ZUR KONVERGENZTHEORIE DER FOURIERSCHEN REIHEN.

VON

OTTO SZÁSZ

in FRANKFURT A. MAIN.[1]

Einleitung.

PALEY (4)[2] hat kürzlich den bemerkenswerten Satz bewiesen:

Es sei

$$f(\vartheta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta) \tag{1}$$

beschränkt im Intervall $(0, 2\pi)$; ferner sei

$$a_\nu \geqq 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2 a}$$

$$b_\nu \geqq 0, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots; \tag{2 b}$$

dann sind die Partialsummen der Reihe (1) gleichmässig beschränkt im Intervall $(0, 2\pi)$. Ist ausserdem $f(\vartheta)$ stetig in $(0, 2\pi)$, $f(0) = f(2\pi)$, so ist die Reihe (1) gleichmässig konvergent in $(0, 2\pi)$.

Im folgenden zeige ich zunächst, dass hier die Bedingungen (2 a), (2 b) durch die allgemeineren

$$\left.\begin{aligned} &(3\text{ a}) \qquad \nu a_\nu \geqq -K \\ &(3\text{ b}) \qquad \nu b_\nu \geqq -K \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \nu = 1, 2, 3, \ldots \\ K \text{ eine positive Konstante,} \end{array}$$

ersetzt werden können.

Des weiteren wird auf Stetigkeit verzichtet, und aus möglichst allgemeinen lokalen Eigenschaften der Funktion auf die Konvergenz der Reihe geschlossen.

---

[1] Vorgetragen im mathem. Kolloquium zu Frankfurt a. Main am 11. Februar 1933.

[2] Die Nummern beziehen sich auf den Literaturnachweis am Schlusse der Arbeit.

24—3343. *Acta mathematica.* 61. Imprimé le 8 août 1933.

Dabei ergeben sich auch an sich interessante Hilfssätze, insbesondere eine neue Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierschen Reihe.

§ 1. Beschränkte Funktionen.

1. Es sei nach Voraussetzung

$$|f(\vartheta)| \leqq M, \quad -\pi \leqq \vartheta < \pi; \tag{4}$$

setzt man

$$\frac{f(\vartheta) + f(-\vartheta)}{2} = \varphi(\vartheta),$$

so ist offenbar

$$\varphi(\vartheta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_\nu \cos \nu\vartheta,$$

und aus (4) folgt

$$|\varphi(\vartheta)| \leqq M, \quad -\pi \leqq \vartheta < \pi. \tag{4'}$$

Setzt man

$$s_0 = \frac{a_0}{2}, \quad s_n = s_n(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_\nu \cos \nu\vartheta, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

so folgt aus (4') bekanntlich

$$|s_0 + s_1 + \cdots + s_n| \leqq M(n+1), \quad -\pi \leqq \vartheta < \pi; \tag{5}$$

insbesondere für $\vartheta = 0$, $s_n(0) = A_n$ wird

$$|A_0 + A_1 + \cdots + A_n| \leqq M(n+1). \tag{5'}$$

Nun sei

$$A_0 + \cdots + A_n = (n+1)B_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

dann ist offenbar

$$A_n + \cdots + A_{n+\nu} = (n+\nu+1)B_{n+\nu} - nB_{n-1}, \quad n \geqq 1, \quad \nu \geqq 0,$$

also

$$\frac{A_n + \cdots + A_{n+\nu}}{\nu+1} = B_{n+\nu} + \frac{n}{\nu+1}(B_{n+\nu} - B_{n-1}).$$

Hieraus folgt

$$A_n = B_{n+\nu} + \frac{n}{\nu+1}(B_{n+\nu} - B_{n-1}) - \frac{1}{\nu+1}\sum_{\lambda=0}^{\nu}(A_{n+\lambda} - A_n); \tag{7}$$

insbesondere für $\nu = 0$ bezw. $\nu = n - 1$ ergibt sich

$$(7') \qquad A_n = B_n + n(B_n - B_{n-1}) = B_n + \frac{1}{n+1}\sum_1^n \nu a_\nu,$$

$$(7'') \qquad A_n = 2B_{2n-1} - B_{n-1} - \frac{1}{n}\sum_{\lambda=1}^n (n-\lambda) a_{n+\lambda}.$$

Hierbei ist nach $(5')$

$$(5'') \qquad |B_n| \leqq M, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

aus $(5'')$, $(3\,a)$ und $(7')$ folgt nun

$$A_n \geqq -M - \frac{n}{n+1} K \geqq -M - K, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

und entsprechend aus $(7'')$

$$A_n \leqq 3M + \frac{n-1}{n} K \leqq 3M + K, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Somit ist

$$(8) \qquad |A_n| \leqq 3M + K, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Der Übergang zu den Teilsummen $s_n(\vartheta)$ gelingt nun durch Betrachtung der Ausdrücke:

$$a_\nu \frac{1 - \cos \nu\vartheta}{2} = a_\nu^*, \quad \sum_0^n a_\nu^* = A_n^*, \quad \sum_0^n A_\nu^* = (n+1) B_n^*;$$

dann ist $A_0^* = 0$, und

$$2A_n^* = A_n - s_n(\vartheta), \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

ferner

$$2B_n^* = B_n - \frac{1}{n+1}\sum_0^n s_\nu(\vartheta).$$

Hieraus folgt nach (5) und $(5'')$

$$(9) \qquad |B_n^*| \leqq M, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ferner folgt aus $(3\,a)$

$$(10) \qquad \nu a_\nu^* \geqq -K, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Nun ist, entsprechend den Formeln $(7')$ und $(7'')$

$$(11) \qquad A_n^* = B_n^* + \frac{1}{n+1}\sum_1^n \nu a_\nu^*$$

und

$$A_n^* = 2B_{2n-1}^* - B_{n-1}^* - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)a_{n+\nu}^*. \tag{12}$$

Aus (9)—(11) folgt nun

$$A_n^* \geqq -M - K, \quad -\pi \leqq \vartheta < \pi,$$

und entsprechend aus (12):

$$A_n^* \leqq 3M + K, \quad -\pi \leqq \vartheta < \pi,$$

also

$$|A_n^*| \leqq 3M + K, \quad -\pi \leqq \vartheta < \pi. \tag{8'}$$

Aus (8) und (8′) folgt schliesslich

$$|s_n(\vartheta)| = |2A_n^* - A_n| \leqq 9M + 3K, \quad -\pi \leqq \vartheta < \pi.$$

Zusammenfassend gilt der

Satz 1. *Es sei*

$$f(\vartheta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta),$$

$|f(\vartheta)| \leqq M$ *für* $-\pi \leqq \vartheta < \pi$, $\nu a_\nu \geqq -K$ *für* $\nu \geqq 1$; *dann ist*

$$\left|\frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_\nu \cos \nu\vartheta\right| \leqq 9M + 3K, \quad |\vartheta| \leqq \pi, \qquad n = 1, 2, 3,$$

2. Setzt man

$$\frac{f(\vartheta) - f(-\vartheta)}{2} = \omega(\vartheta),$$

so ist

$$\omega(\vartheta) \sim \sum_1^\infty b_\nu \sin \nu\vartheta,$$

und aus (4) folgt

$$|\omega(\vartheta)| \leqq M \text{ für } |\vartheta| \leqq \pi.$$

Nun ist

$$\sum_1^\infty \frac{\sin \nu\vartheta}{\nu} = \frac{\pi - \vartheta}{2}, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Setzt man also $b_\nu + \dfrac{K}{\nu} = \beta_\nu$,

$$\sum_{1}^{\infty}\left(b_\nu + \frac{K}{\nu}\right)\sin \nu\vartheta = \sum_{1}^{\infty}\beta_\nu \sin\nu\vartheta \sim \Omega(\vartheta),$$

so ist

$$|\Omega(\vartheta)| \leqq M + \frac{\pi}{2}K,$$

und

$$\beta_\nu \geqq 0, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots;$$

hieraus folgt nach PALEY (4)

$$\left|\sum_{1}^{n}\beta_\nu \sin\nu\vartheta\right| \leqq 9\left(M + \frac{\pi}{2}K\right) = 9M + \frac{9}{2}\pi K. \tag{13}$$

Nun ist bekanntlich

$$\left|\sum_{1}^{n}\frac{\sin\nu\vartheta}{\nu}\right| \leqq 1 + 2\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

und somit wegen (13)

$$\left|\sum_{1}^{n} b_\nu \sin\nu\vartheta\right| \leqq 9M + \frac{9}{2}\pi K + (1 + 2\pi)K < 9M + 22K.^{1}$$

Es gilt also der

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen* (3 b) *und* (4) *ist*

$$\left|\sum_{1}^{n} b_\nu \sin\nu\vartheta\right| < 9M + 22K \text{ für } |\vartheta| \leqq \pi, \qquad n \geqq 1.$$

§ 2. Stetige Funktionen.

1. Es sei $f(\vartheta)$ stetig in $(0, 2\pi)$, $f(0) = f(2\pi)$; dann ist auch $\varphi(\vartheta)$ in $(0, 2\pi)$ stetig, $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Daher gilt nach FEJÉR

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{0}^{n} s_\nu(\vartheta) = \varphi(\vartheta) \tag{14}$$

gleichmässig in $(0, 2\pi)$. Insbesondere für $\vartheta = 0$ wird

[1] Eine entsprechende Bemerkung machte schon Herr FEJÉR; er konnte auch die Konstante 9 auf elementarem Wege durch 2 ersetzen (mündliche Mitteilung 30. März 1933).

(14') $$\lim_{n\to\infty} B_n = \varphi(0).$$

Hieraus und aus (3 a) folgt nach einem Satz von Hardy (1909) und Landau (3, Satz III) die Konvergenz der Reihe Σa_ν. Ich beweise zunächst folgende leichte Verallgemeinerung des eben angewandten Satzes:

Lemma. Es sei $\sum\limits_0^\infty c_\nu(\vartheta)$ gleichmässig summierbar $(C, 1)$ in $\alpha \leqq \vartheta \leqq \beta$, und $\nu c_\nu(\vartheta) \geqq -K$ gleichmässig in (α, β); dann ist Σc_ν gleichmässig konvergent in (α, β).

Beweis. Sei zur Abkürzung

$$\sum_0^n c_\nu = C_n, \quad \frac{1}{n+1}\sum_0^n C_\nu = C_n^{(1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

dann ist analog den Formeln (7) und (7')

(15) $$C_n - C_{n+\nu}^{(1)} = \frac{n}{\nu+1}(C_{n+\nu}^{(1)} - C_{n-1}^{(1)}) - \frac{\nu c_{n+1} + (\nu-1)c_{n+2} + \cdots + c_{n+\nu}}{\nu+1}.$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$|C_{n+\nu}^{(1)} - C_{n-1}^{(1)}| < \varepsilon, \; n c_n \geqq -K \text{ für } n > N(\varepsilon) \text{ und } \nu \geqq 0$$

gleichmässig im Intervall (α, β). Daher folgt aus (15)

$$C_n - C_{n+\nu}^{(1)} < \frac{n}{\nu+1}\varepsilon + \frac{\nu}{n+1}K \text{ für } n > N(\varepsilon), \quad \nu \geqq 0.$$

Nun sei

$$\nu = [n\sqrt{\varepsilon}], \text{ also } n\sqrt{\varepsilon} - 1 < \nu \leqq n\sqrt{\varepsilon};$$

dann ist

(16) $$C_n - C_{n+\nu}^{(1)} < \sqrt{\varepsilon} + K\sqrt{\varepsilon}, \; n > N(\varepsilon).$$

Entsprechend ist zunächst

$$C_{n-\nu} + C_{n-\nu+1} + \cdots + C_n = (n+1)C_n^{(1)} - (n-\nu)C_{n-\nu-1}^{(1)}, \; n \geqq \nu + 1 \geqq 1,$$

und hieraus

$$\frac{C_{n-\nu}+\cdots+C_n}{\nu+1}=\frac{n+1}{\nu+1}\left(C_n^{(1)}-C_{n-\nu-1}^{(1)}\right)+C_{n-\nu-1}^{(1)},$$

also

$$(15')\quad C_n-C_{n-\nu-1}^{(1)}=\frac{n+1}{\nu+1}\left(C_n^{(1)}-C_{n-\nu-1}^{(1)}\right)+\frac{(C_n-C_{n-\nu})+\cdots+(C_n-C_{n-1})}{\nu+1}$$

$$=\frac{n+1}{\nu+1}\left(C_n^{(1)}-C_{n-\nu-1}^{(1)}\right)+\frac{\nu c_n+(\nu-1)c_{n-1}+\cdots+c_{n-\nu+1}}{\nu+1};$$

für $\nu=0$ fehlt hier das zweite Glied.

Nun ist nach Voraussetzung

$$\left|C_n^{(1)}-C_{n-\nu-1}^{(1)}\right|<\varepsilon,\ (n-\nu)c_{n-\nu}\geqq -K \text{ für } n-\nu>N^*(\varepsilon)$$

gleichmässig in $\alpha\leqq\vartheta\leqq\beta$. Daher ist nach $(15')$

$$C_n-C_{n-\nu-1}^{(1)}>-\frac{n+1}{\nu+1}\varepsilon-\frac{K}{\nu+1}\left(\frac{\nu}{n}+\frac{\nu-1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-\nu+1}\right)$$

$$>-\frac{n+1}{\nu+1}\varepsilon-\frac{\nu}{n}K.$$

Ich setze wieder $\nu=[n\sqrt{\varepsilon}]$; dann ist für $n(1-\sqrt{\varepsilon})>N^*$

$$(16')\qquad C_n-C_{n-\nu-1}^{(1)}>-\frac{n+1}{n}\sqrt{\varepsilon}-K\sqrt{\varepsilon}.$$

Aus (16) und (16′) folgt schliesslich die gleichmässige Konvergenz der Reihe Σc_ν.

Zur Anwendung sei

$$c_\nu=a_\nu\frac{1-\cos\nu\vartheta}{2}\qquad \nu=0,1,2,\ldots;$$

wegen (3 a) und (14) sind die Voraussetzungen des Lemmas für $0\leqq\vartheta\leqq 2\pi$ erfüllt; da ferner Σa_ν konvergiert, so konvergiert auch $\Sigma a_\nu\cos\nu\vartheta$ gleichmässig in $(0, 2\pi)$.

2. Für die Sinusreihe $\omega(\vartheta)$ gilt zunächst entsprechend die gleichmässige Summierbarkeit $(C, 1)$. Zum Nachweis der Konvergenz bedarf es einer weiteren Hilfsbetrachtung. Ich will beweisen, dass

$$(17)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n \nu b_\nu\sin\nu\vartheta=0 \text{ gleichmässig in } (0, 2\pi).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sum_1^n b_\nu \sin \nu\vartheta = S_n(\vartheta), \quad \frac{1}{n+1}\sum_1^n S_\nu(\vartheta) = S_n^{(1)}(\vartheta),$$

$$\sum_1^n b_\nu \cos \nu\vartheta = C_n(\vartheta), \quad \sum_1^n C_\nu(\vartheta) = (n+1)\, C_n^{(1)}(\vartheta),$$

so ist zunächst

$$|S_{n+\nu}^{(1)} - S_n^{(1)}| < \varepsilon \text{ für } n \geqq N_1(\varepsilon),\ \nu \geqq 1.$$

Hieraus folgt nach einem Satz von SZEGÖ (7)[1]

$$|D_\vartheta(S_{n+\nu}^{(1)} - S_n^{(1)})| < 2\varepsilon(n+\nu), \quad |D_\vartheta(C_{n+\nu}^{(1)} - C_n^{(1)})| < 2\varepsilon(n+\nu),$$

das heisst

$$\frac{1}{n+\nu}\left|\sum_{\lambda=1}^{n+\nu}\frac{n+\nu-\lambda+1}{n+\nu+1}\lambda b_\lambda \cos\lambda\vartheta - \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{n-\lambda+1}{n+1}\lambda b_\lambda\cos\lambda\vartheta\right| < 2\varepsilon,$$

$$\frac{1}{n+\nu}\left|\sum_{1}^{n+\nu}\frac{n+\nu-\lambda+1}{n+\nu+1}\lambda b_\lambda \sin\lambda\vartheta - \sum_{1}^{n}\frac{n-\lambda+1}{n+1}\lambda b_\lambda\sin\lambda\vartheta\right| < 2\varepsilon.$$

Bei festem $n = N_1(\varepsilon)$ und $\nu > N_2(\varepsilon)$ folgt hieraus ($n + \nu = m$ gesetzt)

$$(18) \qquad \left|\sum_1^m \frac{m-\lambda+1}{m(m+1)}\lambda b_\lambda\cos\lambda\vartheta\right| < 3\varepsilon, \quad \left|\sum_1^m \frac{m-\lambda+1}{m(m+1)}\lambda b_\lambda\sin\lambda\vartheta\right| < 3\varepsilon,\ m > N_3(\varepsilon),$$

also die zweiten Cesàro-Mittel der Folge $\lambda b_\lambda \cos\lambda\vartheta$ (dies wurde schon von S. SIDON (5) bemerkt) und der Folge $\lambda b_\lambda \sin\lambda\vartheta$ konvergieren gleichmässig nach Null; dasselbe gilt für die Hölderschen Mittel. Hieraus ergibt sich das gleiche für die Folge $\lambda b_\lambda(1 - \sin\lambda\vartheta)$, und wegen $\lambda b_\lambda(1-\sin\lambda\vartheta) \geqq -2K$, nach einer leichten Verallgemeinerung eines Satzes von LANDAU (3, Satz II) die gleichmässige Konvergenz der ersten Mittel, also gilt (17). Mit Rücksicht auf Formel (7′) folgt hieraus die gleichmässige Konvergenz der Sinusreihe. Damit ist bewiesen:

---

[1] Dieser verschärft eine S. BERNSTEINsche Ungleichung. Für den Satz in dem hier benutzten Umfange gab Herr FEJÉR (Bulletin of the Calcutta Math. Soc. XX, 1928/29, 49—54, insb. § 2) einen ganz einfachen Beweis. Die gleiche Bemerkung machte ich vor längerer Zeit (Dez. 1918) in einem Brief an Herrn SZEGÖ; es ist das Analogon zu einem von mir gegebenen Beweise eines Satzes von M. RIESZ.

Satz 3. *Es sei* $f(\vartheta)$ *stetig,* $f(0)=f(2\pi)$*; wenn ausserdem* (3 a) *gilt so konvergiert die Cosinusreihe gleichmässig, wenn* (3 b) *gilt, so konvergiert die Sinusreihe gleichmässig in jedem endlichen Intervall.*

§ 3. Integrierbare Funktionen.

Im folgenden verwende ich an Stelle der arithmetischen Mittel höherer Ordnung das Poissonsche Integral, also die zu $f(\vartheta)$ gehörige harmonische Funktion und ihre Konjugierte. Von $f(\vartheta)$ setze ich nur Integrierbarkeit im Lebesgueschen Sinne voraus.

1. Der Fall der Cosinusreihe ist mit Hilfe eines Satzes von Hardy und Littlewood leicht zu erledigen. Setzt man

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\vartheta \,.\, r^\nu = P(r, \vartheta), \qquad 0 \leqq r < 1,$$

so ist bekanntlich

$$P(r, \vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(\vartheta + 2t) + \varphi(\vartheta - 2t)] \frac{(1 - r^2)\,dt}{1 - 2r\cos 2t + r^2}.$$

Sei nun

$$P(r, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_\nu r^\nu \to s \text{ für } r \to 1 - 0. \tag{19}$$

Ein Satz von Hardy und Littlewood (1) besagt, dass aus (19) und (3 a) die Konvergenz der Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_\nu$ zur Summe s folgt. Gilt nun für ein ϑ

$$P(r, \vartheta) \to s(\vartheta) \text{ für } r \to 1 - 0, \tag{19'}$$

so ist auch

$$\frac{1}{2}[P(r, 0) - P(r, \vartheta)] = \sum_1^{\infty} a_\nu \frac{1 - \cos\nu\vartheta}{2} \cdot r^\nu = \Sigma a_\nu^*(\vartheta) \,.\, r^\nu \to \frac{1}{2}[s - s(\vartheta)],$$

und

$$n a_n^*(\vartheta) \geqq -K;$$

hieraus folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_1^{\infty} a_\nu \cos\nu\vartheta$. Aus einer leichten Verallgemeinerung des obenzitierten Satzes von Hardy und Littlewood folgt weiter, dass die Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\vartheta$ gleichmässig konvergiert im Innern des Intervalls (α, β), wenn daselbst (19') gleichmässig gilt, d. h. innerhalb jedes Stetigkeitsintervalls von $s(\vartheta)$. Zu bemerken ist schliesslich, dass (19') jedenfalls dann gilt, wenn

$$(20) \qquad \frac{1}{h}\int_0^h [\varphi(\vartheta + t) + \varphi(\vartheta - t)]\, dt \to 2s(\vartheta) \text{ für } h \to +0,$$

und wenn (3 a) gilt, so ist nach Hardy und Littlewood (2, theorem 1 a)

$$(20') \qquad \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t)dt \to s(0),\ h \to +0,$$

auch notwendig zur Konvergenz der Reihe Σa_ν.

Sei nun (20') erfüllt, so ergibt sich entsprechend durch Betrachtung der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} a_\nu^* \cos \nu t \sim \frac{1}{2}\left[\varphi(t) - \frac{1}{2}(\varphi(\vartheta + t) + \varphi(\vartheta - t))\right],$$

dass jetzt (20) auch notwendig ist zur Konvergenz der Reihe $\Sigma a_\nu \cos \nu\vartheta$. Somit gilt der

Satz 4. *Sei $f(\vartheta)$ integrierbar, ferner gelte* (3 a) *und* (20'); *dann ist Σa_ν konvergent, ferner ist $\Sigma a_\nu \cos \nu\vartheta$ dann und nur dann konvergent, wenn* (20) *gilt. Ist $f(\vartheta)$ in (α, β) stetig, so ist die Reihe in jedem innern Intervall gleichmässig konvergent.*

2. Zur Behandlung der Sinusreihe schicke ich einen auch an sich interessanten Hilfssatz voraus. Setzt man

$$H(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta)r^\nu, \qquad 0 \leqq r < 1,$$

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = p(r, t) = p(r, -t),$$

so ist bekanntlich

$$H(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)p(r, t - \vartheta)dt.$$

Hieraus folgt

$$D_\vartheta H(r,\vartheta)=\sum_{1}^{\infty}(\nu b_\nu\cos\nu\vartheta-\nu a_\nu\sin\nu\vartheta)r^\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_\vartheta p(r,\,t-\vartheta)\,dt$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_t p(r,\,t-\vartheta)\,dt=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+\vartheta)D_t p(r,\,t)\,dt.$$

Nun ist

$$\int_{-\pi}^{0}f(t+\vartheta)D_t p(r,\,t)\,dt=-\int_{0}^{\pi}f(\vartheta-t)D_t p(r,\,t)\,dt,$$

also

$$D_\vartheta H(r,\vartheta)=-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(\vartheta+t)-f(\vartheta-t)]D_t p(r,\,t)\,dt; \tag{21}$$

ferner ist

$$\int_{0}^{\pi}D_t p(r,\,t)\,dt=p(r,\pi)-p(r,0)=-\frac{4r}{1-r^2}. \tag{22}$$

Nach diesen Vorbereitungen beweise ich den

Satz 5. *Es sei für ein passendes $g(\vartheta)$*

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}[f(\vartheta+t)-f(\vartheta-t)-g(\vartheta)]\,dt=0; \tag{23}$$

dann ist

$$\lim_{r\to1-0}(1-r)\,D_\vartheta H(r,\vartheta)=\frac{1}{\pi}g(\vartheta). \tag{24}$$

Offenbar gilt (23), wenn nur

$$f(\vartheta+h)-f(\vartheta-h)\to g(\vartheta)\ \text{für}\ h\to+0;$$

g heisst dann der Sprung der Funktion $f(t)$ an der Stelle ϑ; zu seiner Bestimmung hat zuerst Herr Fejér Methoden angegeben.

Zum Beweise setzen wir zur Abkürzung

$$f(\vartheta + t) - f(\vartheta - t) - g(\vartheta) = F(t, \vartheta), \quad \int_0^t F(\tau, \vartheta) d\tau = \psi(t, \vartheta);$$

nach (21) und (22) ist

$$D_\vartheta H(r, \vartheta) - \frac{2r}{\pi} \frac{g(\vartheta)}{1 - r^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F(t, \vartheta) D_t p(r, t) dt. \tag{25}$$

Hierbei ist

$$D_t p(r, t) = -\frac{2r(1 - r^2)\sin t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2},$$

und nach Voraussetzung (23)

$$|\psi(t, \vartheta)| < \varepsilon t \text{ für } 0 < t \leqq \delta(\varepsilon) < \pi.$$

Nun ergibt partielle Integration

$$\int_0^\delta \frac{F(t, \vartheta)\sin t dt}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} =$$

$$= \frac{\sin\delta\psi(\delta, \vartheta)}{(1 - 2r\cos\delta + r^2)^2} - \int_0^\delta \frac{\cos t\psi(t, \vartheta) dt}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} + 4r \int_0^\delta \frac{\sin^2 t\psi(t, \vartheta)}{(1 - 2r\cos t + r^2)^3} dt$$

$$= G_1 + G_2 + G_3 \text{ (abkürzend)}.$$

Hier ist

$$|G_1| < \frac{\varepsilon\delta}{4r^2(1 - \cos\delta)^2} < \frac{\varepsilon}{1 - r} \quad \text{für} \quad 1 - r < \varrho_1(\varepsilon);$$

ferner[1]

$$|G_2| < \varepsilon \int_0^\delta \frac{t dt}{\left[(1 - r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} < \varepsilon \int_0^\delta \frac{t dt}{\left[(1 - r)^2 + \frac{4}{\pi^2} r t^2\right]^2}$$

$$< \pi^2 \varepsilon \int_0^\infty \frac{t dt}{[(1 - r)^2 + r t^2]^2},$$

und die Substitution $t = \frac{1 - r}{\sqrt{r}} \tau$ liefert

[1] Eine ähnliche Abschätzung benutzte schon Herr HARDY (Trans. Amer. Math. Soc. 17, 1916, p. 305).

$$\int_0^\infty \frac{t\,dt}{[(1-r)^2+rt^2]^2} = \frac{1}{r(1-r)^2}\int_0^\infty \frac{\tau\,d\tau}{(1+\tau^2)^2} = \frac{1}{r(1-r)^2} I_1 \text{ (abkürzend);}$$

somit ist

$$|G_2| < \frac{\pi^2 \varepsilon}{r(1-r)^2} I_1.$$

Analog wird

$$|G_3| < 4\varepsilon \int_0^\delta \frac{t^3\,dt}{\left[(1-r)^2 + r\frac{t^2}{\pi}\right]^3} < 4\pi^3\varepsilon \int_0^\infty \frac{t^3\,dt}{[(1-r)^2+rt^2]^3},$$

und

$$\int_0^\infty \frac{t^3\,dt}{[(1-r)^2+rt^2]^3} = \frac{1}{r^2(1-r)^2}\int_0^\infty \frac{t^3\,dt}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{r^2(1-r)^2} I_2;$$

also

$$|G_3| < \frac{4\pi^3\varepsilon}{r^2(1-r)^2} I_2.$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\left|\int_0^\delta F(t,\vartheta) D_t p(r,t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{1-r}\left(2 + 4\pi^2 I_1 + \frac{16\pi^3}{r} I_2\right), \qquad 1-r < \varrho_1(\varepsilon).$$

Schliesslich ist

$$\left|\int_\delta^\pi F(t,\vartheta) D_t p(r,t)\,dt\right| \leqq 4r(1-r)\int_\delta^\pi \frac{|F(t,\vartheta)|\,dt}{4r^2(1-\cos\delta)^2}$$

$$\leqq \frac{1-r}{r(1-\cos\delta)^2}\int_0^\pi |F(t,\vartheta)|\,dt < \varepsilon$$

$$\text{für } 1-r < \varrho_2(\varepsilon) < \varrho_1;$$

aus diesen beiden Ungleichungen und aus (25) folgt sofort (24).

Es sei nun

$$\frac{1}{h}\int_0^h [\omega(t) - \omega(-t)]\,dt = \frac{2}{h}\int_0^h \omega(t)\,dt \to d \text{ für } h \to +0,$$

dann ist nach Satz 5

$$(26)\qquad (1-r)\sum_1^\infty \nu b_\nu r^\nu \to \frac{d}{\pi} \text{ für } r\to 1-0.$$

Hieraus und aus (3 b) folgt unmittelbar (vgl. 6, Satz 2)

$$(26')\qquad \frac{1}{n}\sum_1^n \nu b_\nu \to \frac{d}{\pi} \text{ für } n\to\infty.$$

Ferner sei

$$(27)\qquad \int_0^h [\omega(\vartheta+t)+\omega(\vartheta-t)]\,dt = 2h\omega(\vartheta)+o(h);$$

bekanntlich ist dann

$$(27')\qquad \sum_1^\infty b_\nu \sin\nu\vartheta\,.\,r^\nu \to \omega(\vartheta) \text{ für } r\to 1-0,$$

oder

$$(1-r)\sum_1^\infty S_\nu(\vartheta) r^\nu \to \omega(\vartheta),$$

und hieraus folgt (vgl. 6, Satz 4)

$$(1-r)\sum_1^\infty [S_\nu(\vartheta)-S_\nu^{(1)}(\vartheta)]r^\nu = (1-r)\sum_1^\infty \frac{b_1\sin\vartheta+\cdots+\nu b_\nu\sin\nu\vartheta}{\nu+1}r^\nu \to 0.$$

Ferner folgt aus (26) oder (26')

$$(1-r)\sum_1^\infty \frac{b_1+\cdots+\nu b_\nu}{\nu+1}r^\nu \to \frac{d}{\pi},$$

also

$$(1-r)\sum_1^\infty \frac{b_1(1-\sin\vartheta)+\cdots+\nu b_\nu(1-\sin\nu\vartheta)}{\nu+1}r^\nu \to \frac{d}{\pi}.$$

Wegen

$$R_\nu = \frac{1}{\nu+1}[b_1(1-\sin\vartheta)+\cdots+\nu b_\nu(1-\sin\nu\vartheta] \geqq -2K$$

folgt hieraus wiederum

$$\frac{1}{n}\sum_1^n R_\nu \to \frac{d}{\pi} \text{ für } n\to\infty,$$

und hieraus nach (3) Satz II von LANDAU[1] wegen $\nu b_\nu(1 - \sin\nu\vartheta) \geqq -2K$

$$R_n \to \frac{d}{\pi} \text{ für } n \to \infty;$$

also wegen (26′):

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \nu b_\nu \sin\nu\vartheta \to 0.$$

Hieraus und aus (27′) folgt nach einem bekannten Satz von TAUBER die Konvergenz der Reihe $\Sigma b_\nu \sin\nu\vartheta$.

Somit gilt der

Satz 6. *Es sei $f(\vartheta)$ integrierbar und es gelte* (3 b) *und*

$$(28) \qquad \frac{2}{h}\int_0^h \omega(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_0^h [f(t) - f(-t)]\,dt \to d, \qquad h \to +0;$$

dann gilt (26′) *und die Reihe $\Sigma b_\nu \sin\nu\vartheta$ konvergiert, wenn* (27) *gilt.*

Man kann auch leicht zeigen, dass die Konvergenz ganz innerhalb eines Stetigkeitsintervalls von $\omega(\vartheta)$ gleichmässig gilt.

3. Der Satz 6 ist umkehrbar; ich beweise nämlich den

Satz 7. *Wenn* (3 b) *und* (28) *erfüllt ist, so ist* (27) *auch notwendig zur Konvergenz der Reihe $\Sigma b_\nu \sin\nu\vartheta$.*

Setzt man nämlich $\sum_1^\infty b_\nu \sin\nu\vartheta = S$, so ist

$$\frac{1}{2h}\int_0^h [\omega(\vartheta + t) + \omega(\vartheta - t)]\,dt - S = -S + \sum_1^\infty b_\nu \sin\nu\vartheta \frac{\sin\nu h}{\nu h}$$

$$= -S + \sum_1^n + \sum_{n+1}^{\lambda_n} + \sum_{1+\lambda_n}^\infty = -S + S_1 + S_2 + S_3.$$

Nun ist offenbar

$$|S_1 - S| \leqq \left|\sum_1^n b_\nu \sin\nu\vartheta - S\right| + \left|\sum_1^n b_\nu \sin\nu\vartheta\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h} - 1\right)\right|;$$

hierbei ist

[1] Vgl. auch DOETSCH, Math. Zeitschr. 11 (1921), 161—179; insb. Satz 1.

$$1-\frac{\sin\nu h}{\nu h}\leqq\frac{1}{6}(\nu h)^2,$$

also

$$|S_1-S|\leqq\left|\sum_1^n b_\nu\sin\nu\vartheta-S\right|+\frac{1}{6}nh^2\sum_1^n\nu|b_\nu|.$$

Ferner folgt aus (26') die Existenz einer Zahl $\delta>0$, so dass

$$\left|\sum_1^n\nu b_\nu\right|<\delta n,\qquad n=1,2,3,\ldots;$$

und nach (3 b) ist offenbar

$$\nu(b_\nu-|b_\nu|)\geqq-2K,\qquad \nu=1,2,3,\ldots,$$

also

$$\sigma_n=\sum_1^n\nu|b_\nu|\leqq\sum_1^n\nu b_\nu+2nK<(\delta+2K)n.$$

Somit ist

$$|S_1-S|\leqq\left|\sum_{n+1}^\infty b_\nu\sin\nu\vartheta\right|+(\delta+K)n^2h^2. \tag{29}$$

Nun sei zur Abkürzung $\sum_n^m\frac{|b_\nu|}{\nu}=\tau_{n,m}$, dann ist

$$\tau_{n,m}=\sum_n^m\frac{\sigma_\nu-\sigma_{\nu-1}}{\nu^2}=-\frac{\sigma_{n-1}}{n^2}+\frac{\sigma_m}{m^2}+\sum_n^{m-1}\sigma_\nu\left[\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{(\nu+1)^2}\right]<$$

$$<\frac{\delta+2K}{m}+\sum_n^{m-1}\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)^2}(\delta+2K)$$

$$<(\delta+2K)\left[\frac{1}{m}+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\right]<(\delta+2K)\frac{2}{n};$$

also konvergiert $\Sigma\frac{|b_\nu|}{\nu}$ und es ist

$$\tau_n=\sum_n^\infty\frac{|b_\nu|}{\nu}<2(\delta+2K)\cdot\frac{1}{n}.$$

Hieraus folgt

$$|S_3|\leqq\frac{1}{h}\sum_{1+\lambda_n}^\infty\frac{|b_\nu|}{\nu}<\frac{2(\delta+2K)}{h}\frac{1}{1+\lambda_n}.$$

Es sei $1 > \varepsilon > 0$ gegeben, $n = [\varepsilon/h]$, dann ist $nh < \varepsilon$, und

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} b_\nu \sin \nu\vartheta\right| < \varepsilon^2 \text{ für } h < h_0(\varepsilon) < \varepsilon. \tag{30}$$

Ferner sei $\lambda_n = [\pi/\varepsilon h]$, dann ist $1 + \lambda_n > \pi/\varepsilon h$, also

$$|S_3| < \varepsilon(\delta + 2K). \tag{31}$$

Schliesslich zerfällt das Intervall $([\varepsilon/h],\ [\pi/\varepsilon h])$ in höchstens $[1/\varepsilon] + 1$ Teilintervalle mit monotonem $\dfrac{\sin \nu h}{\nu h}$, daher ergibt partielle Summation mit Rücksicht auf (30)

$$|S_2| < \frac{2}{\varepsilon} \cdot 2\varepsilon^2 = 4\varepsilon. \tag{32}$$

Zusammenfassend folgt[1] aus (29)—(32)

$$\left| - S + \sum_{1}^{\infty} b_\nu \sin \nu\vartheta \cdot \frac{\sin \nu h}{\nu h}\right| < \varepsilon^2(1 + \delta + K) + \varepsilon(4 + \delta + 2K),$$

also unser Satz.

Literaturnachweis.

(1). Hardy und Littlewood, Tauberian theorems ..., Proc. London Math. Soc. (2), 13 (1914), 174—191.

(2). ——, Two theorems concerning fourier series, Journ. London Math. Soc. 1 (1926), 19—25.

(3). E. Landau, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze ..., Prace mat.-fiz. 21 (1910), 97—177.

(4). R. E. A. C. Paley, On fourier series with positive coefficients, Journ. London Math. Soc. 7 (1932), 205—208.

(5). S. Sidon, Bestimmung des Sprunges einer Funktion ... (ungarisch), Math. és Phys. Lapok 27 (1918), 309—311.

(6). O. Szász, Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes ..., Journ. London Math. Soc. 3 (1928), 256—262.

(7). G. Szegö, Über einen Satz des Herrn S. Bernstein, Schriften d. Königsberger Gel. Ges. Nat. Kl. V, Heft 4, 1928.

[1] Für ähnliche Abschätzungen vgl. Hardy und Littlewood (2).