art; hierzu kommt das halbe Intervall, das in $x=\frac{\pi}{2}$ einen Endpunkt hat. Von der zweiten Art hat man $\frac{n_1-n_2-1}{2}$ innere Intervalle.

c) Von den Zahlen n_1 und n_2 ist n_1 gerade und n_2 ungerade. Die Gesamtzahl der Intervalle von der ersten Art ist $\frac{n_2+1}{2}$ und diejenige von der zweiten Art $\frac{n_1-n_2-1}{2}\cdot$ Hierbei ist das Intervall mit dem Endpunkte $x=\frac{\pi}{2}$ von der ersten oder zweiten Art, je nachdem $n_1 \gtrless 2n_2$.

Wie man sieht, hat man für die doppelte Strecke $0 \leqq \varkappa < \pi$ stets $n_2 + 1$ vollständige Intervalle der ersten Art und $n_1 - n_2 - 1$ der zweiten Art. Für jedes Intervall der zweiten Art muss offenbar der Ausdruck

$$\frac{\sin n_2 \varkappa}{\sin n_1 \varkappa} \tag{60_1}$$

mindestens einen Extremalwert besitzen. Als Extremalbedingung erhält man zunächst

$$n_2 \cot n_2 \varkappa - n_1 \cot n_1 \varkappa = 0,$$

woraus sich weiter die Relation

$$(n_1 + n_2) \sin (n_1 - n_2) \varkappa - (n_1 - n_2) \sin (n_1 + n_2) \varkappa = 0 \tag{63}$$

herleiten lässt. Nun ist die Anzahl der Wurzeln von (63) für $0 < \varkappa < \pi$ dieselbe wie die Anzahl von Intervallen der zweiten Art oder $n_1 - n_2 - 1$. Durch die Minimalwerte des Ausdruckes (60) in diesen Intervallen werden also die Extremalwerte von (60_1) erschöpft.

23. Betreffs der Intervalle der ersten Art können wir jetzt behaupten, dass der Ausdruck (60_1) in einem solchen monoton variiert, und zwar in einem inneren Intervalle entweder von $+\infty$ bis $-\infty$ oder umgekehrt von $-\infty$ bis $+\infty$. Für das äussere Intervall mit dem Endpunkte $\varkappa = 0$ erstreckt sich der Variationsbereich nur von $\frac{n_2}{n_1}$ bis $+\infty$. Wenn n_2 eine gerade Zahl ist, hat (60_1) im Punkte $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ den Wert 0. Dieser Punkt bedeutet aber dann den Mittelpunkt eines vollständigen Intervalles, so dass der Verlauf eigentlich derselbe wie in einem inneren Intervalle ist.

Wir erhalten jetzt leicht eine Übersicht über die Änderungen in der Anzahl der wirklichen Doppelkurven bei wachsendem $\varkappa$ in einem Intervalle der ersten Art. Aus den Auseinandersetzungen in den vorhergehenden Nummern wissen wir, dass nur, wenn der Betrag (60) zunimmt, wirkliche Doppelkurven hinzukommen, und nur, wenn derselbe abnimmt, wirkliche Doppelkurven wegfallen können. Es ist uns auch bereits bekannt, dass keine solche Änderungen stattfinden können, wenn der fragliche Betrag entweder > 1 oder $< \frac{n_2}{n_1}$ ist, und wir haben die Maximalzahl von $n_1 - 1$ bzw. Minimalzahl von $n_2 - 1$ doppelten W-Kurven, je nachdem der Betrag > 1 bzw. $< \frac{n_2}{n_1}$ ist, wobei die Grundkurve mitgezählt wird. Für $n_2 = 1$ kann natürlich letzteres nicht gelten. Dann untersteigt auch der Betrag niemals $\frac{n_2}{n_1}$, weil es keine inneren Intervalle der ersten Art gibt, und die Minimalzahl von wirklichen Doppelkurven ist n_2. Die Werte des Betrags (60), welche Änderungen in der Anzahl der wirklichen Doppelkurven vermitteln, sind diejenigen, welche man bekommt, wenn man für $\varkappa$ die Lösungen von (63) einführt. Offenbar muss man durch sämtliche diese Werte passieren, wenn der Ausdruck (60) von ∞ bis 0 oder von 0 bis ∞ variiert. Dabei wird beim Durchgange von $\frac{n_2}{n_1}$ eine Doppelkurve gewonnen oder verloren; dasselbe gilt für ungerade Zahlen n_1 und n_2, wenn der Betrag (60) durch 1 passiert. Beim Durchgange der übrigen Werte werden aber zwei wirkliche Doppelkurven gewonnen oder verloren; die Anzahl der letzteren Werte ist nach der 20. Nummer $\frac{n_1 - n_2}{2} - 1$ bzw. $\frac{n_1 - n_2 - 1}{2}$, je nachdem die Zahlen n_1 und n_2 beide ungerade oder eine von denselben gerade ist. Hieraus ist ersichtlich, dass, *wenn zunächst vom ersten Intervalle abgesehen wird, in der ersten Hälfte jedes Intervalles der ersten Art* $n_1 - n_2$ *wirkliche Doppelkurven verloren werden, und dass in der zweiten Hälfte eben dieselbe Anzahl wieder gewonnen wird. Das erste Intervall, wo man für* $\varkappa \to 0$ *mit der abwickelbaren Fläche anfängt, welche die Grundkurve als Kuspidalkurve hat, wird in der fraglichen Hinsicht nicht in zwei Hälften aufgeteilt. Es werden in diesem Intervalle* $n_1 - n_2 - 1$ *wirkliche Doppelkurven gewonnen.*

Bei dem besonderen Falle $n_2 = n_1 - 1$ gibt es keine Intervalle der zweiten Art, und unter den drei Arten von Übergangskurven treten nur Kuspidalkurven aber keine Berührungsdoppelkurven oder Berührungsleitlinien auf. Für $n_2 = n_1 - 2$ hat man sowohl Kuspidalkurven als Berührungsleitlinien aber keine Berührungsdoppelkurven. Von der zweiten Art ist nur das halbe Intervall mit dem Endpunkte $\varkappa = \frac{\pi}{2}$. Da (60) in diesem halben Intervall nur von ∞ bis 1 heruntergeht, so gilt die Maximalzahl von $n_1 - 1$ wirklichen Doppelkurven.

In einem Intervalle der zweiten Art hat der Betrag (60) ein Minimum, welches für eine von Null verschiedene Lösung der Gleichung (63) erreicht wird.

In jedem Intervalle der zweiten Art liegt also eine Lösung dieser Gleichung; dagegen liegt, wenn man von $\varkappa = 0$ absieht, keine Lösung in den Intervallen erster Art. Für dieses Minimum hat die Regelfläche *die Grundkurve* als Berührungsdoppelkurve. Hierbei gelten jedoch besondere Verhältnisse für die Lösung $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ (oder $k = -1$), welche man erhält, wenn n_1 und n_2 ungerade Zahlen sind, indem man für $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ eine doppelt überdeckte Regelfläche bekommt; da das Minimum von (60) dann 1 ist, so hat die Regelfläche sonst im Intervalle die Maximalzahl von $n_1 - 1$ wirklichen Doppelkurven.

Wir betrachten jetzt näher ein Intervall der zweiten Art, für welches das Minimum < 1 ist. Die Werte des Betrags (60), für welche die Regelfläche eine Berührungsdoppelkurve bekommt, sind dieselben wie in einem Intervalle der ersten Art. *Es werden nur diejenigen von diesen Beträgen, welche das Minimum untersteigen, nicht erreicht. Für solche Beträge aber, welche grösser als das Minimum sind, bekommt man je zwei Regelflächen mit einer Berührungsdoppelkurve, nämlich eine bei fallendem Betrage und die andere bei steigendem Betrage. Insbesondere gilt es, wenn n_1 und n_2 beide ungerade sind, dass man in jedem solchen Intervalle zwei Regelflächen mit einer Berührungsleitlinie bekommt.* In der arithmetischen Reihe (66) beziehen sich die einzelnen Glieder auf die verschiedenen Beträge (60), zu denen Berührungsdoppelkurven gehören. Die Differenz 2 hat dann ihre Erklärung darin, dass jeder folgende Betrag in einem neuen Intervalle der zweiten Art erreicht wird.

Wenn man die Äquivalenz von (62) und (63) berücksichtigt, so ersieht man nach der Schlussweise am Ende der 17. Nummer, dass man für den Betrag (60) eine wachsende Folge erhält, indem man die Lösungen von (63) nach steigenden Beträgen $|\sin n_2 \varkappa|$ einführt. Diese Bemerkung können wir mit den obigen Auseinandersetzungen über die Eigenschaften der assoziierten Regelflächen in den verschiedenen Intervallen der zweiten Art zusammenstellen. Wir betrachten besonders das Beispiel $n_2 = 1$. Die Intervalle sind dann, wenn man das erste ausnimmt, sämtlich von der zweiten Art, und für die zugehörige Lösung von (63) ist der Ausdruck (60) grösser in einem folgenden Intervalle als in einem vorhergehenden. Die Anzahl der assoziierten Regelflächen mit einer Berührungsdoppelkurve wird also vermindert, je länger man in den Intervallen fortschreitet.

§ 4.

Quadratische *W*-Kongruenzen.

24. Hat man ein System von W-Kurven, welche sämtlich derselben eingliedrigen projectiven Gruppe angehören und eine Fläche erfüllen, so bezeichnen wir die Kongruenz, welche von den Tangenten der W-Kurven erzeugt wird, als eine *W-Kongruenz*. Die Fläche selbst nennen wir eine *W-Fläche*. Offenbar geht jede W-Fläche bei den Operationen der zugehörigen eingliedrigen Gruppe in sich über. In den folgenden Entwicklungen wollen wir hauptsächlich solche W-Flächen in Betracht ziehen, welche eine zweigliedrige Gruppe gestatten, bei der das System der W-Kurven invariant wird, die einzelnen W-Kurven aber in einander übergehen. Beachtet man die verschiedenen eingliedrigen Untergruppen der zweigliedrigen Gruppe, so versteht man, wie derartige W-Flächen in der obigen Weise durch verschiedene Systeme von W-Kurven erzeugt werden können. Dementsprechend lässt sich der W-Fläche ein ∞^1-System von W-Kongruenzen zuordnen, und der Komplex, welcher durch die Tangenten der W-Fläche erzeugt wird, besitzt die Eigenschaft, dass derselbe in ein System von W-Kongruenzen zerlegt werden kann.[1]

Aus einer W-Kongruenz lassen sich unmittelbar andere W-Kongruenzen herleiten. Man braucht nämlich hierzu bloss die abwickelbaren Flächen der zugehörigen W-Kurven durch die assoziierten Regelflächen bei einem beliebigen Parameter k zu erzetzen. Man erhält ja dann stets eine neue Kongruenz, welche die Operationen der eingliedrigen Gruppe zulässt, und die W-Fläche findet man in der Brennfläche dieser Kongruenz. Die Tangenten der auf dieser Fläche gelegenen W-Kurven erzeugen die W-Kongruenz.

Geht man von einer W-Fläche aus, so ist nicht zu erwarten, dass dieselbe die vollständige Brennfläche der zugehörigen W-Kongruenz bedeutet. Hierfür hat man ja die Bedingung, dass die W-Fläche sich aus den W-Kurven nicht nur als Ort der Punkte sondern auch als Enveloppe der Schmiegungsebenen erzeugen lässt. Im allgemeinen erhält man aber als Enveloppe einen anderen Teil der Brennfläche. *Es lässt sich ein besonderer Fall angeben, wo diese beiden Brennflächen sich in eine doppelte Brennfläche vereinigt haben. Das charakteris-*

---

[1] *Beide* Systeme von Kurven, welche einer solchen Kongruenz angehören, sind W-Kurven.

tische für diesen Fall besteht darin, dass die W-Kurven ein System von asymptotischen Kurven der W-Fläche bedeuten.[1]

25. Wir betrachten zunächst den Fall, wo als W-Fläche die Fläche 2-Grades ($= F_2$)

$$xw - yz = 0 \tag{71}$$

auftritt. Auf dieser F_2 liegt, bei beliebigem Verhältniss von $\frac{n_2}{n_1}$, das System der W-Kurven

$$x : y : z : w = ab\, t^{n_1+n_2} : a t^{n_1} : b t^{n_2} : 1\,, \tag{72}$$

welche offenbar die ganze Fläche erfüllen und zu derselben eingliedrigen Gruppe gehören.

In dieser Nummer setzen wir voraus, dass wir in (71) eine reelle Darstellung der F_2 haben. Zuerst betrachten wir den Fall von algebraischen W-Kurven. Wir können dann n_2 und n_1 ganz und teilerfremd mit $0 < n_2 < n_1$ annehmen. Unter den Zahlen n_1, $n_1 + n_2$ und n_2 ist immer eine und nur eine gerade. Diesen Fällen entsprechend gehört die W-Kurve zu den Typen 1, 2, 3 der 4. Nummer. Da man für t über einen Proportionalitätsfaktor verfügt, so ist es in (72) erlaubt den Koeffizienten für das Glied mit dem geraden Exponenten entweder $= +1$ oder -1 zu schreiben. Je nachdem das eine oder andere von diesen Zeichen gilt, zerfällt das System (72) in zwei besondere Scharen. Man sieht leicht, dass durch die Koordinatenebenen aus der F_2 ein Vierseit ausgeschnitten wird, durch welches die Fläche in vier verschiedene Bereiche zerteilt wird. Die eine Schar von W-Kurven erfüllt zwei von diesen Bereichen und die andere die beiden übrigen. Nun lassen sich vier Bereiche in drei verschiedenen Weisen in zwei Paare von je zwei zerlegen, und diesen drei Möglichkeiten entsprechen offenbar die drei Typen von W-Kurven.

Als Repräsentanten des Systems (72) nehmen wir die Kurve, für welche man $a = b = 1$ hat. Suchen wir jetzt die Schmiegungsebene dieser Kurve, so ergibt sich die Gleichung

$$(n_1 - n_2)\,x - (n_1 + n_2)\,t^{n_2}\,y + (n_1 + n_2)\,t^{n_1}\,z - (n - n_2)\,t^{n_1+n_2}\,w = 0. \tag{73}$$

---

[1] In anderen Fällen kann die Schmiegungsebene die W-Fläche in einem vom Ausgangspunkte verschiedenen Punkte berühren.

Schreibt man die Zwischenform in der Gestalt

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega w,$$

so findet man, dass die Ebene (73) immer die Fläche 2. Klasse

$$(n_1 + n_2)^2 \xi\omega - (n_1 - n_2)^2 \eta\zeta = 0$$

berührt. In Punktkoordinaten bekommt man für diese Fläche die Gleichung

$$(74) \qquad (n_1 - n_2)^2 xw - (n_1 + n_2)^2 yz = 0.$$

Dieses Resultat lässt sich unmittelbar auf das ganze Kurvensystem (72) überführen.

Die Tangenten des Systems (72) *erzeugen mithin eine Kongruenz, für welche die beiden Flächen 2. Grades* (71) *und* (74) *die Brennflächen darstellen. Vertauscht man in* (72) y *und* z, *so bekommt man offenbar eine zweite Kongruenz mit denselben Brennflächen.* Die so erhaltenen W-Kongruenzen sind in der Litteratur unter dem Namen von HIRST*schen Kongruenzen* wohlbekannt.

Es handelt sich hier allgemeiner um solche Paare von W-Kongruenzen, für welche irgend zwei Flächen des Büschels

$$(75) \qquad xw - \lambda yz = 0$$

die Bedeutung von Brennflächen haben. Wir können also zwei Flächen (75) mit beliebigen Parametern λ_1 und λ_2 als Brennflächen auswählen. Für die charakteristische Konstante $\frac{n_2}{n_1} = \nu$ der zugehörigen Systeme von W-Kurven erhält man dann durch Nebeneinanderstellung von (71) und (74) die Bedingung

$$(76) \qquad \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu}\right)^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = L,$$

wobei wir zunächst λ_1 und λ_2 reell und $\lambda_1 > \lambda_2$ annehmen wollen. *Aus* (76) *ersieht man, dass für algebraische W-Kurven L das Quadrat einer rationalen Zahl sein muss.* Der Fall $L < 1$ lässt sich auf $L > 1$ zurückführen, indem man die Rollen der Glieder xw und yz vertauscht. Die beiden singulären Stellen der W-Kurven, welche den Parameterwerten $t = 0, \infty$ entsprechen, liegen dann in den beiden anderen Ecken des Vierseits, also in $x = y = w = 0$ und $x = z = w = 0$.

Dabei werden auch die Rollen der beiden Brennflächen vertauscht. Wenn man z. B. eine W-Kongruenz mit den Brennflächen (71) und (74) betrachtet, so enthält dieselbe noch ein zweites System von abwickelbaren Flächen. Zum Unterschied vom Systeme (72) ist es jetzt (74), auf welcher die Kuspidalkurven liegen, sowie (71), die von den Schmiegungsebenen berührt wird, und die singulären Punkte liegen in den beiden anderen Ecken des windschiefen Vierseits.

Im allgemeinen bekommt man in (76) irrationale Lösungen ν, und die entsprechenden *transzendenten* Kurven sind *reell* nur für positive t-Werte definiert. Eigentlich enthält eine reelle algebraische W-Kurve zwei Bahnkurven, nämlich eine für positive und die andere für negative t-Werte. Für die transzendenten W-Kurven ergibt sich aber zunächst keine solche unmittelbare Zusammenpaarung von je zwei Bahnkurven. Im ausgezeichneten Falle, um welchen es sich hier handelt, lässt sich eine solche in drei verschiedenen Weisen ausführen, wodurch die Haupttypen (A_1), (A_2) und (A_3) der 5. Nummer herauskommen, und für transzendente W-Kurven hat man keinen Grund eine von diesen Typen vor den beiden anderen zu bevorzugen. Wenn wir in der nächsten Nummer die HIRSTschen Kongruenzen vermittelst assoziierter Regelflächen erzeugen wollen, so haben diese Erweiterungen der transzendenten W-Kurven auf negative t-Werte ihre Bedeutung.

26. Unter den Verfassern, welche sich mit den HIRSTschen Kongruenzen beschäftigt haben, sei in erster Instanz H. G. ZEUTHEN genannt.[1] Man hat drei verschiedene Erzeugungsweisen dieser Kongruenzen in Betracht gezogen. Eine von diesen kennen wir bereits, nämlich durch die gemeinsamen Tangenten zweier F_2, welche einander in einem windschiefen Vierseit schneiden. Die beiden Kongruenzen, welche man in solcher Weise bekommt, gehören je zu zwei linearen Komplexen. Man kann also die Kongruenz auch als Schnitt des Tangentenkomplexes einer F_2 mit einem linearen Komplexe erhalten. Endlich lässt sich die Kongruenz durch die Verbindungsgeraden der bei einer Kollineation einander entsprechenden Punkte einer F_2 erzeugen, wenn die Kollineation jede der beiden Geradenscharen der F_2 in sich überführt. Unseres Wissens ist bei letzterer Methode früher keine Rede von den die F_2 erfüllenden Bahnkurven der eingliedrigen Gruppen gewesen, zu welcher die Kollineation gehört. Es ist

[1] Man sehe seine Arbeit »*Theorie des figures projectives sur une surface du second ordre*», Math. Ann. 26 (1886), p. 247—274. Man vergleiche auch R. STURM, »*Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*» II (1892), p. 208—213.

aber eine unmittelbar evidente Tatsache, dass bei dieser dritten Methode die Kongruenz durch assoziierte Regelflächen eben dieser Bahnkurven erzeugt wird.

Bei der Kollineation gehen von jeder Regelschar der F_2 je zwei Erzeugende in sich über. Legen wir diese Erzeugenden zu Grunde, so können wir die Gleichung der F_2 in der Gestalt (71) schreiben. Man sieht dann sogleich ein, dass bei der Kollineation sogar jede Fläche des Büschels (75) in sich übergeführt werden muss. Es gibt allgemeiner eine zweigliedrige projektive Gruppe

$$x' : y' : z' : w' = \alpha\beta x : \alpha y : \beta z : w, \tag{77}$$

bei welcher die Flächen des Büschels (75) invariant bleiben. Dieselbe enthält ∞^1 eingliedrige Untergruppen. In der Tat bekommt man zu jedem die Bahnkurven charakterisierenden Verhältniss $\frac{n_2}{n_1}$ eine solche. Da die Gruppe (77) für die Punkte jeder Fläche (75) transitiv ist, so muss dieselbe die auf einer solchen Fläche gelegenen Bahnkurven einer beliebigen eingliedrigen Untergruppe in einander transitiv überführen. Dabei gehen offenbar auch die zu einem beliebigen Parameter k gehörenden assoziierten Regelflächen in einander über. Wir verstehen jetzt, dass der Inbegriff dieser Regelflächen eine Kongruenz bedeutet, deren Linien bei der Gruppe (77) transitiv in einander übergehen. Von einer besonderen Linie dieser Kongruenz müssen nun zwei Flächen des Büschels (75) berührt werden. Auf Grund der soeben besprochenen Transitivitätseigenschaften schliessen wir hieraus unmittelbar, dass *sämtliche Linien der Kongruenz dieselben zwei Flächen des Büschels* (75) *berühren müssen, durch welche Eigenschaft die Kongruenz als eine* Hirst*sche Kongruenz charakterisiert wird.* Offenbar geschieht dabei die Berührung nach den Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe, indem die Berührungspunkte der Erzeugenden einer assoziierten Regelfläche auf derselben Bahnkurve liegen. Im allgemeinen schneidet eine assoziierte Regelfläche eine Fläche des Büschels (75) nach je zwei Bahnkurven. Enthält aber die Fläche eine Doppelkurve der Regelfläche, so vereinigen sich beide Bahnkurven in diese, indem dann jeder Schnittpunkt sowohl den Anfangspunkt als den Endpunkt einer Sehne bedeutet.

Wir betrachten jetzt eine beliebige HIRSTsche Kongruenz, welche die Gruppe (77) zulässt. Insbesondere wollen wir die Sehnen in Betracht nehmen, welche die Linien dieser Kongruenz aus einer beliebigen Fläche des Büschels (75) ausschneiden. Es gibt eine bestimmte Operation (77), welche den Anfangspunkt in den Endpunkt jeder solchen Sehne überführt, und diese Operation gehört zu einer gewissen eingliedrigen Gruppe. Es ist jetzt evident, dass *die Kongruenz sich in Regelflächen zerlegen lässt, welche in bezug auf diejenigen Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe, welche die F_2 erfüllen, assoziiert sind. Nimmt man umgekehrt diejenigen Bahnkurven einer beliebigen eingliedrigen Untergruppe von* (77), *welche eine beliebige Fläche* (75) *erfüllen, so erzeugen für einen beliebigen gegebenen Parameter k die in bezug auf diese Bahnkurven assoziierten Regelflächen eine Hirstsche Kongruenz. Eine zweite Hirstsche Kongruenz erhält man hieraus, wenn man y und z, d. h. die Rollen der Regelscharen der F_2, vertauscht.*

Wir fixieren die auf der Fläche (71) gelegene W-Kurve (72) mit $a = b = 1$. Wir wollen die beiden Flächen des Büschels (75) bestimmen, welche durch die Erzeugenden der in bezug auf diese Kurve assoziierten Regelfläche mit dem Parameter k berührt werden. Wir brauchen die Berechnung nur für die Verbindungslinie der Kurvpunkte mit den Parametern $t = 1$ und $t = k$ auszuführen. Für die Punkte dieser Linie haben wir

$$x : y : z : w = \mu + k^{n_1+n_2} : \mu + k^{n_1} : \mu + k^{n_2} : \mu + 1,$$

wo μ frei beweglich ist. Durch Einsetzung in (75) bekommen wir hieraus

$$(\mu^2 + k^{n_1+n_2})(1 - \lambda) + \mu(1 + k^{n_1+n_2} - \lambda(k^{n_1} + k^{n_2})) = 0. \tag{78}$$

Soll nun (78) eine doppelte Wurzel besitzen, so sieht man sogleich, dass diese nur $\mu = \pm k^{\frac{n_1+n_2}{2}}$ sein kann. Für die zugehörigen λ-Werte erhält man

$$\lambda_1, \lambda_2 = \left(\frac{1 \mp k^{\frac{n_1+n_2}{2}}}{k^{\frac{n_1}{2}} \mp k^{\frac{n_2}{2}}}\right)^2 = \frac{k^{\frac{n_1+n_2}{2}} + k^{\frac{-(n_1+n_2)}{2}} \mp 2}{k^{\frac{n_1-n_2}{2}} + k^{\frac{-(n_1-n_2)}{2}} \mp 2}. \tag{79}$$

Wie nach der vorigen Nummer zu erwarten ist, bekommt man für $k \to 1$ $\lambda_2 \to 1$ und $\lambda_1 \to \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2}\right)^2$. Dieses Resultat bleibt gültig, wenn wir als W-Kurve eine beliebige Kurve des Systems (72) wählen. In dieser Weise bekommen wir ein System von Regelflächen, durch welche eine Hirstsche Kongruenz mit den Brennflächen (79) erzeugt wird. Die andere Hirstsche Kongruenz mit denselben Brennflächen erhält man hieraus, indem man in (72) y mit z vertauscht.

Benutzt man für die Koordinaten einer geraden Linie die gewöhnlichen Bezeichnungen

$$p_{14} = x_1 w_2 - x_2 w_1; \; p_{23} = y_1 z_2 - y_2 z_1, \ldots,$$

so bekommt man für die linearen Komplexe, welche die hier in Rede stehenden HIRSTschen Kongruenzen enthalten, die Gleichungen

$$(80) \qquad (k^{n_1} - k^{n_2}) p_{14} \mp (k^{n_1+n_2} - 1) p_{23} = 0.$$

Wie man sieht, liegen diese beiden Komplexe in Involution.

27. Nach einer Bemerkung von TH. REYE[1] hat man in *reeller* Hinsicht zwischen vier Fällen von F_2-Büscheln mit einem gemeinsamen windschiefen Vierseit und also auch *zwischen vier Arten von* HIRST*schen Kongruenzen zu unterscheiden.* Man hat nämlich erstens drei Fälle, wo ein Flächenbüschel mit reellen Erzeugendenscharen ein gemeinsames windschiefes Vierseit besitzen kann. Die beiden Paare gegenüberliegende Seiten können ja erstens beide reell, zweitens beide konjugiert imaginär, und drittens kann ein Paar reell und das andere konjugiert imaginär sein. Der vierte Fall gehört zu Flächen ohne reelle Geradenscharen; die Flächen des Büschels berühren einander in zwei reellen Punkten, und das Vierseit besteht aus zwei Paaren konjugierter Linien, welche in diesen Punkten einander treffen. Wir wollen hier sogleich die Vervollständigung machen, dass *die Fälle* 1 *und* 3 *in zwei Unterfälle zu zerlegen sind, indem bei reellen Linien der Kongruenz die Brennflächen auch konjugiert imaginär sein können.*

Den ersten Fall erhalten wir, wenn wir in (75) x, y, z und w als reelle Grössen voraussetzen. Für reelle W-Kurven ist in diesem Falle $\frac{n_2}{n_1}$ eine reelle Zahl. Hat man entweder $k > 0$ oder $|k| = 1$, so findet man, dass in (79) λ_1 und λ_2 stets reell und > 0 sein müssen. Für $k < 0$ denken wir uns zuerst n_1 und n_2 als teilerfremde ganze Zahlen. Man findet dann, dass λ_1 und λ_2 reell oder konjugiert imaginär sein müssen, je nachdem n_1 und n_2 beide ungerade sind, oder eine von denselben gerade ist. Diese Eigenschaft können wir sofort auf die verallgemeinerten reellen ausgezeichneten W-Kurven überführen. Bei Benutzung der Bezeichnungen der 5. Nummer können wir also behaupten, dass *für $k < 0$ die Brennflächen nur für die Hauptart* (A_2) *reell, für* (A_1) *und* (A_3) *aber konjugiert imaginär sind.* Man entnimmt hieraus leicht, dass, wenn die abwickelbaren Flächen einer HIRSTschen Kongruenz zur Hauptart (A_2) gehören, die Kon-

[1] »WEBER-*Festschrift*» (Leipzig, 1912), p. 283.

gruenz sich in assoziierte Regelflächen für sowohl $k > 0$ als $k < 0$ zerlegen lässt, dass aber bei (A_1) und (A_3) eine solche Zerlegung nur für $k > 0$ ausführbar ist.[1] Gelingt andererseits die Zerlegung einer Hirstschen Kongruenz in Regelflächen, welche für $k < 0$ in bezug auf ein System von W-Kurven, die entweder zu (A_1) oder (A_3) gehören, assoziiert sind, so ist eine Zerlegung der Kongruenz in assoziierte Regelflächen für $k > 0$ nicht möglich.

Wenn die Brennflächen konjugiert imaginär sind, so müssen die Linien der Kongruenz jede Fläche des Büschels (75) in zwei getrennten reellen Punkten schneiden. Sind aber in (79) λ_1 und λ_2 reell, so hat man keine reellen Schnittpunkte für das eine Intervall zwischen λ_1 und λ_2. Dieses Intervall kann weder $\lambda = 0$ noch $\lambda = \infty$ enthalten, da die F_2 für diese λ-Werte in Ebenenpaare degenerieren, welche reelle Schnittpunkte mit den Linien besitzen müssen. Hieraus hat man die Folgerung, dass im Falle von reellen λ_1 und λ_2 die Zeichen übereinstimmen müssen. Das Intervall zwischen λ_1 und λ_2, für welches die Flächen von den Linien der Kongruenz in reellen Punkten nicht getroffen werden, bezeichnen wir als das innere Intervall. Für $k > 0$ hat man sowohl λ_1 als $\lambda_2 > 1$, so dass die Fläche (75) für $\lambda = 1$ im äusseren Intervalle mit reellen Schnittpunkten liegt. Dies war auch zu erwarten, da wir ja bei der Erzeugung der Kongruenz von assoziierten Regelflächen in bezug auf W-Kurven, welche auf dieser F_2 liegen, ausgegangen sind. Betrachten wir andererseits den Fall $k < 0$ bei der Hauptart (A_2), so gilt in (79) für λ_1 und λ_2 das Zeichen $-$. Es genügt, wenn wir den Beweis für den Fall mit ganzzahligen Exponenten ausführen. Man hat dann n_1 und n_2 als ungerade Zahlen zu nehmen, woraus folgt, dass unter den Zahlen $\frac{n_1 + n_2}{2}$ und $\frac{n_1 - n_2}{2}$ eine gerade und die andere ungerade sein muss. In (79) bekommen mithin für sowohl λ_1 als λ_2 der Zähler und der Nenner verschiedene Zeichen. Für $|k| = 1$ muss dagegen die Fläche (75) mit $\lambda = 1$ im inneren Intervalle liegen, da dieselbe in diesem Falle keine reellen Schnittpunkte mit den Linien der Kongruenz hat. Setzt man in (79) $k = e^{2\pi i \varkappa}$, so ergibt sich

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1 \mp \cos \pi\varkappa (n_1 + n_2)}{1 \mp \cos \pi\varkappa (n_1 - n_2)}.$$

[1] Man beachte hier, dass, da man für die verallgemeinerten W-Kurven die Hälften für $t > 0$ und $t < 0$ in drei verschiedenen Weisen zusammenpaaren kann, für dieselbe Hirstsche Kongruenz die abwickelbaren Flächen zu einer beliebigen der Klassen (A_1), (A_2) oder (A_3) gehören können.

Man erhält hieraus

$$(81) \qquad \lambda_1 = \frac{\sin^2 \frac{\pi \varkappa (n_1 + n_2)}{2}}{\sin^2 \frac{\pi \varkappa (n_1 - n_2)}{2}}; \quad \lambda_2 = \frac{\cos^2 \frac{\pi \varkappa (n_1 + n_2)}{2}}{\cos^2 \frac{\pi \varkappa (n_1 - n_2)}{2}}.$$

Aus der Darstellung (81) kann man unmittelbar den gewünschten Schluss ziehen, dass unter den Grössen λ_1 und λ_2 eine > 1 und die andere < 1 sein muss.

Aus den obigen Auseinandersetzungen lässt sich schliessen, dass es keine Hirstsche Kongruenz mit reellen Linien gibt, für welche zwei Flächen (75) mit verschiedenen Zeichen für λ die Brennflächen darstellen. Dies hat seine Erklärung darin, dass für ein solches Flächenpaar die Berührungsebene in einem ausserhalb des gemeinsamen Vierseits gelegenen Punkte der einen Fläche die andere Fläche immer in einem Kegelschnitte schneidet, für welchen der *innere* Bereich den Berührungspunkt der anderen Fläche enthält. Es lässt sich diese Eigenschaft etwa am Beispiele der beiden Flächen

$$x^2 - 1 - y^2 + z^2 = 0; \quad x^2 - 1 + y^2 - z^2 = 0$$

studieren.

28. In den Relationen (4), (5), (6) und (7) der 3. Nummer haben wir Darstellungen für W-Kurven, welche den vier reellen Fällen entsprechen, die zu Anfang der vorigen Nummer hervorgehoben wurden. Insbesondere gehört (7) zu dem Falle, wo zwei gegenüberliegende Seiten des windschiefen Vierseits reell und die beiden übrigen konjugiert imaginär sind. Durch die beiden reellen Seiten wird jede F_2 des Büschels (75) in zwei verschiedene Bereiche zerlegt, ebenso wie man vier Bereiche erhält, wenn sämtliche vier Seiten reell sind. In den noch übrigen beiden Fällen dagegen treffen die F_2 des Büschels einander entweder gar nicht oder dieselben berühren einander in zwei Punkten, so dass eine Zerlegung der F_2 in verschiedene Bereiche nicht stattfindet; die zu einer eingliedrigen reellen projektiven Gruppe gehörenden Bahnkurven, welche die F_2 erfüllen, bilden dementsprechend ein einziges zusammenhängendes System. Anders in den beiden ersteren Fällen, wo man für jeden besonderen Bereich ein System von Bahnkurven hat. Freilich haben wir jedoch im ersten Falle nach dem Beispiele der überall dicht auftretenden algebraischen W-Kurven die Existenz der Bahnkurven im allgemeinen auf zwei verschiedene solche Bereiche erstreckt. Die Gleichung (7) bedeutet aber nie eine algebraische Kurve.

Die Gleichung einer beliebigen W-Kurve (7) können wir in die Gestalt

$$(7_1) \qquad x : y : z : w = t^{\alpha} \cos(\log t) : t^{\alpha} \sin(\log t) : t^{-\alpha} \cos(\log t) : t^{-\alpha} \sin(\log t)$$

überführen. Diese Kurve liegt auf der F_2

$$xw - yz = 0.$$

Wollen wir in diesem Falle für das F_2-Büschel eine Gleichung in reeller Gestalt geben, so erhalten wir leicht hierfür

$$(75_1) \qquad xw - yz - \lambda(xz + yw) = 0.$$

Wie vorhin hervorgehoben worden ist, lässt sich eine Hirstsche Kongruenz durch eine Projektivität bestimmen, welche die Flächen eines F_2-Büschels in sich überführt. Das Büschel hat dabei ein gemeinsames windschiefes Vierseit, und für die festlegung der Kongruenz braucht man nur noch ein Paar entsprechender Punkte bei der Projektivität (d. h. eine Linie der Kongruenz) zu kennen. Wenn diese zwei Punkte in angrenzenden Bereichen der F_2 liegen, welche von einander durch reelle Linien des windschiefen Vierseits abgegrenzt werden, so sieht man leicht, dass auf der Verbindungslinie durch die Flächen des Büschels eine elliptische Involution ausgeschnitten wird. Die beiden Flächen des Büschels, welche die Linie berührt, sind somit konjugiert imaginär. In dieser einfachen Weise lässt sich beweisen, *dass man in den beiden reellen Fällen, wo zwei oder vier reelle Linien des windschiefen Vierseits existieren, Unterfälle mit konjugiert imaginären Brennflächen hat.*

Eine neue Methode, um eine Hirstsche Kongruenz in Regelflächen zu zerlegen, erhält man folgendermassen. Man nehme zu einer beliebigen eingliedrigen Untergruppe von (77) die auf einer F_2 des Büschels (75) gelegenen Bahnkurven. Der aus dieser F_2 von einer Linie der Kongruenz ausgeschnittene Anfangspunkt wird durch eine gewisse in (77) eingehende Projektivität jedesmal in den Endpunkt übergeführt. Diese Projektivität vertauscht die oben besprochenen Bahnkurven unter einander. Die Zerfällung der Kongruenz in Regelflächen lässt sich dann in solcher Weise ausführen, dass als Leitkurven der Regelflächen je zwei einander entsprechende Bahnkurven auftreten. Da die eingliedrige Untergruppe beliebig war, so sieht man wohl in dieser Weise am klarsten, in wie mannigfaltiger Weise die Zerfällung der Kongruenz in Regelflächen gelingt.

29. Nach R. STURM ist »die Brennfläche jeder reell-strahligen Kongruenz (2, 2) reell-punktig».[1] Diese Behauptung steht in Widerspruch mit unserem Resultate, dass es HIRSTsche Kongruenzen mit reellen Linien und nullteiliger Brennfläche gibt. In dem Beweise, den STURM für seinen Satz gegeben hat, entdeckt man aber leicht eine Lücke. Die Methode von STURM zielt zunächst darauf die quadratische Kongruenz auf eine Fläche 3. Ordnung abzubilden. Es gilt dies die bekannte Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum, vermittelst welcher insbesondere S. LIE höchst merkwürdige Resultate gewonnen hat. Eine quadratische Kongruenz ohne singuläre Linien gehört nämlich stets zu einem linearen Komplexe, und die obige Abbildung derselben auf eine F_3 lässt sich immer reell ausführen, wenn die Kongruenz reelle Linien enthält. Ein auf der F_3 gelegener Kegelschnitt spielt bei dieser Abbildung eine fundamentale Rolle. Die Brennfläche der quadratischen Kongruenz wird nämlich in die Kongruenz übergeführt, welche durch die von diesem Kegelschnitt ausgehenden und die F_3 anderwärts berührenden geraden Linien erzeugt wird. Nach STURM soll letztere Kongruenz immer reelle Linien enthalten. Wird dies zugegeben, so muss freilich auch die Brennfläche der quadratischen Kongruenz reell sein. Die fragliche Annahme begründet nun STURM in solcher Weise, dass er darzulegen sucht, dass durch einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes immer eine Ebene gelegt werden kann, welche die F_3 in einer einzügigen C_3 schneidet; dies wäre auch hinreichend, weil bekanntlich von jedem reellen Punkte einer einzügigen C_3 stets zwei anderwärts berührende reelle Tangenten ausgehen. Nun gibt es aber eine zweiteilige Gattung von kubischen Flächen, welche durch drei reelle und zwölf Paare von punktierten geraden Linien charakterisiert wird. Es ist nämlich zu dem immer vorkommenden unpaaren Teile der F_3 ein neuer paarer Teil hinzugekommen, der von eine geraden Linie nur in 0 oder 2 Punkten getroffen werden kann. Die reellen Kegelschnittsysteme werden aus der F_3 durch Ebenenbüschel ausgeschnitten, welche als Achse eine von den drei reellen Linien der F_3 haben. Die in solcher Weise erhaltenen Kegelschnitte können entweder auf dem unpaaren oder *paaren* Teile der F_3 liegen. *Wenn letzteres für den fundamentalen Kegelschnitt eintrifft, so ist die F_3 die Abbildung einer quadratischen Kongruenz mit reellen Linien, deren Brennfläche nullteilig ist.*

Für die HIRSTschen Kongruenzen sind die vier Doppelstrahlen des windschiefen Vierseits charakteristisch. Diese Strahlen werden bei der obigen Ab-

[1] *»Liniengeometrie»* II, p. 194. Doch gibt es, wie wir später gefunden haben, in *»Liniengeometrie»* III, p. 312 eine Berichtigung der obigen Aussage.

bildung in Knotenpunkte der F_3 übergeführt. In den beiden Fällen, wo die vier Knotenpunkte entweder sämtlich reell oder zwei reell und die beiden übrigen konjugiert imaginär sind, bezeichnet die F_3 den Übergang von einer zweiteiligen zu einer einteiligen kubischen Fläche, indem die F_3 zwei Teile enthält, welche nur in den reellen Knotenpunkten mit einander zusammenhängen. Liegt dann der fundamentale Kegelschnitt auf demjenigen von diesen Teilen, der vom paaren Typus ist, so haben wir das Bild einer HIRSTschen Kongruenz mit reellen Linien und nullteiliger Brennfläche. In diesem Zusammenhange erinnern wir daran, dass es nach RODENBERG *zwei Hauptfälle von zweiteiligen kubischen Flächen* gibt, indem entweder sämtliche Ebenen des SYLVESTERschen Pentaeders reell oder zwei unter denselben konjugiert imaginär sein können. Im ersten Falle gibt es einen stetigen Übergange zu einer F_3 mit vier reellen Knotenpunkten und im zweiten zu einer F_3 mit zwei reellen und zwei konjugiert imaginären Knotenpunkten.[1]

In seiner Aufzählung der verschiedenen reellen Typen der KUMMERschen Fläche, d. h. der Brennfläche einer quadratischen Kongruenz, hatte bereits K. ROHN unser obiges Resultat gefunden, dass die Brennfläche einer reell-strahligen Kongruenz nullteilig sein kann.[2] ROHN hat in der Tat zwei Typen nullteiliger KUMMERscher Flächen gefunden. Dieselben unterscheiden sich von einander durch die Eigenschaften der vier isolierten reellen Doppeltangenten, welche nach einem Satze von H. G. ZEUTHEN jeder ebene Querschnitt besitzen muss. Unter den sechszehn nach Kegelschnitten berührenden Ebenen können nämlich entweder vier oder keine reell sein. Im ersten Falle sind die vier isolierten Doppeltangenten Spuren von diesen Ebenen, und unter den sechs quadratischen Kongruenzen, welche die Fläche als Brennfläche haben, kann keine reell-strahlig sein. *Im zweiten Falle dagegen gehören die vier isolierten Doppeltangenten zu zwei reellstrahligen quadratischen Kongruenzen.*

30. Allgemeine Untersuchungen über *Schliessungssätze,* zu denen man bei den HIRSTschen Kongruenzen kommt, hat man von ZEUTHEN.[3] Hier wollen wir nur den speziellen Fall in Betracht nehmen, wo die Linien des geschlossenen Vielseits sukzessive aus einander durch dieselbe Projektivität hervorgehen. Die

[1] C. RODENBERG, »*Zur Classification der Flächen dritter Ordnung*», Math. Ann. 14, (1879), p. 60, 65.

[2] »*Die verschiedenen Gestalten der* KUMMER*schen Fläche*», Math. Ann. 18 (1881), p. 120.

[3] Man sehe ausser der bereits zitierten Arbeit (Math. Ann. 26) »*Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie*» (1914), p. 268.

Ecken sollen dementsprechend auf einer Fläche des Büschels (75) liegen und die Seiten zwei andere Flächen desselben Büschels berühren. Da $|k| = 1$ sein muss, so müssen, falls wir reelle Seiten der Polygone wünschen, die Bahnkurven zu dem besonderen Fall gehören, den wir im vorigen Abschnitt behandelt haben. Wünscht man die Gleichung in reeller Gestalt zu geben, so ist demnach (71) durch (48) zu ersetzen. Für das Büschel (75) erhält man also hier in reeller Schreibweise die Gleichung

$$(75_2) \qquad x^2 + w^2 - \lambda(y^2 + z^2) = 0.$$

Man sieht leicht, dass bei endlichen Schliessungssätzen n_1 und n_2 kommensurabel sein müssen. Wir können mithin n_1 und n_2 ganz und teilerfremd annehmen. Soll das Polygon r Seiten besitzen, so können wir $k = e^{\frac{2\pi i \varkappa_1}{r}}$ setzen, wo $\varkappa_1$ eine zu r teilerfremde ganze Zahl bedeutet. Liegen nun die Ecken des Polygons auf der Fläche (75_2) mit $\lambda = 1$, so erhält man unmittelbar aus (81) die beiden Flächen, welche von den Seiten berührt werden. Für $\varkappa = \frac{\varkappa_1}{r}$ ergibt sich hiernach

$$(81_1) \qquad \lambda_1 = \frac{\sin^2 \frac{\pi\varkappa_1(n_1 + n_2)}{2r}}{\sin^2 \frac{\pi\varkappa_1(n_1 - n_2)}{2r}}; \quad \lambda_2 = \frac{\cos^2 \frac{\pi\varkappa_1(n_1 + n_2)}{2r}}{\cos^2 \frac{\pi\varkappa_1(n_1 - n_2)}{2r}}.$$

Es lassen sich hier je nach den Möglichkeiten von gemeinsamen Teilern zwischen r und einer der Zahlen n_1, n_2, $n_1 + n_2$ und $n_1 - n_2$ mehrere Fälle unterscheiden. *Erstens* kann r Teiler von entweder n_1 oder n_2 sein. Man erhält dann $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Die Ecken eines Polygons liegen auf einer und derselben Erzeugenden der F_2, so dass man als Kanten Abschnitte dieser Erzeugenden bekommt. Nach dem Ende der 18. Nummer werden ja auch in diesem Falle die assoziierten Regelflächen auf die eine oder andere Regelschar der F_2 reduziert.

Es sei *zweitens* r ein Teiler von entweder $n_1 + n_2$ oder $n_1 - n_2$. Dabei sind zwei Möglichkeiten in Betracht zu nehmen, je nachdem $2r$ Teiler von $\varkappa_1(n_1 + n_2)$ bzw. $\varkappa_1(n_1 - n_2)$ ist oder nicht. Bei der ersten Möglichkeit ergibt sich $\lambda_1 = 0$ bzw. $\lambda_1 = \infty$ und bei der zweiten $\lambda_2 = 0$ bzw. $\lambda_2 = \infty$. Im Büschel (75_2) bedeutet nun $\lambda = 0$ die Gerade $x = w = 0$ und $\lambda = \infty$ die Gerade $y = z = 0$. *Eine von den Brennflächen ist also in eine Brennlinie übergegangen, und die Polygone liegen in den Ebenen durch die Brennlinie.* Dass die assoziierten Regelflächen, welche die

Kongruenz erzeugen, für $k^n = 1$ (n hier $= n_1 + n_2$) bzw. $k^{n_1-n_2} = 1$ die obigen Geraden als Leitlinien besitzen, wurde übrigens bereits in der 8. Nummer hervorgehoben. Für die andere Brennfläche bekommen wir eine endliche Anzahl von Möglichkeiten. Der Parameter λ für dieselbe wird ja aus (81_1) (als λ_1 oder λ_2) bestimmt. Man bekommt zweierlei Ausdrücke für die möglichen Zusammenstellungen von λ_1 und λ_2, nämlich

$$(82) \qquad 0, \frac{1}{\cos^2 \frac{h\pi}{r}}; \qquad \infty, \cos^2 \frac{h\pi}{r}.$$

Dabei soll die ganze Zahl h zu r prim sein. Für $r = 3$ gibt (82) die Lösungen

$$0, 4; \qquad \infty, \frac{1}{4}.$$

Ebenso findet man für $r = 4$

$$0, 2; \qquad \infty, \frac{1}{2}$$

und für $r = 6$

$$0, \frac{4}{3}; \qquad \infty, \frac{3}{4}.$$

Da die Ersetzung von h durch $r - h$ keine Änderung veranlasst, so erhält man in (82) $\frac{\varphi(r)}{2}$ verschiedene mögliche Werte für $\cos^2 \frac{h\pi}{r}$.

Drittens sei r Teiler von keiner der Zahlen $n_1, n_2, n_1 + n_2$ und $n_1 - n_2$. Die Kongruenz hat dann immer *zwei wirkliche Brennflächen*. Für $r = 3$ wird dieser Fall nicht vertreten, so dass also eine Brennfläche der Kongruenz immer in eine gerade Linie degenerieren muss. Für $r = 4$ hat man die Lösung, dass n_1 (bzw. n_2) ungerade und n_2 (bzw. n_1) durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist. Man findet hierzu

$$\lambda_1, \lambda_2 = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Für $r = 6$ hat man zunächst drei Möglichkeiten. Eine von den Zahlen n_1 und n_2 ist bei der ersten durch 3 und bei der zweiten durch 2 teilbar, die andere aber soll zu 6 prim sein. Bei der dritten Möglichkeit ist eine von diesen Zahlen durch 3 und die andere durch 2 teilbar. Für die Parameter λ_1, λ_2 der Brennflächen erhält man die Werte

$$1)\ 3,\ \frac{1}{3};\quad 2_1)\ 2(2 \pm \sqrt{3});\quad 2_2)\ \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2};\quad 3)\ 7 \pm 4\sqrt{3}.$$

Ist hier r eine Primzahl, so müssen sowohl n_1 als n_2 zu r prim sein. Für n_1 hat man dann die Wahl zwischen $r - 1$ Restklassen (mod r). Ist diese Wahl getroffen, so sind für n_2 nur noch $r - 3$ Restklassen zulässig, da die Kombinationen $n_1 \pm n_2 \equiv 0$ zu vermeiden sind. Vertauscht man nun n_1 mit n_2, oder ersetzt man n_1 und n_2 durch $r - n_1$ und $r - n_2$, so wird offenbar in (81_1) das Parameterpaar λ_1, λ_2 ungeändert. *In solcher Weise bekommt man, wenn r eine Primzahl ist,*

$$(83) \qquad \frac{(r-1)(r-3)}{4}$$

Flächenpaare im Büschel (75_2), welche die Brennflächen je zweier HIRSTschen *Kongruenzen darstellen, wobei die Linien der Kongruenzen sich in geschlossene r-Seite zerlegen, deren Ecken auf einer bestimmten Fläche des Büschels liegen.* Für den Fall, dass r keine Primzahl ist, hat man einen entsprechenden Satz, wenn man sich auf solche Vielseite beschränkt, für welche n_1 und n_2 zu r prim sind. Man hat dabei nur (83) durch

$$(83_1) \qquad \frac{\varphi(r)\,[\varphi(r) - 2]}{4}$$

zu ersetzen. Zum Schluss geben wir für $r = 5$ und $r = 8$ die beiden Paare von Lösungen λ_1, λ_2

$$r = 5:\quad 1)\ \frac{3 + \sqrt{5}}{2},\ \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2};\qquad 2)\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2},\ \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

$$r = 8:\quad 1)\ 2 \pm \sqrt{2};\qquad 2)\ \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Bei diesen Untersuchungen über geschlossene r-Seite in den HIRSTschen Kongruenzen hat es sich erwiesen, dass die W-Kurven, welche die Ecken enthalten, nicht völlig bestimmt sind, indem man n_1 und n_2 beliebig nehmen kann, falls nur gewisse Kongruenzbedingungen (mod r) erfüllt werden. In anderen Worten bedeutet dies, dass die eingliedrige Gruppe, welche die Projektivität von der Periode r als ein Element enthält, sich nicht eindeutig bestimmen lässt. Dies hängt damit zusammen, dass das gemeinsame Vierseit der Flächen (75_2), auf denen die Bahnkurven liegen sollen, aus zwei Paaren konjugiert imaginärer Linien besteht. Es gibt also keine Erzeugenden der F_2, welche für die Bahnkurven unübersteigbar sind. Eine gewisse Projektivität bestimmt auf einer F_2 zwei entsprechende Punkte, aber man erhält unbegrenzt viele diese Punkte verbindenden Bahnkurven, und die Verschiedenheit dieser Bahnkurven lässt sich auf Umläufe nach dem einen oder anderen Erzeugendensysteme reduzieren.

31. Mit den Hirstschen Kongruenzen sind aber die quadratischen W-Kongruenzen noch nicht erschöpft, indem man auch solche erhalten kann, welche einen Kegel 2. Grades als Brennfläche und einen diesen Kegel doppelt berührenden Kegelschnitt als Brennkurve besitzen. Bei verschiedenen Bedingungen kann eine W-Kurve (9) auf einem K_2 liegen, wie für $2n_1 = n + n_2$; $n = 2n_1$; $n = 2n_2$; $n_1 = 2n_2$. Diese Fälle lassen sich übrigens durch Änderung der Bezeichnungen auf einander zurückführen. Wir wollen letztere so wählen, dass man als Gleichung des Kegels

$$xz - y^2 = 0$$

bekommt. Die Gleichung der W-Kurve lässt sich dann auf die Gestalt

$$x : y : z : w = t^{2\nu_1+\nu_2} : t^{\nu_1+\nu_2} : t^{\nu_2} : 1 \tag{84}$$

bringen. Da man offenbar den Exponenten einen Proportionalitätsfaktor hinzufügen kann, so ist hier das Verhältniss $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ die einzige wesentliche Konstante. Ist dieses Verhältniss rational, so haben wir eine algebraische Kurve, und wir können für ν_2 und ν_1 zwei ganze teilerfremde Zahlen wählen. Ist dabei $\frac{\nu_2}{\nu_1} > 0$, so können wir auch ν_2 und $\nu_1 > 0$ annehmen. Die Kurve ist dann von der Ordnung $2\nu_1 + \nu_2$ und geht durch die Spitze des Kegels. Letzteres trifft auch zu, wenn die Zeichen für ν_2 und ν_1 verschieden sind und $|\nu_2| > |2\nu_1|$; in diesem Falle hat man $|\nu_2|$ als Ordnung der Kurve. Ist dagegen bei verschiedenen Zeichen $|\nu_2| < |2\nu_1|$, so geht die Kurve nicht durch die Spitze des Kegels, und man erhält $2|\nu_1|$ als Ordnung der Kurve.

Auf demselben K_2 wie die Kurve (84) liegt jede W-Kurve der Schar

$$x : y : z : w = t^{2\nu_1+\nu_2} : c\,t^{\nu_1+\nu_2} : c^2\,t^{\nu_2} : 1, \tag{85}$$

und wir können durch eine leichte Transformation die Gleichung einer beliebigen von diesen Kurven auf die Gestalt (84) überführen. Nach den Ausführungen in der 8. Nummer sehen wir leicht, dass für einen beliebigen Parameter k die Erzeugenden einer in bezug auf die Kurve (84) assoziierte Regelfläche einen gewissen Kegel des Büschels

$$xz - \lambda y^2 = 0$$

berühren, und die Ebene $w = 0$ in einem gewissen Kegelschnitt des Büschels

$$xz - \mu y^2 = 0$$

treffen, und man findet sofort, dass diese Eigenschaft noch für jede Kurve der Schar (85) gültig bleibt. In dieser Weise erhalten wir eine quadratische Kongruenz, deren Brennflächen sich reduziert haben, und zwar die eine auf einen K_2 und die andere auf einen diesen K_2 doppelt berührenden Kegelschnitt.[1]

Hier wollen wir die Berechnungen nur für $k = 1$, d. h. für die Tangenten der Kurve (84), ausführen. Für die Gleichung einer Tangente bekommen wir das System

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & w \\ (2\nu_1 + \nu_2)\, t^{2\nu_1}, & (\nu_1 + \nu_2)\, t^{\nu_1}, & \nu_2 & 0 \\ 0 \quad , & \nu_1 t^{\nu_1 + \nu_2} \quad , & 2\nu_1 t^{\nu_2}, & 2\nu_1 + \nu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bestimmung des Schnittpunktes mit der Ebene $w = 0$ erfolgt durch die Gleichungen

$$(\nu_1 + \nu_2)\, x - (2\nu_1 + \nu_2)\, t^{\nu_1} y = 0; \qquad \nu_2 y - (\nu_1 + \nu_2)\, t^{\nu_1} z = 0.$$

Derselbe liegt also auf dem Kegelschnitte

$$(86) \qquad xz - \frac{\nu_2 (2\nu_1 + \nu_2)}{(\nu_1 + \nu_2)^2}\, y^2 = 0.$$

---

[1] In einem speziellen Falle rücken die beiden Berührungspunkte zusammen, so dass man vier auf einander folgende gemeinsame Punkte erhält. Noch spezieller ist der Fall, wo der Kegelschnitt durch die Spitze des Kegels geht, dortselbst eine Erzeugende berührt und dabei in der Berührungsebene des Kegels liegt.

Betrachten wir umgekehrt die Brennkurve (86) als gegeben, so können wir den Parameter $\frac{\nu_2}{\nu_1} = u$ für die zur Kongruenz gehörenden W-Kurven (85) bestimmen. Wir bekommen hierfür

$$u(u + 2) - \mu(u + 1)^2 = (1 - \mu)(u + 1)^2 - 1 = 0.$$

Als Lösung dieser Gleichung ergibt sich

$$u_1,\ u_2 = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \mu}}.$$

Den Wurzeln u_1, u_2 entsprechen *zwei verschiedene quadratische Kongruenzen*, welche übrigens aus einander durch Vertauschung von x und z hervorgehen. Für $\mu > 1$ werden die Wurzeln u_1, u_2 konjugiert imaginär. In diesem Falle erhält man eine reelle Darstellung, indem man in (84) sowohl x und z als ν_2 und $\nu_2 + 2\nu_1$ konjugiert imaginär annimmt. Ersetzen wir etwa x und z durch $x \pm iz$ sowie ν_2 und $\nu_2 + 2\nu_1$ durch $\nu \mp i$, so ergibt sich als reelle Gleichung einer W-Kurve

$$(84_1) \qquad x : y : z : w = t^\nu \cos(\log t) : t^\nu : t^\nu \sin(\log t) : 1.$$

In dieser Gestalt sind die reellen W-Kurven nicht mehr algebraischen Kurven ähnlich. Dieselben verlaufen in unbegrenzt vielen Umgängen um den Kegel

$$x^2 + z^2 - y^2 = 0.$$

Für $t \to 0$ und $t \to \infty$ nähern die Windlungen sich unbegrenzt entweder der Kegelspitze oder der gegenüberliegenden Ebene $w = 0$. Ob die eine oder andere Möglichkeit eintrifft, wird durch das Zeichen von ν entschieden.

Die in dieser Nummer betrachtete quadratische Kongruenz unterscheidet sich von den Hirstschen Kongruenzen auch dadurch, dass dieselbe zu keinem linearen Komplexe gehört. Diese Kongruenz tritt als Glied in einem allgemeinen System von Kongruenzen auf, welches von Sturm in seiner Monographie behandelt wird; die besonderen Kongruenzen des Systems haben zwar noch die Ordnung zwei, unterscheiden sich aber durch die Klasse, welche beliebig sein kann. Die Linien der Kongruenz umhüllen stets einen Kegel 2. Grades, die Brennkurven aber variieren[1].

[1] Sturm, »*Liniengeometrie*« II, p. 335.

§ 5.

Höhere *W*-Kongruenzen.

32. In diesem Abschnitte wollen wir hauptsächlich einen allgemeinen Typus von W-Kongruenzen betrachten, unter denen die Hirstschen Kongruenzen nur einen speziellen Fall bedeuten. Wir nehmen dabei unseren Ausgangspunkt von einer Fläche

$$x^p w^q - y^r z^s = 0 \qquad (p + q = r + s). \tag{87}$$

Es seien p, q, r und s kommensurabel und > 0. Wir können dann die Exponenten als ganze Zahlen ohne einen allen vier gemeinsamen Faktor voraussetzen. Es ist auch erlaubt $p \gtreqq r \gtreqq s \gtreqq q$ anzunehmen. Man sieht leicht ein, dass hier neben (87) als Ergänzung

$$x^p - y^r z^s w^q = 0 \qquad (p = r + s + q;\ p > r \gtreqq s \gtreqq q > 0) \tag{87$_1$}$$

zu stellen ist.

Jede Fläche von den Typen (87) und (87_1) besitzt eine zweigliedrige Gruppe von projektiven Transformationen in sich. Wenn wir die Bedingung dafür aufsuchen, dass eine Operation

$$x' : y' : z' : w' = \alpha x : \beta y : \gamma z : \delta w \tag{88}$$

zu dieser Gruppe gehört, so erhalten wir

$$\alpha^p \delta^q - \beta^r \gamma^s = 0 \tag{89}$$

bzw.

$$\alpha^p - \beta^r \gamma^s \delta^q = 0. \tag{89$_1$}$$

Die Operation ist mithin durch den Punkt der Fläche (87) bzw. (87_1) charakterisiert, in welchen der Einheitspunkt übergeführt wird. Es leuchtet noch ein, dass bei der zweigliedrigen Gruppe jede Fläche des Büschels

$$x^p w^q - \lambda y^r z^s = 0 \tag{90}$$

bzw.

$$x^p - \lambda y^r z^s w^q = 0 \tag{90$_1$}$$

in sich übergeht.

Suchen wir in einem Punkte x_1, y_1, z_1, w_1 die Berührungsebene einer Fläche (90) oder (90₁) so erhalten wir

$$p\frac{x}{x_1} + q\frac{w}{w_1} - r\frac{y}{y_1} - s\frac{z}{z_1} = 0$$

bzw.

$$p\frac{x}{x_1} - r\frac{y}{y_1} - s\frac{z}{z_1} - q\frac{w}{w_1} = 0.$$

Identifizieren wir diese Gleichungen mit

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega w = 0,$$

so bekommen wir die Gleichungen der Büschel in Ebenenkoordinaten, und zwar in den Gestalten

$$p^p q^q \eta^r \zeta^s - (-1)^{p+q} \lambda r^r s^s \xi^p \omega^q = 0$$

bzw.

$$p^p \eta^r \zeta^s \omega^q - (-1)^p \lambda r^r s^s q^q \xi^p = 0.$$

Die Büschel (90) *und* (90_1) *sind somit zu sich selbst reziprok*[1]*; und die von uns betrachteten W-Flächen haben Ordnung und Klasse gleich.*

33. *In reeller Hinsicht* haben wir hier drei verschiedene Fälle. Im ersten Falle sind in der vorigen Nummer sämtliche vier Grössen x, y, z, w reell, im zweiten Falle sind zwei unter denselben reell und die beiden übrigen konjugiert imaginär, im dritten Falle endlich hat man zwei Paare von konjugiert imaginären Grössen. In den beiden letzteren Fällen sind Bedingungen für die vier Exponenten zu erfüllen. Der dritte reelle Fall kann nur in (87), nicht aber in (87_1), vorkommen und erfordert $p = r$, $q = s$. Wenn wir bzw. für x, y und z, w Paare von konjugiert imaginären Grössen einführen, können wir der Gleichung die Gestalt

$$(x + iy)^p (z + iw)^q + (x - iy)^p (z - iw)^q = 0 \tag{91}$$

geben. Der zweite Fall lässt sich sowohl bei (87) als bei (87_1) vertreten. In (87) hat man hierfür die Bedingung $r = s$. Ersetzt man dann y, z durch $y \pm iz$, so bekommt man die Gleichung

$$x^p w^q - (y^2 + z^2)^r = 0. \tag{92}$$

[1] Eine Ebene berührt also nur *eine* Fläche des Büschels.

In (87_1) gibt es hier die beiden Möglichkeiten $r=s$ oder $q=s$. Wollen wir die Gleichung in reelle Gestalt überführen, so erhalten wir

$$(92_1) \qquad x^p-(y^2+z^2)^r w^q=0; \qquad x^p-y^r(z^2+w^2)^q=0.$$

Diesen drei Fällen entsprechen offenbar die drei Hauptklassen von reellen W-Kurven, welche wir in der 2. Nummer eingeführt haben. Wir bemerken noch, dass die Möglichkeit, dass in (87) x, w und y, z konjugiert imaginäre Paare bedeuten, hier ausgeschlossen ist, da dieselbe auf $p=q=r=s=1$, also auf HIRSTsche Kongruenzen, führen würde[1].

In sämtlichen Fällen gibt es für jeden reellen Punkt der Fläche, der in keiner Koordinatenebene liegt, eine reelle Operation (88), welche den Einheitspunkt in diesen Punkt überführt. Hieraus folgert man, dass, wenn von den Punkten in den Koordinatenebenen abgesehen wird, die Fläche entweder nur hyperbolische oder nur elliptische Punkte enthält. Man findet ja auch leicht direkt, dass die parabolische Kurve nur in den Koordinatenebenen vertreten wird. Da (91) offenbar eine Regelfläche mit den Leitlinien $x=y=0$ und $z=w=0$ bedeutet, so können im dritten Falle nur hyperbolische Punkte vorkommen. In nicht homogener Schreibweise kann man die Flächen (92) und (92_1) als Umdrehungsflächen deuten. Man findet leicht, dass für (92) die Meridiankurve in der Richtung nach der Umdrehungsaxe konkav, für (92_1) dagegen konvex sein muss. Hieraus schliesst man, dass im zweiten reellen Falle sowohl Flächen mit hyperbolischen als solche mit elliptischen Punkten auftreten, indem die Punkte von (92) elliptisch, diejenigen aber von (92_1) hyperbolisch sind.

Nicht so unmittelbar evident erscheint die Sache im ersten Falle. Immer hat man die Methode, dass man untersucht, ob die Schnittkurve der Berührungsebene im Einheitspunkte, dortselbst einen gewöhnlichen Doppelpunkt oder einen isolierten Punkt besitzt. Man kann aber auch, da hier nur reelle Grössen in Betracht genommen werden, verallgemeinerte W-Flächen einführen, so dass in (87) und (87_1) die Exponenten p, q, r, s stetig variieren können, wie es in der 5. Nummer für die W-Kurven entwickelt wurde. Bei solcher stetiger Variation muss der Übergang von hyperbolischen zu elliptischen Punkten durch eine Zwischenstufe mit parabolischen Punkten vermittelt werden. Letzterer Fall tritt aber hier nur ein, wenn einer der Exponenten verschwindet (d. h. $q=0$), wobei die Fläche in einen Kegel übergeht. Hieraus lässt sich schliessen, dass der

[1] Wenn wir weiterhin in dieser Arbeit von W-Flächen sprechen, so meinen wir Flächen von einem der hier angegebenen Typen, doch gelegentlich mit Erweiterung auf transzendente Fälle.

Typus (87) oder (87_1) dafür entscheidend ist, ob die Fläche hyperbolische oder elliptische Punkte enthält. Man findet, dass die Punkte der Flächen vom Typus (87) hyperbolisch sind, da unter diesen Flächen Regelflächen auftreten. Andererseits sind die Punkte der Flächen (87_1) elliptisch, wie man etwa am Beispiele

$$x^3 = y\,z\,w$$

bestätigen kann, welche, wenn man von den drei geraden Linien in der Ebene $x = 0$ mit parabolischen Punkten absieht, lauter elliptische Punkte enthält.

Wenn man die Exponenten > 0 *annimmt, enthalten also die Flächen* (87), (91) *und* (92_1) *hyperbolische Punkte, die Flächen* (87_1) *und* (92) *dagegen elliptische Punkte*[1].

34. Durch die zweigliedrige Gruppe (88) wird eine gerade Linie in ∞^2 verschiedene Lagen übergeführt. In solcher Weise lässt sich der Linienraum in ∞^2 W-Kongruenzen zerlegen. Für diese Kongruenzen treten als Brennflächen je zwei Flächen des Büschels (90) bzw. (90_1) auf. Da dieses Büschel zu sich selbst reziprok ist, so sind Ordnung und Klasse der Kongruenzen gleich. Um die Klasse zu bestimmen, hat man zu untersuchen, wie viele Linien einer Kongruenz in einer beliebig gegebenen Ebene

$$ex + e_1 w + f y + f_1 z = 0$$

liegen. Eine Linie der Kongruenz sei

$$y = \varrho x + \sigma w; \qquad z = \varrho_1 x + \sigma_1 w.$$

Durch (88) erhalten wir hieraus als die allgemeine Linie

$$\beta y = \alpha\varrho x + \delta\sigma w; \qquad \gamma z = \alpha\varrho_1 x + \delta\sigma_1 w.$$

Führen wir diese Ausdrücke für y und z in die Gleichung der Ebene ein, so bekommen wir

$$[\beta\gamma e + \alpha(\gamma f\varrho + \beta f_1\varrho_1)]\,x + [\beta\gamma e_1 + \delta(\gamma f\sigma + \beta f_1\sigma_1)]\,w = 0.$$

Da das linke Glied hier identisch verschwinden soll, so erhalten wir die Bedingungen

[1] Vermutlich existiert mit Ausnahme der Fläche (87_1) bei ungeradem p keine reelle Fläche von ungerader Ordnung, die keine hyperbolische Punkte enthält.

$$\beta\gamma e + \alpha(\gamma f \varrho + \beta f_1 \varrho_1) = 0;$$

$$\beta\gamma e_1 + \delta(\gamma f \sigma + \beta f_1 \sigma_1) = 0.$$

Hieraus können wir die Ausdrücke für α und δ in (89) bzw. (89_1) einführen, und es ergibt sich so als endgültige Bedingung für das Verhältnis $\frac{\beta}{\gamma}$

$$e^p e_1^q \beta^s \gamma^r - (-1)^{p+q}(\gamma f \varrho + \beta f_1 \varrho_1)^p (\gamma f \sigma + \beta f_1 \sigma_1)^q = 0 \tag{93}$$

bzw.

$$e^p \beta^s \gamma^r (\gamma f \sigma + \beta f_1 \sigma_1)^q - (-1)^{p+q} e_1^q (\gamma f \varrho + \beta f_1 \varrho_1)^p = 0. \tag{93$_1$}$$

Als Ordnung und Klasse der Kongruenz bekommt man hiernach $p + q$ bzw. p. Die W-Flächen und die zugehörigen W-Kongruenzen, welche wir hier behandeln, haben mithin dieselbe Ordnung und Klasse.

Dass die Anzahl der Flächen eines Büschels (90) oder (90_1), welche von einer geraden Linie berührt werden, zwei ist, lässt sich leicht bestätigen. Die Schnittpunkte der Linie mit den Flächen des Büschels sind Elemente in einer Involution vom Grade $p + q$ bzw. p. Nun wird zwar diese Involution $2(p + q - 1)$ bzw. $2(p - 1)$ Doppelpunkte besitzen. Unter diesen Doppelpunkten gehört aber eine Anzahl von $p - 1 + q - 1 + r - 1 + s - 1$, also $2(p + q - 2)$ bzw. $2(p - 2)$, zu den Parameterwerten $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$. Es bleiben mithin nur noch zwei Doppelpunkte übrig, welche zu zwei W-Flächen gehören, die von der Linie berührt werden. Wenn die Linie vermittelst der zweigliedrigen Gruppe in andere Lagen versetzt wird, so bleibt diese Berührung offenbar bestehen, und die fraglichen beiden W-Flächen sind also die Brennflächen der dabei erzeugten Kongruenz.

35. Es gilt jetzt die Frage, *wie viele verschiedene Kongruenzen zwei bestimmte Flächen von einem der Büschel* (90) *oder* (90_1) *als Brennflächen haben.* Die fragliche Anzahl muss offenbar mit der Klasse eines ebenen Querschnitts, also mit dem Range einer der Brennflächen übereinstimmen. In der Tat, von einem Punkte der einen Fläche muss zu jeder Kongruenz je eine Linie ausgehen. Diese Linien liegen in der Berührungsebene und sind Tangenten der anderen Fläche.

Bei einem allgemeinen Querschnitte einer Fläche (90) sind vier singuläre Punkte zu untersuchen, nämlich die Schnittpunkte der Ebenen $x = 0$ und $w = 0$

mit den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$. Handelt es sich dagegen um eine Fläche (90_1), so hat man in den Schnittpunkten der Ebene $x = 0$ mit $y = 0$, $z = 0$ und $w = 0$ drei singuläre Punkte. Um die Klasse des Querschnitts zu bestimmen, sind die Äquivalente dieser Punkte in gewöhnlichen Doppelpunkten und Spitzen zu ermitteln. Es genügt durch ein Beispiel zu beleuchten, wie dies ausgeführt wird. Wir betrachten für einen Querschnitt von (87) den Punkt $x = y = 0$. Bei nicht homogener Darstellung können wir z durch 1 ersetzen. Es ist dann w ein linearer Ausdruck in x und y, der für $x = y = 0$ nicht verschwindet. Hiermit ist die Gleichung der Kurve auf die Gestalt

$$y^r - x^p (a_0 + a_1 x + a_2 y)^q = 0$$

gebracht. Es sei r_1 der grösste gemeinsame Teiler von r und p. Die Äquivalente des Punktes $x = y = 0$ in Doppelpunkten und Spitzen lassen sich nun nach bekannten Formeln von Cayley bestimmen. Für die Anzahl der Spitzen hat man

$$r_1 \left(\frac{r}{r_1} - 1 \right) = r - r_1 .$$

Als Äquivalente in Doppelpunkten bekommt man, wenn man jeden der r_1 Zweige für sich betrachtet

$$\frac{r_1}{2} \left(\frac{r}{r_1} - 1 \right) \left(\frac{p}{r_1} - 3 \right) = \frac{1}{2\, r_1} (r - r_1)(p - 3\, r_1).$$

Da diese Zweige gemeinsame Punkte mit einander haben, so kommen hierzu noch

$$\frac{r_1 (r_1 - 1)}{2} \frac{r}{r_1} \frac{p}{r_1} = \frac{r_1 - 1}{2\, r_1} r p$$

Doppelpunkte.

Wir bezeichnen noch mit s_1, q_1, q_2 und q_3 bzw. die grössten gemeinsamen Teiler von s und p, q und r, q und s und q und p. Für einen Querschnitt einer Fläche (90) erhalten wir dann die Äquivalentenzahl $\varkappa$ in Spitzen

$$\varkappa = r - r_1 + s - s_1 + q - q_1 + q - q_2 = p + 3\, q - r_1 - s_1 - q_1 - q_2 .$$

Es ergibt sich weiter für die Äquivalentenzahl δ in Doppelpunkten

$$\delta = \frac{1}{2r_1}(r - r_1)(p - 3r_1) + \frac{r_1 - 1}{2r_1} r p + \frac{1}{2s_1}(s - s_1)(p - 3s_1) + \frac{s_1 - 1}{2s_1} s p +$$

$$+ \frac{1}{2q_1}(q - q_1)(r - 3q_1) + \frac{q_1 - 1}{2q_1} q r + \frac{1}{2q_2}(q - q_2)(s - 3q_2) + \frac{q_2 - 1}{2q_2} q s =$$

$$= \frac{(p+q)(r+s)}{2} - (p + 2r + 2s + 3q) + \frac{3}{2}(r_1 + s_1 + q_1 + q_2) =$$

$$= \frac{(p+q)^2}{2} - (3p + 5q) + \frac{3}{2}(r_1 + s_1 + q_1 + q_2).$$

Benutzen wir jetzt die Formel

$$P = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta - \varkappa$$

für das Geschlecht P einer Kurve, wo die Ordnung n hier $= p + q$ ist, so bekommen wir

$$(94) \qquad P = \frac{p+q}{2} + 1 - \frac{1}{2}(r_1 + s_1 + q_1 + q_2).$$

Für die Klasse k der Kurve haben wir die Formel

$$k = 2(n + P - 1) - \varkappa.$$

Im hier betrachteten Falle ergibt sich hieraus

$$(95) \qquad k = 2p.$$

Betrachten wir andererseits einen Querschnitt einer Fläche (90_1), so ergibt sich in gleicher Weise

$$\varkappa = r - r_1 + s - s_1 + q - q_3 = p - r_1 - s_1 - q_3.$$

Man erhält weiter als Äquivalente in Doppelpunkten

$$\delta = \frac{1}{2r_1}(r - r_1)(p - 3r_1) + \frac{r_1 - 1}{2r_1} r p + \frac{1}{2s_1}(s - s_1)(p - 3s_1) +$$

$$+ \frac{s_1 - 1}{2s_1} s p + \frac{1}{2q_3}(q - q_3)(p - 3q_3) + \frac{q_3 - 1}{2q_3} q p =$$

$$= \frac{p^2}{2} - 3p + \frac{3}{2}(r_1 + s_1 + q_3).$$

Für das Geschlecht P ergibt sich jetzt

$$P = \frac{p}{2} + 1 - \frac{1}{2}(r_1 + s_1 + q_3). \tag{94$_1$}$$

Als Endresultat findet man denselben Ausdruck für die Klasse wie in (95).

Es gibt mithin immer $2p$ W-Kongruenzen, welche zwei beliebig gegebene W-Flächen (90) *oder* (90$_1$) *als Brennflächen besitzen.*

36. Damit eine W-Kurve

$$x : y : z : w = t^n : t^{n_1} : t^{n_2} : 1 \tag{96}$$

auf der Fläche (87) (oder (87$_1$)) liegen soll, muss für die Exponenten die Bedingung

$$pn = rn_1 + sn_2 \tag{97}$$

gelten. Dabei können natürlich die Zeichen von n, n_1 und n_2 verschieden sein. Durch die Operationen (88) der zweigliedrigen Gruppe wird (96) in andere Lagen übergeführt, so dass die ganze Fläche übergedeckt wird, und für eine eingliedrige Untergruppe sind die Kurven des so erhaltenen Systems die Bahnkurven.

Als Gleichung der Schmiegungsebene der Kurve (96) bekommen wir

$$\begin{aligned} &n_1 n_2 (n_1 - n_2) x - n n_2 (n - n_2) t^{n-n_1} y + \\ &+ n n_1 (n - n_1) t^{n-n_2} z - (n - n_2)(n - n_1)(n_1 - n_2) t^n w = 0. \end{aligned} \tag{98}$$

Für die Berührungsebene der Fläche im Kurvpunkte haben wir die Gleichung

$$p\frac{x}{x_1} - \frac{ry}{y_1} - \frac{sz}{z_1} + \frac{qw}{w_1} \equiv px - rt^{n-n_1} y - st^{n-n_2} z \pm qt^n w = 0. \tag{99}$$

Für das letzte Glied gilt dabei das Zeichen + oder —, je nachdem es sich um die Fläche (87) oder (87$_1$) handelt. Man sieht unmittelbar ein, dass *die asymptotischen Kurven* dieser Flächen eingliedrige Gruppen gestatten müssen. Dieselben sind also W-Kurven. Ihre Bestimmung erfolgt dadurch, dass man die Gleichungen (98) und (99) identifiziert, da bekanntlich die Schmiegungsebene einer asymptotischen Kurve mit der Berührungsebene der Fläche zusammenfällt. Man erhält in solcher Weise die Bedingungen

$$(100) \qquad \frac{p}{n_1 n_2 (n_1 - n_2)} = \frac{r}{n n_2 (n - n_2)} = \frac{-s}{n n_1 (n - n_1)} = \frac{\pm q}{(n - n_2)(n - n_1)(n_1 - n_2)}.$$

Unter diesen Bedingungen ist aber nur eine neu, da sich zwei auf

$$p \pm q = r + s; \quad pn = rn_1 + sn_2$$

reduzieren lassen. Die hinzukommende Bedingung können wir schreiben

$$p(n - n_1)(n - n_2) \mp q n_1 n_2 = 0.$$

In letzter Instanz lässt sich die Frage auf die Relation

$$s(p - s) n_2^2 + r(p - r) n_1^2 - [rs + (p - s)(p - r) \pm pq] n_1 n_2 = 0$$

für $\frac{n_2}{n_1}$ zurückführen. Der Koeffizient für $n_1 n_2$ lässt sich hier vereinfachen, so dass wir erhalten

$$(101) \qquad s(p - s) n_2^2 + r(p - r) n_1^2 - 2 rs n_1 n_2 = 0.$$

Wenn wir die Lösung ausführen, so ergibt sich

$$(102) \qquad \frac{n_2}{n_1} = \frac{r}{p - s} \pm \frac{1}{s(p - s)} \sqrt{\pm pqrs}.$$

Da die asymptotischen Kurven einer Fläche mit hyperbolischen Punkten reell, diejenigen aber einer Fläche mit elliptischen Punkten imaginär sein müssen, so lassen sich aus dieser Form der Lösung unsere Resultate in der 33. Nummer leicht bestätigen.

Aus (102) bekommt man die Antwort auf die Frage, *für welche Flächen* (87) *die asymptotischen Kurven algebraisch sind.* Man findet hierfür die Bedingung, dass *das Produkt pqrs der vier Exponenten ein Quadrat sein soll.* Dieser Bedingung lässt sich in mehreren Weisen Genüge leisten.[1] Zunächst setzen wir $r = p$, $s = q$. Die Fläche ist dann eine Regelfläche, und die eine Schar von asymptotischen Kurven geht in die Erzeugenden über. Für die andere Schar erhält man

$$n_2 : n : n_1 = 2p : p + q : p - q.$$

---

[1] Eine allgemeine Antwort auf die obige zahlentheoretische Frage wollen wir bei einer anderen Gelegenheit geben. Dieselbe gründet sich auf die Relation (100).

Hier tritt rechts der gemeinsame Teiler 2 auf, wenn p und q beide ungerade sind; ist aber eine von diesen Zahlen gerade, so sind die drei Zahlen $2p, p+q$ und $p-q$ zu einander prim. *Die Ordnung der asymptotischen Kurven ist also p oder $2p$, je nachdem die Ordnung $p+q$ der Regelfläche gerade oder ungerade ist.* Da man

$$n_2 = n + n_1$$

hat, so gehören die asymptotischen Kurven in diesem Falle zu den ausgezeichneten W-Kurven. Dies ist auch in der Tat eine notwendige Bedingung dafür, dass dieselben reell bleiben, wenn man die Gleichung der Fläche auf die andere mögliche reelle Gestalt (91) überführt. Man sieht auch leicht ein, dass eine Fläche (91) keine anderen *reellen* algebraischen W-Kurven als die asymptotischen Kurven enthält.

Wir wollen noch auf einige andere Fälle hinweisen, wo die asymptotischen Kurven von (87) algebraisch sind.

1) $p+q$ lässt sich auf mehrere Weisen in zwei Quadrate zerfällen. Sämtliche vier exponenten können dann Quadrate sein.

2) Man hat $s=r$, und $2r$ ist die Summe von zwei Quadraten $p+q$.

3) Man hat $p+q=h^2$, wobei $h-1$ Quadrat ist, und h^2 in eine Summe von zwei Quadraten zerlegt werden kann. $h^2=h_1^2+h_2^2=h+(h-1)h$.

4) Es sei $p+q=h^2$ und $h+1$ ein Quadrat. $h^2=(h^2-1)+1=(h-1)h+h$.

Als ein besonderes Beispiel betrachten wir den Fall $p=9,\ q=1,\ r=s=5$. Für die beiden Systeme von asymptotischen Kurven bekommen wir nach (97) und (102) die Lösungen

$$n_2=6,\ n=5,\ n_1=3;\quad n_1=6,\ n=5,\ n_2=3.$$

Wir wählen für ein anderes Beispiel $p=8,\ q=1,\ r=6,\ s=3$. Als Lösungen erhalten wir

$$n_2=4,\ n=3,\ n_1=2;\quad n_1=10,\ n=9,\ n_2=4.$$

Zwei asymptotische Kurven von verschiedenen Systemen sind also hier nicht, wie im vorigen Beispiel, projektiv äquivalent.

37. Bezeichnet man in (98) die Koeffizienten mit ξ, η, ζ und ω, so hat man

$$\xi:\eta:\zeta:\omega = n_1 n_2 (n_1-n_2)\, t^{-n} : -n n_2 (n-n_2)\, t^{-n_1} : n n_1 (n-n_1)\, t^{-n_2} :$$
$$: -(n-n_2)(n-n_1)(n_1-n_2).$$

Berücksichtigen wir (97) und die Identität $p \pm q = r + s$, so erhalten wir leicht hieraus

$$\xi^p \omega^{\pm q} - \frac{n_1^{p-s} n_2^{p-r} (n_1 - n_2)^{p \pm q}}{(n_2 - n)^{p-s} (n - n_1)^{p-r} n^{p \pm q}} \eta^r \zeta^s = 0.$$

Führt man andererseits die Gleichung einer Fläche

$$x^p w^{\pm q} - \lambda y^r z^s = 0$$

in Ebenenkoordinaten über, so ergibt sich

$$\xi^p \omega^{\pm q} - \frac{p^p (\pm q)^{\pm q}}{\lambda (-r)^r (-s)^s} \eta^r \zeta^s = 0.$$

Ist die Bedingung

$$(103) \qquad \lambda = \frac{p^p (\pm q)^{\pm q}}{(-r)^r (-s)^s} \frac{(n_2 - n)^{p-s} (n - n_1)^{p-r} n^{p \pm q}}{n_1^{p-s} n_2^{p-r} (n_1 - n_2)^{p \pm q}}$$

erfüllt, so ist letztere Fläche mit der vorhergehenden identisch.

Die Kongruenz, zu welcher die Kurve (96) und die mit ihr nach den Projektivitäten (88) äquivalenten Kurven gehören, hat nun (87) bzw. (87_1) als erste Brennfläche, und für die Fläche des Büschels (90) bzw. (90_1), welche als zweite Brennfläche auftritt, lässt sich λ aus (103) bestimmen. Da eine beliebige Fläche (90) bzw. (90_1) sich in (87) bzw. (87_1) projektiv überführen lässt, so hat in (103) λ die allgemeinere Bedeutung als Verhältniss zwischen den zu den Brennflächen gehörigen Parametern λ_1 und λ_2. Hat man $p = r$, $q = s$, d. h. sind die W-Flächen Regelflächen, so erhält (103) die einfachere Gestalt

$$(103_1) \qquad \lambda = (-1)^{p+q} \frac{(n_2 - n)^{p-q} n^{p+q}}{n_1^{p-q} (n_1 - n_2)^{p+q}}.$$

Ersetzt man in (104) und (103_1) n durch seinen Ausdruck in n_1 und n_2 nach (97), so resultiert für das Verhältniss $\frac{n_2}{n_1}$ eine Gleichung vom Grade $2p$. *Diese Gleichung ist für diejenigen $2p$ Kongruenzen bestimmend, welche zwei Flächen* (90) *bzw.* (90_1) *mit einem gegebenen Verhältniss λ zwischen den Parametern als Brennflächen haben.* Schreiben wir $\frac{n_2}{n_1} = \nu$, so erhalten wir aus (103) und (97) die folgende Gleichung für ν

$$(104) \qquad \lambda = \frac{p^{-p} (\pm q)^{\pm q} [(p - s)\nu - r]^{p-s} [s\nu - (p - r)]^{p-r} (r + s\nu)^{p \pm q}}{(-r)^r (-s)^s \nu^{p-r} (1 - \nu)^{p \pm q}}.$$

Für Regelflächen bekommt diese Gleichung die vereinfachte Gestalt

$$(104_1) \qquad \lambda = \frac{p^{-2p}\,[p-(p-q)\,\nu]^{p-q}\,(p+q\nu)^{p+q}}{(1-\nu)^{p+q}}.$$

Betrachtet man λ als einen veränderlichen Parameter, so bedeutet (104) eine Involution vom Grade $2p$. Diese Involution hat vier Doppelelemente, wobei von solchen Doppelelementen abgesehen wird, die zu $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ gehören. Die direkte Bestimmung dieser Doppelelemente gibt

$$[s(p-s)\,\nu^2 - 2\,r\,s\,\nu + r\,(p-r)]^2 = 0.$$

Wir sind hier auf die in der vorigen Nummer behandelten Kongruenzen zurückgeführt, zu denen die Haupttangentenkurven gehören. Diese beiden Kongruenzen geben also in (104) dreifache Lösungen für $\lambda = 1$. Es bleibt eine Gleichung vom Grade $2p-6$ übrig. Durch dieselbe werden $2p-6$ Systeme von W-Kurven definiert, welche zu Kongruenzen gehören, deren beide Brennflächen sich in eine doppelte vereinigt haben, welche von den Linien in zwei verschiedenen Punkten berührt wird. *Nun müssen offenbar bei jeder Kongruenz zwei solche Systeme von W-Kurven auftreten, so dass man nur* $p-3$ *verschiedene W-Kongruenzen erhält, welche sich aus den Doppeltangenten einer W-Fläche* (90) *oder* (90_1) *erzeugen lassen.*

Dass für $\lambda = 1$ die Systeme von Haupttangentenkurven in (104) als dreifache Lösungen gelten müssen, lässt sich auch in der folgenden Weise begründen. An die Schnittkurve einer Berührungsebene einer Fläche (90) oder (90_1) mit dieser Fläche selbst lassen sich vom Berührungspunkte nur $2p-6$ Tangenten ziehen. Gilt es dagegen die Schnittkurve mit einer anderen Fläche des betreffenden Büschels, so ist diese Anzahl nach der vorletzten Nummer $2p$. Jede der beiden Tangenten im Berührungspunkte hat also deren drei absorbiert, und letztere Tangenten berühren bekanntlich die Haupttangentenkurven.

Die Anzahl vier der Doppelelemente wird bei der speziellen Involution (104_1) auf zwei erniedrigt. Für ihre Bestimmung erhält man die Gleichung

$$[(p-q)\,\nu - 2\,p]^2 = 0.$$

Die Kongruenz, zu welcher das System der eigentlichen Haupttangentenkurven gehört, gilt also als dreifach für $\lambda = 1$. Dagegen entspricht das System der Erzeugenden der einfachen Lösung $\nu = 0$. Für $\lambda = 1$ hat also (104_1) noch

$2p-4$ Lösungen, welche von $p-2$ Kongruenzen herrühren müssen. *In dem besonderen Falle, wo die Flächen* (90) *Regelflächen bedeuten, ist mithin die Anzahl der Kongruenzen, welche sich aus Doppeltangenten einer Fläche erzeugen lassen, von* $p-3$ *auf* $p-2$ *erhöht.*

Nach der 34. Nummer hat man $p+q$ bzw. p als Ordnung und Klasse einer W-Kongruenz, wenn die Brennflächen zu einem Büschel (90) bzw. (90_1) gehören. In dieser Nummer haben wir gefunden, dass es $p-3$ Kongruenzen gibt, deren Linien eine einzelne solche Fläche in zwei Punkten berühren, wobei jedoch zu beachten ist, dass diese Anzahl auf $p-2$ erhöht wird, falls die Fläche eine Regelfläche bedeutet. Hiernach wäre für einen ebenen Querschnitt einer Fläche (90) im allgemeinen eine Anzahl von $(p-3)(p+q)$ Doppeltangenten zu erwarten, doch $(p-2)(p+q)$, wenn es sich um eine Regelfläche handelt, und ebenso für einen Querschnitt einer Fläche (90_1) eine Anzahl von $p(p-3)$ Doppeltangenten. Dies lässt sich auch durch eine direkte Berechnung der Anzahl der Doppeltangenten bestätigen. Hierbei muss man freilich beachten, dass solche Doppeltangenten, die in den Schnittlinien mit den Koordinatenebenen liegen, hier nicht mitgezählt werden dürfen.

38. Bekanntlich ist das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen die Tangente einer W-Kurve die Ebenen des Fundamentaltetraeders trifft, konstant. Da diese Eigenschaft auch den Linien eines tetraedralen Komplexes zukommt, so gilt nach S. Lie, dass *die Tangenten der Bahnkurven einer eingliedrigen Gruppe einen tetraedralen Komplex erzeugen.*[1] Für die Kurve

$$x:y:z:w=t^n:t^{n_1}:t^{n_2}:1$$

bekommt man als Gleichung der Tangente

$$\frac{x-t^n w}{n\,t^{n-1}}=\frac{y-t^{n_1} w}{n_1 t^{n_1-1}}=\frac{z-t^{n_2} w}{n_2 t^{n_2-1}}.$$

Für den Schnittpunkt mit der Ebene $x=0$ erhalten wir

$$y_1:z_1=(n-n_1)\,t^{n_1}:(n-n_2)\,t^{n_2}.$$

Ebenso ergibt sich für den Schnittpunkt mit der Ebene $w=0$

[1] Betreffs der Kurven der tetraedralen Komplexe sehe man Lie, »*Geometrie der Berührungstransformationen*» (1896), p. 326.

$$y_2 : z_2 = n_1 t^{n_1} : n_2 t^{n_2}.$$

Wählen wir jetzt das besondere Doppelverhältniss $\mu = \frac{y_1}{z_1} \cdot \frac{z_2}{y_2}$, so erhalten wir

$$\mu = \frac{(n - n_1) n_2}{(n - n_2) n_1}. \tag{105}$$

Solche eingliedrige Gruppen, für welche das rechte Glied von (105) *ungeändert bleibt, führen mithin zu demselben tetraedralen Komplex.* Wünscht man hier einen Komplex, der sich durch die Tangenten *algebraischer* Bahnkurven erzeugen lässt, so ist offenbar ein rationales Doppelverhältniss μ erforderlich.

Sind die Bahnkurven kubische Raumkurven, so erhält man $\mu = \frac{1}{4}$. Die Erzeugungsweise dieses speziellen tetraedralen Komplexes vermittelst der Tangenten kubischer Raumkurven ist schon mehrfach behandelt worden.[1] Durch die obigen Entwicklungen haben wir diese Eigenschaft in ihrem allgemeinen Zusammenhange klargelegt. Man kann ja kaum sagen, dass der Fall, wo die Bahnkurven kubische Raumkurven sind, in irgend einer Weise als besonders bevorzugt hervortritt.

Für einen besonderen tetraedalen Komplex ist das Doppelverhältnis μ bestimmend, und man kann in unendlich vielen Weisen den Komplex durch die Tangenten von W-Kurven erzeugen, indem für die Verhältnisse $\frac{n_1}{n}$ und $\frac{n_2}{n}$ nur die Bedingung (105) befriedigt zu werden braucht. Ganz anders verhält es sich, wenn wir *die Elemente der Linien des Komplexes betrachten. Die Elemente einer Komplexlinie sind nämlich auf die verschiedenen Gattungen von W-Kurven verteilt, so dass jedes Element zu einer und nur einer Gattung gehört.* Die verschiedenen zu demselben tetraedralen Komplexe gehörenden Gattungen lassen sich nämlich durch die Doppelverhältnisse charakterisieren, welche zwischen dem Berührungspunkte einer Tangente und den Schnittpunkten mit den Koordinatenebenen gelten. Wählen wir etwa die Schnittpunkte mit den drei Ebenen $w = 0$, $y = 0$ und $z = 0$, so bekommen wir das Doppelverhältniss

$$\mu_1 = \frac{y}{z} \cdot \frac{z_2}{y_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

---

[1] A. Voss, Math. Ann. 13 (1878), p. 237; R. Sturm, Math. Ann. 26 (1887), p. 272 und »*Liniengeometrie*« I (1892, p. 361) E. Heinrichs, Diss. Münster 1887.

und wir finden sofort, wie die Grössen $\frac{n_1}{n}$ und $\frac{n_2}{n}$ sich rational durch μ und μ_1 ausdrücken lassen. *Die W-Kurven, welche von einer Komplexlinie in ihren verschiedenen Punkten berührt werden, gehören also stets zu verschiedenen Gattungen.*

Ähnliche Eigenschaften gelten für den *Komplexkegel* eines Punktes, indem die Linienelemente des Komplexes, welche vom Punkte ausgehen, die verschiedenen Gattungen der W-Kurven durchlaufen. Zur Beleuchtung dieser Tatsache wollen wir die Gleichung des Komplexkegels für den Einheitspunkt herleiten. Die Tangente einer W-Kurve in diesem Punkte haben wir zu Anfang dieser Nummer erhalten. Wir brauchen nur dort $t = 1$ zu setzen. Es ergibt sich aus der Gleichung der Tangente sofort

$$\frac{n_1}{n} = \frac{y-w}{x-w}; \quad \frac{n_2}{n} = \frac{z-w}{x-w},$$

und aus den letzteren Relationen ist es ersichtlich, wie die Fortschreitungsrichtungen vom Punkte aus den verschiedenen Gattungen von W-Kurven zugeordnet sind. Durch Einführung in (105) erhalten wir jetzt als Gleichung des Komplexkegels

$$(106) \qquad (x-y)(z-w) - \mu(x-z)(y-w) = 0.$$

In gleicher Weise verteilen sich in einer Ebene die Linienelemente des *Komplexkegelschnittes* eines tetraedralen Komplexes auf die verschiedenen zum Komplexe gehörenden Gattungen von W-Kurven.

Man bekommt ∞^1 birationale Abbildungen eines tetraedralen Komplexes auf den Punktraum von der Art, dass eine Linie und der entsprechende Punkt stets inzident sind. Man bekommt nämlich eine solche für jede Gattung von W-Kurven, welche Linienelemente des Komplexes enthalten, indem man den Linien die Punkte entsprechen lässt, welche Träger dieser Elemente sind. Kombiniert man zwei derartige Transformationen, so resultiert eine Kollineation, bei welcher die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zum Komplexe gehören. Die Anzahl dieser Kollineationen ist ∞^2. Auf einer bestimmten Linie des Komplexes lassen sich ja die einander entsprechenden Punkte beliebig wählen. Die von diesen Punkten ausgehenden Elemente der Linie bestimmen zwei Gattungen von W-Kurven, und hierdurch ist die Kollineation festgelegt. Da es zu einem gegebenen Tetraeder ∞^1 tetraedrale Komplexe gibt, so bekommt man hiernach ∞^3 Kollineationen, bei denen, auf Grund der festen Doppelverhältnisse, jeder von diesen Komplexen in sich übergeht[1].

39. Bei der Gruppe der oben erwähnten ∞^3 Kollineationen werden die Flächen eines Büschels (90) oder (90_1) transitiv unter einander vertauscht. Nun werden nach der 34. Nummer von einer beliebigen geraden Linie zwei von diesen Flächen berührt, und *ein tetraedraler Komplex, der zum Koordinatentetraeder gehört, lässt sich für jedes der obigen Büschel in ein System von Kongruenzen zerlegen, so dass als Brennflächen je zwei der Flächen des Büschels auftreten.* Auf jeder Brennfläche befindet sich nun ein System von W-Kurven, welche je von den Linien der Kongruenz berührt werden. Die Gattungen, zu denen diese W-Kurven gehören, lassen sich nach (97) und (105) bestimmen. Es gilt also

$$pn - rn_1 - sn_2 = 0; \qquad \mu n_1(n - n_2) - n_2(n - n_1) = 0. \tag{107}$$

Wenn man μ als einen veränderlichen Parameter auffasst, so hat man in (107) die Definition einer Involution; es handelt sich ja nämlich um die Schnittpunkte einer geraden Linie mit den Kegelschnitten eines Büschels. Durch diese Involution werden die Gattungen von W-Kurven, welche der Relation (97) genügen, in Paare zusammengestellt, und die W-Kurven einer Kongruenz auf den beiden Brennflächen gehören zu verschiedenen Gattungen. Eine besondere W-Fläche (90) oder (90_1) ist die Brennfläche zweier Kongruenzen, welche in demselben tetraedralen Komplexe enthalten sind. Man hat ja zwei Möglichkeiten für die Gattung der auf der W-Fläche liegenden W-Kurven, welche der Kongruenz angehören sollen. Freilich können, wie in der vorletzten Nummer hervorgehoben wurde, in einer endlichen Anzahl von Fällen diese beiden Kongruenzen sich in eine einzige Kongruenz mit einer doppelten Brennfläche vereinigen.

Die durch (107) definierte Involution hat nun zwei Doppelpunkte, für welche die zugeordneten beiden Gattungen von W-Kurven sich in eine einzige vereinigt haben. Dies geschieht offenbar für die beiden tetraedralen Komplexe, zu denen die asymptotischen Kurven der in Rede stehenden W-Flächen gehören. Suchen wir die Gleichung für die Doppelverhältnisse μ dieser Komplexe, so ergibt sich

$$\mu^2(p - s)^2 - 2\mu(p^2 - pr - ps - rs) + (p - r)^2 = 0. \tag{108}$$

[1] Wir haben oben eine vielleicht etwas neue Beleuchtung von bereits bekannten Tatsachen zu geben versucht. Man vergleiche STURM, »*Liniengeometrie*» I, p. 367.

Bei der Lösung erhält man unter dem Wurzelzeichen

$$prs(r+s-p)=pqrs.$$

Die Involution (107) *ist mithin für* $r+s>p$ *hyperbolisch und für* $r+s<p$ *elliptisch.* Dies steht damit in Übereinstimmung, dass, wie aus den Auseinandersetzungen in der 33. Nummer hervorgeht, die Flächen des Büschels (90) zwei reelle und diejenigen des Büschels (90_1) zwei konjugiert imaginäre Scharen von asymptotischen Kurven besitzen. Für jeden reellen Wert des Doppelverhältnisses μ hat ein tetraedraler Komplex mit den Flächen eines Büschels (90_1) Kongruenzen reell berührender Tangenten gemeinsam. Dagegen gibt es keine derartige Kongruenzen für ein Büschel (90), wenn μ sich im inneren Intervall (das die Punkte 0 und ∞ nicht enthält) zwischen den Wurzeln von (108) befindet.

Wir haben in (107) n, n_1 und n_2 als homogene Koordinaten in einer Ebene gedeutet, wobei die Punkte und geraden Linien Gattungen von W-Kurven bzw. W-Flächen bezeichnen. Sollen nun W-Kurven von einer besonderen Gattung auf einer W-Fläche liegen, so ist Inzidenz zwischen dem entsprechenden Punkte und der entsprechenden Geraden erforderlich. Es lässt sich immer eine Gattung von W-Flächen (90) oder (90_1) bestimmen, auf denen W-Kurven von zwei beliebig gegebenen Gattungen liegen. Man braucht ja nur für (97) die Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte zu wählen. Umgekehrt ist immer zwei beliebigen Gattungen von W-Flächen eine Gattung von W-Kurven gemeinsam. Man kann auch eine W-Fläche von der Art bestimmen, dass das eine System von asymptotischen Kurven zu einer beliebig gegebenen Gattung von W-Kurven gehört. Durch den Bildpunkt für die W-Kurven geht ja ein Kegelschnitt (105), und wenn man die Tangente dieses Kegelschnitts im Punkte zieht, so erhält man die Bildlinie der erforderlichen Gattung von W-Flächen. Da wir hier nicht algebraische Kurven oder Flächen vorausgesetzt haben, so können die Verhältnisse zwischen n, n_1 und n_2 sowie zwischen p, r und s beliebig sein.

40. Es gibt aber hier mehrere allgemeine reelle Fälle, von denen wir bisher nur denjenigen betrachtet haben, in welchem sämtliche Koordinaten x, y, z und w reell sind. Einen zweiten Fall erhalten wir, wenn wir die Ebenen x *und* w *als reell,* y *und* z *aber als konjugiert imaginär* annehmen. Bei dem Doppelverhältnisse μ haben wir die Schnittpunkte mit den ersteren beiden Ebenen denjenigen mit den letzteren gegenübergestellt. Für eine reelle Gerade erhalten wir dann $|\mu|=1$. Reelle Gattungen von W-Flächen bekommen wir, wenn wir p, q

reell und r, s konjugiert imaginär voraussetzen. Für das Produkt der beiden Lösungen von (108) erhalten wir dann den Betrag 1. Dasselbe gilt offenbar für die einzelnen Lösungen unter der Bedingung, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ ist, d. h. $r + s < p$. *Die beiden Scharen von asymptotischen Kurven sind also reell für $r + s < p$ und konjugiert imaginär für $r + s > p$. Im ersten Falle sind die Punkte der Flächen hyperbolisch und im zweiten elliptisch.* Für den speziellen Fall, wo die Flächen algebraisch sind, wurde dies bereits in der 33. Nummer bemerkt.

Ein dritter reeller Fall lässt sich dadurch charakterisieren, dass *x und y, z und w zwei Paare von konjugiert imaginären Ebenen bedeuten.* Es müssen dann auch die Exponenten p und r, q und s konjugiert imaginär sein. Auf Grund der Bedingung $p + q = r + s$ ist der Betrag des imaginären Teiles in sämtlichen vier Exponenten derselbe. Nun ist das Doppelverhältniss μ für die Schnittpunkte einer reellen Geraden mit zwei Paaren konjugiert imaginärer Ebenen reell. In der Tat sind auch in diesem Falle sowohl die Koeffizienten wie die Wurzeln der Gleichung (108) reell. *Wir erhalten also hier nur Flächen mit hyperbolischen Punkten und reellen asymptotischen Kurven.* Für den algebraischen Unterfall, wo es sich bloss um Regelflächen handelt, ist uns dies schon nach einer früheren Bemerkung bekannt.

Im vierten reellen Falle hat man *x und w, y und z als Paare von konjugiert imaginären Ebenen.* Die Exponentenpaare p und q, r und s sind dann ebenfalls konjugiert, wobei, da wir $p + q = r + s$ haben, der reelle Teil von allen vier Exponenten derselbe sein muss. Für die Gleichung (108) bekommen wir auch in diesem Falle reelle Wurzeln. *Es sind demnach die beiden Scharen der asymptotischen Kurven reell und die Punkte der Flächen hyperbolisch.*

In der 27. Nummer wurde mitgeteilt, wie Reye vier in reeller Hinsicht verschiedene Typen von F_2-Büscheln mit einem gemeinsamen windschiefen Vierseit gefunden hat. Man erkennt sofort, dass man in den obigen vier reellen Fällen Verallgemeinerungen dieser Typen erhält.

41. Zuletzt betrachten wir die Möglichkeit $p = r + s$, $q = 0$. Wir erhalten dann als Übergang zwischen (90) und (90_1) das Büschel

$$x^p - \lambda y^r z^s = 0. \tag{109}$$

Nur die beiden ersten reellen Fälle der vorigen Nummer lassen sich hier vertreten. Es sei jetzt (96) eine W-Kurve von einer solchen Gattung, dass die

Kurven auf den Kegeln (109) liegen. Berücksichtigen wir den Anfang der 37. Nummer, so erhalten wir als eine Bedingung in Ebenenkoordinaten, der die Kurve genügen muss,

$$\xi^p - \frac{n_1^r n_2^s (n_1 - n_2)^p}{(n_2 - n)^r (n - n_1)^s n^p} \eta^r \zeta^s = 0.$$

Die Bedeutung hiervon ist eine Kurve in der Ebene $w = 0$. In Punktkoordinaten erhalten wir für diese Kurve die Gleichung

$$x^p - (-1)^p \frac{p^p (n_2 - n)^r (n - n_1)^s n^p}{r^r s^s n_1^r n_2^s (n_1 - n_2)^p} y^r z^s = 0.$$

Man hat aber

$$n_2 - n = \frac{r}{p}(n_2 - n_1); \qquad n - n_1 = \frac{s}{p}(n_2 - n_1).$$

Die Gleichung der Kurve lässt sich mithin in der einfacheren Gestalt

$$x^p - \frac{(r n_1 + s n_2)^p}{p^p n_1^r n_2^s} y^r z^s = 0 \tag{110}$$

schreiben. Diese Kurve ist der Schnitt der Ebene $w = 0$ mit demjenigen Kegel (109), für welchen wir

$$\bar{\lambda} = \frac{(r n_1 + s n_2)^p}{p_p n_1^r n_2^s} \tag{111}$$

haben. Die Gleichung (111) ist vom Grade p in $\frac{n_2}{n_1}$. Ist $\bar{\lambda}$ gegeben, so werden durch dieselbe p Gattungen von W-Kurven bestimmt, welche auf den Kegeln (109) liegen[1]. Zu jeder Kurvengattung gehört eine Schar von Kongruenzen. *Die Brennflächen jeder solchen Kongruenz reduzieren sich auf einen Kegel* (109) *und die Schnittkurve eines solchen Kegels mit der Ebene $w = 0$, wobei $\bar{\lambda}$ das Verhältniss zwischen den Parametern der Kegel bezeichnet, und bei gegebenen Brenngebilden bekommt man p verschiedene Kongruenzen.* Für $\bar{\lambda} = 1$ liegt die Brennkurve auf dem Brennkegel. Man erhält dann als doppelte Lösung von (111) $\frac{n_2}{n_1} = 1$. Die zugehörigen W-Kurven sind die Erzeugenden des Kegels. Der obigen doppelten Lösung entspricht eine Kongruenz, welche durch die von den Punkten der Brennkurve ausgehenden Strahlenbüscheln erzeugt wird, die in der Berührungsebene des Kegels liegen.

---

[1] Wir denken uns also hier p, r und s als ganze teilerfremde rationale Zahlen.

Verallgemeinerungen der obigen Kongruenzen lassen sich leicht konstruieren. Man braucht nämlich nur eine Brennkurve und eine abwickelbare Brennfläche zu wählen, welche dieselbe eingliedrige Gruppe gestatten. Durch einen beliebigen Punkt der Kurve gehen gewisse Ebenen an die abwickelbare Fläche. In jeder von diesen Ebenen hat man ein Strahlenbüschel mit dem Punkte als Zentrum, und es wird eine Kongruenz erzeugt, indem dieses Büschel durch die eingliedrige Gruppe in andere Lagen versetzt wird. *Jede der obigen Ebenen gibt also zu einer besonderen Kongruenz Anlass.* Im algebraischen Falle erhält man demnach eben so viele Kongruenzen wie *die Klasse der abwickelbaren Fläche.* Nach reziproker Schlussweise soll die Anzahl der Kongruenzen gleich *der Ordnung der Brennkurve* sein. Für algebraische W-Kurven sind aber Ordnung und Klasse gleich, was z. B. aus einem Vergleich von (96) mit (98) hervorgeht. *Auch die Ordnung und Klasse jeder einzelnen Kongruenz ist gleich der Ordnung der Brennkurve.* Von jedem Punkte der Brennkurve geht ja ein Strahlenbüschel aus, das zur Kongruenz gehört, und in einer beliebigen Ebene erhält man also eben so viele Linien der Kongruenz wie Schnittpunkte mit der Brennkurve. In entsprechender Weise beweist man den Satz für die Ordnung der Kongruenz. Hat man Inzidenz zwischen der Brennkurve und der abwickelbaren Fläche, so vereinigen sich zwei von den Kongruenzen in eine doppelt zählende. Dies gilt sogar für zwei Paare von Kongruenzen, wenn die Brennkurve mit einer Doppelkurve der Fläche zusammenfällt. Endlich kann man als Brennkurve die Kuspidalkurve der abwickelbaren Fläche wählen. Es haben sich dann drei Kongruenzen in eine einzige vereinigt. Dieselbe wird durch diejenigen Strahlenbüschel erzeugt, deren Ebenen Schmiegungsebenen der Zentren sind.

Besondere Verhältnisse können eintreten, falls die Kurve in einer Koordinatenebene liegt oder als abwickelbare Fläche ein Kegel mit dem Zentrum in einer Koordinatenecke auftritt. Wir interessieren uns hier hauptsächlich für solche Fälle, wo beide diese Spezialisierungen in der Lage gelten, wie in dem zu Anfang dieser Nummer behandelten Beispiel. Nach der Voraussetzung gibt es eine eingliedrige Gruppe, deren Operationen gleichzeitig die Linien des Kegels und die Punkte der Kurve in einander überführen. Kombinieren wir diese Gruppe mit den Perspektivitäten, welche als Zentrum und Ebene die Spitze des Kegels bzw. Ebene der Kurve haben, so ergibt sich eine zweigliedrige Gruppe. Erstens erhalten wir nun sowohl ein Büschel von Kegeln als ein Büschel von ebenen Kurven, welche diese zweigliedrige Gruppe gestatten. Betrachten wir zweitens eine beliebige eingliedrige Untergruppe dieser Gruppe, so verteilen sich die Bahnkurven als Punktgebilde auf den Kegeln und als Ebenengebilde auf den ebenen Kurven. Dabei werden die Kegeln und die Kurven einander eindeutig in Paare zugeordnet, und für eine W-Kongruenz von der oben betrachteten Art reduzieren sich die Brenngebilde auf ein solches Paar. Als ein Beispiel können wir die bereits in der 31. Nummer behandelte quadratische Kongruenz hervorheben. In den angeführten Beispielen liegt die Ebene der Brennkurve gegenüber der Spitze des Brennkegels. Die fragliche Ebene kann natürlich auch eine von den drei Koordinatenebenen sein, welche durch die Spitze des Kegels gehen.

§ 6.

Realitätsfragen.

42. Wir wollen hier nach der Anzahl der *reellen* Kongruenzen in den algebraischen Fällen fragen. Für die Brennflächen erhalten wir dann in den allgemeinsten Fällen die reellen Darstellungen in der Gestalt (90) oder (90_1). Zunächst seien die Brennflächen vom Typus (90). Der Gleichung (104) können wir dann die Gestalt

$$\bar{\lambda} = (-1)^{p+q} \frac{q^q [(p-s)\nu - r]^{p-s} [s\nu - (p-r)]^{p-r} (s\nu + r)^{p+q}}{p^p r^r s^s \nu^{p-r} (1-\nu)^{p+q}} \tag{112}$$

geben, wo wir hier mit $\bar{\lambda}$ den Quotienten zwischen den beiden zu den Brennflächen gehörigen Parameterwerten λ bezeichnen. Für die Umgebungen von $\bar{\lambda} = 0$ und $\bar{\lambda} = \infty$ erhält man nun unmittelbar die Lösungen von (112), indem ν sich durch gewöhnliche Puiseuxsche Reihenentwicklungen ausdrücken lässt, und in jedem Falle sieht man ohne Schwierigkeit, wie viele von diesen Entwicklungen reell sind. Für $\bar{\lambda} \to 0$ hat man hierbei die Ausgangswerte $\nu = -\frac{r}{s}, \frac{p-r}{s}, \frac{r}{p-s}$ und für $\bar{\lambda} \to \infty$ $\nu = 0, 1, \infty$, welche sich in alternierender Lage mit den drei ersteren befinden. Bei ungeändertem Zeichen von $\bar{\lambda}$ findet man dieselbe Anzahl von reellen Entwicklungen für $\lambda \to 0$ wie für $\lambda \to \infty$. Es lässt sich jetzt schliessen, dass die Anzahl der reellen Lösungen von (112) sich nicht ändert, wenn das Zeichen von $\bar{\lambda}$ dasselbe bleibt. Eine Änderung hierin hätte ja durch gleiche Wurzeln vermittelt werden sollen. Solche treten aber nur für $\bar{\lambda} = 1$ auf, und zwar in der Gestalt von zwei dreifachen Wurzeln, und wir wissen bereits, dass die fragliche Anzahl für $\bar{\lambda} > 1$ und $\bar{\lambda} < 1$ dieselbe ist.

Für die reellen Entwicklungen von ν in der Umgebung von $\bar{\lambda} = 0$ oder $\bar{\lambda} = \infty$ ist es von wesentlicher Bedeutung, wie die Exponenten $p - s$, $p - r$ und $p + q$ sich in gerade und ungerade Zahlen verteilen. Zu jedem ungeraden Exponenten gehört offenbar *eine* reelle Entwicklung sowohl für $\bar{\lambda} > 0$ als $\bar{\lambda} < 0$. Bei einem geraden Exponenten hat man dagegen für das eine Zeichen von $\bar{\lambda}$ *keine* und für das andere *zwei* reelle Entwicklungen. Es sind jetzt drei Fälle zu unterscheiden.

a) Sämtliche vier Exponenten p, q, r, s sind ungerade. Die drei Exponenten $p-s$, $p-r$, $p+q$ sind dann gerade Zahlen. Man bekommt *sechs reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} > 0$ *und keine reelle Kongruenz für* $\bar{\lambda} < 0$.

b) Von den Paaren p, q und r, s enthält das eine gerade und das andere ungerade Zahlen. Unter den Exponenten $p-s$, $p-r$ und $p+q$ ist dann nur der letztere eine gerade Zahl. Man erhält *zwei reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} > 0$ *und vier reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} < 0$.

c) Im dritten Falle ist eine von den Zahlen p und q gerade und die andere ungerade. Da $p + q = r + s$, muss dasselbe für die Zahlen r und s gelten. Einer von den Exponenten $p-s$ und $p-r$ ist dann gerade und die andere ungerade. Auch der Exponent $p + q$ ist eine ungerade Zahl. Wir bekommen *vier reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} > 0$ *und zwei reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} < 0$.

Für $p = r$, $q = s$ gehen im Zähler und Nenner von (112) die Faktoren mit dem Exponenten $p - r$ weg, und (104) geht in die spezielle Gestalt (104_1) über. Von den obigen drei Fällen können hier nur (a) und (c) auftreten. Wir erhalten im Falle (a) *vier reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} > 0$ *und keine reelle Kongruenz für* $\bar{\lambda} < 0$. Im Falle (c) bekommen wir *zwei reelle Kongruenzen für sowohl* $\bar{\lambda} > 0$ *als* $\bar{\lambda} < 0$.

Bei der weiter gehenden Spezialisierung $p = r = q = s = 1$ erhalten wir die Hirstschen Kongruenzen wieder. Wir sind hier im Falle (a) und bekommen *zwei reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} > 0$ *und keine reelle Kongruenz für* $\bar{\lambda} < 0$, wie uns ja dies bereits aus dem vorhergehenden Abschnitte bekannt ist.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo die Brennflächen vom Typus (90_1) sind. Es wird dann (112) durch

$$(112_1) \qquad \bar{\lambda} = (-1)^p \frac{((p-s)\nu - r)^{p-s}\,(s\nu - (p-r))^{p-r}\,(r + s\nu)^{p-q}}{p^p\, q^q\, r^r\, s^s\, \nu^{p-r}\,(1-\nu)^{p-q}}$$

ersetzt. Es sind auch hier drei Fälle zu unterscheiden.

a$_1$) Sämtliche Exponenten p, q, r, s sind ungerade. Man bekommt *keine reelle Kongruenz für* $\bar{\lambda} > 0$ *und sechs reelle Kongruenzen für* $\lambda < 0$.

b$_1$) Es seien p und einer von den Exponenten q, r und s ungerade, die übrigen beiden aber gerade Zahlen. Wir erhalten *vier reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} > 0$ *und zwei reelle Kongruenzen für* $\bar{\lambda} < 0$.

c$_1$) Umgekehrt bekommen wir, wenn die ersteren beiden Exponenten im vorigen Falle gerade und die letzteren beiden ungerade sind, *für* $\bar{\lambda} > 0$ *zwei und für* $\bar{\lambda} < 0$ *vier reelle Kongruenzen.*

Zuletzt stellen wir die Frage nach den reellen Kongruenzen bei dem besonderen Falle $\bar{\lambda} = 1$, wo wir eine doppelte Brennfläche haben. Die Anzahl der Kongruenzen überhaupt in diesem Falle kennen wir aus den Entwicklungen am Ende der 37. Nummer. Zwei von diesen Kongruenzen erhalten wir aus den beiden Systemen von Haupttangenten, und dieselben sind in den Fällen (a), (b) und (c) reell. Man sieht aber leicht, dass von den drei Kongruenzen, welche sich in eine solche Haupttangentenkongruenz vereinigt haben, nur eine reell sein kann. Es handelt sich in der Tat hier im wesentlichen um die Eigenschaft einer binomischen Gleichung 3. Grades, welche eine dreifache Wurzel $= 0$ erhält, wenn das konstante Glied verschwindet. Die Kongruenzen dagegen, welche sich für $\bar{\lambda} = 1$ in eine reelle Doppeltangentenkongruenz vereinigt haben, müssen beide reell sein. Wir können jetzt leicht die Anzahl der reellen Doppeltangentenkongruenzen in den verschiedenen Fällen bestimmen: Wir erhalten

zwei solche Kongruenzen in den Fällen (a) *und* (b$_1$);
eine in den Fällen (c) *und* (c$_1$);
keine in den Fällen (b) *und* (a$_1$).

Ist die Brennfläche eine Regelfläche, d. h. hat man $p = r$, $q = s$, so werden die obigen Anzahlen um eine Einheit vermindert. Man erhält also dann *eine* bzw. *keine* reelle Doppeltangentenkongruenz, je nachdem die Regelfläche zum Falle (a) bzw. (c) gehört.

43. Wir haben bereits in (92) und (92$_1$) für $\lambda = 1$ Beispiele der zweiten reellen Darstellung der W-Flächen gegeben. In den algebraischen Fällen muss dann $r = s$ sein. Da hier y und z durch zwei konjugierte Grossen $y \pm iz$ zu ersetzen sind, so müssen, wenn in diesem Falle (96) eine reelle Kurve bedeutet, auch die Exponenten n_1 und n_2 konjugiert imaginär sein. Für reelle Kongruenzen muss man also in (104) $|\nu| = 1$ haben. Wir setzen dementsprechend $\nu = e^{\theta i}$.

Eine zweckmässige Umformung von (104) erscheint hier erwünscht. Zunächst erhalten wir

$$\left[\frac{[(p-r)\nu-r]\,[r\nu-(p-r)]}{\nu}\right]^{p-r}=(-1)^{p-r}\,[r^2+(p-r)^2-r(p-r)(\nu+\nu^{-1})]^{p-r}=$$
$$=(-1)^{p-r}\,[r^2+(p-r)^2-2\,r(p-r)\cos\theta]^{p-r}.$$

Es ergibt sich weiter

$$\left(\frac{r+r\nu}{1-\nu}\right)^{p\pm q}=(-1)^r\,r^{p\pm q}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)^{p\pm q}.$$

Zwischen ν und $\cot\frac{\theta}{2}$ besteht die lineare Relation

$$\cot\frac{\theta}{2}=i\,\frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

Wir können also in (104) als neue unbekannte $\cot\frac{\theta}{2}$ einführen. Die Gleichung (112) nimmt jetzt die Gestalt

$$(113)\qquad \bar{\lambda}=(-1)^p\,p^{-p}\,q^q\,[r^2+(p-r)^2-2\,r(p-r)\cos\theta]^{p-r}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)^{p+q}.$$

Man sieht unmittelbar, dass, falls θ reell bleibt, nur der letzte Faktor rechts in (113) beliebig klein oder beliebig gross werden kann. Nun lassen sich für $\bar{\lambda}\to 0$ oder $\bar{\lambda}\to\infty$ die reellen Entwicklungen von $\cot\frac{\theta}{2}$ leicht bestimmen, und die Anzahl dieser Entwicklungen bleibt aus oben angeführten Gründen ungeändert, wenn $\bar{\lambda}$ das Zeichen nicht wechselt. Da $p+q=2\,r$ hier stets eine gerade Zahl bedeutet, so erhält man für $(-1)^p\bar{\lambda}>0$ zwei reelle Entwicklungen und für $(-1)^p\bar{\lambda}<0$ keine reelle Entwicklung. Es sind mithin zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem p ungerade oder gerade ist.

Ist p ungerade, so erhält man für $\bar{\lambda}>0$ keine reelle Kongruenz und für $\bar{\lambda}<0$ zwei reelle Kongruenzen. Wenn dagegen p gerade ist, so hat man für $\bar{\lambda}>0$ zwei reelle Kongruenzen und für $\bar{\lambda}<0$ keine reelle Kongruenz. Da die asymptotischen Kurven der Brennflächen hier imaginär sind, so bekommt man im letzteren Falle (für $\bar{\lambda}=1$) *eine reelle Doppeltangentenkongruenz.*

Durch eine entsprechende Umformung von (112_1) erhält man

$$(113_1)\qquad \bar{\lambda}=p^{-p}\,q^{-q}\,[r^2+(p-r)^2-2r(p-r)\cos\theta]^{p-r}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)^{p-q}.$$

Wie sich hieraus ablesen lässt, erhält man in den betreffenden Fällen *für* $\lambda > 0$ *zwei reelle Kongruenzen und für* $\lambda < 0$ *keine reelle Kongruenz.* Da man hier zwei reelle Scharen von asymptotischen Kurven hat, so gibt es *keine reelle Doppeltangentenkongruenz.*

Der Geltungsbereich für die Resultate der letzten beiden Nummern lässt sich wesentlich erweitern. Die absoluten Werte der Exponenten p, q, r, s übten ja auf die erhaltenen Anzahlen der reellen Kongruenzen keinen Einfluss. Was hier bestimmend wirkte, war nämlich nur, wie p, q, r und s sich in gerade und ungerade Zahlen verteilen. Nun können wir für das reelle Gebiet, wie wir dies früher für die W-Kurven getan haben, *verallgemeinerte W-Flächen* einführen, indem wir z. B. für einen beliebigen Exponenten $p > 0$ den Faktor x^p entweder $|x|^p$ oder $\operatorname{sgn} x . |x|^p$ schreiben, so dass wir freie Wahl zwischen einem Faktor von geradem Typus oder einem solchen von ungeradem Typus haben. Wir können also in den Fällen (a), (b), (c), (a_1), (b_1) und (c_1) der vorigen Nummer die Exponenten beliebig variieren, wenn nur die Bedingung $p + q = r + s$ bzw. $p = q + r + s$ aufrecht erhalten wird, und für die einzelnen Faktoren in der Gleichung der W-Flächen der Typus (als gerader oder ungerader) nicht geändert wird. In jedem der sechs erwähnten Fälle stellen die verallgemeinerten W-Flächen ein Kontinuum dar, in welchem die algebraischen Flächen überall dicht auftreten, und man versteht ohne weiteres, dass die Resultate der vorigen Nummer über reelle Kongruenzen sich auf das ganze Kontinuum ausdehnen lassen.

Da $p \pm q = 2r$, so sind in dem in dieser Nummer behandelten reellen Falle p und q entweder beide gerade oder beide ungerade. Wir bekommen hieraus die Verallgemeinerungen, dass wir, unter Beibehaltung einer Identität $p \pm q = 2r$, die Zahlen p, q, r beliebig > 0 wählen und x^p, w^q beide als Faktoren von entweder geradem oder ungeradem Typus nehmen.[1] Nach Nr. 33 können wir hier die W-Flächen als Umdrehungsflächen um die Achse $y = z = 0$ deuten. Durch die Ebenen $x = 0$ und $w = 0$ wird diese Achse in zwei Abschnitte geteilt. Sind x^p und w^q als Faktoren von ungeradem Typus zu betrachten, so ist die Fläche einteilig und umschliesst nur den einen von diesen Abschnitten. Dabei geht man von dem einen zu dem anderen Abschnitte über, wenn der Parameter λ das Zeichen wechselt. Wenn aber x^p und w^q von geradem Typus sind, so ist die

[1] Nach Nr. 40 können wir in diesem reellen Falle die Exponenten r und s auch durch zwei konjugiert imaginäre Grössen ersetzen. Man erhält aber dann W-Flächen, welche sich unendlich oft um die Axe $y = z = 0$ windeln, so dass dieselben bereits in ihrem reellen Verlauf von den algebraischen Flächen abweichen.

Fläche für $\lambda < 0$ nullteilig und für $\lambda > 0$ zweiteilig, wobei dieselbe als eine Zusammenfassung von zwei Flächen des vorhergehenden Falles aufgefasst werden kann, welche verschiedene Abschnitte der Achse umschliessen. Es lässt sich jetzt leicht der wesentliche Unterschied zwischen den Fällen $p + q = 2r$ und $p - q = 2r$ angeben. Im ersten Falle sind die Punkte der Flächen elliptisch, und als Bedingung dafür, dass zwei Flächen oder Flächenteile gemeinsame Tangenten besitzen, findet man, dass dieselben verschiedene Abschnitte der Achse umschliessen müssen. Im zweiten Falle dagegen, wo die Punkte der Flächen hyperbolisch sind, erhält man die Umschliessung desselben Abschnittes der Achse als entsprechende Bedingung. Diese Resultate stimmen, wie man sich ohne Schwierigkeit überzeugt, mit denjenigen überein, welche wir zu Anfang dieser Nummer über reelle Kongruenzen abgeleitet haben.

44. Bei dem dritten reellen Falle gibt es keine anderen algebraischen Flächen als Regelflächen. Ein Beispiel haben wir in (91) gegeben. Für die reellen Flächen eines Büschels

$$(114) \qquad (x + iy)^p (z + iw)^q - \lambda (x - iy)^p (z - iw)^q = 0$$

muss man $|\lambda| = 1$ haben. Setzt man $-\lambda = e^{2\varrho i}$, so lässt sich die obige Gleichung auch in die Gestalt

$$(114_1) \qquad e^{-\varrho i} (x + iy)^p (z + iw)^q + e^{\varrho i} (x - iy)^p (z - iw)^q = 0$$

überführen, in welcher die imaginären Bestandteile der Glieder einander aufheben, so dass wir eine reelle Gleichung erhalten haben. Als Repräsentanten für eine Gattung von W-Kurven, welche auf den Flächen des Büschels liegen, wählen wir

$$(115) \qquad x + iy : x - iy : z + iw : z - iw = t^n : t^{n_3} : t^{n_1} : t^{n_2}.$$

Die Exponenten sind dabei der Bedingung

$$(115_1) \qquad p(n - n_1) - q(n_2 - n_3) = 0$$

unterworfen. Da wir, in Übereinstimmung mit den Erörterungen in der 2. Nummer, für reelle W-Kurven n und n_1 sowie n_2 und n_3 als konjugiert imaginär annehmen, so hat man in (115_1) eine Relation für die imaginären Teile der Exponenten.

Wir wollen jetzt die Gleichung aufstellen, welche in diesem Falle den Relationen (112) und (113) entspricht. Dabei ist es zweckmässig unseren Ausgangspunkt in (103_1) zu nehmen, doch mit der leichten Umformung, dass, da wir hier nicht $n_3 = 0$ angenommen haben, n und n_1 durch $n - n_3$ und $n_1 - n_3$ zu ersetzen sind. Schreiben wir noch $\bar{\lambda} = e^{\bar{\theta} i}$, so erhalten wir die gesuchte Relation in der Gestalt

$$(116) \qquad e^{\bar{\theta} i} = \left(\frac{n - n_2}{n_1 - n_3}\right)^{p-q} \left(\frac{n - n_3}{n_1 - n_2}\right)^{p+q}.$$

Wie man sieht, sind Zähler und Nenner der Quotienten rechts konjugierte Grössen. Schreibt man

$$\frac{n - n_3}{n_1 - n_2} = e^{\varphi i},$$

so ergibt sich

$$n - n_3 = k e^{\frac{\varphi i}{2}}; \quad n_1 - n_2 = k e^{-\frac{\varphi i}{2}},$$

wo k irgend eine reelle Grösse bedeutet. Unter Bezugnahme auf (115_1) erhalten wir jetzt

$$n - n_1 + n_2 - n_3 = \frac{q + p}{p}(n_2 - n_3) = k\left(e^{\frac{\varphi i}{2}} - e^{-\frac{\varphi i}{2}}\right);$$

$$n_2 - n_3 = \frac{kp}{p + q}\left(e^{\frac{\varphi i}{2}} - e^{-\frac{\varphi i}{2}}\right); \quad n - n_1 = \frac{kq}{p + q}\left(e^{\frac{\varphi i}{2}} - e^{-\frac{\varphi i}{2}}\right);$$

$$n - n_2 = n - n_1 + n_1 - n_2 = \frac{kq}{p + q} e^{\frac{\varphi i}{2}} + \frac{kp}{p + q} e^{-\frac{\varphi i}{2}};$$

$$n_1 - n_3 = n - n_3 - (n - n_1) = \frac{kp}{p + q} e^{\frac{\varphi i}{2}} + \frac{kq}{p + q} e^{-\frac{\varphi i}{2}}.$$

Die Gleichung (116) lässt sich jetzt in

$$(117) \qquad e^{\bar{\theta} i} = \left(\frac{q e^{\frac{\varphi i}{2}} + p e^{-\frac{\varphi i}{2}}}{p e^{\frac{\varphi i}{2}} + q e^{-\frac{\varphi i}{2}}}\right)^{p-q} e^{(p+q)\varphi i}$$

umformen. Schreiben wir (117) als eine Gleichung für die Argumente, so ergibt sich

$$(118) \qquad \bar{\theta} \equiv (p + q)\varphi - 2(p - q) \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{p - q}{p + q} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Wenn φ von 0 bis 2π zunimmt, so wächst das rechte Glied stetig von 0 bis

$$2(p+q)\pi - 2(p-q)\pi = 4q\pi.$$

Es muss also jedenfalls $2q$ Zwischenlagen geben, welche Lösungen von (118) *darbieten.* Um aber zu beweisen, dass (118) *nur* $2q$ Lösungen haben kann, muss man noch dartun, dass das rechte Glied monoton wächst. Zu dem Ende suchen wir die Ableitung und erhalten

$$(119) \qquad p + q - \frac{(p-q)^2(p+q)}{(p+q)^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + (p-q)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Der Ausdruck (119) erweist sich nun als > 0 mit der einzigen Ausnahme, dass derselbe für $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ verschwindet. Der Lösung $\varphi = \pi$ entspricht aber auf dem linken Gliede $e^{\bar{\theta} i} = 1$, und wir verstehen leicht, dass es sich in diesem Falle um die dreifache Lösung handelt, welche dem System der Haupttangentenkurven entspricht.[1]

Man erhält also $2q$ reelle Kongruenzen, welche als Brennflächen zwei Regelflächen vom Typus (114) *besitzen, und bei doppelter Brennfläche hat man $q-1$ reelle Doppeltangentenkongruenzen.*

45. Es gibt aber noch die Möglichkeit für reelle Kongruenzen, dass *die Brennflächen konjugiert imaginär sein können.* Als eine Spezialisierung hiervon ist der Fall zu betrachten, wo man *eine doppelte reelle Brennfläche hat, welche von den Linien der Kongruenz in zwei konjugiert imaginären Punkten berührt wird.* Gilt nun für ein Büschel von W-Flächen die reelle Gestalt (90) oder (90_1), so müssen für zwei konjugiert imaginäre Flächen des Büschels die Parameter λ konjugiert imaginär sein. Der Quotient zwischen diesen Parametern, welchen wir mit $\bar{\lambda}$ bezeichnet haben, ist also *von der Gestalt* $e^{\bar{\theta} i}$. Dieselben Resultate gelten offenbar auch in dem in der vorletzten Nummer behandelten zweiten reellen Falle.

Im dritten reellen Falle erhält man abweichende Bedingungen für zwei konjugiert imaginäre Flächen. Betrachtet man also das Büschel (114), so findet man, dass für zwei konjugierte Flächen die Beträge der Parameter λ zu einander

[1] Zwei von diesen drei zusammenfallenden Lösungen sind mithin als reelle Lösungen neu hinzugekommen.

invers und die Argumente gleich sein müssen. *Für zwei konjugiert imaginäre Flächen ist also hier das Verhältniss $\bar{\lambda}$ zwischen den Parametern eine positive Grösse.*

Für $p = r$, $q = s$, wo die W-Flächen Regelflächen sind, spielen also die Fälle $\bar{\lambda} > 0$ und $|\bar{\lambda}| = 1$ die umgekehrte Rolle, je nachdem die Flächen zum ersten oder dritten Realitätsfalle gehören. In der vorigen Nummer haben wir also, den Lösungen von (117) entsprechend, im dritten Realitätsfalle $2q$ reelle Kongruenzen gefunden, welche zwei verschiedene reelle Flächen des Büschels (114) als Brennflächen haben. *Im ersten Realitätsfalle hat man die gleiche Anzahl von $2q$ reellen Kongruenzen, welche zwei konjugiert imaginäre Flächen als Brennflächen besitzen.* In der 42. Nummer haben wir für $\bar{\lambda} > 0$ gezeigt, dass es, wenn p und q beide ungerade sind, vier reelle Kongruenzen und, wenn eine von den Zahlen p und q gerade ist, zwei reelle Kongruenzen mit zwei reellen Brennflächen gibt. *Dieselben Anzahlen gelten nun im dritten Realitätsfall für die reellen Kongruenzen mit zwei konjugiert imaginären Brennflächen.* Wir können auch jetzt die Anzahl der reellen Kongruenzen mit einer doppelten Brennfläche bestimmen, deren Linien in zwei konjugiert imaginären Punkten berühren. Diese Anzahl stimmt ja mit derjenigen überein, welche man bei zwei reellen Berührungspunkten im anderen Realitätsfalle hat. *Man hat mithin im ersten Realitätsfalle $q - 1$ reelle Kongruenzen, deren Linien die reelle doppelte Brennfläche in zwei konjugierten Punkten berühren. Im dritten Realitätsfall hat man eine bzw. keine solche Kongruenz, je nachdem p und q beide ungerade sind oder eine von diesen Zahlen gerade ist.*

46. Wir wollen die Sache für den allgemeinen ersten Realitätsfall weiter ausführen. Wenn wir in (107) $\frac{n_2}{n_1} = \nu$ setzen, so bekommen wir die Gleichung

$$s\nu^2 - (p - r - \mu(p - s))\nu - \mu r = 0. \tag{120}$$

Der Parameter μ bestimmt hier den tetraedralen Komplex, der die Kongruenz ausschneidet, und die Wurzeln ν charakterisieren die beiden Gattungen von W-Kurven, welche zur Kongruenz gehören. Diese Wurzeln bilden Paare einer Involution, für deren Doppelelemente μ die Gleichung (108) befriedigt. Für $r + s - p < 0$ sind diese Doppelelemente konjugiert imaginär. Die Involution ist also elliptisch, und (120) besitzt für jeden reellen μ-Wert zwei reelle Wurzeln. Da jede reelle Gerade zu einem tetraedralen Komplexe mit einem reellen Doppelverhältniss μ gehören muss, so können wir hieraus schliessen, *dass es in diesem*

Falle reelle Kongruenzen mit zwei konjugiert imaginären Brennflächen nicht gibt. In anderen Worten lässt sich dies so ausdrücken, *dass die beiden Flächen eines Büschels* (90_1), *welche von einer reellen Geraden berührt werden, stets reell sein müssen.*

Zu zwei konjugiert imaginären Flächen eines Büschels (90) *gibt es dagegen* $2q$ *reelle Kongruenzen, welche dieselben als Brennflächen haben.* Hierin haben wir eine Verallgemeinerung der Resultate der vorigen Nummer, bei denen ja von dem speziellen Falle $p = r$, $q = s$ ausgegangen wurde. Zunächst erhalten wir durch Elimination von μ, wenn ν und ν' entsprechende Elemente der durch (120) definierten Involution bedeuten,

$$s(p-s)\nu\nu' - rs(\nu+\nu') + r(p-r) = 0. \tag{121}$$

Wir erhalten die folgenden drei Paare von entsprechenden Elementen

$$\nu = \infty,\ \nu' = \frac{r}{p-s};\quad \nu = 0,\ \nu' = \frac{p-r}{s};\quad \nu = 1,\ \nu' = -\frac{r}{s}.$$

Wir sehen hieraus, dass die Nullstellen im Zähler und Nenner von (104) mit denselben Exponenten einander entsprechen. Führen wir jetzt, in Übereinstimmung mit (121), in (104) die Substitution

$$\nu = \frac{r(s\nu' - (p-r))}{s((p-s)\nu' - r)} \tag{122}$$

aus, so finden wir, dass der Ausdruck rechts invertiert wird, so dass Zähler und Nenner ihren Platz vertauschen. *Die beiden* ν-*Werte eines Paares der Involution* (121) *befriedigen mithin Gleichungen* (112) *mit inversen* $\bar{\lambda}$-*Werten.* Dieses Resultat war zu erwarten, da die beiden Systeme von Kurven, welche zur Kongruenz gehören, auf verschiedenen Brennflächen liegen, und das Verhältniss $\bar{\lambda}$ zwischen den Parametern dieser Flächen invertiert wird, wenn man die Kurvensysteme vertauscht.

Für $r + s > p$ sind die Doppelelemente ν_1, ν_2 der Involution (121), welche wir übrigens bereits in (102) gegeben haben, reell und verschieden. Wenn wir die neue Veränderliche

$$\bar{\nu} = \frac{\nu - \nu_1}{\nu - \nu_2}$$

einführen, so nimmt die Involution die einfache Gestalt

$$\bar{\nu} + \bar{\nu}' = 0$$

an. Für die Elemente eines Paares hat man also

$$\bar{\nu}^2 = \alpha .$$

Die reellen Paare erhält man dann für $\alpha > 0$ und die konjugiert imaginären Paare für $\alpha < 0$; die letzteren sind mithin bei dieser Veränderlichen rein imaginär.

Wir wollen nun in (112) ν durch $\bar{\nu}$ ersetzen. Nach leichten Rechnungen erhalten wir

$$(p - s)\nu - r = \frac{(p - s)(\nu_2 - \nu_1)}{2} \cdot \frac{\bar{\nu} + 1}{\bar{\nu} - 1};$$

$$\frac{s\nu - (p - r)}{\nu} = \frac{s(\nu_2 - \nu_1)}{\nu_2 + \nu_1} \cdot \frac{\bar{\nu} + \frac{\nu_1}{\nu_2}}{\bar{\nu} - \frac{\nu_1}{\nu_2}};$$

$$\frac{r + s\nu}{1 - \nu} = \frac{s(\nu_1 - \nu_2)}{\nu_1 + \nu_2 - 2} \cdot \frac{\bar{\nu} + \frac{\nu_1 - 1}{\nu_2 - 1}}{\bar{\nu} - \frac{\nu_1 - 1}{\nu_2 - 1}}.$$

Für die hier auftretenden numerischen Faktoren erhalten wir

$$\nu_1 + \nu_2 = \frac{2r}{p - s}; \quad \nu_1 + \nu_2 - 2 = \frac{2q}{p - s}; \quad \nu_1 - \nu_2 = \frac{2\sqrt{pqrs}}{s(p - s)}.$$

In der neuen Veränderlichen $\bar{\nu}$ geht (112) in

$$(123) \qquad \lambda = \left(\frac{\bar{\nu} + 1}{\bar{\nu} - 1}\right)^{p-s} \left(\frac{\bar{\nu} + \frac{\nu_1}{\nu_2}}{\bar{\nu} - \frac{\nu_1}{\nu_2}}\right)^{p-r} \left(\frac{\bar{\nu} + \frac{\nu_1 - 1}{\nu_2 - 1}}{\bar{\nu} - \frac{\nu_1 - 1}{\nu_2 - 1}}\right)^{p+q}$$

über. Die Anzahl der reellen Kongruenzen mit zwei konjugiert imaginären Brennflächen reduziert sich nun auf die Anzahl der rein imaginären Wurzeln von (123) für $\bar{\lambda} = e^{\bar{\theta} i}$. Wenn $\bar{\nu}$ rein imaginär ist, so sieht man sofort, dass das rechte Glied von (123) den Betrag 1 hat. Die Frage ist, wie oft das Argument $\equiv \bar{\theta}$ wird, wenn $\bar{\nu}$ von $-i\infty$ bis $i\infty$ variiert. Die Veränderung des Argumentes bei dieser Variation ist von den Zeichen der Grössen $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ und $\frac{\nu_1 - 1}{\nu_2 - 1}$ abhängig. Da

ν_1 und ν_2 beide > 0 sind, so ist $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ positiv. Dagegen hat $\frac{\nu_1 - 1}{\nu_2 - 1}$ das Zeichen —. Die Grössen $\nu_1 - 1$ und $\nu_2 - 1$ befriedigen ja die Gleichung

$$s(p-s)(\nu-1)^2 - 2qs(\nu-1) - q(r+s) = 0,$$

deren Wurzeln verschiedene Zeichen besitzen. Wir finden hieraus, dass die Argumente der beiden ersten Faktoren rechts in (123) bei Variation der rein imaginären veränderlichen $\bar{\nu}$ sich in derselben Richtung ändern, das Argument des letzten Faktors aber in der entgegengesetzten Richtung. Wenn $\bar{\nu}$ die vollständige imaginäre Achse durchlaufen hat, so erhält man offenbar für den Betrag der Änderung des Argumentes

$$2\pi(p+q) - 2\pi(p-r) - 2\pi(p-s) = 4\pi q.$$

Wir bekommen mithin für $\bar{\lambda} = e^{\bar{\theta} i}$ *mindestens* $2q$ *rein imaginäre Wurzeln der Gleichung* (123). Eine grössere Anzahl solcher Wurzeln kann es auch nicht geben, denn das Argument des rechten Gliedes von (123) ändert sich immer monoton in derselben Richtung. Eine Richtungsänderung würde nämlich für einen gewissen Wert $\bar{\theta}$ die Bedingung einer Doppelwurzel von (123) bedeuten. Wir wissen aber bereits aus den früheren Entwicklungen, dass mehrfache Wurzeln dieser Gleichung nur für $\bar{\lambda} = 1$ auftreten, und zwar als zwei den beiden Systemen von Haupttangentenkurven entsprechende dreifache Wurzeln.

In den obigen Entwicklungen haben wir den Beweis für das vorhin angegebene Resultat, *dass es* $2q$ *reelle Kongruenzen gibt, welche zwei konjugiert imaginäre Flächen des Büschels* (90) *als Brennflächen haben.* Hierzu kommt, *dass man* $q - 1$ *reelle Kongruenzen erhält, welche eine reelle Fläche des Büschels als doppelte Brennfläche besitzen, wobei die reellen Linien der Kongruenzen in zwei konjugiert imaginären Punkten berühren.*

47. Zu Anfang der 40. Nummer haben wir hervorgehoben, dass man im zweiten Realitätsfalle $|\mu| = 1$ hat. Wir schreiben dementsprechend $\mu = -e^{2\pi i\varphi}$. Da wir $r = s$ haben, so bekommt hiernach (120) die Gestalt

$$e^{-i\varphi} r\nu^2 - 2(p-r)\cos\varphi\,\nu + e^{i\varphi} r = 0. \tag{124}$$

Als Wurzeln dieser Gleichung erhält man

$$\nu_1, \nu_2 = e^{i\varphi}\left[\frac{p-r}{r}\cos\varphi \pm \sqrt{\left(\frac{p-r}{r}\right)^2 \cos^2\varphi - 1}\right]. \tag{125}$$

Ist nun erstens $2r - p > 0$, so haben beide Wurzeln von (125) immer den Betrag 1. Die zugehörigen Gattungen von W-Kurven sind dann reell, und man bekommt keine reellen Kongruenzen mit zwei konjugiert imaginären Brennflächen. Nach der 33. Nummer handelt es sich in diesem Falle um Flächen mit elliptischen Punkten, und man kann leicht unmittelbar konstatieren, wenn man die Änderung der Gestalt der Fläche bei Variation des Parameters λ untersucht, dass jede reelle Gerade zwei reelle Flächen des Büschels berühren muss. Wenn wir uns des entsprechenden Resultates in der vorhergehenden Nummer erinnern, so können wir jetzt behaupten, *dass es in den Fällen, wo die Punkte der Brennflächen elliptisch sind, keine reellen Kongruenzen mit konjugiert imaginären Brennflächen gibt.* Man sieht leicht ein, dass dieser Satz noch in dem allgemeineren Falle gültig bleibt, wo die Flächen transzendent sind.

Ist zweitens $2r - p < 0$, so verhalten sich die Lösungen (125) in zwei wesentlich verschiedenen Weisen, je nachdem der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen $\gtrless 0$ ist. Hat man $(p-r)^2 \cos^2 \varphi < r^2$, so gelten dieselben Verhältnisse wie im vorhergehenden Falle, und man bekommt reelle Kongruenzen mit zwei reellen Brennflächen. Für $(p-r)^2 \cos^2 \varphi = r^2$ erhält man die beiden Haupttangentenkongruenzen. Ist endlich $(p-r)^2 \cos^2 \varphi > r^2$, so haben die Wurzeln ν_1, ν_2 dieselben Argumente, die absoluten Beträge sind aber zu einander invers. Setzt man $\nu = \xi + \eta i$, so findet man leicht als Ort der Wurzeln ν_1, ν_2 den Kreis

$$r(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2(p-r)\xi = 0. \tag{126}$$

In bezug auf diesen Kreis sind die beiden Punkte $\eta = 0$, $\xi = \pm 1$ zu einander konjugiert. Für den Betrag von $\frac{1+\nu}{1-\nu}$, der also konstant sein muss, erhält man ohne Schwierigkeit

$$\left|\frac{1+\nu}{1-\nu}\right| = \sqrt{\frac{p}{p-2r}} = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Wir finden auch, dass, falls ν auf dem Kreise einen positiven Umlauf um den Punkt $\xi = 1$, $\eta = 0$ macht, das Argument des in diesem Falle in (112_1) auftretenden Faktors

$$\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^{p-q}$$

eine Änderung

$$-2\pi(p-q) = -4\pi r$$

erleidet.

Für $r = s$ und $\bar{\lambda} = e^{\bar{\theta} i}$ spezialisiert sich (112_1) in

$$e^{\bar{\theta} i} = \frac{(-1)^p [(p-r)\nu - r]^{p-r} [r\nu - (p-r)]^{p-r} (1+\nu)^{p-q}}{p^p q^q \nu^{p-r} (1-\nu)^{p-q}}. \tag{127}$$

Unsere Aufgabe ist die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung zu bestimmen, welche auf dem Kreise (126) liegen. Die Änderung des Argumentes des rechten Gliedes von (127) ist also zu bestimmen, wenn ν einen Umlauf um diesen Kreis macht. Man findet dann leicht, dass die beiden Faktoren

$$(p-r)\nu - r, \quad r\nu - (p-r)$$

dabei Kreise durchlaufen, welche den Anfangspunkt umschliessen. Dagegen liegt der Anfangspunkt ausserhalb des Kreises (126). Als Änderung des fraglichen Argumentes ergibt sich hiernach

$$4\pi(p-r) - 2\pi(p-q) = 2\pi(p-2r+q) = 4\pi q. \tag{128}$$

Es ist noch zu beweisen, dass bei der vorausgesetzten Lage von ν auch das rechte Glied von (127) den Betrag 1 hat. Der Kreis (126) besitzt den Mittelpunkt $\nu = \frac{p-r}{r}$ und den Radius $\frac{\sqrt{pq}}{r}$. Hieraus ergibt sich

$$|r\nu - (p-r)| = \sqrt{pq}.$$

In bezug auf denselben Kreis sind die Punkte $\nu = 0$ und $\nu = \frac{r}{p-r}$ konjugiert, und man bekommt auch

$$\left|\frac{(p-r)\nu - r}{\nu}\right| = \sqrt{pq}.$$

Wir haben jetzt die Mittel den Betrag des rechten Gliedes von (127) zu berechnen und finden dafür das zu erwartende Resultat 1. Nach (128) erhält man also für (127) $2q$ Lösungen von der gesuchten Art; eine grössere Anzahl solcher Lösungen kann es aus in der vorhergehenden Nummer hervorgehobenen Gründen nicht geben.

Wir finden jetzt, dass die Resultate in den beiden ersten Realitätsfällen sich zusammenfassen lassen, wenn die Brennflächen zu einem Büschel algebraischer W-Flächen mit hyperbolischen Punkten gehören sollen, und zwar in der Weise, *dass es stets* $2q$ *reelle Kongruenzen mit zwei konjugiert imaginären Brennflächen gibt. Hierzu kommt, dass man, wenn diese Brennflächen sich in eine doppelte reelle vereinigen,* $q - 1$ *reelle Kongruenzen erhält, deren Linien die Brennfläche in zwei konjugiert imaginären Punkten berühren.*

Man versteht leicht, dass die obigen Resultate sich auch auf diejenigen Fälle mit hyperbolischen Punkten, wo die W-Flächen des Büschels transzendent sind, übertragen lassen. Unter den tetraedralen Komplexen, welche zu dem Grundtetraeder gehören gibt es also zwei, welche die beiden Systeme von Haupttangenten der W-Flächen enthalten, und dieselben vermitteln den Übergang zwischen den Komplexen, die sich in Kongruenzen mit zwei reellen und in solche mit zwei konjugiert imaginären Brennflächen zerlegen lassen. Von den reellen Linien eines tetraedralen Komplexes der letzteren Art wird keine reelle Fläche des Büschels berührt. Es handelt sich natürlich in diesen Fällen um keine algebraischen Kongruenzen.