SUR LA FONCTION GAMMA GÉNÉRALISÉE.

Par

L. BENDERSKY

à Tilff (Belgique).

1. Introduction.

Considérons le produit

$$(a) \qquad 1^{1^k} . 2^{2^k} . 3^{3^k} \ldots x^{x^k}.$$

où $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Evaluons le logarithme de ce produit au moyen de la formule sommatoire d'Euler et Maclaurin

$$(b) \qquad \sum_{x=1}^{x} f(x) = \int_1^x f(x)\,dx - B_1 [f(1) + f(x)] + \frac{B_2}{2!}[f'(x) - f'(1)] + \frac{B_4}{4!}[f'''(x) - f'''(1)] + \cdots$$

où les cofficients B sont les nombres de Bernoulli:

$$(1) \qquad \begin{cases} B_1 = -\frac{1}{2};\ B_{2n+1} = 0 \qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ B_2 = \frac{1}{6};\ B_4 = -\frac{1}{30};\ B_6 = \frac{1}{42};\ B_8 = -\frac{1}{30}; \\ B_{10} = \frac{5}{66};\ B_{12} = -\frac{691}{2730};\ B_{14} = \frac{7}{6};\ B_{16} = -\frac{3617}{510}; \\ B_{18} = \frac{43867}{798};\ B_{20} = -\frac{174611}{330};\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On trouve alors, en faisant successivement $k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

$$(2)\quad \log(x!) = \sum_{x=1}^{x} \log x$$

$$= L_0 + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_2}{1.2x} + \frac{B_4}{3.4x^3} + \frac{B_6}{5.6x^5} + \cdots$$

$$(3)\quad \log(1^1.2^2.3^3\ldots x^x) = \sum_{x=1}^{x} x\log x$$

$$= L_1 + \left(\frac{x^2+x}{2} + \frac{1}{12}\right)\log x - \frac{x^2}{4}$$

$$- \left(\frac{B_4}{2.3.4x^2} + \frac{B_6}{4.5.6x^4} + \frac{B_8}{6.7.8x^6} + \cdots\right)$$

$$(4)\quad \log(1^{1^2}.2^{2^2}.3^{3^2}\ldots x^{x^2}) = \sum_{x=1}^{x} x^2\log x$$

$$= L_2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right)\log x - \frac{x^3}{9} + \frac{x}{12}$$

$$+ 2\left(\frac{B_4}{1.2.3.4x} + \frac{B_6}{3.4.5.6x^3} + \frac{B_8}{5.6.7.8x^5} + \cdots\right)$$

$$(5)\quad \log(1^{1^3}.2^{2^3}.3^{3^3}\ldots x^{x^3}) = \sum_{x=1}^{x} x^3\log x$$

$$= L_3 + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{120}\right)\log x - \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{12}$$

$$- 6\left(\frac{B_6}{2.3.4.5.6x^2} + \frac{B_8}{4.5.6.7.8x^4} + \frac{B_{10}}{6.7.8.9.10x^6} + \cdots\right)$$

. . . .

où les constantes L_0, L_1, L_2, ..., représentent les valeurs des sommes des termes constants des séries (2), (3), ...

Ces séries, bien que divergentes quand on prend un grand nombre de termes, convergent très rapidement vers la vraie valeur quand on se borne aux premiers termes de chaque série.

Les valeurs numériques des constantes L_0, L_1, L_2, ..., se déterminent au moyen des séries respectives (2), (3), ..., en donnant à x une valeur particulière, par exemple, $x = 10$.

On trouve alors

$$(6) \qquad \begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{M}\, 0{,}399\ 089\ 934\ 179\ 057\ 52.\ \ldots \\ L_1 &= \frac{1}{M}\, 0{,}108\ 032\ 696\ 724\ 476\ 89.\ \ldots \\ L_2 &= \frac{1}{M}\, 0{,}013\ 223\ 596\ 882\ 928\ 40.\ \ldots \\ L_3 &= \frac{1}{M}\, \bar{1}{,}991\ 029\ 050\ 382\ 693\ 89.\ \ldots \\ L_4 &= \frac{1}{M}\, \bar{1}{,}996\ 532\ 674\ 74.\ \ldots\ \ldots \end{aligned}$$

M étant le module des logarithmes décimaux.

Nous donnerons, dans la suite, les développements en séries convergentes pour les constantes L_0, L_1, L_2, ...

La formule (2) avait été découverte par Moivre avant la découverte de la formule sommatoire (b) par Euler.

Stirling n'a pas redécouvert la formule (2); il a seulement montré, à l'aide de la formule de Wallis, que

$$(7) \qquad L_0 = \log \sqrt{2\pi}.$$

Nous désignerons, dans ce qui suit, la formule (2) moyennant (7), par *formule de Moivre-Stirling*.

On sait que, en étendant la formule (2) aux valeurs non entières de x, elle représente alors $\log \Gamma(x+1)$.

Il est donc naturel de faire la même extension dans les formules (3), (4), ..., et de rechercher les propriétés de ces nouvelles fonctions. Nous verrons que ces propriétés présentent des analogies remarquables avec celles de la fonction $\Gamma(x)$. Nous désignerons par conséquent les seconds membres de (3), (4), ... par

$$\log \Gamma_1(x+1),\ \log \Gamma_2(x+1), \ldots,\ \log \Gamma_k(x+1), \ldots$$

Voici les principales propriétés de la fonction $\Gamma(x)$, que nous retrouverons sous forme généralisée dans l'étude de la fonction $\Gamma_k(x)$ où $k = 0, 1, 2, \ldots$

1°. *Propriété fondamentale*:

(I) $$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

x étant *quelconque*.

(I′) $$\Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(2) = 1.$$

En particulier, pour x entier,

(I″) $$\Gamma(x+1) = x!$$

2°. *Expression de* $\log \Gamma(x+1)$ *au moyen d'une intégrale définie:*

(II) $$\log \Gamma(x+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\left(x - \frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt.$$

3°. *Développement en série convergente:*

(III) $$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \frac{s_2}{2}x^2 - \frac{s_3}{3}x^3 + \frac{s_4}{4}x^4 - \cdots,$$

valable pour $-1 < x \leqq 1$. C est la constante d'Euler, et

$$s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

4°. *Formule de Moivre-Stirling.*

C'est la formule (2), que nous écrirons, pour abréger,

(IV) $$\log \Gamma(x+1) = L_0 + \lambda_0(x+1) \quad (L_0 = \log \sqrt{2\pi}).$$

5°. *Formule de Raabe:*

(V) $$\int_{x-1}^{x} \log \Gamma(x+1)\, dx = x \log x - x + \log \sqrt{2\pi}.$$

En particulier,

$$\text{(V')} \qquad \int_0^1 \log \Gamma(x+1)\,dx = \log \sqrt{2\pi} - 1,$$

$$\text{(V'')} \qquad \int_0^1 \log \Gamma(x)\,dx = \log \sqrt{2\pi}.$$

6°. *Formule de multiplication* (Gauss):

$$\text{(VI)} \qquad \Gamma(na) = n^{na-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \times \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right).$$

En particulier, pour $na = 1$, on a la formule donnée par Euler:

$$\text{(VI')} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

et pour $n = 2$,

$$\text{(VI'')} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La formule (V) de Raabe donne l'intégrale de $\log \Gamma(x)$ seulement dans le cas où l'intervalle d'intégration est égal à l'unité. Mais nous verrons plus loin que, d'après la définition de $\log \Gamma_k(x)$, chacune des fonctions $\log \Gamma_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) pourra être intégrée au moyen de la suivante. Nous pouvons donc ajouter la propriété qui suit.

7°. *Intégrale de* $\log \Gamma(x)$*:*

$$\text{(VII)} \qquad \int_0^x \log \Gamma(x)\,dx = \log \Gamma_1(x) - \frac{x^2-x}{2} + x \log \sqrt{2\pi}.$$

Nous donnerons (au n° 5) la définition de $\Gamma_k(x)$, ainsi que l'énumération des propriétés (I_k), (II_k), ..., (VII_k) de cette fonction. Ces propriétés, dépendant du paramètre k, donneront, pour $k = 0$, les propriétés (I), (II), ..., (VII) relatives à $\Gamma(x)$, que nous venons d'énumérer. Nous établirons ensuite (n° 6—n° 13) que les propriétés (I_k) à (VII_k) relatives à $\Gamma_k(x)$, sont vraies quel que soit l'entier positif k. Nous terminerons la théorie relative au cas général par le développement du paramètre L_k en série convergente.

Pour ne pas allonger trop ce mémoire, nous ne donnerons que 2—3 exemples d'application aux intégrales définies et indéfinies.

Remarque. En posant

$$L_k = \log A_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{8}$$

les formules (2), (3), ... pourront s'écrire, eu égard à (7),

$$x! = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{B_2}{1.2x}+\frac{B_4}{3.4x^3}+\cdots}$$

$$1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots x^x = A_1 x^{\frac{x^2+x}{2}+\frac{1}{12}} e^{-\frac{x^2}{4}-\frac{B_4}{2.3.4x^2}-\frac{B_6}{4.5.6x^4}-\cdots}$$

En supprimant, dans les seconds membres de (6), le facteur $\frac{1}{M}$, on a les logarithmes décimaux des constantes A_0, A_1, A_2, ... On trouve alors

$$\left\{\begin{array}{l} A_0 = \sqrt{2\pi} \qquad ; \quad A_1 = 1{,}282\,427\,13 \\ A_2 = 1{,}030\,916\,75; \quad A_3 = 0{,}979\,557\,46 \\ A_4 = 0{,}992\,047\,9 \;\; ; \;\; \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{9}$$

2. Préliminaires.

A. Dérivée d'ordre r de la fonction $y = x^k \log x$.

On a, pour $r \leqq k$,

$$y^{(r)} = \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r}\left(\log x + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-r+1}\right), \tag{a}$$

et pour $r = k + s\,(s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$,

$$y^{(r)} = (-1)^{s-1} \frac{k!\,(s-1)!}{x^s}. \tag{a'}$$

On vérifie immédiatement, en dérivant (a) et (a'), que, ces formules étant vraies pour r, elles le sont également pour $r + 1$, et que, en particulier, la dérivée de (a) pour $r = k$, donne (a') où $s = 1$. Comme, d'autre part, (a) est vérifiée pour $r = 1$, les formules (a) et (a') sont vraies pour r quelconque.

B. Nombres et polynômes de Bernoulli.

Ces nombres et polynômes jouant dans cette étude un rôle capital, nous allons encore une fois préciser le système de notations adopté ici pour ces nombres.

Dans l'établissement de la formule sommatoire d'Euler et Maclaurin s'introduit de la manière la plus naturelle la relation *symbolique*:

$$(1 + B)^{(n)} - B_n = 0, \tag{b}$$

où, dans le développement du binôme, les B^r ($r = 1, 2, \ldots, n$), doivent être remplacées par les symboles B_r.

En faisant, dans (b), successivement $n = 2, 3, \ldots$, on obtient, de proche en proche, les valeurs numériques des nombres Bernoulliens, données par les formules (1) du n° 1. Il faut bien noter que

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2n+1} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les *polynômes* de Bernoulli seront désignés ici toujours par $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), ces polynômes devant satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$\varphi_k(x + 1) - \varphi_k(x) = x^k, \tag{c}$$

x étant *quelconque*.

L'expression de $\varphi_k(x)$ s'obtient d'une manière immédiate par l'application de la formule d'Euler

$$h y_x = \int_x^{x+h} y\, dx + h B_1 \varDelta y + \frac{h^2 B_2}{2!} \varDelta y' + \frac{h^4 B_4}{4!} \varDelta y''' + \cdots \tag{A}$$

En y faisant $h = 1$, $y_x = x^k$, on aura

$$x^k = \int_x^{x+1} x^k\, dx + B_1 [x^k]_x^{x+1} + \frac{B_2}{2!} k [x^{k-1}]_x^{x+1}$$

$$+ \frac{B_4}{4!} k (k - 1)(k - 2) [x^{k-3}]_x^{x+1} + \cdots = [\varphi_k(x)]_x^{x+1}$$

où

(d) $$\varphi_k(x) = \frac{1}{k+1}[x^{k+1} + (k+1)B_1 x^k + C_{k+1}^2 B_2 x^{k-1} + C_{k+1}^4 B_4 x^{k-3} + \cdots + C_{k+1}^2 B_{k-1} x^2 + (k+1) B_k x].$$

Dans cette expression, l'un des deux derniers termes s'annule à cause de $B_{2n+1} = 0$. Les symboles C_{k+1}^2, C_{k+1}^4, ... sont les coefficients binômiaux.

La formule (d) peut s'écrire d'une manière symbolique

(d′) $$\varphi_k(x) = \frac{1}{k+1}[(x+B)^{(k+1)} - B_{k+1}]$$

où les puissances B^r $(r = 1, 2, \ldots, k+1)$ doivent être remplacées par les symboles B_r.

En faisant, dans (d), $k = 0, 1, 2, \ldots$, on a

(e) $$\begin{cases} \varphi_0(x) = x \quad ; \quad \varphi_1(x) = \dfrac{x^2 - x}{2} \quad ; \\ \varphi_2(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{6}; \quad \varphi_3(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^2}{4}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Eu égard à (c) et (d), il vient

(d″) $$\varphi_k(x+1) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \frac{1}{k+1}\sum_{r=2}^{k} C_{k+1}^r B_r x^{k+1-r},$$

où, sous le signe $\sum$, les termes en B_{2n+1} s'annuleront.

Si nous faisons, dans (c), successivement $x = a$, $x = a + 1$, $x = a + 2$, ..., $x = a + n - 1$, il vient, en ajoutant les égalités obtenues membre à membre,

(f) $$a^k + (a+1)^k + \cdots + (a+n-1)^k = [\varphi_k(x)]_a^{a+n}$$

valable pour a *quelconque.*

En particulier, (f) est valable pour a tendant vers 0 et pour $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Rappelons que, d'après (d), on a

(g) $$\int \varphi_k(x)\,dx = \frac{1}{k+1}[\varphi_{k+1}(x) - B_{k+1}x]$$

(g′) $$\frac{d\varphi_k(x)}{dx} = k\,\varphi_{k-1}(x) + B_k.$$

Rappelons encore les autres propriétés des polynômes de Bernoulli, que nous aurons à utiliser dans la suite,

(h) $$\varphi_k(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(i) $$\begin{cases} \varphi_k(1) = 0 & (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ \varphi_0(1) = 1, \text{ car } \varphi_0(x) = x. \end{cases}$$

(j) $$\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}\,\frac{2^{k+1}-1}{2^k}\left(B_1 = -\frac{1}{2},\ B_{2p+1} = 0\right).$$

(k) $$\begin{cases} \varphi_{2p}(x) + \varphi_{2p}(1-x) = 0 \\ \varphi_{2p+1}(x) - \varphi_{2p+1}(1-x) = 0. \end{cases}$$

Remarque. Nous avons repris la déduction de l'expression bien connue de $\varphi_k(x)$, afin que le lecteur puisse facilement vérifier que le polynôme $\varphi_0(x) = x$, que nous avons introduit, satisfait à toutes les propriétés des polynômes de Bernoulli, que vous venons de considérer. Le polynôme $\varphi_0(x) = x$ nous permettra, dans la suite, de faire entrer le cas de $\Gamma(x)$ $(k = 0)$, dans le cas général de la fonction $\Gamma_k(x)$, dont l'étude fera l'objet de ce qui suit.

C. Nous poserons encore, pour abréger l'écriture,

(m) $$\psi_k(x) = \sum_{r=0}^{k-1} C_k^r L_r x^{k-r}.$$

c'est-à-dire

(m′) $$\psi_k(x) = x^k L_0 + k x^{k-1} L_1 + C_k^2 x^{k-2} L_2 + C_k^3 x^{k-3} L_3 + \cdots + C_k^2 x^2 L_{k-2} + kx L_{k-1}$$

où les constantes L_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ ont les valeurs numériques données par (6) et (7) du n° 1. Nous donnerons plus loin le développement de L_k en série convergente.

Il résulte de la définition (m′) de $\psi_k(x)$:

(n) $$\int \psi_k(x)\,dx = \frac{1}{k+1}\left[\psi_{k+1}(x) - (k+1) L_k x\right].$$

Signalons, à titre mnémonique, que (m′) peut s'écrire *symboliquement:*

(m″) $$\psi_k(x) = (x + L)^{(k)} - L_k,$$

où il faut toutefois noter que, dans le développement du binôme, le premier terme est, d'après (m'),

$$x^k L_0 \quad \text{au lieu de} \quad x^k.$$

D. **Nous ferons encore usage des abréviations suivantes:**

$$(\text{o}) \qquad \begin{cases} I_0(x) = \log \Gamma(x+1) \\ I_1(x) = \int_0^x I_0(x)\,dx = \int_0^x \log \Gamma(x+1)\,dx \\ I_2(x) = \int_0^x I_1(x)\,dx = \int_0^x \left[\int_0^x \log \Gamma(x+1)\,dx\right] dx, \end{cases}$$

et, d'une manière générale,

$$(\text{o}') \qquad I_k(x) = \int_0^x I_{k-1}(x)\,dx.$$

$I_k(x)$ est donc le résultat de k intégrations successives de $\log \Gamma(x+1)$, depuis o jusqu'à x.

Si nous posons, d'autre part,

$$(\text{p}) \qquad \begin{cases} \sigma_k(x) = -\dfrac{Cx^{k+1}}{(k+1)!} + \dfrac{s_2 x^{k+2}}{2\cdot 3\ldots(k+2)} - \dfrac{s_3 x^{k+3}}{3\cdot 4\ldots(k+3)} \\ \qquad + \dfrac{s_4 x^{k+4}}{4\cdot 5\ldots(k+4)} - \dfrac{s_5 x^{k+5}}{5\cdot 6\ldots(k+5)} + \cdots \end{cases}$$

où C est la constante d'Euler, et

$$(\text{q}) \qquad s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

on voit aisément que la série (p), convergente pour $|x| \leqq 1$, est le résultat de k intégrations successives, depuis o jusqu'à x, de la série

$$(\text{p}') \qquad \sigma_0(x) = \log \Gamma(1+x) = -\frac{Cx}{1} + s_2\frac{x^2}{2} - s_3\frac{x^3}{3} + s_4\frac{x^4}{4} - \cdots,$$

convergente pour $-1 < x \leqq 1$.

Comme la série $\sigma_0(x) = \log \Gamma(x+1)$ n'a aucun point singulier dans le demi-plan positif, il en est de même de la série (p); elle peut donc être prolongée analytiquement pour x positif quelconque. On peut donc écrire

(r) $$I_k(x) = \sigma_k(x).$$

Nous poserons encore

(s) $$C_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Pour $k = 0$, nous verrons au n° 4 que, d'après la formule fondamentale (14), où C_k intervient, on doit prendre

(s') $$C_0 = 0.$$

C (sans indice) désignera toujours la constante d'Euler.

3. Évaluation du logarithme du produit $1^{1^k} . 2^{2^k} . 3^{3^k} \ldots x^{x^k}$, dans le cas général.

En appliquant la formule sommatoire (a) du n° 1, on a, en tenant compte de la relation

(a) $$\int_0^x x^k \log x\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \log x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2},$$

ainsi que de l'expression générale de la dérivée d'ordre r de la fonction $y = x^k \log x$, donné par (a) et (a') du n° 2 (section A),

(10) $$\sum_{r=1}^{r=x} r^k \log r = L_k + \lambda_k(x+1)$$

où

(11) $$\left\{\begin{aligned} &\lambda_k(x+1) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \log x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{2} x^k \log x \\ &+ \frac{B_2}{2!} x^{k-1}(k \log x + 1) + \frac{B_4}{4!} x^{k-3} \frac{k!}{(k-3)!}\left(\log x + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2}\right) \\ &+ \frac{B_6}{6!} x^{k-5} \frac{k!}{(k-5)!}\left(\log x + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-4}\right) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{B_k}{k!} x \frac{k!}{1!}\left(\log x + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) \\ &+ \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} k! \log x + \frac{B_{k+2}}{(k+2)!} \frac{k!}{x} - \frac{B_{k+3}}{(k+3)!} \frac{k!}{x^2} \\ &+ \frac{B_{k+4}}{(k+4)!} \frac{k!\,2!}{x^3} - \frac{B_{k+5}}{(k+5)!} \frac{k!\,3!}{x^4} + \cdots \end{aligned}\right.$$

valable pour x entier.

Nous avons, dans ce développement, écrit d'une manière *consécutive* les termes en B_k, B_{k+1}, $B_{k+2}, \ldots$ l'un ou l'autre de deux termes *consécutifs quelconques* s'annulera à cause de $B_{2n+1} = 0$.

En réunissant les termes en $\log x$, la relation (11) peut s'écrire, eu egard à (d″) du n° 2 (section B),

$$(11') \quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_k(x+1) = \left[\varphi_k(x+1) + \frac{B_{k+1}}{k+1}\right] \log x \\ &- \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + k! \sum_{r=1}^{k-1} \frac{B_{r+1}}{(r+1)!} \frac{x^{k-r}}{(k-r+1)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-r+1}\right) \\ &+ k! \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{B_{k+1+s}}{(k+1+s)!} \frac{(s-1)!}{x^s} \end{aligned}\right.$$

où les termes en B_{2n+1} s'annuleront.

Nous emploierons plus loin la relation (11) sous la forme:

$$(11'') \quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_k(x+1) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \log x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{2} x^k \log x \\ &+ k! \sum_{r=1}^{k-1} \frac{B_{r+1}}{(r+1)!} \frac{x^{k-r}}{(k-r)!} \left(\log x + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-r+1}\right) \\ &+ \frac{B_{k+1}}{k+1} \log x + \frac{B_{k+2}}{(k+1)(k+2)x} \\ &+ k! \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{B_{k+1+s}}{(k+1+s)!} \frac{(s-1)!}{x^s} \end{aligned}\right.$$

Notons que, d'après la théorie du terme complémentaire de la formule sommatoire d'Euler et Maclaurin [1], la série divergente (11) peut toujours être remplacée par un développement *fini*, en remplaçant le *reste* de la série, commençant au terme en B_{2m} $(2m > k+1)$, par le terme complémentaire:

$$(12) \qquad R_{2m} = \frac{(-1)^k \theta_k B_{2m}}{(2m-k-1)(2m-k)\ldots 2m\, x^{2m-k-1}}.$$
$$(0 < \theta_k < 1).$$

En désignant le terme en B_{2m} par U_{2m}, on voit, d'après (12), que

$$(12') \qquad |R_{2m}| < |U_{2m}|.$$

[1] Voir *Acta mathematica*, tome V (1885) p. 2, Mémoire de MALMSTEN.

Pour une valeur donnée de m, la valeur de $|U_{2m}|$ diminue lorsque x grandit. Ainsi, par exemple, pour $k = 6$ et $m = 10$, on a, d'après (1) du n° 1,

$$|B_{20}| < 529,064 < 530.$$

On aura donc, pour $x = 10$,

$$|R_{20}| < \frac{530}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 10^{13}} < \frac{1}{9 \cdot 10^{19}}$$

et pour $x = 100$,

$$|R_{20}| < \frac{530}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 10^{26}} < \frac{1}{9 \cdot 10^{32}}.$$

Pour une valeur donnée de x, la valeur de $|U_{2m}|$ décroît lorsque m croît, tant que

$$k + 1 < 2m < 2\pi x.$$

Ainsi, dans le cas de $x = 10$, les valeurs de $|U_{2m}|$ vont en diminuant jusqu'à $|U_{62}|$. On pourra donc choisir un *reste* R_{2m} notablement plus petit que le reste R_{20} ci-dessus.

Remarque. Dans la section B du n° 2, nous avons déterminé, au moyen de la formule d'Euler (A), l'expression de $\varphi_k(x)$, en partant de la définition

$$\varphi_k(x+1) - \varphi_k(x) = x^k.$$

Si nous appliquons le même procédé à la détermination de $\lambda_k(x)$, en partant de l'équation fonctionnelle

(b) $$\lambda_k(x+1) - \lambda_k(x) = x^k \log x,$$

où x est *quelconque*, on retrouve, pour $\lambda_k(x)$, l'expression (11) dans laquelle le terme

$$\frac{1}{2} x^k \log x \text{ est remplacé par } -\frac{1}{2} x^k \log x,$$

conformément à (b). Cette dernière relation est donc valable pour x *quelconque*.

4. Identité fondamentale.

Au moyen de la formule sommatoire (a) du n° 1, évaluons le logarithme du produit

$$1^{1^{k+1}} \cdot 2^{2^{k+1}} \cdot 3^{3^{k+1}} \cdots x^{x^{k+1}}.$$

En tenant compte de (a) et (a′) du n° 2, ainsi que de (a) du n° 3, il vient

$$\sum_{r=1}^{r=x} r^{k+1} \log r = L_{k+1} + \lambda_{k+1}(x+1), \tag{13}$$

où

$$\text{(a)} \left\{ \begin{aligned} &\lambda_{k+1}(x+1) = \frac{x^{k+2}}{k+2} \log x - \frac{x^{k+2}}{(k+2)^2} + \frac{1}{2} x^{k+1} \log x \\ &+ (k+1)! \sum_{r=1}^{k-1} \frac{B_{r+1}}{(r+1)!} \frac{x^{k+1-r}}{(k+1-r)!} \left(\log x + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k+2-r} \right) \\ &+ B_{k+1}\, x \left(\log x + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{B_{k+2}}{k+2} \log x \\ &+ (k+1)! \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \frac{B_{k+1+s}}{(k+1+s)!} \frac{(s-1)!}{x^{s-1}}, \end{aligned} \right.$$

où les termes en B_{2n+1} disparaîtront, eu égard à $B_{2n+1} = 0$.

Nous allons maintenant vérifier que l'on a *identiquement:*

$$\begin{aligned} &(k+1) \int \lambda_k(x+1)\, dx \\ &= \lambda_{k+1}(x+1) - \frac{1}{k+1} \varphi_{k+1}(x+1) - C_k B_{k+1} x. \end{aligned} \tag{14}$$

Pour cet effet, intégrons l'expression de $\lambda_k(x+1)$ donnée par (11″) du n° 3. En ayant égard à (a) du même n° 3, il vient, en multipliant par $k+1$,

$$\text{(b)} \left\{ \begin{aligned} &(k+1) \int \lambda_k(x+1)\, dx = \frac{x^{k+2}}{k+2} \log x - \frac{x^{k+2}}{(k+2)^2} \\ &- \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{2} \left(x^{k+1} \log x - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \\ &+ (k+1)! \sum_{r=1}^{k-1} \frac{B_{r+1}}{(r+1)!} \frac{x^{k-r+1}}{(k-r+1)!} \left(\log x + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-r+2} \right) \\ &+ B_{k+1}(x \log x - x) + \frac{B_{k+2}}{k+2} \log x \\ &+ (k+1)! \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \frac{B_{k+1+s}}{(k+1+s)!} \frac{(s-2)!}{x^{s-1}}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette expression, les termes généraux sous les deux signes Σ sont respectivement les résultats de l'intégration des termes généraux sous les deux signes Σ de (11'') du n° 3.

En retranchant (b) de (a) membre à membre, il vient

$$\lambda_{k+1}(x+1) - \int \lambda_k(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[\frac{x^{k+2}}{k+2} + \frac{1}{2}x^{k+1} + (k+1)!\sum_{r=1}^{k-1}\frac{B_{r+1}}{(r+1)!}\frac{x^{k+1-r}}{(k+1-r)!}\right]$$

$$+ B_{k+1}x\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{k+1}\varphi_{k+1}(x+1) + C_k B_{k+1}x,$$

eu égard à (d'') et (s) du n° 2.

Il en résulte immédiatement l'identité (14).

Si nous appliquons la formule (14) au cas de $k=0$, il vient

$$\text{(c)} \qquad \int \lambda_0(x+1)\,dx = \lambda_1(x+1) - \varphi_1(x+1) - C_0 B_1 x.$$

Pour déterminer la signification qu'il faut attribuer au coefficient C_0, qui entre dans la dernière relation, comparons directement

$$\int \lambda_0(x+1)\,dx \quad \text{et} \quad \lambda_1(x+1).$$

Les relations (2) et (3) du n° 1 peuvent s'écrire

$$\log(1.2\ldots x) = L_0 + \lambda_0(x+1)$$
$$\log(1^1.2^2\ldots x^x) = L_1 + \lambda_1(x+1)$$

où

$$\lambda_0(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_2}{1.2x} + \frac{B_4}{3.4x^3} + \frac{B_6}{5.6x^5} + \cdots$$

$$\lambda_1(x+1) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2}\right)\log x - \frac{x^2}{4} - \frac{B_4}{2.3.4x^2} - \frac{B_6}{4.5.6x^4} - \cdots$$

On trouve alors aisément

(d) $$\int \lambda_0(x+1)\,dx = \lambda_1(x+1) - \frac{x^2+x}{2}$$

$$= \lambda_1(x+1) - \varphi_1(x+1).$$

En comparant (c) et (d), on a

$$C_0 B_1 x = 0.$$

Comme $B_1 = -\frac{1}{2} \neq 0$, il vient

(e) $$C_0 = 0.$$

C'est la formule (s') du n° 2.

Remarque. Si nous remplaçons, dans (14), la série divergente $\lambda_k(x+1)$ par le développement *fini*, en utilisant l'expression (12) du reste R_{2m}, on obtient, après l'intégration, le second membre de (14), dans lequel la série divergente $\lambda_{k+1}(x+1)$ est remplacée par le développement *fini* correspondant. En effet, quand, dans l'intégrale du développement fini de $\lambda_k(x+1)$, x varie dans l'intervalle d'intégration, la constante θ_k varie avec x; θ_k devient donc une fonction $\theta_k(x)$, vérifiant la condition

$$0 < \theta_k(x) < 1.$$

En appliquant le théorème de la moyenne à l'intégrale du terme complémentaire (12), relatif à $\lambda_k(x+1)$, il vient

$$\frac{B_{2m}}{(2m-k-1)(2m-k)\dots 2m}\int \frac{\theta_k(x)}{x^{2m-k-1}}\,dx = \frac{B_{2m}\,\theta_k(x_1)}{(2m-k-1)\dots 2m}\int \frac{dx}{x^{2m-k-1}}$$

$$= -\frac{B_{2m}\,\theta_k(x_1)}{(2m-k-2)(2m-k-1)\dots 2m\,x^{2m-k-2}}.$$

En remplaçant, dans le dernier membre, la constante

$$\theta_k(x_1) \quad \text{par} \quad \theta_{k+1},$$

on obtient le terme complémentaire de $\lambda_{k+1}(x+1)$, conformément à la formule (12) du n° 3.

La formule fondamentale (14) reste donc vraie quand on y remplace les deux séries divergentes par leurs développements finis respectifs.

5. Définition et propriétés de $\Gamma_k(x)$.

La fonction $\Gamma_k(x+1)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) est définie par

$$\log \Gamma_k(x+1) = C_k \varphi_k(x+1) - \psi_k(x) + k!\, \sigma_k(x), \tag{15}$$

où C_k, $\varphi_k(x+1)$, $\psi_k(x)$ et $\sigma_k(x)$ ont respectivement pour expressions (s), (d″), (m) et (p) du n° 2.

La relation (15) définit donc $\log \Gamma_k(x+1)$ par une série uniformément convergente pour $|x| < 1$; elle est encore convergente pour $|x| = 1$, sauf le cas de $k=0$, où elle est convergente pour $x = 1$, et divergente pour $x = -1$.

En ayant égard à la relation (r) du n° 2, la formule (15) peut s'écrire

$$\log \Gamma_k(x+1) = C_k \varphi_k(x+1) - \psi_k(x) + k!\, I_k(x) \tag{15'}$$

où $I_k(x)$ est défini par (o′) et (o) du n° 2. La définition (15′) est valable pour

$$-1 < x < \infty.$$

Nous nous servirons surtout de la définition (15′) pour l'établissement des propriétés de $\Gamma_k(x)$.

Nous donnerons, au n° 7, une variante de la définition (15′).

Nous allons démontrer que la fonction $\Gamma_k(x)$ définie par (15′), jouit des propriétés qui suivent. Nous les désignerons respectivement par (I_k), (II_k), ..., (VII_k), par analogie avec les propriétés (I), ..., (VII) relatives à $\Gamma(x)$, énumérées dans l'introduction.

Propriétés de $\Gamma_k(x)$:

1°. *Propriété fondamentale:*

$$\Gamma_k(x+1) = x^{x^k} \Gamma_k(x), \tag{I_k}$$

x étant *quelconque.*

$$\Gamma_k(0) = 1; \quad \Gamma_k(1) = 1; \quad \Gamma_k(2) = 1. \tag{I'_k}$$

En particulier, pour x entier,

$$\Gamma_k(x+1) = 1^{1^k} . 2^{2^k} . 3^{3^k} \ldots x^{x^k}. \tag{I''_k}$$

2°. *Expression de* $\log \Gamma_k(x+1)$ *au moyen d'une intégrale définie:*

$$\text{(II}_k\text{)}\qquad \log \Gamma_k(x+1) = C_k \varphi_k(x+1) - \psi_k(x)$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\left\{\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{k!}{1-e^{-t}}\left[\sum_{r=0}^{r=k}(-1)^r \frac{x^{k-r}}{(k-r)!\,t^r} + (-1)^{k+1}\frac{e^{-xt}}{t^k}\right]\right\} dt,$$

3°. *Développement de* $\log \Gamma_k(1+x)$ *en série convergente:*

$$\text{(III}_k\text{)}\qquad \log \Gamma_k(1+x) = C_k \varphi_k(x+1) - \psi_k(x)$$

$$+ k!\left[-\frac{C x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{s_2 x^{k+2}}{2.3\ldots(k+2)} - \frac{s_3 x^{k+3}}{3.4\ldots(k+3)} + \frac{s_4 x^{k+4}}{4.5\ldots(k+4)} - \frac{s_5 x^{k+5}}{5.6\ldots(k+5)} + \cdots\right]$$

valable pour $|x| \leqq 1$.

On peut encore obtenir le développement de $\log \Gamma_k(1+x)$ en une série plus rapidement convergente (voir n° 14).

4°. *L'analogue de la formule de Moivre-Stirling.*

On a, pour x *quelconque*,

$$\text{(IV}_k\text{)}\qquad \log \Gamma_k(x+1) = L_k + \lambda_k(x+1),$$

où $\lambda_k(x+1)$ a pour expression (11) du n° 3.

5°. *L'analogue de la formule de Raabe:*

$$\text{(V}_k\text{)}\qquad \int_{x-1}^{x} \log \Gamma_k(x+1)\,dx = \frac{1}{k+1}\left(x^{k+1}\log x - \frac{x^{k+1}}{k+1} - C_k B_{k+1}\right) + L_k$$

x étant *quelconque*.

En particulier,

$$\text{(V}'_k\text{)}\qquad \int_0^1 \log \Gamma_k(x+1)\,dx = L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\text{(V}''_k\text{)}\qquad \int_0^1 \log \Gamma_k(x)\,dx = L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1}.$$

6°. *Formule de multiplication:*

$$(\mathrm{VI}_k)\qquad \Gamma_k^{\frac{1}{n^k}}(na) = n^{\frac{\varphi_k(na)+\frac{B_{k+1}}{k+1}}{n^k}}\left(A_k e^{-\frac{C_k B_{k+1}}{k+1}}\right)^{-\frac{n^{k+1}-1}{n^k}}$$

$$\times \Gamma_k(a)\,\Gamma_k\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma_k\left(a+\frac{n-1}{n}\right).$$

$$(A_k = e^{L_k}).$$

En faisant $na = 1$, et ayant égard à

$\varphi_k(1) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

$\varphi_0(1) = 1 \qquad$ [d'après la première relation (e) du n° 2],

il vient, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$(\mathrm{VI}'_k)\qquad \Gamma_k\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma_k\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma_k\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= n^{-\frac{B_{k+1}}{(k+1)n^k}}\left(A_k e^{-\frac{C_k B_{k+1}}{k+1}}\right)^{\frac{n^{k+1}-1}{n^k}},$$

et pour $k = 0$,

$$(\mathrm{VI}')\qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

En particulier, pour $n = 2$, (V'_k) devient

$$(\mathrm{VI}''_k)\qquad \Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{B_{k+1}}{(k+1)2^k}}\left(A_k e^{-\frac{C_k B_{k+1}}{k+1}}\right)^{\frac{2^{k+1}-1}{2^k}}.$$

7°. *Intégrale et dérivée de* $\log \Gamma_k(x)$:

$$(\mathrm{VII}_k)\qquad \int_0^x \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{k+1}\left\{\log \Gamma_{k+1}(x+1) - \frac{1}{k+1}\varphi_{k+1}(x+1) + x\left[L_k(k+1) - C_k B_{k+1}\right]\right\}$$

ou, sous une autre forme,

$$(\mathrm{VII}'_k) \qquad \int\limits_0^x \log \Gamma_k(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{k+1}\left\{\log \Gamma_{k+1}(x) - \frac{1}{k+1}\varphi_{k+1}(x) + x\,[L_k(k+1) - C_k B_{k+1}]\right\}$$

$$(\mathrm{VII}''_k) \qquad \frac{d \log \Gamma_k(x)}{dx} = k \log \Gamma_{k-1}(x) + \varphi_{k-1}(x) + C_k B_k - k\, L_{k-1}.$$

Pour $k = 0$, en tenant compte de

$$C_0 = 0; \quad A_0 = \sqrt{2\pi}; \quad B_1 = -\frac{1}{2}; \quad \varphi_0(x) = x; \quad \varphi_0(1) = 1,$$

les formules (I_k), (II_k), ..., (VII_k) donnent les propriétés (I), (II), ..., (VII), relatives à $\Gamma(x)$, énumérées dans l'introduction.

Pour démontrer que les formules (I_k), ..., (VII_k) sont valables pour k entier positif *quelconque*, il suffit de vérifier que dès qu'elles sont vraies pour $\Gamma_k(x)$, elles le sont également pour $\Gamma_{k+1}(x)$. C'est ce que nous allons faire dans les n^{os} suivants.

6. **Propriété fondamentale** (I_{k+1}) **pour** $\Gamma_{k+1}(x)$.

Puisque, par hypothèse, les formules (I_k), ..., (VII_k) sont vraies pour $\Gamma_k(x)$, nous avons, d'après (VII_k),

$$(k+1)\int\limits_{x-1}^x \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$

$$= \left\{\log \Gamma_{k+1}(x+1) - \frac{\varphi_{k+1}(x+1)}{k+1} + x\,[L_k(k+1) - C_k B_{k+1}]\right\}_{x-1}^x$$

ou, eu égard à la propriété des polynômes de Bernoulli

$$\varphi_{k+1}(x+1) - \varphi_{k+1}(x) = x^{k+1},$$

$$(\mathrm{a}) \qquad (k+1)\int\limits_{x-1}^x \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$

$$= [\log \Gamma_{k+1}(x+1)]_{x-1}^x - \frac{x^{k+1}}{k+1} + (k+1)\,L_k - C_k B_{k+1}.$$

D'autre part, on a, également par hypothèse, par (V_k),

$$\text{(b)} \qquad (k+1)\int_{x-1}^{x} \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$

$$= x^{k+1}\log x - \frac{x^{k+1}}{k+1} + (k+1)L_k - C_k B_{k+1}.$$

En égalant les seconds membres de (a) et (b), on obtient la propriété fondamentale pour $\Gamma_{k+1}(x)$:

$$\text{(16)} \qquad \log \Gamma_{k+1}(x+1) = x^{k+1}\log x + \log \Gamma_{k+1}(x),$$

ou

$$(\mathrm{I}_{k+1}) \qquad \Gamma_{k+1}(x+1) = x^{x^{k+1}}\,\Gamma_{k+1}(x),$$

x étant *quelconque*.

Comme, d'après (o′), (i) et (m′) du n° 2,

$$I_{k+1}(0) = \int_0^0 I_k(x)\,dx = 0,$$

$$\varphi_{k+1}(1) = 0, \qquad \psi_{k+1}(0) = 0,$$

il vient, en remplaçant, dans la définition (15′), k par $k+1$,

$$\text{(c)} \qquad \log \Gamma_{k+1}(1) = 0; \qquad \Gamma_{k+1}(1) = 1.$$

En tenant ensuite compte de

$$\lim_{x=0} x^{x^k} = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

on a, en vertu de (I_{k+1}) ci-dessus,

$$(\mathrm{I}'_{k+1}) \qquad \Gamma_{k+1}(0) = 1; \quad \Gamma_{k+1}(1) = 1; \quad \Gamma_{k+1}(2) = 1.$$

En particulier, pour x entier, on a

$$(\mathrm{I}''_{k+1}) \qquad \Gamma_{k+1}(x+1) = 1^{1^{k+1}} . \, 2^{2^{k+1}} . \, 3^{3^{k+1}} \ldots x^{x^{k+1}}.$$

7. Variante de la définiton (15′) de $\log \Gamma_k(x+1)$.

Posons, pour abréger l'écriture,

(a) $$J_0(x) = \log \Gamma(x),$$

$$J_1(x) = \int_0^x J_0(x)\,dx = \int_0^x \log \Gamma(x)\,dx$$

et d'une manière générale,

(a′) $$J_k(x) = \int_0^x J_{k-1}(x)\,dx.$$

Comme, d'après (o) et (o′) du n° 2,

$$I_0(x) = \log \Gamma(x+1); \quad I_k(x) = \int_0^x I_{k-1}(x)\,dx,$$

il vient

(b) $$I_0(x) - J_0(x) = \log \Gamma(x+1) - \log \Gamma(x) = \log x$$

(b′) $$I_1(x) - J_1(x) = \int_0^x \log x\,dx = x \log x - x,$$

et, d'une manière générale,

(c) $$I_k(x) - J_k(x) = \frac{1}{k!}(x^k \log x - C_k x^k).$$

Cette relation est vraie pour k entier positif *quelconque*, car en intégrant cette relation depuis o jusqu'à x, on a, eu égard à (a) du n° 3,

$$I_{k+1}(x) - J_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!}(x^{k+1} \log x - C_{k+1} x^{k+1}),$$

qui est bien de la forme (c).

Cela étant, remplaçons, dans (15′) du n° 5,

$$k!\, I_k(x) \text{ par } k!\, J_k(x) + x^k \log x - C_k x^k,$$

$$\varphi_k(x+1) \text{ par } \varphi_k(x) + x^k$$

en vertu de la propriété fondamentale des polynômes de Bernoulli, et

$$\log \Gamma_k(x+1) \quad \text{par} \quad \log \Gamma_k(x) + x^k \log x,$$

d'après la propriété (I_k) de $\Gamma_k(x)$. On aura alors

$$\log \Gamma_k(x) = C_k \varphi_k(x) - \psi_k(x) + k!\, J_k(x). \tag{15''}$$

8. Formules (II_{k+1}) et (III_{k+1}) pour $\Gamma_{k+1}(x)$.

A. En intégrant successivement k fois par rapport à x, depuis 0 jusqu'à x, la relation bien connue

$$\log \Gamma(x+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\left[x - \frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right] dt, \tag{II}$$

il vient, en multipliant le résultat par $k!$,

$$k!\, I_k(x)$$
$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\left\{\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{k!}{1-e^{-t}}\left[\sum_{r=0}^{r=k}(-1)^r \frac{x^{k-r}}{(k-r)!\,t^r} + (-1)^{k+1}\frac{e^{-xt}}{t^k}\right]\right\} dt.$$

En substituant cette valeur de $k!\, I_k(x)$ dans (15′) du n° 5, on a la formule (II_k) du même n° 5. Elle est donc vraie pour k entier positif quelconque, donc pour $\Gamma_{k+1}(x)$.

B. La formule (III_k) du n° 5 n'est que la transcription de la définition (15) du même n° 5. Elle est donc vraie pour k entier positif quelconque, donc pour $\Gamma_{k+1}(x)$.

Nous donnerons au n° 14 une série plus rapidement convergente pour $\log \Gamma_k(1+x)$.

9. L'analogue de la formule de Moivre-Stirling pour $\log \Gamma_{k+1}(x+1)$.

Puisque, par hypothèse, on a, pour x *quelconque*,

$$\log \Gamma_k(x+1) = L_k + \lambda_k(x+1), \tag{IV_k}$$

il vient, en remplaçant, dans l'identité fondamentale (14) du n° 4, $\lambda_k(x+1)$ par $\log \Gamma_k(x+1) - L_k$,

$$\text{(a)} \qquad (k+1)\int_0^x \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$

$$= \lambda_{k+1}(x+1) - \frac{\varphi_{k+1}(x+1)}{k+1} + x[L_k(k+1) - C_k B_{k+1}] + C'$$

C' étant la constante d'intégration.

D'autre part, on a, également par hypothèse,

$$(\mathrm{VII}_k) \qquad (k+1)\int_0^x \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$

$$= \log \Gamma_{k+1}(x+1) - \frac{\varphi_{k+1}(x+1)}{k+1} + x[L_k(k+1) - C_k B_{k+1}].$$

En égalant les seconds membres des deux dernières relations, il vient, pour x *quelconque*,

$$\text{(b)} \qquad \log \Gamma_{k+1}(x+1) = \lambda_{k+1}(x+1) + C'.$$

Comme, pour x *entier*, on a, en vertu de (13) du n° 4 et (I''_{k+1}) du n° 6,

$$\text{(c)} \qquad \log \Gamma_{k+1}(x+1) = \lambda_{k+1}(x+1) + L_{k+1}$$

il vient, en égalant (b) et (c),

$$\text{(d)} \qquad C' = L_{k+1}.$$

On a donc, moyennant (b) et (d), pour x *quelconque*,

$$(\mathrm{IV}_{k+1}) \qquad \log \Gamma_{k+1}(x+1) = L_{k+1} + \lambda_{k+1}(x+1).$$

10. L'analogue de la formule de Raabe pour la fonction $\Gamma_{k+1}(x)$.

Nous allons démontrer que, dès que la fonction $\Gamma_{k+1}(x)$ jouit des propriétés (I_{k+1}) et (IV_{k+1}), elle jouit également de la propriété (V_{k+1}). Seulement, pour avoir l'écriture plus simple, nous le démontrerons pour $\Gamma_k(x)$ au lieu de $\Gamma_{k+1}(x)$.

Nous avons donc à démontrer la propriété (V_k) pour $\Gamma_k(x)$, en supposant que cette fonction jouit des propriétés (I_k) et (IV_k).

On a, d'après (b) du n° 3 (Remarque),

$$(17) \qquad \lambda_{k+1}(x+1) - \lambda_{k+1}(x) = x^{k+1} \log x,$$

valable, pour x *quelconque.*

D'autre part, on a, par hypothèse,

$$(\mathrm{IV}_k) \qquad \log \Gamma_k(x+1) = L_k + \lambda_k(x+1),$$

x étant *quelconque.*

En intégrant, depuis $x-1$ jusqu'à x, on a

$$(\mathrm{a}) \qquad \int_{x-1}^{x} \log \Gamma_k(x+1)\,dx = \int_{x-1}^{x} \lambda_k(x+1)\,dx + L_k.$$

En remplaçant l'intégrale du second membre par son expression (14) du n° 4, il vient

$$\int_{x-1}^{x} \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[\lambda_{k+1}(x+1) - \frac{1}{k+1}\varphi_{k+1}(x+1)\right]_{x-1}^{x} - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1} + L_k.$$

En tenant compte de la relation (17) ci-dessus ainsi que de la propriété des polynômes de Bernoulli

$$\varphi_{k+1}(x+1) - \varphi_{k+1}(x) = x^{k+1},$$

il vient

$$(\mathrm{V}_k) \qquad \int_{x-1}^{x} \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(x^{k+1}\log x - \frac{x^{k+1}}{k+1} - C_k B_{k+1}\right) + L_k,$$

valable, pour x *quelconque.*

En particulier, on a

$$(\mathrm{V}'_k) \qquad \int_{0}^{1} \log \Gamma_k(x+1)\,dx = L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$(\mathrm{V}''_k) \qquad \int_{0}^{1} \log \Gamma_k(x)\,dx = L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1}.$$

11. Formule d'addition pour les polynomes de Bernoulli.

On a

$$\sum_{r=0}^{n-1} \varphi_k\left(a + \frac{r}{n}\right) = \frac{1}{n^k} \varphi_k(na) - \frac{B_{k+1}}{k+1} \frac{n^{k+1} - 1}{n^k}. \tag{18}$$

Le lecteur en trouvera la démonstration dans le Mémoire de M. N. E. Nörlund: *Sur les polynomes de Bernoulli* (Acta mathematica, tome 43, formule (18) à la page 128).

Pour $a = 0$, (18) devient

$$\sum_{r=0}^{n-1} \varphi_k\left(\frac{r}{n}\right) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \frac{n^{k+1} - 1}{n^k}. \tag{19}$$

Remarque. En faisant, dans (19), successivement $n = 2$, $n = 3$, $n = 6$, il vient

$$\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \frac{2^{k+1} - 1}{2^k},$$

$$\varphi_k\left(\frac{1}{3}\right) + \varphi_k\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \frac{3^{k+1} - 1}{3^k},$$

$$\varphi_k\left(\frac{1}{6}\right) + \varphi_k\left(\frac{2}{6}\right) + \cdots + \varphi_k\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \frac{6^{k+1} - 1}{6^k}.$$

En retranchant les deux premières relations de la dernière, il vient, après une petite réduction,

$$\varphi_k\left(\frac{1}{6}\right) + \varphi_k\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{6^k + 3^k + 2^k - 1}{6^k} \frac{B_{k+1}}{k+1}, \tag{c}$$

que nous utiliserons plus loin.[1]

[1] Ce paragraphe et le suivant ont été remaniés après la réception de ce Mémoire par la Rédaction des Acta mathematica. Dans sa première rédaction, ce paragraphe contenait une démonstration de la formule (18), que nous avons crue *inédite*. Mais ayant depuis lu le Mémoire susmentionné de M. N. E. Nörlund, où cette formule est démontrée par une méthode plus rapide que la nôtre, nous avons jugé inutile de donner notre démonstration. En outre, en nous inspirant de la méthode employée par M. N. E. Nörlund pour l'établissement de la formule (18), nous avons obtenu, dans le paragraphe suivant, une démonstration plus rapide de la formule de multiplication, qui, primitivement, a été démontrée d'une autre manière.

12. **Formule de multiplication pour $\Gamma_{k+1}(x)$.**

Nous allons établir la formule (VI_k) du n° 5 pour k entier positif quelconque; elle sera donc valable pour $\Gamma_{k+1}(x)$.

Posons

$$f(a) = \sum_{r=0}^{n-1} \log \Gamma_k\left(a + \frac{r}{n}\right)$$

$$f_1(a) = \frac{1}{n^k}\left\{\log \Gamma_k(na) - \left[\varphi_k(na) + \frac{B_{k+1}}{k+1}\right]\log n\right\}.$$

En vertu de la propriété fondamentale:

(a) $$\log \Gamma_k(a+1) - \log \Gamma_k(a) = a^k \log a,$$

on a

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a) = a^k \log a.$$

En tenant compte de (a), ainsi que de la propriété des polynomes de Bernoulli:

(b) $$\varphi_k(na+1) - \varphi_k(na) = n^k a^k,$$

on a

$$f_1\left(a + \frac{1}{n}\right) - f_1(a) = a^k \log a.$$

$f(a)$ et $f_1(a)$ vérifiant la même équation aux différences finies, il vient

(c) $$\sum_{r=0}^{n-1} \log \Gamma_k\left(a + \frac{r}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n^k}\left\{\log \Gamma_k(na) - \left[\varphi_k(na) + \frac{B_{k+1}}{k+1}\right]\log n\right\} + C',$$

C' étant une constante. Pour déterminer cette constante, intégrons les deux membres de (c), depuis a jusqu'à $a + 1/n$; on aura

(d) $$\sum_{r=0}^{n-1} \int_a^{a+\frac{1}{n}} \log \Gamma_k\left(a + \frac{r}{n}\right) da$$
$$= \frac{1}{n^k}\int_a^{a+\frac{1}{n}} \left\{\log \Gamma_k(na) - \left[\varphi_k(na) + \frac{B_{k+1}}{k+1}\right]\log n\right\} da + \frac{C'}{n}.$$

Nous utiliserons la formule d'intégration (VII'_k) du n° 5 (qui est, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, une conséquence de la définition de $\Gamma_k(x)$, donc indépendante de la formule (VI_k), que nous sommes en train d'établir), ainsi que la formule (g) du n° 2.

Le premier membre de (d) donne, en tenant compte de (a) et (b),

$$\text{(e)} \qquad \sum_{r=0}^{n-1} \int_a^{a+\frac{1}{n}} \log \Gamma_k\left(a + \frac{r}{n}\right) da = \int_a^{a+1} \log \Gamma_k(a)\, da$$

$$= \frac{1}{k+1} \left\{ \log \Gamma_{k+1}(x) - \frac{\varphi_{k+1}(x)}{k+1} + x\,[L_k(k+1) - C_k B_{k+1}] \right\}_a^{a+1}$$

$$= \frac{a^{k+1}}{k+1} \log a - \frac{a^{k+1}}{(k+1)^2} + L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1}.$$

Le second membre de (d) donne

$$\text{(f)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{n^k} \int_a^{a+\frac{1}{n}} \left\{ \log \Gamma_k(na) - \left[\varphi_k(na) + \frac{B_{k+1}}{k+1} \right] \log n \right\} da + \frac{C'}{n} \\ & = \frac{1}{(k+1)\, n^{k+1}} \left\{ \log \Gamma_{k+1}(x) - \frac{\varphi_{k+1}(x)}{k+1} + x\,[L_k(k+1) - C_k B_{k+1}] \right\}_{na}^{na+1} \\ & - \frac{1}{(k+1)\, n^{k+1}} [\varphi_{k+1}(x)]_{na}^{na+1} \times \log n + \frac{C'}{n} \\ & = \frac{a^{k+1}}{k+1} \log a - \frac{a^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{n^{k+1}} \left(L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1} \right) + \frac{C'}{n}. \end{aligned} \right.$$

En égalant les derniers membres de (e) et (f), on trouve

$$C' = \frac{n^{k+1} - 1}{n^k} \left(L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1} \right).$$

Au moyen de cette valeur de C', la relation (c) donnera

$$\frac{1}{n^k} \log \Gamma_k(na) = \sum_{r=0}^{n-1} \log \Gamma_k\left(a + \frac{r}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{n^k} \left\{ \left[\varphi_k(na) + \frac{B_{k+1}}{k+1} \right] \log n - (n^{k+1} - 1) \left(L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1} \right) \right\}.$$

ou, en ayant égard à

$$L_k = \log A_k,$$

(VI$_k$)
$$\Gamma_k^{\frac{1}{n^k}}(na) = \Gamma_k(a)\,\Gamma_k\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma_k\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$\times\, n^{\frac{\varphi_k(na)+\frac{B_{k+1}}{k+1}}{n^k}}\left(A_k\, e^{-\frac{C_k B_{k+1}}{k+1}}\right)^{-\frac{n^{k+1}-1}{n^k}}.$$

13. Intégrale et dérivée de $\log \Gamma_{k+1}(x)$.

Nous allons vérifier que la formule (VII$_k$) est une conséquence de la formule de définition (15′) du n° 5; elle est donc vraie pour k entier positif quelconque, donc pour $\Gamma_{k+1}(x)$.

En intégrant (15′) multipliée par $k+1$, il vient, eu égard aux formules (g), (n) et (o′) du n° 2,

$$(k+1)\int_0^x \log \Gamma_k(x+1)\,dx = C_k\,\varphi_{k+1}(x+1) - C_k B_{k+1}\,x - \psi_{k+1}(x)$$
$$+ (k+1)\,L_k\,x + (k+1)!\,I_{k+1}(x).$$

En remplaçant C_k par $C_{k+1} - \dfrac{1}{k+1}$, on a

$$(k+1)\int_0^x \log \Gamma_k(x+1)\,dx = C_{k+1}\,\varphi_{k+1}(x+1) - \psi_{k+1}(x) + (k+1)!\,I_{k+1}(x)$$
$$-\frac{1}{k+1}\,\varphi_{k+1}(x+1) + x\,[(k+1)\,L_k - C_k B_{k+1}],$$

ou, en tenant compte de la définition (15′) du n° 5, dans laquelle on remplacera k par $k+1$,

(VII$_k$)
$$(k+1)\int_0^x \log \Gamma_k(x+1)\,dx$$
$$= \log \Gamma_{k+1}(x+1) - \frac{1}{k+1}\,\varphi_{k+1}(x+1) + x\,[(k+1)\,L_k - C_k B_{k+1}].$$

Semblablement, en intégrant la définition (15″) du n° 7, on obtiendra l'intégrale (VII'_k) du n° 5.

On en déduit immédiatement l'expression (VII''_k) de la dérivée de $\log \Gamma_k(x)$ du même n° 5.

Conclusion. La fonction $\Gamma_k(x)$ définie par (15), ou (15′), ou (15″), jouit des propriétés (I_k), (II_k), ... , (VII_k) du n° 5, *quel que soit l'entier positif k.*

14. Développement de $\log \Gamma_k(1 + x)$ en une série plus rapidement convergente que la série (III_k).

En intégrant successivement depuis 0 jusqu'à x, la série

(III′)
$$\log \Gamma(1 + x) = I_0(x)$$
$$= -\log(1 + x) - \frac{C - 1}{1}x + \frac{s_2 - 1}{2}x^2 - \frac{s_3 - 1}{3}x^3 + \frac{s_4 - 1}{4}x^4$$
$$- \frac{s_5 - 1}{5}x^5 + \cdots \qquad (-1 < x \leqq 1),$$

on a, eu égard à (o′) du n° 2 et à (a) du n° 3,

(a)
$$I_1(x) = -(1 + x)\log(1 + x) + x - \frac{C - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{s_2 - 1}{2 \cdot 3}x^3$$
$$- \frac{s_3 - 1}{3 \cdot 4}x^4 + \frac{s_4 - 1}{4 \cdot 5}x^5 - \cdots \qquad (|x| \leqq 1)$$

(b)
$$2!\, I_2(x) = -(1 + x)^2\log(1 + x) + \frac{3}{2}x^2 + x$$
$$+ 2!\left[-\frac{C - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{s_2 - 1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 - \frac{s_3 - 1}{3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \cdots\right]$$

et, en général,

(c)
$$k!\, I_k(x) = -(1 + x)^k\log(1 + x) + P_k(x)$$
$$+ k!\left[-\frac{C - 1}{(k + 1)!}x^{k+1} + \frac{s_2 - 1}{2 \cdot 3 \ldots (k + 2)}x^{k+2}\right.$$
$$\left.- \frac{s_3 - 1}{3 \cdot 4 \ldots (k + 3)}x^{k+3} + \cdots\right],$$

où $P_k(x)$ est un polynôme en x de degré k sans terme constant.

Ces polynômes $P_k(x)$ se déterminent de proche en proche, au moyen de la formule de récurrence

(d) $$P_{k+1}(x) = (k+1)\int_0^x P_k(x)\,dx + \frac{(1+x)^{k+1}-1}{k+1}.$$

En effet, si nous intégrons la relation (c) multipliée par $k+1$, on a

$$\begin{aligned}(k+1)!\, I_{k+1}(x) &= -(1+x)^{k+1}\log(1+x) + P_{k+1}(x)\\ &+ (k+1)!\left[-\frac{C-1}{(k+2)!}x^{k+2} + \frac{s_2-1}{2\cdot 3\ldots(k+3)}x^{k+3}\right.\\ &\left.-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\end{aligned}$$

où $P_{k+1}(x)$ a bien pour expression (d).

Comme, d'après (a), $P_1(x) = x$, il vient, en appliquant successivement (d),

(22) $$\left\{\begin{aligned} &P_1(x) = x;\ P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + x;\ P_3(x) = \frac{11}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x;\\ &P_4(x) = \frac{25}{12}x^4 + \frac{13}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x;\\ &P_5(x) = \frac{137}{60}x^5 + \frac{77}{12}x^4 + \frac{47}{6}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + x;\\ &P_6(x) = \frac{49}{20}x^6 + \frac{87}{10}x^5 + \frac{57}{4}x^4 + \frac{37}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + x;\\ &P_7(x) = \frac{363}{140}x^7 + \frac{223}{20}x^6 + \frac{459}{20}x^5 + \frac{319}{12}x^4 + \frac{107}{6}x^3 + \frac{13}{2}x^2 + x;\\ &P_8(x) = \frac{761}{280}x^8 + \frac{962}{70}x^7 + \frac{341}{10}x^6 + \frac{3252}{100}x^5\\ &\qquad + \frac{533}{12}x^4 + \frac{73}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2 + x.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant, dans la définition (15′) du n° 5, $I_k(x)$ par sa valeur (c) ci-dessus, il vient, pour $|x| \leqq 1$,

$$\text{(III}'_k\text{)} \qquad \begin{aligned} &\log \Gamma_k(1+x) \\ &= -(1+x)^k \log(1+x) + C_k \varphi_k(x+1) - \psi_k(x) + P_k(x) \\ &+ k!\left[-\frac{C-1}{1.2\ldots(k+1)}x^{k+1} + \frac{s_2-1}{2.3\ldots(k+2)}x^{k+2}\right. \\ &\left. -\frac{s_3-1}{3\cdot4\ldots(k+3)}x^{k+3}+\cdots\right]. \end{aligned}$$

Cette série converge plus rapidement que (III$_k$).

Legendre a donné (Fonctions Elliptiques, tome II) une table des valeurs numériques de s_n, jusqu'à $n = 35$, avec 16 décimales.

Remarque. Considérons le tableau ci-dessous formé de la manière suivante. La première colonne contient les nombres inverses $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$); la seconde colonne, les sommes des nombres de la première colonne, c'est-à-dire les nombres C_n, d'après la notation (s) du n° 2. Les autres colonnes sont formés d'une manière analogue: le $n^{\text{ième}}$ terme d'une colonne quelconque est égal à la somme des n premiers termes de la colonne précédente.

Détachons du tableau la première colonne (que nous avons, dans ce but, séparée des autres par une barre verticale). Dans le tableau formé des autres colonnes, les diagonales donnent les coefficients des polynômes $P_k(x)$ donnés par les formules (22) ci-dessus.

Si nous écrivons

$$P_k(x) = C_k^{(0)} x^k + C_k^{(1)} x^{k-1} + \cdots + C_k^{(r)} x^{k-r} + \cdots + C_k^{(k-1)} x,$$

on a, pour $r = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\text{(e)} \qquad C_k^{(r)} = C_{k-1}^{(r)} + C_{k-1}^{(r-1)}$$

et pour $r = 0$, d'après le mode de formation du tableau,

$$\text{(e}'\text{)} \qquad C_k^{(0)} = C_{k-1}^{(0)} + \frac{1}{k}.$$

Entre les coefficients de deux termes consécutifs de $P_k(x)$, on a la relation

$$\text{(f)} \qquad C_k^{(r-1)} = \frac{r}{k+1-r} C_k^{(r)} + \frac{k!}{(k+1-r)!\,r!}.$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{47}{6}$	$\frac{37}{3}$	$\frac{107}{6}$	$\frac{73}{3}$		
$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{77}{12}$	$\frac{57}{4}$	$\frac{319}{12}$	$\frac{533}{12}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{87}{10}$	$\frac{459}{20}$	$\frac{3252}{100}$				
$\frac{1}{6}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{223}{20}$	$\frac{341}{10}$					
$\frac{1}{7}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{481}{35}$						
$\frac{1}{8}$	$\frac{761}{280}$							

15. Développement de la constante L_k en série convergente.

Ces constantes peuvent être développées en séries convergentes de diverses manières. Nous n'en donnerons ici que deux développements, qui sont très rapidement convergents.

Premier développement. En vertu de (VI_k'') et (VI_k') du n° 5, on a

$$\text{(a)} \qquad \log \Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}\frac{\log 2}{2^k} + \frac{2^{k+1}-1}{2^k}\left(L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1}\right)$$

$$\text{(b)} \qquad \log \Gamma_k\left(\frac{1}{3}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}\frac{\log 3}{3^k} + \frac{3^{k+1}-1}{3^k}\left(L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1}\right)$$

(c) $$\log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{2}{6}\right) + \cdots + \log \Gamma_k\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= -\frac{B_{k+1}}{k+1}\frac{\log 6}{6^k} + \frac{6^{k+1}-1}{6^k}\left(L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1}\right).$$

En retranchant (a) et (b) de (c) membre à membre, on a, après une petite réduction,

(23) $$\log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{B_{k+1}}{k+1}\frac{(3^k-1)\log 2 + (2^k-1)\log 3}{6^k}$$

$$+ \frac{6^k+3^k+2^k-1}{6^k}\left(L_k - \frac{C_k B_{k+1}}{k+1}\right)$$

d'où

(24) $$L_k = \left(C_k - \frac{(3^k-1)\log 2 + (2^k-1)\log 3}{6^k+3^k+2^k-1}\right)\frac{B_{k+1}}{k+1}$$

$$+ \frac{6^k}{6^k+3^k+2^k-1}\left[\log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{5}{6}\right)\right].$$

Comme, d'après les propriétés fondamentales de $\Gamma_k(x)$ et $\varphi_k(x)$,

(d) $$\log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6^k}\log 6 + \log \Gamma_k\left(1+\frac{1}{6}\right)$$

(e) $$\varphi_k\left(1+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6^k} + \varphi_k\left(\frac{1}{6}\right),$$

il vient, en appliquant le développement (III_k) du n° 5,

(f) $$\log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6^k}\log 6 + \log \Gamma_k\left(1+\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{C_k+\log 6}{6^k} + C_k\varphi_k\left(\frac{1}{6}\right) - \psi_k\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$+ \frac{k!}{6^k}\left[-\frac{C}{(k+1)!}\frac{1}{6} + \frac{s_2}{2.3\ldots(k+2)}\frac{1}{6^2} - \frac{s_3}{3.4\ldots(k+3)}\frac{1}{6^3} + \cdots\right].$$

De même, en faisant, dans (III_k), $x = -\frac{1}{6}$,

(g)
$$\log \Gamma_k\left(\frac{5}{6}\right) = \log \Gamma_k\left(1 - \frac{1}{6}\right)$$
$$= C_k \varphi_k\left(\frac{5}{6}\right) - \psi_k\left(-\frac{1}{6}\right)$$
$$+ k!\left[-\frac{C}{(k+1)!}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k+1} + \frac{s_2}{2 \cdot 3 \ldots (k+2)}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k+2}\right.$$
$$\left.- \frac{s_3}{3 \cdot 4 \ldots (k+3)}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k+3} + \cdots\right].$$

Ramplaçons, dans (24), $\log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right)$ et $\log \Gamma_k\left(\frac{5}{6}\right)$ par leurs développements respectifs (f) et (g). En tenant compte de la relation (c) du n° 11 (Remarque), on aura, suivant que k est pair ou impair, deux développements différents, a savoir.

1°. Pour k *pair:*

(25)
$$L_k = \frac{1}{6^k + 3^k + 2^k - 1}\left\{C_k + \log 6\right.$$
$$- 2(\log \sqrt{2\pi}\, C_k^2 6^2 L_2 + C_k^4 6^4 L_4 + \cdots + C_k^2 6^{k-2} L_{k-2})$$
$$\left.+ 2k!\left[-\frac{s_2}{2 \cdot 3 \ldots (k+2)}\frac{1}{6^2} + \frac{s_4}{4 \cdot 5 \ldots (k+4)}\frac{1}{6^4} + \frac{s_6}{6 \cdot 7 \ldots (k+6)}\frac{1}{6^6} + \cdots\right]\right\}$$

2°. Pour k *impair:*

(25')
$$L_k = \frac{1}{6^k + 3^k + 2^k - 1}\left\{C_k + \log 6 - \frac{B_{k+1}}{k+1}\left[(3^k - 1)\log 2 + (2^k - 1)\log 3\right]\right.$$
$$-2(k \cdot 6 \cdot L_1 + C_k^3 6^3 L_3 + C_k^5 6^5 L_5 + \cdots + C_k^2 6^{k-2} L_{k-2})$$
$$\left.-2k!\left[\frac{C}{(k+1)!}\frac{1}{6} + \frac{s_3}{3 \cdot 4 \ldots (k+3)}\frac{1}{6^3} + \frac{s_5}{5 \cdot 6 \ldots (k+5)}\frac{1}{6^5} + \cdots\right]\right\}.$$

Dans ces développements, C est la constante d'Euler, C_k désigne la somme des k premiers nombres inverses, et C_k^2, C_k^3, ..., sont les *coefficients binômiaux.*

Remarque. En désignant, dans (25) et (25'), par U_n et U_{n+2} deux termes consécutifs en s_n et s_{n+2}, on a, pour $n = 2, 3, \ldots$,

(h)
$$|U_{n+2}| < \frac{1}{36}|U_n|.$$

Il en résulte, pour le *reste* R_n de ces séries commençant au terme U_{n+2},

$$\text{(i)} \qquad | U_{n+2} | < | R_n | < \frac{36}{35} | U_{n+2} |.$$

16. Second développement de L_k en série convergente.

En appliquant le développement (III'_k) du n° 14, il vient, en ayant égard à (d) et (e) du n° 15,

$$\text{(a)} \qquad \log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6^k}\log 6 + \log \Gamma_k\left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{C_k + \log 6}{6^k} + C_k\,\varphi_k\left(\frac{1}{6}\right) - \psi_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{6}\right)^k \log\frac{7}{6}$$

$$+ k!\left[-\frac{C-1}{(k+1)!}\frac{1}{6^{k+1}} + \frac{s_2-1}{2.3\ldots(k+2)}\frac{1}{6^{k+2}} - \frac{s_3-1}{3.4\ldots(k+3)}\frac{1}{6^{k+3}} + \cdots\right].$$

De même, en faisant, dans (III'_k) du n° 14, $x = -\frac{1}{6}$,

$$\text{(b)} \qquad \log \Gamma_k\left(\frac{5}{6}\right) = \log \Gamma_k\left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

$$= C_k\,\varphi_k\left(\frac{5}{6}\right) - \psi_k\left(-\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^k \log\frac{5}{6}$$

$$+ k!\left[-\frac{C-1}{(k+1)!}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k+1} + \frac{s_2-1}{2.3\ldots(k+2)}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k+2}\right.$$

$$\left. - \frac{s_3-1}{3.4\ldots(k+3)}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k+3} + \cdots\right].$$

En remplaçant, dans (24) du n° 15, $\log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right)$ et $\log \Gamma_k\left(\frac{5}{6}\right)$ par leurs développements (a) et (b) ci-dessus, on aura, en tenant compte de la relation (c) du n° 11 (Remarque),

1°. Pour *k pair:*

$$\text{(26)} \qquad L_k = \frac{1}{6^k + 3^k + 2^k - 1}\left\{C_k + \log 6 - 7^k \log\frac{7}{6} - 5^k \log\frac{5}{6}\right.$$

$$+ 6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right]$$

$$- 2\left(\log\sqrt{2\pi} + C_k^2\, 6^2 L_2 + C_k^4\, 6^4 L_4 + \cdots + C_k^2\, 6^{k-2} L_{k-2}\right)$$

$$\left. + 2k!\left[\frac{s_2 - 1}{2.3\ldots(k+2)}\frac{1}{6^2} + \frac{s_4 - 1}{4.6\ldots(k+4)}\frac{1}{6^4} + \frac{s_6 - 1}{6.7\ldots(k+6)}\frac{1}{6^6} + \cdots\right]\right\}.$$

2°. Pour *k impair:*

$$(26') \quad L_k = \frac{1}{6^k + 3^k + 2^k - 1}\left\{C_k + \log 6 - 7^k \log\frac{7}{6} - 5^k \log\frac{5}{6}\right.$$

$$- \frac{B_{k+1}}{k+1}\left[(3^k - 1)\log 2 + (2^k - 1)\log 3\right] + 6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right]$$

$$-2\left(k.6\,L_1 + C_k^3\, 6^3 L_3 + C_k^5\, 6^5 L_5 + \cdots + C_k^2\, 6^{k-2} L_{k-2}\right)$$

$$\left. - 2k!\left[\frac{C-1}{(k+1)!}\frac{1}{6} + \frac{s_3 - 1}{3.4\ldots(k+3)}\frac{1}{6^3} + \frac{s_5 - 1}{5.6\ldots(k+5)}\frac{1}{6^5} + \cdots\right]\right\}.$$

Les valeurs de $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right]$ se déterminent aisément au moyen de (22) du n° 14. Voici ces valeurs pour $k = 1, 2, \ldots, 7, 8$.

Pour $k = 1$, $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 0$

» $k = 2$, $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 3$

» $k = 3$, $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 30$

» $k = 4$, $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 256\frac{1}{6}$

» $k = 5$, $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 2021$

» $k = 6$, $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 15286{,}9$

» $k = 7$, $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 112705{,}8$

» $k = 8$, $6^k\left[P_k\left(\frac{1}{6}\right) + P_k\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 817428\frac{89}{140}$

Remarque. En désignant, dans (26) et (26′), par U'_n et U'_{n+2} deux termes consécutifs en s_n et s_{n+2}, on a pour $n = 2, 3, \ldots,$

$$\text{(c)} \qquad |U'_{n+2}| < \frac{1}{36}\frac{s_{n+2}-1}{s_n-1}|U'_n| < \frac{1}{144}|U'_n|.$$

Il en résulte, pour le *reste* R'_n de ces séries commençant au terme U'_{n+2},

$$\text{(d)} \qquad |U'_{n+2}| < |R'_n| < \frac{144}{143}|U'_{n+2}|.$$

Comparons la reste R'_n avec le reste correspondant R_n des séries (25) et (25′) du n° 15. Nous avons trouvé (dans la Remarque) la double inégalité:

$$\text{(e)} \qquad |U_{n+2}| < |R_n| < \frac{36}{35}|U_{n+2}|.$$

Comme

$$\text{(f)} \qquad U'_{n+2} = \frac{s_{n+2}-1}{s_{n+2}} U_{n+2}$$

il résulte de la combinaison des doubles inégalités (d) et (e):

$$\text{(g)} \qquad \frac{35}{36}\frac{s_{n+2}-1}{s_{n+2}}|R_n| < |R'_n| < \frac{144}{143}\frac{s_{n+2}-1}{s_{n+2}}|R_n|.$$

Or on a sensiblement

$$\frac{s_{n+2}-1}{s_{n+2}} = \frac{1}{2^{n+2}}\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right].$$

Il vient donc, par la double inégalité (g), la relation *approchée*:

$$\text{(h)} \qquad R'_n = \frac{1}{2^{n+2}} R_n.$$

L'erreur que l'on commet en s'arrêtant, dans (26) et (26′), au terme U'_n, est 2^{n+2} fois plus petite que celle qu'on commet en s'arrêtant au terme U_n des séries (25) et (25′) du n° 15.

En faisant, dans (26′), $k = 1$, $k = 3$, et dans (26), $k = 2$, $k = 4$, on aura, en logarithmes décimaux, M désignant leur module,

$$ML_1 = \log A_1 = \frac{1}{10}\left\{\frac{2\log 2 + \log 6}{12} + 13\log 6 - 7\log 7 - 5\log 5 + M\right.$$

$$\left. - \frac{M.2}{6}\left[\frac{C-1}{2!} + \frac{s_3-1}{3.4}\frac{1}{6^2} + \frac{s_5-1}{5.6}\frac{1}{6^4} + \frac{s_7-1}{7.8}\frac{1}{6^6} + \cdots\right]\right\}$$

$$ML_2 = \log A_2 = \frac{1}{48}\left\{75\log 6 - 49\log 7 - 25\log 5 - 2\log\sqrt{2\pi} + M\frac{9}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{M.4}{6^2}\left[\frac{s_2-1}{2.3.4} + \frac{s_4-1}{4.5.6}\frac{1}{6^2} + \frac{s_6-1}{6.7.8}\frac{1}{6^4} + \frac{s_8-1}{8.9.10}\frac{1}{6^6} + \cdots\right]\right\}$$

$$ML_3 = \log A_3 = \frac{1}{250}\left\{\frac{26\log 2 + 7\log 3}{120} + 469\log 6 - 343\log 7 - 125\log 5\right.$$

$$+ M\left(\frac{11}{6} + 30 - 36 L_1\right)$$

$$\left. - \frac{M.2.3!}{6}\left[\frac{C-1}{4!} + \frac{s_3-1}{3.4.5.6}\frac{1}{6^2} + \frac{s_5-1}{5.6.7.8}\frac{1}{6^4} + \frac{s_7-1}{7.8.9.10}\frac{1}{6^6} + \cdots\right]\right\}$$

$$ML_4 = \log A_4 = \frac{1}{1392}\left\{3027\log 6 - 2401\log 7 - 625\log 5 - 2\log\sqrt{2\pi}\right.$$

$$+ M\left(\frac{25}{12} + \frac{1537}{6} - 432 L_2\right)$$

$$\left. + \frac{M.2.4!}{6^2}\left[\frac{s_2-1}{2.3\ldots 6} + \frac{s_4-1}{4.5\ldots 8}\frac{1}{6^2} + \frac{s_6-1}{6.7\ldots 10}\frac{1}{6^4} + \frac{s_8-1}{8.9\ldots 12}\frac{1}{6^6} + \cdots\right]\right\}.$$

On retrouve alors les valeurs numériques données par les formules (6) du n° 1.

Quelques applications.

17. La fonction $\Gamma_1(x)$.

En appliquant les formules du n° 5, en y faisant $k = 1$, il vient que la fonction $\Gamma_1(x)$, définie par l'une des formules:

$$(27)\quad \log\Gamma_1(x+1) = \left(\frac{1}{2} - \log\sqrt{2\pi}\right)x - (C-1)\frac{x^2}{1.2} + s_2\frac{x^3}{2.3} - s_3\frac{x^4}{3.4} + s_4\frac{x^5}{4.5} - \cdots$$

$$(|x| \leqq 1)$$

$$(28)\qquad \log\Gamma_1(x+1) = \int_0^x \log\Gamma(x+1)\,dx + \frac{x^2+x}{2} - x\log\sqrt{2\pi}$$

$$\log \Gamma_1(x) = \int_0^x \log \Gamma(x)\,dx + \frac{x^2 - x}{2} - x \log \sqrt{2\pi} \tag{28'}$$

jouit des propriétés suivantes:

1°. *Propriété fondamentale.*

$$\Gamma_1(x + 1) = x^x\, \Gamma_1(x) \tag{I$_1$}$$

$$\Gamma_1(0) = 1; \quad \Gamma_1(1) = 1; \quad \Gamma_1(2) = 1. \tag{I$'_1$}$$

Pour x entier:

$$\Gamma_1(x + 1) = 1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots x^x. \tag{I$''_1$}$$

2°. *Expression de* $\log \Gamma_1(x + 1)$ *par une intégrale définie.*

$$\log \Gamma_1(x + 1) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x - \frac{1}{t}(1 - e^{-xt})}{1 - e^{-t}} \right] dt + \frac{x^2 + x}{2} - x \log \sqrt{2\pi}. \tag{II$_1$}$$

3°. *Développement de* $\log \Gamma_1(1 + x)$ *en série convergente.*

C'est la formule (27) ci-dessus. On a encore, d'après (III$'_k$) du n° 14,

$$\log \Gamma_1(x + 1) = -(1 + x)\log(1 + x) + \left(\frac{3}{2} - \log \sqrt{2\pi}\right) x - (C - 2)\frac{x^2}{1.2} + (s_2 - 1)\frac{x^3}{2.3} - (s_3 - 1)\frac{x^4}{3.4} + (s_4 - 1)\frac{x^5}{4.5} - \cdots \quad (|x| \leqq 1). \tag{III$'_1$}$$

4°. *Expression de* $\log \Gamma_1(x + 1)$ *par une série asymptotique* (l'analogue de la formule de Moivre-Stirling).

C'est la formule (3) du n° 1.

5°. *L'analogue de la formule de Raabe.*

$$\int_{x-1}^x \log \Gamma_1(x + 1)\,dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + L_1 - \frac{1}{12}. \tag{V$_1$}$$

$$\text{(V}_1'\text{)} \qquad \int_0^1 \log \Gamma_1(x+1)\,dx = L_1 - \frac{1}{3}.$$

$$\text{(V}_1''\text{)} \qquad \int_0^1 \log \Gamma_1(x)\,dx = L_1 - \frac{1}{12}.$$

6°. *Formule de multiplication.*

$$\text{(VI}_1\text{)} \qquad \Gamma_1^{\frac{1}{n}}(na) = \Gamma_1(a)\,\Gamma_1\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma_1\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$\times\, n^{\frac{na^2-a}{2}+\frac{1}{12n}}\left(A_1\,e^{-\frac{1}{12}}\right)^{-\frac{n^2-1}{n}}$$
$$(A_1 = e^{L_1})$$

$$\text{(VI}_1'\text{)} \qquad \Gamma_1\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma_1\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma_1\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(A_1\,e^{-\frac{1}{12}}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}.\,n^{-\frac{1}{12n}}.$$

$$\text{(VI}_1''\text{)} \qquad \Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = A_1^{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{1}{8}}.\,2^{-\frac{1}{24}}.$$

7°. *Intégrale de* $\log \Gamma_1(x)$.

$$\text{(VII}_1\text{)} \qquad \int_0^x \log \Gamma_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\log \Gamma_2(x) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + 2\,L_1\,x\right].$$

Nous donnons ici une petite table donnant les logarithmes décimaux ainsi que les valeurs numériques de $\Gamma_1(x)$, pour x variant de 0,1 en 0,1 depuis 0 jusqu'à 2.

Cette table nous fait voir l'allure de la fonction $\Gamma_1(x)$. En s'aidant de la table des valeurs de $\log \Gamma(x)$ de Legendre (Fonctions Elliptiques, tome II), on trouve au moyen de la formule

$$\frac{d \log \Gamma_1(x)}{dx} = \log \Gamma(x) + x - \left(\frac{1}{2} + \log\sqrt{2\pi}\right)$$

que $\Gamma_1(x)$ est maximum pour $x = 0{,}29096$, et minimum pour $x = 1{,}53769$. A partir de cette valeur de x, la fonction $\Gamma_1(x)$ croît constamment.

Table I.

x	Logarithme décimal de $\Gamma_1(x)$	Valeur de $\Gamma_1(x)$
0,0	0,0000 0000	1,000 000
0,1	0,0828 3873	1,210 148
0,2	0,1079 6732	1,282 234
0,3	0,1134 5379	1,298 535
0,4	0,1077 8685	1,281 701
0,5	0,0952 1932	1,245 143
0,6	0,0784 0545	1,197 858
0,7	0,0592 0722	1,146 060
0,8	0,0390 3003	1,094 032
0,9	0,0189 8867	1,044 693
1,0	0,0000 0000	1,000 000
1,1	$\bar{1}$,9828 3873	0,961 255
1,2	$\bar{1}$,9681 7332	0,929 337
1,3	$\bar{1}$,9565 9016	0,904 878
1,4	$\bar{1}$,9486 1085	0,888 405
1,5	$\bar{1}$,9447 0432	0,880 449
1,6	$\bar{1}$,9452 9621	0,881 650
1,7	$\bar{1}$,9507 7585	0,892 844
1,8	$\bar{1}$,9615 0202	0,915 170
1,9	$\bar{1}$,9778 0693	0,950 182
2,0	0,0000 0000	1,000 000

Remarque I. Cette table permet de vérifier la formule de multiplication (VI_1) ci-dessus. Cette formule, transcrite en logarithmes décimaux (dont M désigne le module), devient

$$(29)\qquad \frac{1}{n}\log \Gamma_1(na) = \log \Gamma_1(a) + \log \Gamma_1\left(a+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \log \Gamma_1\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$- M\frac{n^2-1}{n}\left(L_1-\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{na^2-a}{2}+\frac{1}{12n}\right)\log n.$$

En faisant, dans (29), $n=5$ ou $n=10$, et $a=0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9;\ 1$, on aura 22 exemples différents de cette formule, que l'on vérifiera au moyen de la table ci-dessus.

Remarque II. En général, dans la construction des tables de $\log \Gamma_k(x)$, la formule de multiplication (VI_k) du n° 5 permet de diminuer notablement le nombre des valeurs de $\log \Gamma_k(x)$, que l'on doit calculer directement à l'aide des séries (III_k) ou (III'_k).

Ainsi, pour la construction de la table ci-dessus, nous avons calculé directement $\log \Gamma_1(1 + x)$, au moyen de la série (III'_1) ci-dessus, seulement pour les quatre valeurs: $x = 0{,}1$; $x = 0{,}2$; $x = -0{,}1$; $x = -0{,}2$.

Les quatre valeurs de $\log \Gamma_1(1 + x)$ obtenues de la sorte permirent d'obtenir les autres valeurs de $\log \Gamma_1(x)$, au moyen des formules (I_1), (VI''_1) et (VI_1), en faisant dans cette dernière, $n = 2$. Ces formules donnent respectivement, M désignant le module des logarithmes décimaux,

$$\log \Gamma_1(x + 1) = x \log x + \log \Gamma_1(x) \tag{a}$$

$$\log \Gamma_1(0{,}5) = \frac{3}{2} M\left(L_1 - \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{24} \log 2 \tag{b}$$

$$\frac{1}{2} \log \Gamma_1(2a) = \log \Gamma_1(a) + \log \Gamma_1\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} M\left(L_1 - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{2a^2 - a}{2} + \frac{1}{24}\right) \log 2. \tag{c}$$

En faisant, dans (c), successivement $a = 0{,}1$; $0{,}9$; $0{,}3$; $0{,}7$, on obtient $\log \Gamma_1(0{,}6)$; $\log \Gamma_1(1{,}4)$; $\log \Gamma_1(0{,}3)$; $\log \Gamma_1(0{,}7)$.

18. **Intégrale de** $\log \sin \pi x$.

A. La formule d'Euler

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (0 < x < 1)$$

donne

$$\log \Gamma(x) + \log \Gamma(1 - x) = \log \pi - \log \sin \pi x$$

d'où, en intégrant,

$$\int_0^x \log \Gamma(x)\,dx + \int_0^x \log \Gamma(1 - x)\,dx = x \log \pi - \int_0^x \log \sin \pi x\,dx. \tag{a}$$

Ayant égard à

$$\int_0^x \log \Gamma(1-x)\,dx = -\int_0^{-x} \log \Gamma(1+x)\,dx,$$

on tire de (a)

$$\int_0^x \log \sin \pi x\, dx = x \log \pi + \int_0^{-x} \log \Gamma(1+x)\,dx - \int_0^x \log \Gamma(x)\,dx,$$

ou, en tenant compte de (28) et (28′) du n° 17,

$$\int_0^x \log \sin \pi x\, dx = x \log \pi + \log \Gamma_1(1-x) - \frac{x^2-x}{2} - x \log \sqrt{2\pi}$$

$$- \log \Gamma_1(x) + \frac{x^2-x}{2} - x \log \sqrt{2\pi}$$

$$= -x \log 2 + \log \Gamma_1(1-x) - \log \Gamma_1(x),$$

ou

(30) $$\int_0^x \log \sin \pi x\, dx = \log \frac{\Gamma_1(1-x)}{2^x \Gamma_1(x)} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

Ayant égard à

$$\Gamma_1(x) = x^{-x}\,\Gamma_1(1+x),$$

(30) peut s'écrire

(30′) $$\int_0^x \log \sin \pi x\, dx = \log \left[\left(\frac{x}{2}\right)^x \frac{\Gamma_1(1-x)}{\Gamma_1(1+x)}\right].$$

Remarque. En faisant successivement, dans (30), $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, on retrouve, eu égard à (I_1') du n° 17, les intégrales définies bien connues:

$$\int_0^1 \log \sin \pi x\, dx = -\log 2; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin \pi x\, dx = -\frac{1}{2} \log 2.$$

B. On a

$$\int_0^x \log \cos \pi x\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+x} \log \sin \pi x\, dx$$

donc, moyennant (30),

(31) $$\int_0^x \log\cos\pi x\,dx = \log\frac{\Gamma_1\left(\frac{1}{2}-x\right)}{2^x\,\Gamma_1\left(\frac{1}{2}+x\right)} \qquad \left(0<x<\frac{1}{2}\right).$$

C. Comme

$$\int_0^x \log\operatorname{tang}\pi x\,dx = \int_0^x \log\sin\pi x\,dx - \int_0^x \log\cos\pi x\,dx$$

il vient, en vertu de (30) et (31),

(32) $$\int_0^x \log\operatorname{tang}\pi x\,dx = \log\frac{\Gamma_1(1-x)\,\Gamma_1\left(\frac{1}{2}+x\right)}{\Gamma_1(x)\,\Gamma_1\left(\frac{1}{2}-x\right)} \qquad \left(0<x<\frac{1}{2}\right).$$

19. Valeurs de $\log\Gamma_1\left(\frac{1}{4}\right)$ et $\log\Gamma_1\left(\frac{3}{4}\right)$.

Les formules (VI_1') (pour $n=4$) et (VI_1'') du n° 17 donnent respectivement

$$\log\Gamma_1\left(\frac{1}{4}\right) + \log\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) + \log\Gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{4}L_1 - \frac{5}{16} - \frac{1}{48}\log 4$$

(33) $$\log\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}L_1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24}\log 2.$$

En retranchant cette dernière relation de la précédente, membre à membre, il vient

(a) $$\log\Gamma_1\left(\frac{1}{4}\right) + \log\Gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4}L_1 - \frac{3}{16}.$$

D'autre part, d'après (30) du n° 18,

(b) $$\int_0^{\frac{1}{4}} \log\sin\pi x\,dx = \log\Gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) - \log\Gamma_1\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\log 2.$$

Or, d'après la formule bien connue:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{4} \log 2 - \frac{1}{2} U_2$$

où

(c) $$U_2 = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = 0{,}915\,972\,17,$$

il vient, en changeant x en πx,

$$\pi \int_0^{\frac{1}{4}} \log \sin \pi x\, dx = -\frac{\pi}{4} \log 2 - \frac{1}{2} U_2.$$

Au moyen de cette relation, la formule (b) deviendra

(d) $$\log \Gamma_1\left(\frac{1}{4}\right) - \log \Gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{U_2}{2\pi}.$$

En combinant (a) et (d), par addition et soustraction, on obtient

(34) $$\begin{cases} \log \Gamma_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8} L_1 + \frac{U_2}{2\pi} - \frac{3}{12} \\ \log \Gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8} L_1 - \frac{U_2}{2\pi} - \frac{3}{32} \\ \left(\frac{U_2}{2\pi} = 0{,}145\,781\,498; \quad \frac{M\, U_2}{2\pi} = 0{,}063\,312\,105\right). \end{cases}$$

Au moyen de (34) on trouve, en logarithmes décimaux,

$$\log \Gamma_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}112\,477\,73; \quad \Gamma_1\left(\frac{1}{4}\right) = 1{,}295\,620$$

$$\log \Gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}049\,165\,52; \quad \Gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) = 1{,}119\,864.$$

Application. En appliquant la formule (VII) du n° 1, relative à $\Gamma(x)$, on a, moyennant (33) et (34),

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \log \Gamma(x)\,dx = \frac{9}{8} L_1 + \frac{U_2}{4\pi} + \frac{1}{4} \log \sqrt{2\pi}. \tag{35}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \Gamma(x)\,dx = \frac{3}{2} L_1 + \frac{1}{2} \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{24} \log 2. \tag{36}$$

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \log \Gamma(x)\,dx = \frac{9}{8} L_1 - \frac{U_2}{4\pi} + \frac{3}{4} \log \sqrt{2\pi}, \tag{37}$$

Faisons, dans la formule de Raabe:

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(x)\,dx = x \log x - x + \log \sqrt{2\pi},$$

successivement,

a) $x = \frac{1}{4},\quad \frac{1}{4} + 1,\quad \frac{1}{4} + 2, \ldots, \frac{1}{4} + n - 1;$

b) $x = \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2} + 1,\quad \frac{1}{2} + 2, \ldots, \frac{1}{2} + n - 1;$

c) $x = \frac{3}{4},\quad \frac{3}{4} + 1,\quad \frac{3}{4} + 2, \ldots, \frac{3}{4} + n - 1;$

et ajoutons les résultats obtenus dans le cas a) à (35); ceux de b) à (36); et ceux de c) à (37).

On aura alors

$$\int_0^{\frac{1}{4}+n} \log \Gamma(x)\,dx = \frac{9}{8} L_1 + \frac{U_2}{4\pi} + \sum_{r=1}^{n} \frac{4r-3}{4} \log \frac{4r-3}{4} + \frac{(4n+1)\log \sqrt{2\pi} - n(2n-1)}{4}. \tag{38}$$

$$(39)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}+n} \log \Gamma(x)\,dx = \frac{3}{2} L_1 - \frac{1}{24}\log 2 + \sum_{r=1}^{n} \frac{2r-1}{2}\log\frac{2r-1}{2} + \frac{(2n+1)\log\sqrt{2\pi} - n^2}{2}.$$

$$(40)\qquad \int_0^{\frac{3}{4}+n} \log \Gamma(x)\,dx = \frac{9}{8} L_1 - \frac{U_2}{4\pi} + \sum_{r=1}^{n} \frac{4r-1}{4}\log\frac{4r-1}{4} + \frac{(4n+3)\log\sqrt{2\pi} - n(2n+1)}{4}.$$

Il en résulte que les intégrales

$$(41)\qquad \int_{\frac{m}{4}}^{\frac{n}{4}} \log \Gamma(x)\,dx = \int_0^{\frac{n}{4}} \log \Gamma(x)\,dx - \int_0^{\frac{m}{4}} \log \Gamma(x)\,dx,$$

où m et n sont des nombres entiers, s'expriment, moyennant (38), (39) et (40), à l'aide des constantes L_1, U_2 et π. Ainsi, par exemple, moyennant (35) et (37):

$$(42)\qquad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \log \Gamma(x)\,dx = -\frac{U_2}{2\pi} + \frac{1}{2}\log\sqrt{2\pi}.$$

20. Courbes intégrales de divers ordres de log sin x.

La formule (VI'_k) du nº 5 donne, pour k *pair* ($B_{k+1} = 0$),

$$(a)\qquad \log \Gamma_k\left(\frac{1}{n}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \log \Gamma_k\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n^{k+1}-1}{n^k} L_k.$$

En y faisant successivement $n = 2, 3, 4$, on a, pour k *pair*,

$$(43)\qquad \log \Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{k+1}-1}{2^k} L_k.$$

(44) $$\log \Gamma_k\left(\frac{1}{3}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3^{k+1}-1}{3^k} L_k.$$

(45) $$\log \Gamma_k\left(\frac{1}{4}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{2}{4}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4^{k+1}-1}{4^k} L_k.$$

En retranchant (43) de (45) membre à membre, on a, pour k *pair*,

(46) $$\log \Gamma_k\left(\frac{1}{4}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2^{2k+1}+2^k-1}{4^k} L_k.$$

De même, la formule (23) du n° 15 donne, pour k *pair*,

(47) $$\log \Gamma_k\left(\frac{1}{6}\right) + \log \Gamma_k\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{6^k+3^k+2^k-1}{6^k} L_k.$$

Cela étant, posons, pour abréger,

(b) $$\begin{cases} \mu_1(x) = \displaystyle\int_0^x \log \sin \pi x\, dx \\ \mu_2(x) = \displaystyle\int_0^x \mu_1(x)\, dx = \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x\, dx\, dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_k(x) = \displaystyle\int_0^x \mu_{k-1}(x)\, dx. \end{cases}$$

En intégrant $\mu_1(x)$ ayant pour expression (30) du n° 18, on a

(c) $$\mu_2(x) = \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x\, dx\, dx$$

$$= \int_0^x \log \Gamma_1(1-x)\, dx - \int_0^x \log \Gamma_1(x)\, dx - \frac{x^2}{2} \log 2.$$

Comme, en vertu de (VII_k) et (VII'_k) du n° 5, on a, pour $k=1$,

$$\int_0^x \log \Gamma_1(1-x) = -\int_0^{-x} \log \Gamma_1(1+x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\log \Gamma_2(1-x) + \frac{1}{2}\varphi_2(1-x) + x\left(2L_1 - \frac{1}{6}\right)\right],$$

$$-\int_0^x \log \Gamma_1(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\log \Gamma_2(x) - \frac{1}{2}\varphi_2(x) + x\left(2L_1 - \frac{1}{6}\right)\right],$$

et que, d'après la propriété des polynômes de Bernoulli,

$$\varphi_2(x) + \varphi_2(1-x) = 0,$$

(c) devient

(48)
$$\mu_2(x) = \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x\,dx\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^2 \log 2 + \log \Gamma_2(x) + \log \Gamma_2(1-x)\right].$$

En intégrant cette relation, au moyen de (VII_k) et (VII'_k) du n° 5, pour $k = 2$, il vient, ayant égard à

$$\varphi_3(x) - \varphi_3(1-x) = 0,$$

(49)
$$\mu_3(x) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x\,dx\,dx\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\left[x^3 \log 2 + 6L_2 + \log \Gamma_3(x) - \log \Gamma_3(1-x)\right].$$

L'expression générale de $\mu_k(x)$ s'obtient aisément par la méthode de récurrence. On a

1°. *Pour k pair:*

(50)
$$\mu_k(x) = -\frac{1}{k!}\left[\log \Gamma_k(x) + \log \Gamma_k(1-x) + x^k \log 2\right.$$
$$\left. + 2\left(C_k^2 L_2 x^{k-2} + C_k^4 L_4 x^{k-4} + \cdots + C_k^2 L_{k-2} x^2\right)\right]$$
$$\left(C_k^r = \frac{k!}{k!\,(k-r)!}\right).$$

2°. *Pour k impair:*

$$\mu_k(x) = -\frac{1}{k!}[\log \Gamma_k(x) - \log \Gamma_k(1-x) + x^k \log 2 \tag{50'}$$

$$+ 2(C_k^2 L_2 x^{k-2} + C_k^4 L_4 x^{k-4} + \cdots + k L_{k-1} x)].$$

En particulier, en faisant, dans (48), sucessivement $x = 1$, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, il vient, en tenant compte de (43), (44), (46) et (47), pour $k = 2$,

$$\mu_2(1) = \int_0^1 \left(\int_0^x \log \sin \pi x\, dx\right) dx = -\frac{1}{2}\log 2. \tag{51}$$

$$\mu_2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x \log \sin \pi x\, dx\right) dx = -\frac{1}{8}\log 2 - \frac{7}{4} L_2. \tag{52}$$

$$\mu_2\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^x \log \sin \pi x\, dx\right) dx = -\frac{1}{18}\log 2 - \frac{13}{9} L_2. \tag{53}$$

$$\mu_2\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^x \log \sin \pi x\, dx\right) dx = -\frac{1}{32}\log 2 - \frac{35}{32} L_2. \tag{54}$$

$$\mu_2\left(\frac{1}{6}\right) = \int_0^{\frac{1}{6}} \left(\int_0^x \log \sin \pi x\, dx\right) dx = -\frac{1}{72}\log 2 - \frac{2}{3} L_2. \tag{55}$$

On aura de même, eu égard à (50), (43), (44), (46) et (47), pour $k = 4$,

$$\mu_4(x) = -\frac{1}{24}[\log \Gamma_4(x) + \log \Gamma_4(1-x) + x^4 \log 2] - \frac{x^2}{2} L_2. \tag{56}$$

$$\mu_4(1) = \int_0^1 \left(\int_0^x \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x\, dx\, dx\, dx\right) dx = -\frac{1}{24}\log 2 - \frac{1}{2} L_2. \tag{57}$$

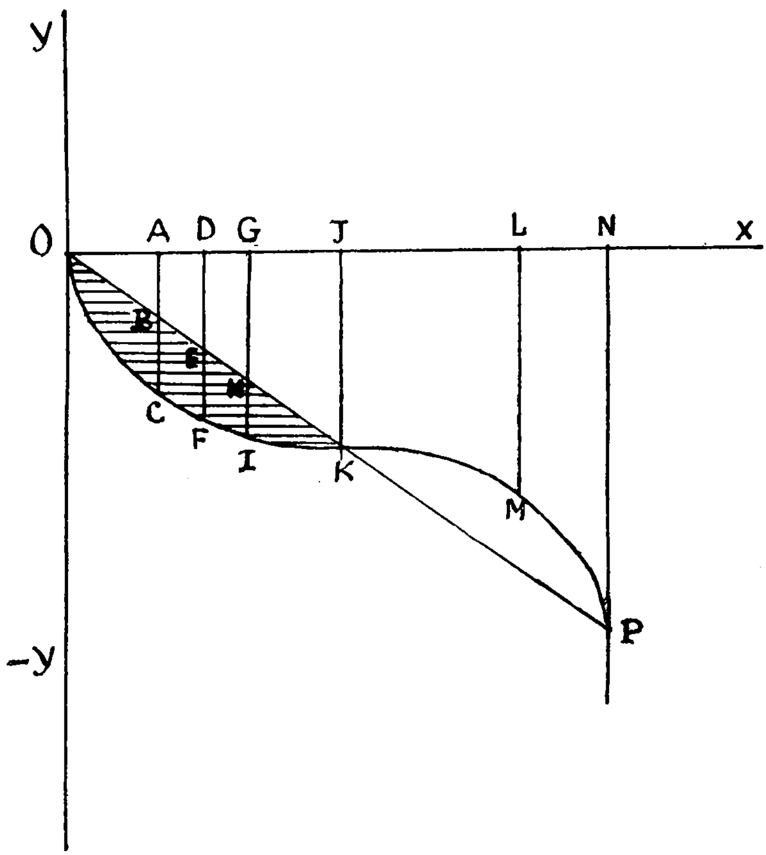
$$\mu_4\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x\, dx\, dx\, dx\right) dx = -\frac{\log 2}{384} - \frac{1}{8} L_2 - \frac{31}{192} L_4. \tag{58}$$

$$(59)\quad \mu_4\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^x \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x \, dx \, dx \, dx \right) dx = - \frac{\log 2 + 242 \, L_4}{24 \, . \, 81} - \frac{1}{18} L_2 .$$

$$(60)\quad \mu_4\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^x \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x \, dx \, dx \, dx \right) dx = - \frac{\log 2 + 527 \, L_4}{24 \, . \, 256} - \frac{1}{32} L_2 .$$

$$(61)\quad \mu_4\left(\frac{1}{6}\right) = \int_0^{\frac{1}{6}} \left(\int_0^x \int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x \, dx \, dx \, dx \right) dx = - \frac{1}{24} \left(\frac{\log 2}{1296} + \frac{29}{27} L_4 \right) - \frac{1}{72} L_2 .$$

La formule (49) devient, pour $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$,



(62) $$\mu_3(1) = \int_0^1 \left(\int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x \, dx \, dx \right) dx = -\frac{1}{6} \log 2 - L_2.$$

(63) $$\mu_3\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x \int_0^x \log \sin \pi x \, dx \, dx \right) dx = -\frac{1}{48} \log 2 - \frac{1}{2} L_2.$$

Remarque. La courbe intégrale

$$\mu_1(x) = \int_0^x \log \sin \pi x \, dx$$

est représentée sur la figure ci-contre par la courbe $OCFIKMP$; les points A, D, G, J, L et N correspondent aux abscisses $^1/_6$, $^1/_4$, $^1/_3$, $^1/_2$, et 1. Les points d'inflexion O, K et P sont des centres de symétrie de la courbe. L'ordonnée NP est égale à $\mu_1(1) = -\log 2$. Les tangentes aux points C et M sont parallèles à la droite OKP.

L'aire du triangle OJK étant égale à $-\frac{1}{8} \log 2$, il résulte de (52) que l'aire comprise entre l'arc OCK et la corde OK (l'espace hachuré) est égale à $-(^7/_4) L_2$.

Il résulte de même de (53), (54) et (55) que

$$\begin{aligned} &\text{L'aire } OHI = \mu_2(^1/_3) - \triangle\, OGH = -(^{13}/_9) L_2, \\ &\text{L'aire } OEF = \mu_2(^1/_4) - \triangle\, ODE = -(^{35}/_{32}) L_2, \\ &\text{L'aire } OBC = \mu_2(^1/_6) - \triangle\, OAB = -(^2/_3) L_2. \end{aligned}$$

21. Application aux intégrales définies dépendant d'un paramètre.

Certaines intégrales définies dépendant d'un paramètre p s'expriment au moyen des fonctions

$$\log \Gamma(mp+n) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dp} \log \Gamma(mp+n),$$

m et n étant des valeurs numériques données. Legendre en a donné plusieurs exemples dans ses *Exercices de Calcul Intégral.*

En tenant compte de l'intégrale de $\log \Gamma_k(x)$ du n° 5 (formules VII$_k$ et VII$'_k$), pour $k = 0, 1, 2, \ldots,$ on obtiendra, au moyen d'une ou plusieurs intégrations successives par rapport au paramètre p, des nouvelles intégrales définies s'exprimant à l'aide de $\log \Gamma_1(x)$, $\log \Gamma_2(x), \ldots$, et éventuellement de polynômes en p.

Pour certaines valeurs particulières du paramètre p, ces intégrales s'exprimeront à l'aide des seules constantes $L_1, L_2, \ldots, U_2$ et π.

Intégrons depuis 1 jusqu'à p, la relation donné par Legendre (Exercices de Calcul Intégral):

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\frac{d \log \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{dp} - \frac{1}{2}\frac{d \log \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{dp}$$

En ayant égard à $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, il vient

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-1}{1+x}\frac{dx}{\log x} = \log \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \log \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) + \log \sqrt{\pi}.$$

Nous allons intégrer cette relation par rapport à p, plusieurs fois de suite.

1°. En intégrant cette relation depuis 0 jusqu'à p, on a, en tenant compte de (VII) du n° 1,

$$\int_0^1 \left(\frac{x^p-1}{x \log x} - p\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= 2\left[\log \Gamma_1\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2}\right) + \frac{p+1}{2}\log\sqrt{2\pi}\right]_0^p$$

$$- 2\left[\log \Gamma_1\left(\frac{p}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2}\log\sqrt{2\pi}\right]_0^p + p\log\sqrt{\pi}$$

$$= 2\log \Gamma_1\left(\frac{p+1}{2}\right) - 2\log \Gamma_1\left(\frac{p}{2}\right) + p\left(\log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\right) - 2\log \Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

ce qui, en vertu de (33) du n° 19, s'écrira

$$(64) \qquad \int_0^1 \left(\frac{x^p-1}{x \log x} - p\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= 2\log \Gamma_1\left(\frac{p+1}{2}\right) - 2\log \Gamma_1\left(\frac{p}{2}\right) + p\left(\log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\right) - 3L_1 + \frac{1}{4} + \frac{\log 2}{12}.$$

En particulier, pour $p = {}^1/_2$, on a, eu égard à (d) du n° 19,

$$\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x\log x} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{(1+x)\log x} = -3\,L_1 - \frac{U_2}{\pi} + \frac{1}{2}\log\sqrt{\pi} + \frac{\log 2}{12} \tag{65}$$

Pour $p = 1$, (64) devient, en ayant égard à (33) du n° 19,

$$\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x\log x} - 1\right)\frac{dx}{(1+x)\log x} = -6\,L_1 + \log\sqrt{\pi} + \frac{1}{6}\log 2. \tag{66}$$

2°. En intégrant (64) par rapport à p, depuis 0 jusqu'à p, il vient, en tenant compte de (VII$'_k$) du n° 5,

$$\int_0^1 \left(\frac{x^p - 1 - p\log x}{x\log^2 x} - \frac{p^2}{2}\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= 2\left[\log \Gamma_2(x) - \frac{1}{2}\varphi_2(x) + x(2\,L_1 - B_2)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{p+1}{2}}$$

$$-2\left[\log \Gamma_2(x) - \frac{1}{2}\varphi_2(x) + x(2\,L_1 - B_2)\right]_0^{\frac{p}{2}}$$

$$+p\left(\frac{1}{4} + \frac{\log 2}{12} - 3\,L_1\right) + \frac{p^2}{2}\left(\log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\log\Gamma_2\left(\frac{p+1}{2}\right) - 2\log\Gamma_2\left(\frac{p}{2}\right) - 2\log\Gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi_2\left(\frac{p+1}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$+\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{1}{4} + \frac{\log 2}{12} - 3\,L_1\right) + \frac{p^2}{2}\left(\log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\right).$$

Eu égard à (43) du n° 20 et à

$$\varphi_2\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi_2\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2-p}{8};\quad \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

il vient

$$(67)\qquad \int_0^1 \left(\frac{x^p - 1 - p\log x}{x\log^2 x} - \frac{p^2}{2}\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= 2\log\frac{\Gamma_2\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma_2\left(\frac{p}{2}\right)} + p^2\left(\frac{\log\sqrt{\pi}}{2} - \frac{3}{8}\right) + p\left(\frac{3}{8} + \frac{\log 2}{12} - 3L_1\right) - \frac{7}{2}L_2.$$

En particulier, pour $p = 1$,

$$(68)\qquad \int_0^1 \left(\frac{x - 1 - \log x}{x\log^2 x} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= \frac{1}{2}\log\sqrt{\pi} + \frac{\log 2}{12} - 3L_1 - 7L_2$$

ou, en multipliant par 2,

$$(68')\qquad \int_0^1 \left(\frac{2x - 2 - 2\log x}{x\log^2 x} - 1\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= \log\sqrt{\pi} + \frac{1}{6}\log 2 - 6L_1 - 14L_2.$$

En retranchant cette relation de (66) membre à membre, il vient

$$\int_0^1 \frac{(x+1)\log x - 2(x-1)}{x(1+x)\log^3 x}\,dx = 14L_2$$

ou

$$(69)\qquad \int_0^1 \left(1 + \frac{2(1-x)}{(1+x)\log x}\right)\frac{dx}{x\log^2 x} = 14L_2.$$

En faisant, dans (67), $p = 2$, on a, eu égard à (I_k) du n° 5 et à (43) du n° 20,

$$(70)\qquad \int_0^1 \left(\frac{x^2 - 1 - 2\log x}{x\log^2 x} - 2\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= 2\log\sqrt{\pi} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\log 2 - 6L_1.$$

En retranchant (68′) de (70) membre à membre, il vient

$$(71)\qquad \int_0^1 \left(\frac{(x-1)^2}{x\log^2 x} - 1\right)\frac{dx}{(1+x)\log x} = \log\sqrt{\pi} - \frac{3}{4} + 14 L_2.$$

En retranchant (69) de (71) membre à membre, on a

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2 - 1 - (1+x)\log x}{x\log^2 x} - 1\right)\frac{dx}{(1+x)\log x} = \log\sqrt{\pi} - \frac{3}{4},$$

ou

$$(72)\qquad \int_0^1 \left(\frac{x - 1 - \log x}{x\log^2 x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{\log x} = \log\sqrt{\pi} - \frac{3}{4}.$$

3°. Intégrons (67) par rapport à p deuis 0 jusqu'à p, en ayant égard à (VII'_k) et (VI''_k) du n° 5, pour $k = 3$. On aura, toutes réductions faites,

$$(73)\qquad \int_0^1 \left(\frac{x^p - 1 - p\log x - \frac{p^2}{2}\log^2 x}{x\log^3 x} - \frac{p^3}{6}\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= \frac{4}{3}\log\frac{\Gamma_3\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma_3\left(\frac{p}{2}\right)} + \frac{p^3}{6}\left(\log\sqrt{\pi} - \frac{11}{12}\right) + \frac{p^2}{2}\left(\frac{11}{24} + \frac{\log 2}{12} - 3L_1\right)$$

$$- \frac{7}{2}L_2\, p - \frac{1}{720}\log 2 - \frac{11}{288} - \frac{5}{2}L_3.$$

En particulier, pour $p = 1$, on a

$$(74)\qquad \int_0^1 \left(\frac{x - 1 - \log x - \frac{1}{2}\log^2 x}{x\log^3 x} - \frac{1}{6}\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= \frac{1}{6}\log\sqrt{\pi} + 7\frac{\log 2}{180} - \frac{3L_1 + 7L_2 + 10L_3}{2}.$$

En multipliant cette relation par 2 et la retranchant de (68), membre à membre, il vient

$$(75)\qquad \int_0^1 \left[\frac{(x+1)\log x - 2(x-1)}{x\log^3 x} - \frac{1}{6}\right]\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= \frac{1}{6}\log\sqrt{\pi} + \frac{\log 2}{180} + 10\,L_3.$$

Si nous faisons, dans (73), $p = 2$, on trouve, eu égard à (I_k) et (VI_k'') du n° 5,

$$(76)\qquad \int_0^1 \left(\frac{x^2 - 1 - 2\log x - 2\log^2 x}{x\log^3 x} - \frac{4}{3}\right)\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= \frac{4}{3}\log\sqrt{\pi} - \frac{11}{36} - 6\,L_1 - 7\,L_2.$$

En retranchant (74) multipliée par 2 de (76), membre à membre, il vient

$$(77)\qquad \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2 - \log^2 x}{x\log^3 x} - 1\right]\frac{dx}{(1+x)\log x}$$

$$= \log\sqrt{\pi} - \frac{11}{36} - \frac{7\log 2}{90} - 3\,L_1 + 10\,L_3.$$

Notes additionnelles.

A.

La fonction $\Gamma_2(x)$ est, d'après (15) du n° 5, définie par la série convergente:

$$\log\Gamma_2(1+x) = \frac{3}{2}\varphi_2(x+1) - \psi_2(x) + 2\,\sigma_2(x)$$

où

$$\varphi_2(x+1) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6};\quad \psi_2(x) = x^2\log\sqrt{2\pi} + 2\,L_1 x;$$

$$\sigma_2(x) = -\frac{C}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{s_2}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{s_3}{3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{s_4}{4\cdot 5\cdot 6}x^6 - \cdots.$$

Nous donnons ici une petite table des valeurs de $\log\Gamma_2(x)$ et de $\Gamma_2(x)$, pour x variant de 0,1 en 0,1, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2$.

Les considérations exprimées dans les Remarques I et II à la table I, relative à $\Gamma_1(x)$, du n° 17, s'appliquent également à la table II ci-dessous.

Ainsi la formule de multiplication relative à $\Gamma_2(x)$ donne, en logarithmes décimaux (M désignant le module),

$$\text{(a)}\qquad \frac{1}{n^2}\log \Gamma_2(na) = \log \Gamma_2(a) + \log \Gamma_2\left(a+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \log \Gamma_2\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$+\left(\frac{na^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{a}{6n}\right)\log n - \frac{n^3-1}{n^2} M L_2.$$

En y faisant successivement:

$$n=5;\ n=10;$$

$$a=0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9;\ 1,$$

on aura 22 exemples différents de la formule (a) ci-dessus, que l'on vérifiera au moyen des valeurs de $\log \Gamma_2(x)$ de la table II.

Table II.

x	Logarithme décimal de $\Gamma_2(x)$	Valeur de $\Gamma_2(x)$
0,0	0,000 000 000 0	1,000 000
0,1	$\bar{1}$,998 656 505 3	0,996 911
0,2	0,004 684 511 8	1,010 845
0,3	0,012 260 021 9	1,028 632
0,4	0,018 856 449 6	1,044 375
0,5	0,023 141 294 5	1,054 730
0,6	0,024 451 797 2	1,057 916
0,7	0,022 568 835 2	1,053 341
0,8	0,017 596 282 0	1,041 349
0,9	0,009 888 035 4	1,023 029
1,0	0,000 000 000 0	1,000 000
1,1	$\bar{1}$,988 656 505 3	0,974 219
1,2	$\bar{1}$,976 725 711 6	0,947 820
1,3	$\bar{1}$,965 200 934 8	0,922 998
1,4	$\bar{1}$,955 186 048 3	0,901 957
1,5	$\bar{1}$,947 883 795 6	0,886 919
1,6	$\bar{1}$,944 586 247 3	0,880 210
1,7	$\bar{1}$,946 666 874 8	0,884 437
1,8	$\bar{1}$,955 573 873 6	0,902 763
1,9	$\bar{1}$,972 824 468 0	0,939 344
2,0	0,000 000 000 0	1,000 000

Cette table II nous fait, en outre, voir l'allure de la fonction $\Gamma_2(x)$, dans l'intervalle $(0 \leqq x \leqq 2)$.

Ainsi, l'équation

$$\Gamma_2(x) - 1 = 0,$$

a, outre les trois racines habituelles: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, encore une quatrième racine entre 0,1 et 0,2.

B.

Allure de $\Gamma_k(x)$ dans l'intervalle $(0 \leqq x \leqq 2)$. L'équation

$$\text{(a)} \qquad \Gamma_k(x) - 1 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

a, d'après (I'_k) du n° 5, les trois racines: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Entre ces trois racines s'intercalent généralement encore d'autres racines.

Nous venons de voir, dans la Note A, que, pour $k = 2$, l'équation (a) a une quatrième racine entre $x = 0,1$ et $x = 0,2$. Si nous appliquons la formule (VII''_k) du n° 5, on a, pour la dérivée de $\Gamma_k(x)$:

$$\text{(b)} \qquad \Gamma'_k(x) = \Gamma_k(x)\,[k \log \Gamma_{k-1}(x) + \varphi_{k-1}(x) + C_k B_k - k L_{k-1}].$$

On en tire d'abord, eu égard à $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$,

$$\text{(c)} \qquad \Gamma'_k(0) = \Gamma'_k(1) \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Puis, en tenant compte des valeurs numériques des constantes L_1, L_2, L_3, L_4, données par (6) du n° 1, on a, moyennant (b) et (c),

$$\text{(d)} \qquad \Gamma'_2(0) = \Gamma'_2(1) < 0; \quad \Gamma'_2(2) > 0.$$

$$\text{(e)} \qquad \Gamma'_3(0) = \Gamma'_3(1) < 0; \quad \Gamma'_3(2) > 0.$$

$$\text{(f)} \qquad \Gamma'_4(0) = \Gamma'_4(1) > 0; \quad \Gamma'_4(2) > 0.$$

$$\text{(g)} \qquad \Gamma'_5(0) = \Gamma'_5(1) > 0; \quad \Gamma'_5(2) > 0.$$

Il résulte de (c) que l'équation (a) a, pour $k = 2, 3, 4, \ldots$, *au moins* une quatrième racine entre $x = 0$ et $x = 1$. En outre, les inégalités (f) et (g) montrent que, pour $k = 4$ et $k = 5$, l'équation (a) a *au moins* une racine entre $x = 1$ et $x = 2$.

La fonction $\Gamma_k(x)$ a donc généralement, dans l'intervale $(0 < x < 2)$, plusieurs maximums et minimums.

Bien entendu, la fonction $\Gamma_k(x)$, pour $x \geqq 0$, est toujours réelle, positive et continue.