SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES.

PAR

V. ROMANOVSKY.

à TACHKENT.

Dans ce travail je considère une classe d'équations intégrales linéaires qui est intimement liée à un problème important de probabilités et qui me semble nouvelle et intéressante. Une petite note sur ces équations a été publiée par moi dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 101, 1930, p. 552. Maintenant je donnerai une exposition développée des résultats qui font l'objet de cette note et je commencerai par indiquer le problème de probabilités qui conduit aux équations intégrales dont la théorie sera exposée ici.

1. *Les chaînes biconnexes continues de Markoff.* Soit X une variable aléatoire continue dont les valeurs sont contenues dans un intervalle fini (a, b). Nous considérerons une série infini d'épreuves avec cette variable et nous numéroterons les épreuves consécutives par les nombres 1, 2, 3, ... Les épreuves 1 et 2 constituent un chaînon initial, n° 0; les épreuves 2 et 3 constituent le chaînon n° 1; et ainsi de suite. Ces chaînons forment une chaîne d'épreuves que nous nommerons *chaîne biconnexe continue de Markoff* si les conditions suivantes se trouvent satisfaites.

Les valeurs x, y de X dans le chaînon initial sont assujetties à une loi différentielle de probabilités $p_0(x, y)$, de sorte que la probabilité que X soit contenu dans l'intervalle différentiel $(x, x + dx)$ dans la première épreuve et dans l'intervalle $(y, y + dy)$ dans la seconde épreuve est donnée par $p_0(x, y)dx\,dy$.

Soit ensuite $\varphi(t, x, y)$ une loi différentielle de probabilités de $X = y$ dans une épreuve quelconque, quand on sait que dans les deux épreuves précédentes on a $X = t$ et $X = x$. Nous supposons que $p_0(x, y)$ et $\varphi(t, x, y)$ sont continus pour les valeurs de x, y, t appartenant à l'intervalle (a, b). On aura évidemment

$$\int_a^b \varphi(t, x, y)dy = 1.$$

Désignons encore par $p_k(x, y)$ la loi différentielle de probabilités des valeurs x, y de X dans le chaînon n° k, quand les résultats de toutes les autres épreuves restent inconnus, et par $p_k(x)$ la loi pareille de $X = x$ dans la $k^{\text{ième}}$ épreuve, sous la même condition que les résultats des autres épreuves nous sont inconnus.

Cela étant, nos épreuves se trouvent liées par une certaine forme de dépendance qui, dans un autre problème, était considérée pour la première fois par A. Markoff. C'est pourquoi nous appellons la série de nos épreuves chaîne de Markoff. Les séries d'épreuves, liées en chaînes de Markoff, jouent un rôle très important dans les diverses questions, par exemple, dans la théorie de l'hérédité mendélienne, dans certaines théories de la physique mathématique etc.

Les fonctions $p_k(x, y)$ et $p_k(x)$ satisfont aux relations évidentes

$$\int_a^b \int_a^b p_k(x, y)dx\,dy = 1, \qquad \int_a^b p_k(x)dx = 1.$$

En outre, le théorème d'addition des probabilités nous conduit aux relations récurrentes

$$(\alpha) \qquad p_k(x, y) = \int_a^b p_{k-1}(t, x)\varphi(t, x, y)dt,$$

$$(\beta) \qquad p_k(x) = \int_a^b \int_a^b p_{k-3}(s, t)\varphi(s, t, x)ds\,dt.$$

En posant dans la première de ces équations

$$p_k(x, y) = \lambda^{-k}u(x, y),$$

où λ est un nombre constant indéterminé, on la transforme en l'équation intégrale linéaire

$$(\gamma) \qquad u(x, y) = \lambda \int_a^b u(t, x) \varphi(t, x, y) dt.$$

On voit que le problème de propabilités qui se traduit par les équations (α) et (β) se ramène à la résolution de l'équation (γ) qui est linéaire, homogène et aux limites constantes. Elle rappelle l'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm. En l'étudiant on trouve qu'elle est profondement liée à l'équation inhomogène

$$(1) \qquad u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b u(t, x) \varphi(t, x, y)\, dt,$$

où $f(x, y)$ est une fonction donnée.

C'est cette équation (1) et l'équation homogène correspondante,

$$(2) \qquad u(x, y) = \lambda \int_a^b u(t, x) \varphi(t, x, y) dt,$$

qui feront l'objet de nos recherches dans ce mémoire. Nous les appelons *équations intégrales linéaires transgressives à deux variables.* Leur théorie est pareille à la théorie des équations intégrales de Fredholm, mais n'est pas aussi simple. Nous verrons plus loin qu'elle ne peut pas être remplacée par celle des équations de Fredholm à deux variables, d'où découle la nécessité de la construire indépendamment de la théorie de Fredholm.

2. *Résolution de l'équation inhomogène par la méthode d'approximations successives.* Précisons les conditions dans lesquelles nous considérerons toujours les équations (1) et (2) dans ce mémoire. Nous supposerons que nous sommes toujours dans le domaine réel, que les limites a, b sont des constantes réelles et finies et que les fonctions données $f(x, y)$ et $\varphi(t, x, y)$ sont des fonctions réelles, de variables réelles et continues pour

$$a \leqq x, y, t \leqq b,$$

ou, plus simplement, dans l'intervalle (a, b), supposé toujours fermé. Le paramètre λ sera considéré comme un nombre constant indéterminé qui, seul, peut prendre des valeurs complexes.

La marche la plus simple pour résoudre l'équation (1), c'est lui appliquer la méthode d'approximations successives. La solution obtenue de cette manière n'est pas la solution la plus générale mais, néanmoins, elle nous sera utile dans le suivant.

Théorème 1. *Si*

$$f(x, y) \not\equiv 0, \qquad |\varphi(t, x, y)| \leqq M$$

dans (a, b) *et*

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$$

l'équation (1) admet une solution unique

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \lambda u_1(x, y) + \lambda^2 u_2(x, y) + \cdots, \tag{3}$$

où

$$u_0(x, y) = f(x, y), \qquad u_{m+1}(x, y) = L(u_m) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

$L(u)$ *étant défini par l'égalité*

$$L(u) = \int_a^b u(t, x)\varphi(t, x, y)\,dt. \tag{5}$$

La série (3) est uniformément convergente dans (a, b) *pour* λ *considéré.*

La démonstration de ce théorème est très simple et nous l'ommettons ici en tirant seulement quelques conséquences des formules (4).

Soit

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_0(s, t, x, y) &= \varphi(s, t, x)\varphi(t, x, y), \\ \varphi_{m+1}(s, t, x, y) &= \int_a^b \varphi(s, t, \theta)\varphi_m(t, \theta, x, y)\,d\theta \\ &(m = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Alors, en tenant compte de (5) et en exprimant les fonctions $u_m(x, y)$ par des intégrales multiples contenant explicitement $f(x, y)$, on verra facilement que

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b f(t, x)\varphi(t, x, y)\,dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b f(s, t) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \varphi_m(s, t, x, y)\,ds\,dt$$

ou

$$(7)\quad u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b f(t, x)\varphi(t, x, y)dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b f(s, t)\Gamma(s, t, x, y \mid \lambda) ds\, dt,$$

en posant

$$(8)\qquad \Gamma(s, t, x, y \mid \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \varphi_m(s, t, x, y).$$

Moyennant (6) on trouve tout de suite que

$$|\varphi_m(s, t, x, y)| \leqq M^{m+2}(b-a)^m,$$

d'où l'on déduit que la série définissant la résolvente $\Gamma(s, t, x, y \mid \lambda)$ est uniformément convergente dans le domaine $a \leqq s, t, x, y \leqq b$ pour tout $|\lambda| < 1/M(b-a)$. Donc, on peut écrire

$$\Gamma(s, t, x, y \mid \lambda) = \varphi_0(s, t, x, y) + \lambda \int_a^b \varphi(s, t, \theta) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \varphi_m(t, \theta, x, y) d\theta$$

c'est-à-dire

$$(9)\qquad \Gamma(s, t, x, y \mid \lambda) = \varphi_0(s, t, x, y) + \lambda \int_a^b \varphi(s, t, \theta)\Gamma(t, \theta, x, y \mid \lambda) d\theta.$$

Les équations (6), on s'en assure bien simplement, peuvent être écrites aussi sous la forme

$$\varphi_{m+1}(s, t, x, y) = \int_a^b \varphi_m(s, t, \theta, x)\varphi(\theta, x, y) d\theta,$$

d'où l'on tire immédiatement une seconde équation fonctionnelle pour la résolvente $\Gamma(s, t, x, y \mid \lambda)$:

$$(10)\qquad \Gamma(s, t, x, y \mid \lambda) = \varphi_0(s, t, x, y) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t, \theta, x)\varphi(\theta, x, y) d\theta.$$

3. *Réduction à un problème algébrique.* Pour obtenir une solution de (1) valable dans un domaine plus large que la solution (3), nous suivrons la voie bien connue, qui consiste dans la réduction du problème de la résolution de (1) au problème algébrique correspondant.

Faisons les subdivisions

$$a,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1},\, b$$
$$a,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{n-1},\, b$$
$$a,\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_{n-1},\, b$$

de l'intervalle (a, b) en y intercalant les nombres $x_i = y_i = t_i$ tels que

$$x_{i+1} - x_i = y_{i+1} - y_i = t_{i+1} - t_i = \delta$$
$$(i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n;\; x_0 = y_0 = t_0 = a,\; x_n = y_n = t_n = b)$$

et posons

$$u(x_k, y_l) = u_{kl},\; f(x_k, y_l) = f_{kl},\; \varphi(t_h, x_k, y_l) = \varphi_{hkl}.$$

Considérons maintenant le système d'équations linéaires algébriques

$$u_{kl} = f_{kl} + \lambda\delta \sum_{h=1}^{n} u_{hk}\,\varphi_{hkl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

dont le déterminant sera désigné par Δ. Ce déterminant a une forme particulière et, pour plus de clarté, nous l'écrirons, par exemple, pour $n = 3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix}
1-\lambda\delta\varphi_{111} & -\lambda\delta\varphi_{112} & -\lambda\delta\varphi_{113} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -\lambda\delta\varphi_{121} & -\lambda\delta\varphi_{122} & -\lambda\delta\varphi_{123} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda\delta\varphi_{131} & -\lambda\delta\varphi_{132} & -\lambda\delta\varphi_{133} \\
-\lambda\delta\varphi_{211} & -\lambda\delta\varphi_{212} & -\lambda\delta\varphi_{213} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\lambda\delta\varphi_{221} & 1-\lambda\delta\varphi_{222} & -\lambda\delta\varphi_{223} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda\delta\varphi_{231} & -\lambda\delta\varphi_{232} & -\lambda\delta\varphi_{233} \\
-\lambda\delta\varphi_{311} & -\lambda\delta\varphi_{312} & -\lambda\delta\varphi_{313} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\lambda\delta\varphi_{321} & -\lambda\delta\varphi_{322} & -\lambda\delta\varphi_{323} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda\delta\varphi_{331} & -\lambda\delta\varphi_{332} & 1-\lambda\delta\varphi_{333}
\end{vmatrix}$$

Il n'est pas difficile d'écrire Δ pour n quelconque. Il a n^2 lignes et n^2 colonnes que nous numéroterons en donnant aux lignes les numéros doubles

$$ih = 11,\, 12,\, \ldots,\, 1n;\; 21,\, 22,\, \ldots,\, 2n;\; \ldots;\; n1,\, n2,\, \ldots,\, nn \tag{12}$$

et aux colonnes les numéros doubles fg, qui prennent les mêmes valeurs et dans le même ordre que ih. Posons ensuite

$$(12') \qquad \begin{cases} a_{ih|hk} = \varphi_{ihk}; \ a_{ih|fg} = 0 \ (h \neq f); \\ e_{ih|fg} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = f, \ h = g; \\ 0 \text{ pour } i \neq f \text{ ou } h \neq g. \end{cases} \end{cases}$$

Alors Δ peut être écrit sous la forme condensée

$$(13) \qquad \Delta = |e_{ih|fg} - \lambda\delta a_{ih|fg}|,$$

ou encore

$$(13') \qquad \Delta = |e_{pq} - \lambda\delta a_{pq}|,$$

en désignant par p un point ih dans l'ensemble (12), soit l'ensemble E_n, des valeurs du numéro double ih et par q un point fg dans le même ensemble E_n.

En posant

$$\Delta_{pq} = \text{au mineur de } \Delta \text{ correspondant à l'élément } e_{pq} - \lambda\delta a_{pq}$$

et supposant que $\Delta \neq 0$, on aura la solution unique du système (11)

$$u_p = \frac{1}{\Delta}\sum_q \Delta_{pq} f_q = \frac{1}{\Delta}\sum_{f,g=1}^{n} \Delta_{ih|fg} f_{fg},$$

qui peut être écrite aussi comme il suit:

$$(14) \qquad u_p = \frac{\Delta_{pp}}{\Delta} f_p + \frac{1}{\Delta}\sum_{g=1}^{n} \Delta_{ih|gi} f_{gi} + \frac{1}{\Delta}\sum_q{}' \Delta_{pq} f_q,$$

où $\sum_q{}'$ désigne une sommation pour tous les points q sauf les points $q = p$ et $q = gi \ (g = 1, 2, \ldots, n)$.

On voit tout de suite que l'équation

$$u_{kl} = f_{kl} + \lambda\delta\sum_{h=1}^{n} u_{hk}\varphi_{hkl}$$

tend vers l'équation (1) pour $n \to \infty$, $\delta \to 0$, $x_k \to x$, $y_l \to y$, $t_h \to t$ et nous montrerons plus loin que l'expression (14) pour u_p tend dans le même temps vers une solution de (1). Pour ce but il nous faut considérer les limites des divers membres de cette expression pour $n \to \infty$ et, avant tout, la limite du déterminant Δ.

4. *La limite de $\varDelta$; quasi déterminants* $\varDelta\begin{pmatrix}x_1, x_2, \ldots, x_m\\ x_1, x_2, \ldots, x_m\end{pmatrix}$. Prenons le déterminant $\varDelta$ sous la forme (13') et développons-le suivant les puissances de λ. On obtient

$$\varDelta = 1 - \frac{\lambda}{1} A_1^{(n)} + \frac{\lambda^2}{2!} A_2^{(n)} - \frac{\lambda^3}{3!} A_3^{(n)} + \cdots, \tag{15}$$

où l'on a posé

$$A_m^{(n)} = \delta^m \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_m} D\begin{pmatrix}p_1, p_2, \ldots, p_m\\ p_1, p_2, \ldots, p_m\end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$D\begin{pmatrix}p_1, p_2, \ldots, p_m\\ p_1, p_2, \ldots, p_m\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{p_1p_1} & a_{p_1p_2} & \ldots & a_{p_1p_m}\\ a_{p_2p_1} & a_{p_2p_2} & \ldots & a_{p_2p_m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{p_mp_1} & a_{p_mp_2} & \ldots & a_{p_mp_m}\end{vmatrix}, \tag{17}$$

les sommes $\sum\limits_{p_1, p_2, \ldots, p_m}$ étant prises pour $p_1, p_2, \ldots, p_m$ parcourant indépendamment l'un de l'autre l'ensemble E_n.

Les membres $A_1^{(n)}$ et $A_2^{(n)}$ ne présentent aucunes péculiarités et se calculent comme il suit.

Comme

$$D\begin{pmatrix}p_1\\ p_1\end{pmatrix} = a_{p_1p_1} = a_{i_1h_1|i_1h_1}$$

est nul pour $h_1 \neq i_1$, on voit que

$$A_1^{(n)} = \delta \sum_{i=1}^{n} a_{ii|ii} = \delta \sum_{i=1}^{n} \varphi_{iii}.$$

Pour calculer $A_2^{(n)}$, nous écrirons

$$D\begin{pmatrix}p_1, p_2\\ p_1, p_2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1h_1|i_1h_1} & a_{i_1h_1|i_2h_2}\\ a_{i_2h_2|i_1h_1} & a_{i_2h_2|i_2h_2}\end{vmatrix}.$$

Pour $i_1 \neq h_1$ on a $a_{i_1h_1|i_1h_1} = 0$ et ce déterminant n'est différent de zéro que dans le cas $h_2 = i_1$ et $h_1 = i_2$, en prenant dans ce cas la valeur

$$-\varphi_{i_1h_1i_1}\ \varphi_{h_1i_1h_1}.$$

Si $i_1 = h_1$, on a $a_{i_1 h_1 | i_1 h_1} = \varphi_{i_1 i_1 i_1}$ et le déterminant sera toujours nul, si $i_2 \neq h_2$ ou si $i_2 = h_2 = i_1$; il est égal à

$$\varphi_{i_1 i_1 i_1} \; \varphi_{i_2 i_2 i_2},$$

si $i_2 = h_2 \neq i_1$. Donc, nous aurons

$$A_2^{(n)} = \delta^2 \sum_{p_1, p_2} D\begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix} = \delta^2 \sum_{i,\, h=1}^{n} (\varphi_{iii}\varphi_{hhh} - \varphi_{ihi}\,\varphi_{hih})$$

$$= \delta^2 \sum_{i,\, h=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{iii} & \varphi_{ihi} \\ \varphi_{hih} & \varphi_{hhh} \end{vmatrix}.$$

Par des raisonnements analogues on obtient pour $A_3^{(n)}$ l'expression suivante:

$$\begin{aligned} A_3^{(n)} = \delta^3 \sum_{i,h,k} \Bigg\{ & \begin{vmatrix} \varphi_{iii} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{hhh} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{kkk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varphi_{iki} \\ 0 & \varphi_{hhh} & 0 \\ \varphi_{kik} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{ihi} & 0 \\ \varphi_{hih} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{kkk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{ihk} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{hki} \\ \varphi_{kih} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varphi_{ikh} \\ \varphi_{hik} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{khi} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{iii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{khk} \\ 0 & \varphi_{hkh} & 0 \end{vmatrix} \Bigg\} \\ & + \delta^3 \sum_{i,\, h} \begin{vmatrix} \varphi_{iii} & 0 & \varphi_{iih} \\ \varphi_{hii} & 0 & \varphi_{hih} \\ 0 & \varphi_{ihi} & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

On a deux groupes de membres dans cette expression: l'un qui dépend de trois indices i, h, k et l'autre qui dépend de deux indices i, h.

Faisons tendre n vers l'infini. On obtient tout de suite, $\varphi(t, x, y)$ étant continu dans (a, b):

$$A_1 \equiv \lim_{n \to \infty} A_1^{(n)} = \int_a^b \varphi(x, x, x)\, dx; \tag{19}$$

$$(20)\qquad A_2 \equiv \lim_{n\to\infty} A_2^{(n)} = \int_a^b \int_a^b [\varphi(x, x, x)\,\varphi(y, y, y) - \varphi(x, y, x)\,\varphi(y, x, y)]\,dx\,dy.$$

Quant à la limité de $A_3^{(n)}$, les deux groupes de (18) se conduiront différemment pour $n \to \infty$: le premier aura une limite déterminée différant de zéro et le second aura pour limite zéro, car évidemment

$$\lim_{n\to\infty} \delta^3 \sum_{i,h=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{iii} & 0 & \varphi_{iih} \\ \varphi_{hii} & 0 & \varphi_{hih} \\ 0 & \varphi_{ihi} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc,

$$A_3 \equiv \lim_{n\to\infty} A_3^{(n)} = \int_a^b \int_a^b \int_a^b \Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} dx_1\,dx_2\,dx_3$$

ou, plus simplement,

$$(21)\qquad A_3 = \int_a^b \Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

en n'écrivant qu'un signe simple d'intégrale, l'intégration multiple étant suffisamment indiquée par trois différentielles sous le signe d'intégrale. La fonction $\Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}$, comme on l'aperçoit de l'égalité (18), se définit comme il suit:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1, x_2, x_2 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} \varphi(x_1, x_1, x_1) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(x_2, x_2, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(x_3, x_3, x_3) \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varphi(x_1, x_3, x_1) \\ 0 & \varphi(x_2, x_2, x_2) & 0 \\ \varphi(x_3, x_1, x_3) & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &+ \cdots \\ &= \varphi(x_1, x_1, x_1)\,\varphi(x_2, x_2, x_2)\,\varphi(x_3, x_3, x_3) - \varphi(x_1, x_3, x_1)\,\varphi(x_2, x_2, x_2)\,\varphi(x_3, x_1, x_3) \\ &+ \varphi(x_1, x_2, x_3)\,\varphi(x_2, x_3, x_1)\,\varphi(x_3, x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2, x_1)\,\varphi(x_2, x_1, x_2)\,\varphi(x_3, x_3, x_3) \\ &+ \varphi(x_1, x_3, x_2)\,\varphi(x_3, x_2, x_1)\,\varphi(x_2, x_1, x_3) - \varphi(x_1, x_1, x_1)\,\varphi(x_2, x_3, x_2)\,\varphi(x_3, x_2, x_3). \end{aligned}$$

L'exemple de $A_3^{(n)}$ nous montre que, généralement, $A_m^{(n)}$ est une somme de plusieurs groupes de membres: il y a un premier groupe, où chaque membre est un déterminant dépendant de m indices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ prenant indépendemment l'un de l'autre les valeurs $1, 2, \ldots, n$; un second groupe, où chaque membre est un déterminant dépendant de $m-1$ indices indépendants; et ainsi de suite. Il est évident que seule la somme des membres du premier groupe aura une limite différente de zéro, les limites des autres groupes se réduisant toutes à zéro. Donc, dans $A_m^{(n)}$, il est important de savoir calculer le premier groupe de membres que nous appellerons groupe principal de $A_m^{(n)}$ ou partie principale.

Considérons donc le déterminant

$$D\begin{pmatrix} p_1, p_2, \ldots, p_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_m \end{pmatrix}, \quad p_g = i_g h_g \quad (g = 1, 2, \ldots, m), \tag{23}$$

qui rentre dans la somme

$$A_m^{(n)} = \delta^m \sum_{p_1, \ldots, p_m} D\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Un élément quelconque de ce déterminant, $a_{i_g h_g | i_f h_f}$, est égal à zéro, si $h_g \neq i_f$, et à $\varphi_{i_g h_g h_f}$, si $h_g = i_f$. Donc, si h_g n'est égal à aucun des indices $i_1, i_2, \ldots, i_m$, le déterminant (23) aura une ligne, celle du numéro g, consistant de zéros, ou vide, et se réduira, par conséquent, à zéro. De même, il aura une colonne vide, si i_f n'est égal à aucun des indices $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Donc, chaque h_g est nécessairement un i_f et inversement, ou, autrement dit, les suites $i_1, i_2, \ldots, i_m$ et $h_1, h_2, \ldots, h_m$ ne sont que des permutations l'une de l'autre, si nous ne voulons pas que le déterminant (23) se réduise identiquement à zéro. Nous ne considérerons que les déterminants (23) qui sont différants de zéro et alors, pour un tel déterminant, nous devons écrire

$$p_1 = i_1 i_{\alpha_1}, \; p_2 = i_2 i_{\alpha_2}, \; \ldots, \; p_m = i_m i_{\alpha_m}, \tag{25}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ n'est qu'une permutation de la suite $1, 2, \ldots, m$.

Pour avoir les déterminants (23), qui dépendent du plus grand nombre des indices indépendants, il faut encore supposer que les indices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sont tous différents. Le raisonnement précédent montre que ce nombre est m.

En formant toutes les permutations $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de $1, 2, \ldots, m$, nous obtiendrons tous les indices possibles $p_1, p_2, \ldots, p_m$ de la forme (25). Le plus simple procédé pour former ces arrangements est de développer suivant les règles ordinaires le déterminant

$$(26)\qquad A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_m \\ i_1, i_2, \ldots, i_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i_1\, i_1 & i_1\, i_2 & \ldots & i_1\, i_m \\ i_2\, i_1 & i_2\, i_2 & \ldots & i_2\, i_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i_m\, i_1 & i_m\, i_2 & \ldots & i_m\, i_m \end{vmatrix},$$

en calculant avec les paires $i_h i_k$ comme si elles étaient des nombres.

Soit

$$(27)\qquad \pm\, (i_1\, i_{\alpha_1})(i_2\, i_{\alpha_2}) \ldots (i_m\, i_{\alpha_m})$$

un membre du développement de (26). Le déterminant (23) correspondant sera

$$(28)\qquad D_1 \equiv D\begin{pmatrix} i_1\, i_{\alpha_1} & \ldots & i_m\, i_{\alpha_m} \\ i_1\, i_{\alpha_1} & \ldots & i_m\, i_{\alpha_m} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_{\alpha_1} | i_1 i_{\alpha_1}} & \ldots & a_{i_1 i_{\alpha_1} | i_m i_{\alpha_m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_m i_{\alpha_m} | i_1 i_{\alpha_1}} & \ldots & a_{i_m i_{\alpha_m} | i_m i_{\alpha_m}} \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de voir que *la valeur de D_1 est*

$$(29)\qquad D_1 = \pm\, \varphi_{i_1 i_{\alpha_1} i_{\beta_1}} \varphi_{i_2 i_{\alpha_2} i_{\beta_2}} \ldots \varphi_{i_m i_{\alpha_m} i_{\beta_m}},$$

où le signe de la partie droite est celui du membre (27) *et β_h dans l'indice triple $i_h i_{\alpha_h} i_{\beta_h}$ est défini par la condition: $\beta_h = \alpha_g$ dans $g\alpha_g$, si $g = \alpha_h$ dans $h\alpha_h$.*

En effet, dans chaque ligne du déterminant D_1 il y a un seul élément qui est de la forme $\varphi_{i_h i_{\alpha_k} i_{\beta_h}}$, tous les autres étant zéros. On le voit des conditions

$$a_{i_h i_{\alpha_h} | i_g i_{\alpha_g}} = \begin{cases} 0 & \text{si } i_g \neq i_{\alpha_h}, \\ \varphi_{i_h i_{\alpha_h} i_{\alpha_g}} & \text{si } i_g = i_{\alpha_h} \end{cases}$$

et en tenant compte de ce que g et α_h prennent les mêmes valeurs $1, 2, \ldots, m$. De même, dans chaque colonne de D_1 il n'y a qu'un seul élément de la même forme, tous les autres étant zéros. Donc, on s'assure que D_1 a la valeur (29).

Il faut encore faire voir que le signe de cette valeur est bien celui de (27). Pour ce but nous remarquons que les places des éléments

$$\varphi_{i_1 i_{\alpha_1} i_{\beta_1}}, \ldots, \varphi_{i_m i_{\alpha_m} i_{\beta_m}}$$

dans D_1 sont les mêmes que les places des paires

$$i_1 i_{\alpha_1}, \ldots, i_m i_{\alpha_m}$$

dans le déterminant (26). En effet, la paire quelconque $i_h i_{\alpha_h}$ est placée dans l'intersection de la ligne h et de la colonne α_h, de même

$$\varphi_{i_h i_{\alpha_h} i_{\beta_h}} = a_{i_h i_{\alpha_h} | i_{\alpha_h} i_{\beta_h}},$$

parce que, ici, h de la première paire des indices est le numéro de la ligne h et α_h de la seconde paire est le numéro de la colonne α_h. Donc, les signes de (27) et (29) sont les mêmes.

Définissons maintenant l'opération B, qui consiste dans l'association au membre (27) de la quantité (29) et écrivons

$$B[\pm (i_1 i_{\alpha_1}) \ldots (i_m i_{\alpha_m})] = \pm \varphi_{i_1 i_{\alpha_1} i_{\beta_1}} \ldots \varphi_{i_m i_{\alpha_m} i_{\beta_m}}.$$

En effectuant cette opération sur chaque membre du déterminant (26) et en sommant les résultats obtenus, avec leurs signes, nous obtiendrons une quantité bien définie que nous désignerons par

$$\varDelta \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \end{pmatrix},$$

de sorte que, symboliquement,

$$\varDelta \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \end{pmatrix} = B\left[A \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \end{pmatrix} \right]. \tag{30}$$

Il est clair que (30) représente la somme de tous les déterminants (23) qu'on peut former avec tous les indices possibles de la forme (25) et que, en faisant somme de (30) pour les valeurs de $i_1, i_2, \ldots, i_m$ de 1 à n, on obtiendra le groupe des membres de la somme (24), qui dépendent de m indices différents et qui varient indépendamment, c'est-à-dire le groupe principal de (24).

Les autres groupes de (24) contiennent des membres, qui dépendent de moins que m indices differents, donc on aura

$$\lim_{n\to\infty} \delta^m \sum_{p_1, \ldots, p_m} D\begin{pmatrix} p_1, & \ldots, & p_m \\ p_1, & \ldots, & p_m \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i_1, \ldots, i_m} \varDelta \begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_m \\ i_1, & \ldots, & i_m \end{pmatrix} \delta^m,$$

ou encore, en désignant par A_m la limite de la somme (24),

$$A_m = \lim_{n\to\infty} A_m^{(n)} = \int_a^b \varDelta\begin{pmatrix}x_1, x_2, \ldots, x_m\\ x_1, x_2, \ldots, x_m\end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_m, \tag{31}$$

où

$$\varDelta\begin{pmatrix}x_1, x_2, \ldots, x_m\\ x_1, x_2, \ldots, x_m\end{pmatrix} = B\left[A\begin{pmatrix}x_1, x_2, \ldots, x_m\\ x_1, x_2, \ldots, x_m\end{pmatrix}\right], \tag{32}$$

si l'on convient d'effectuer l'opération B sur les membres du déterminant $A\begin{pmatrix}x_1, x_2, \ldots, x_m\\ x_1, x_2, \ldots, x_m\end{pmatrix}$ comme plus haut, en posant

$$a_{x_h x_{\alpha_h} | x_g x_{\alpha_g}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } g \neq \alpha_h, \\ \varphi(x_h, x_{\alpha_h}, x_{\alpha_g}) & \text{pour } g = \alpha_h. \end{cases} \tag{33}$$

Faisons encore une remarque, qui facilite la recherche du résultat de l'opération B effectuée sur le déterminant $A\begin{pmatrix}x_1, x_2, \ldots, x_m\\ x_1, x_2, \ldots, x_m\end{pmatrix}$. Un membre quelconque de ce déterminant est

$$A_1 = \pm (x_1 x_{\alpha_1})(x_2 x_{\alpha_2}) \ldots (x_m x_{\alpha_m}).$$

On peut l'arranger en cycles:

$$\begin{aligned} A_1 = \pm (x_1 x_{\alpha_1})(x_{\alpha_1} x_{\beta_1}) \ldots (x_{\lambda_1} x_1)\cdot \\ \cdot(x_2 x_{\alpha_2})(x_{\alpha_2} x_{\beta_2}) \ldots (x_{\lambda_2} x_2)\cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned} \tag{34}$$

et alors il est claire que

$$\begin{aligned} B[A_1] = \pm\, \varphi(x_1, x_{\alpha_1}, x_{\beta_1})\varphi(x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, x_{\gamma_1}) \ldots \varphi(x_{\lambda_1}, x_1, x_{\alpha_1})\cdot \\ \cdot\varphi(x_2, x_{\alpha_2}, x_{\beta_2})\varphi(x_{\alpha_2}, x_{\beta_2}, x_{\gamma_2}) \ldots \varphi(x_{\lambda_2}, x_2, x_{\alpha_2})\cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{aligned} \tag{35}$$

où le signe de la partie droite est celui du membre considéré A_1.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \varDelta\begin{pmatrix}x_1, x_2, x_3\\ x_1, x_2, x_3\end{pmatrix} &= B\left[A\begin{pmatrix}x_1, x_2, x_3\\ x_1, x_2, x_3\end{pmatrix}\right] \\ &= B\,[(x_1 x_1)(x_2 x_2)(x_3 x_3) - (x_1 x_1)(x_2 x_3)(x_3 x_2) \\ &\quad + (x_1 x_2)(x_2 x_3)(x_3 x_1) - (x_1 x_2)(x_2 x_1)(x_3 x_3) \\ &\quad + (x_1 x_3)(x_3 x_2)(x_2 x_1) - (x_1 x_3)(x_3 x_1)(x_2 x_2)] \end{aligned}$$

$$= \varphi(x_1, x_1, x_1)\varphi(x_2, x_2, x_2)\varphi(x_3, x_3, x_3) - \varphi(x_1, x_1, x_1)\varphi(x_2, x_3, x_2)\varphi(x_3, x_2, x_3)$$
$$+ \varphi(x_1, x_2, x_3)\varphi(x_2, x_3, x_1)\varphi(x_3, x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2, x_1)\varphi(x_2, x_1, x_2)\varphi(x_3, x_3, x_3)$$
$$+ \varphi(x_1, x_3, x_2)\varphi(x_3, x_2, x_1)\varphi(x_2, x_1, x_3) - \varphi(x_1, x_3, x_1)\varphi(x_3, x_1, x_3)\varphi(x_2, x_2, x_2).$$

On retrouve ainsi la valeur de $\varDelta\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}$, qui était trouvée plus haut par un calcul direct.

Nous donnerons aux quantités (32) le nom des *quasi déterminants d'ordre m et de classe* 0.

Pour la recherche des limites des $A_m^{(n)}$ les seuls groupes importants sont les groupes principaux, ou les parties principales, des sommes (24), qui se trouvent, comme nous avons vu, au moyen de l'opération B. Mais la même opération peut servir pour la recherche des parties non principales des sommes (24). Par exemple, on déterminera les parties de la somme (24) dépendant de $m-1$, $m-2$, ... indices indépendants, en calculant

$$B\left[A\begin{pmatrix} i_1, i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \\ i_1, i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \end{pmatrix}\right], \quad B\left[A\begin{pmatrix} i_1, i_1, i_1, i_2, \ldots, i_{m-2} \\ i_1, i_1, i_1, i_2, \ldots, i_{m-2} \end{pmatrix}\right],$$

etc.

Revenons à la limite de $\varDelta$. En la désignant par $D(\lambda)$ et en tenant compte des limites des $A_m^{(n)}$, nous pouvons écrire formellement

$$(36) \qquad D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1} A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_2 - \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} A_m \qquad (A_0 = 1),$$

où A_m se calculent à l'aide de l'égalité

$$A_m = \int_a^b \varDelta\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_m.$$

Nous appelons $D(\lambda)$ le déterminant de l'équation intégrale (1).

La série (36) *qui définit* $D(\lambda)$ *est une fonction entière en* λ, parce qu'elle converge pour tout λ fini.

En effet, nous avons vu que A_m est la limite de la partie principale de la somme

$$\delta^m \sum_{p_1,\ldots,p_m} D\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix} = \sum_{p_1,\ldots,p_m} D\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix} \delta^m. \tag{37}$$

Mais, d'après un théorème bein connu de Hadamard,

$$\left| D\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix} \right| \leqq (M\sqrt{m})^m,$$

où M est la borne supérieure de $|\varphi(t, x, y)|$ dans (a, b). En remplaçant dans la partie principale de la somme (37) $D\begin{pmatrix} p_1 \ldots p_m \\ p_1 \ldots p_m \end{pmatrix}$ par $(M\sqrt{m})^m$, on obtiendra une somme qui est égale à

$$(b-a)^m (M\sqrt{m})^m;$$

parce que la somme

$$\sum_{p_1 \ldots p_m} \delta^m,$$

prise pour les membres de la partie principale, est évidemment égale à $(b-a)^m$. Donc, la valeur absolue de la partie principale de la somme (27) ne surpassera jamais $(b-a)^m (M\sqrt{m})^m$, d'où l'on tire

$$|A_m| \leqq (b-a)^m (\sqrt{m})^m.$$

Cette inégalité étant établie, on démontrera par une méthode bien connue (voir, par exemple, E. Goursat, Cours d'Analyse, t. III, p. 371, 3ième éd.) la convergence absolue de la série (36) pour tout λ fini, ce qui démontre notre proposition.

Ainsi la limite de Δ pour $n \to \infty$ est trouvée.

Il n'est pas difficile de trouver aussi la limite de Δ_{pp}. En effet, ce déterminant se trouve par la suppression de la ligne p et de la colonne p dans Δ et il est évident qu'il est tout pareil à Δ et que sa limite est aussi $D(\lambda)$.

En supposant que, pour $n \to \infty$, les indices i et h composant p varient de telle manière que x_i et y_h tendent respectivement vers x et y, on aura

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_{pp}}{\Delta} f_p = \frac{D(\lambda)}{D(\lambda)} f(x, y) = f(x, y), \tag{38}$$

ce qui donne la limite du premier membre de (14).

5. *Les limites des membres restants de* (14). Commençons par la considération de la limite de Δ_{pq}, qui représente le mineur de Δ correspondant à l'élément a_{pq}.

Nous supposerons que les indices doubles

$$p = ih \quad \text{et} \quad q = gf$$

sont fixe et tels que

$$f \neq i. \tag{39}$$

En général le développement de Δ_{pq} a la forme

$$\Delta_{pq} = \lambda\delta \left[a_{qp} - \frac{\lambda\delta}{1} \sum_{r_1} D\begin{pmatrix} q, r_1 \\ p, r_1 \end{pmatrix} + \frac{(\lambda\delta)^2}{2!} \sum_{r_1, r_2} D\begin{pmatrix} q, r_1, r_2 \\ p, r_1, r_2 \end{pmatrix} - \cdots \right], \tag{40}$$

où $r_1, r_2, \ldots$ parcourrent chacun l'ensemble E_n, defini au nº 3. Mais les conditions imposées sur p et q entrainent des péculiarités que nous allons apprendre.

On remarque d'abord que, à cause de (39) et (12′),

$$a_{qp} = 0$$

et que

$$D\begin{pmatrix} q, r_1 \\ p, r_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{qr_1} \\ a_{r_1 p} & a_{r_1 r_1} \end{vmatrix} = - a_{qr_1} a_{r_1 p}$$

peut avoir une seul valeur différente de zéro

$$D\begin{pmatrix} q, r_1 \\ p, r_1 \end{pmatrix} = - a_{gf|fi}\, a_{fi|ih} = - \varphi_{gfi}\, \varphi_{fih},$$

pour $r_1 = fi$.

Passons ensuite au cas général — au déterminant

$$D\begin{pmatrix} q, r_1, r_2, \ldots, r_m \\ p, r_1, r_2, \ldots, r_m \end{pmatrix} \qquad (r_\alpha = k_\alpha l_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

Écrivons, pour plus de clarté,

$$D\begin{pmatrix} q, r_1, r_2, \ldots, r_m \\ p, r_1, r_2, \ldots, r_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{gf|ih} & a_{gf|k_1 l_1} & \ldots & a_{gf|k_m l_m} \\ a_{k_1 l_1|ih} & a_{k_1 l_1|k_1 l_1} & \ldots & a_{k_1 l_1|k_m l_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k_m l_m|ih} & a_{k_m l_m|k_1 l_1} & \ldots & a_{k_m l_m|k_m l_m} \end{vmatrix}. \tag{41}$$

La première ligne et la première colonne de ce déterminant, à cause de (39), ne seront pas vides s'il y a respectivement un $k_\alpha = f$ et un $l_\beta = i$. Nous excluons de notre considération les cas, où α et β peuvent avoir plusieurs valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots$ telles que

$$k_{\alpha_1} = k_{\alpha_2} = \cdots = f \quad \text{et} \quad l_{\beta_1} = l_{\beta_2} = \cdots = i,$$

pour conserver parmi les indices $k_1, \ldots, k_m$ et $l_1, \ldots, l_m$ le plus grand nombre possible des indices variant indépendamment l'un de l'autre.

De l'égalité $k_\alpha = f$ on déduit qu'aucun des indices

$$(42) \qquad l_1, \ldots, l_{\beta-1}, l_{\beta+1}, \ldots, l_m$$

ne peut être égal à k_α, parce que dans un cas contraire, par exemple, si l'on avait $l_\gamma = k_\alpha$, on aurait dans (41) la ligne vide

$$a_{k_\gamma k_\alpha | ih}, \; a_{k_\gamma k_\alpha | k_1 l_1}, \ldots \; a_{k_\gamma k_\alpha | f l_\alpha}, \ldots, a_{k_\gamma k_\alpha | k_m l_m}.$$

De même, aucun des indices

$$(43) \qquad k_1, \ldots, k_{\alpha-1}, k_{\alpha+1}, \ldots, k_m$$

ne peut être égal à l_β, parce qu'on aurait dans le cas contraire une colonne vide.

D'autre part on voit que, en excluant de la considération les lignes gf et $k_\beta l_\beta$ et les colonnes ih et $k_\alpha l_\alpha$, qui ne sont pas déjà vides, nous n'aurons dans chaque ligne et dans chaque colonne des éléments différant de zéro que dans le cas où chacun des indices (42) est identique avec l'un des indices $k_1, \ldots, k_m$ et que chacun des indices (43) est identique avec l'un des indices $l_1, \ldots, l_m$.

On conclut donc que le déterminant (41) n'aura pas des lignes ou des colonnes vides, si, excepté les conditions $k_\alpha = f$ et $l_\beta = i$, la suite (42) représente une permutation des indices (43) et dans ce cas seulement, en conservant toujours la supposition qu'on veuille avoir le plus grand nombre possible d'indices indépendants.

On obtiendra toutes les paires possibles des indices k et l correspondant aux conclusions obtenues et aux conditions

$$k_\alpha = f, \; l_\beta = i \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m),$$

en considérant le développement du déterminant

(44) $$A_\alpha \begin{pmatrix} f, k_1, \ldots, k_m \\ i, k_1, \ldots, k_m \end{pmatrix},$$

où l'indice α signifie qu'on doit ommettre k_α dans les suites $k_1, \ldots, k_m$ haut et bas. Considérons deux membres types du développement de (44):

(45) $$A' \equiv \pm (fi)(k_1 k_{\alpha_1})(k_2 k_{\alpha_2}) \ldots (k_m k_{\alpha_m}),$$

(46) $$A'' \equiv \pm (f k_\beta)(k_\beta k_\gamma) \ldots (k_\lambda i)(k'_1 k'_{\alpha_1}) \ldots (k'_s k'_{\alpha_s}),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ est une permutation de $1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, m$; $k'_{\alpha_1}, \ldots, k'_{\alpha_s}$ est une permutation de $k'_1, \ldots, k'_s$ et $k'_1, \ldots, k'_s$ sont ceux des indices $k_1, \ldots, k_{\alpha-1}, k_{\alpha+1}, \ldots, k_m$, qui restent après l'exclusion des indices $k_\beta, k_\gamma, \ldots, k_\lambda$. On vérifiera sans peine que les valeurs du déterminant (41) correspondant au choix des indices donné par (45) et (46) sont

(47) $$D\begin{pmatrix} gf, fi, k_1 k_{\alpha_1}, \ldots, k_m k_{\alpha_m} \\ ih, fi, k_1 k_{\alpha_1}, \ldots, k_m k_{\alpha_m} \end{pmatrix} = \mp \varphi_{gfi}\, \varphi_{fih}\, \varphi_{k_1 k_{\alpha_1} k_{\beta_1}} \cdots \varphi_{k_m k_{\alpha_m} k_{\beta_m}},$$

(48) $$D\begin{pmatrix} gf, fk_\beta, k_\beta k_\gamma, \ldots, k_\lambda i, k'_1 k'_{\alpha_1}, \ldots, k'_s k'_{\alpha_s} \\ ih, fk_\beta, k_\beta k_\gamma, \ldots, k_\lambda i, k'_1 k'_{\alpha_1}, \ldots, k'_s k'_{\alpha_s} \end{pmatrix} =$$
$$= \mp \varphi_{gfk_\beta}\, \varphi_{fk_\beta k_\gamma} \cdots \varphi_{k_\lambda ih}\, \varphi_{k'_1 k'_{\alpha_1} k'_{\beta_1}} \cdots \varphi_{k'_s k'_{\alpha_s} k'_{\beta_s}},$$

où les signes sont contraires aux signes de (45) et (46) respectivement et les valeurs des β_h s'obtiennent comme plus haut [n° 4, (29)].

Définissons maintenant l'opération ${}^{gf}_{ih}B$ par les égalités typiques suivantes:

$${}^{gf}_{ih}B\,[\pm (fi)(k_1 k_{\alpha_1}) \ldots (k_m k_{\alpha_m})] = \mp \varphi_{gfi}\, \varphi_{fih}\, \varphi_{k_1 k_{\alpha_1} k_{\beta_1}} \cdots \varphi_{k_m k_{\alpha_m} k_{\beta_m}},$$

$${}^{gf}_{ih}B\,[\pm (fk_\beta)(k_\beta k_\gamma) \ldots (k_\lambda i)(k'_1 k'_{\alpha_1}) \ldots (k'_s k'_{\alpha_s})] =$$
$$= \mp \varphi_{gfk_\beta}\, \varphi_{fk_\beta k_\gamma} \cdots \varphi_{k_\lambda ih}\, \varphi_{k'_1 k_{\alpha_1} k_{\beta_1}} \cdots \varphi_{k'_s k'_{\alpha_s} k'_{\beta_s}}$$

et désignons par

$${}^{gf}_{ih}B\left[A_\alpha \begin{pmatrix} f, k_1, \ldots, k_m \\ i, k_1, \ldots, k_m \end{pmatrix}\right]$$

la somme des résultats obtenus en appliquant l'opération $\overset{g\,f}{\underset{i\,h}{}}B$ aux divers membres du développement du déterminant (44).

Posons ensuite

$$\overset{g\,f}{\underset{i\,h}{}}\varDelta_\alpha\begin{pmatrix}k_1, \ldots, k_m\\ k_1, \ldots, k_m\end{pmatrix} = \overset{g\,f}{\underset{i\,h}{}}B\left[A_\alpha\begin{pmatrix}f, k_1, \ldots, k_m\\ i, k_1, \ldots, k_m\end{pmatrix}\right],$$

où l'indice α a la même signification que plus haut. Alors il est clair que la partie principale de la somme

(49) $$\delta^{m-1}\sum_{r_1, \ldots, r_m} D\begin{pmatrix}q, r_1, \ldots, r_m\\ p, r_1, \ldots, r_m\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la partie dépendant de $m-1$ indices indépendants, est égale à la somme

(50) $$\sum_{\alpha=1}^{m}\ \sum_{k_1, \ldots, k_m=1}^{n} \overset{g\,f}{\underset{i\,h}{}}\varDelta_\alpha\begin{pmatrix}k_1, \ldots, k_m\\ k_1, \ldots, k_m\end{pmatrix}\delta^{m-1}$$

et que la limite, pour $n\to\infty$, de (49) est égale à la limite de (50), qui, à son tour, est égale à

$$m\lim_{n\to\infty}\sum_{k_1, \ldots, k_m=1}^{n} \overset{g\,f}{\underset{i\,h}{}}\varDelta_1\begin{pmatrix}k_1, \ldots, k_m\\ k_1, \ldots, k_m\end{pmatrix}\delta^{m-1}.$$

On conclut de là que

(51) $$\begin{aligned}\lim \delta^m \sum_{r_1, \ldots, r_{m+1}} D\begin{pmatrix}q, r_1, \ldots, r_{m+1}\\ p, r_1, \ldots, r_{m+1}\end{pmatrix} &= \\ &= (m+1)\int_a^b \overset{s\,t}{\underset{x\,y}{}}\varDelta\begin{pmatrix}\theta_1, \ldots, \theta_m\\ \theta_1, \ldots, \theta_m\end{pmatrix}d\,\theta_1 \ldots d\,\theta_m,\end{aligned}$$

où

(52) $$\overset{s\,t}{\underset{x\,y}{}}\varDelta\begin{pmatrix}\theta_1, \ldots, \theta_m\\ \theta_1, \ldots, \theta_m\end{pmatrix} = \overset{s\,t}{\underset{x\,y}{}}B\left[A\begin{pmatrix}t, \theta_1, \ldots, \theta_m\\ x, \theta_1, \ldots, \theta_m\end{pmatrix}\right]$$

et l'opération $\overset{s\,t}{\underset{x\,y}{}}B$ doit être effectuée sur tous les membres du développement du déterminant

$$A\begin{pmatrix} t, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$$

suivant la régle, qui est claire des exemples typiques qui suivent. Soient

$$A' \equiv \pm (t x)(\theta_1 \theta_2)(\theta_2 \theta_3)(\theta_3 \theta_1) \ldots$$
$$A'' \equiv \pm (t \theta_1)(\theta_1 \theta_2)(\theta_2 x)(\theta_3 \theta_3)(\theta_4 \theta_5)(\theta_5 \theta_4) \ldots$$

Alors

$$\underset{xy}{\overset{st}{}} B[A'] = \mp \varphi(s, t, x) \varphi(t, x, y) \varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \varphi(\theta_2, \theta_3, \theta_1) \varphi(\theta_3, \theta_1, \theta_2) \ldots,$$

$$\underset{xy}{\overset{st}{}} B[A''] = \mp \varphi(s, t, \theta_1) \varphi(t, \theta_1, \theta_2) \varphi(\theta_1, \theta_2, x) \varphi(\theta_2, x, y) \cdot$$
$$\cdot \varphi(\theta_3, \theta_3, \theta_3) \varphi(\theta_4, \theta_5, \theta_4) \varphi(\theta_5, \theta_4, \theta_5) \ldots.$$

Par exemple:

(53)
$$\begin{aligned} \underset{xy}{\overset{st}{}} \Delta\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_1\end{pmatrix} &= \underset{xy}{\overset{st}{}} B\left[A\begin{pmatrix} t, \theta_1 \\ x, \theta_1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \underset{xy}{\overset{st}{}} B[(t x)(\theta_1 \theta_1) - (t \theta_1)(\theta_1, x)] \\ &= -\varphi(s, t, x) \varphi(t, x, y) \varphi(\theta_1, \theta_1, \theta_1) + \varphi(s, t, \theta_1) \varphi(t, \theta_1, x) \varphi(\theta_1, x, y); \end{aligned}$$

(54)
$$\begin{aligned} \underset{xy}{\overset{st}{}} \Delta\begin{pmatrix}\theta_1, \theta_2\\ \theta_1, \theta_2\end{pmatrix} &= \underset{xy}{\overset{st}{}} B\left[A\begin{pmatrix} t, \theta_1, \theta_2 \\ x, \theta_1, \theta_2 \end{pmatrix}\right] \\ &= \underset{xy}{\overset{st}{}} B[(t x)(\theta_1 \theta_1)(\theta_2 \theta_2) - (t x)(\theta_1 \theta_2)(\theta_2 \theta_1) \\ &\qquad + (t \theta_1)(\theta_1 \theta_2)(\theta_2 x) - (t \theta_1)(\theta_1 x)(\theta_2 \theta_2) \\ &\qquad + (t \theta_2)(\theta_2 \theta_1)(\theta_1 x) - (t \theta_2)(\theta_2 x)(\theta_1 \theta_1)] \\ &= -\varphi(s, t, x) \varphi(t, x, y) \varphi(\theta_1, \theta_1, \theta_1) \varphi(\theta_2, \theta_2, \theta_2) \\ &\quad + \varphi(s, t, x) \varphi(t, x, y) \varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_1) \varphi(\theta_2, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad - \varphi(s, t, \theta_1) \varphi(t, \theta_1, \theta_2) \varphi(\theta_1, \theta_2, x) \varphi(\theta_2, x, y) \\ &\quad + \varphi(s, t, \theta_1) \varphi(t, \theta_1, x) \varphi(\theta_1, x, y) \varphi(\theta_2, \theta_2, \theta_2) \\ &\quad - \varphi(s, t, \theta_2) \varphi(t, \theta_2, \theta_1) \varphi(\theta_2, \theta_1, x) \varphi(\theta_1, x, y) \\ &\quad + \varphi(s, t, \theta_2) \varphi(t, \theta_2, x) \varphi(\theta_2, x, y) \varphi(\theta_1, \theta_1, \theta_1). \end{aligned}$$

On peut encore poser

$$\text{(55)} \qquad {}^{s\,t}_{x\,y}\Delta_0 = {}^{s\,t}_{x\,y}B\left[A\begin{pmatrix}t\\x\end{pmatrix}\right] = {}^{s\,t}_{x\,y}B\,[(t\,x)] = -\,\varphi(s,t,x)\,\varphi(t,x,y)$$

pour compléter nos formules.

Nous appellerons les fonctions

$$ {}^{s\,t}_{x\,y}\Delta\begin{pmatrix}\theta_1,\ldots,\theta_m\\ \theta_1,\ldots,\theta_m\end{pmatrix} $$

quasi déterminants d'ordre m et de classe 1.

Revenons au développement (40). Nous sommes maintenant en état d'écrire, au moins formellement, la limite de $(\lambda\,\delta)^{-2}\Delta_{p\,q}$. En effet,

$$(\lambda\,\delta)^{-2}\Delta_{p\,q} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(\lambda\,\delta)^m}{(m+1)!}\,D\begin{pmatrix}q, r_1,\ldots, r_{m+1}\\ p, r_1,\ldots, r_{m+1}\end{pmatrix},$$

donc, en introduisant les notations

$$\text{(56)} \qquad \lim_{r\to\infty}\frac{\Delta_{p\,q}}{(\lambda\,\delta)^2} = D\begin{pmatrix}x, y\\ s, t\end{pmatrix}\lambda\Bigg);$$

$$\text{(57)} \qquad \begin{gathered}\int_a^b {}^{s\,t}_{x\,y}\Delta\begin{pmatrix}\theta_1,\ldots,\theta_m\\ \theta_1,\ldots,\theta_m\end{pmatrix}d\theta_1\ldots d\theta_m = -\,\Phi_m\begin{pmatrix}s, t\\ x, y\end{pmatrix}\\ (m=1,2,3,\ldots),\\ \Phi_0\begin{pmatrix}s, t\\ x, y\end{pmatrix} = \varphi(s,t,x)\,\varphi(t,x,y),\end{gathered}$$

on obtient

$$\text{(58)} \qquad D\left(\begin{matrix}x, y\\ s, t\end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^m}{m!}\,\Phi_m\begin{pmatrix}s, t\\ x, y\end{pmatrix}.$$

La fonction $D\left(\begin{matrix}x, y\\ s, t\end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right)$ sera dite le *mineur de l'équation intégrale (1). Elle est une fonction entière en λ et continue pour x, y, s, t dans (a, b),* parce qu'il n'est pas difficile, par la méthode employée pour la série définissant $D(\lambda)$, de démontrer que la série (58) est absolument et uniformément convergente pour x, y, s, t dans (a, b) et pour tout λ fini.

Prenons maintenant le dernier membre de la partie droite de l'égalité (14). On peut écrire

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Delta}\sum_q{}' \Delta_{pq} f_q = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^2}{\Delta}\sum_q{}' f_q\,\delta^2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(\lambda\delta)^m}{m!}D\begin{pmatrix}q, r_1, \ldots, r_{m+1}\\ p, r_1, \ldots, r_{m+1}\end{pmatrix},$$

d'où, en supposant que $D(\lambda) \neq 0$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Delta}\sum_q{}' \Delta_{pq} f_q = \lambda^2\int_a^b \frac{D\begin{pmatrix}x, y \\ s, t\end{pmatrix|\lambda}}{D(\lambda)} f(s, t)\,ds\,dt. \tag{59}$$

Envisageons enfin le membre

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{g=1}^{n}\Delta_{ih|gi} f_{gi}$$

de l'égalité (14)

Nous avons, pour i, h, g fixes,

$$\Delta_{ih|gi} = \lambda\delta\left[a_{gi|ih} - \frac{\lambda\delta}{1}\sum_{r_1} D\begin{pmatrix}gi, r_1\\ ih, r_1\end{pmatrix} + \frac{(\lambda\delta)^2}{2!}\sum_{r_1, r_2} D\begin{pmatrix}gi, r_1, r_2\\ ih, r_1, r_2\end{pmatrix} - \cdots\right]. \tag{60}$$

Mais

$$a_{gi|ih} = \varphi_{gih};$$

$$\sum_{r_1} D\begin{pmatrix}gi, r_1\\ ih, r_1\end{pmatrix} = \sum_{r_1}\begin{vmatrix} a_{gi|ih} & a_{gi|k_1l_1}\\ a_{k_1l_1|ih} & a_{k_1l_1|k_1l_1}\end{vmatrix}$$

a pour partie principale

$$\sum_{k_1=1}^{n}\varphi_{gik}\,\varphi_{k_1k_1k_1}$$

et, généralement, la partie principale de la somme

$$\delta^m\sum_{r_1, \ldots, r_m} D\begin{pmatrix}gi, r_1, \ldots, r_m\\ ih, r_1, \ldots, r_m\end{pmatrix}$$

est identique avec la partie principale de la somne

$$\delta^m\varphi_{gih}\sum_{r_1, \ldots, r_m} D\begin{pmatrix}r_1, \ldots, r_m\\ r_1, \ldots, r_m\end{pmatrix}.$$

En effet, en posant $r_\alpha = k_\alpha l_\alpha$,

$$D\begin{pmatrix} g\,i, r_1, \ldots, r_m \\ i\,h, r_1, \ldots, r_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{gi|ih} & a_{gi|k_1 l_1} & \ldots & a_{gi|k_m l_m} \\ a_{k_1 l_1|ih} & a_{k_1 l_1|k_1 l_1} & \ldots & a_{k_1 l_1|k_m l_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k_m l_m|ih} & a_{k_m l_m|k_1 l_1} & \ldots & a_{k_m l_m|k_m l_m} \end{vmatrix}$$

et il est clair que ce déterminant dépendra du plus grand nombre possible des indices indépendants et ne sera pas identiquement nul, si aucun des indices $k_1, \ldots, k_m$ ou $l_1, \ldots, l_m$ n'est égal à i et si $l_1, \ldots, l_m$ représente une permutation de $k_1, \ldots, k_m$ et dans ce cas seulement. Mais alors

$$D\begin{pmatrix} g\,i, r_1, \ldots, r_m \\ i\,h, r_1, \ldots, r_m \end{pmatrix} = a_{gi|ih}\, D\begin{pmatrix} r_1, \ldots, r_m \\ r_1, \ldots, r_m \end{pmatrix} = \varphi_{gih}\, D\begin{pmatrix} r_1, \ldots, r_m \\ r_1, \ldots, r_m \end{pmatrix},$$

d'où l'on voit la justesse de notre remarque sur la partie principale du terme général du développement (60).

En s'appuyant sur cette remarque et sur les résultats du n° 3, on voit de (60) que, pour $D(\lambda) \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta} \sum_{g=1}^{n} \Delta_{ih|gi} f_{gi} = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b D(\lambda)\, \varphi(t, x, y) f(t, x)\, dt$$

$$= \lambda \int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt.$$

Ainsi, en rappelant tous les résultats obtenus, nous trouvons pour la limite de la partie droite de l'égalité (14) l'expression

$$(61) \qquad u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b \frac{D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix} \lambda}{D(\lambda)} f(s, t)\, ds\, dt,$$

en supposant toujours $D(\lambda) \neq 0$.

Nous établirons plus loin que cette expression de $u(x, y)$ représente bien une solution de (1), mais nous devons auparavant établir quelques relations récurrentes pour A_m et $\Phi_m\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix}$ et des équations fonctionnelles pour $D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \,\middle|\, \lambda\right)$.

6. *Relations récurrentes pour A_m et $\Phi_m\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix}$.* Les opérations par lesquelles dans chaque cas particulier on peut calculer A_m et $\Phi_m\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix}$ deviennent bien pénibles quand m est un nombre plus ou moins considérable. Mais dans beaucoup de cas on peut faciliter les calculs par les formules récurrentes que nous allons établir et qui ont aussi une importance théorique.

Ces formules sont:

$$A_{m+1} = A_1 A_m - m \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} x, y \\ x, y \end{pmatrix} d\,x\,d\,y, \tag{62}$$

$$\Phi_m\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} = A_m\,\Phi_0\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} - m \int_a^b \varphi(s, t, \theta)\,\Phi_{m-1}\begin{pmatrix} t, \theta \\ x, y \end{pmatrix} d\,\theta, \tag{63}$$

$$\Phi_m\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} = A_m\,\Phi_0\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} - m \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} s, t \\ \theta, x \end{pmatrix} \varphi(\theta, x, y)\,d\,\theta \tag{63'}$$

$$\left(m = 0, 1, 2, \ldots;\ A_0 = 1,\ \ \Phi_0\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} = \varphi(s, t, x)\,\varphi(t, x, y)\right).$$

Pour la démonstration de (62) nous partons de la relation

$$A_{m+1} = \int_a^b \Delta\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{m+1} \\ x_1, \ldots, x_{m+1} \end{pmatrix} d\,x_1 \ldots d\,x_{m+1},$$

où

$$\Delta\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{m+1} \\ x_1, \ldots, x_{m+1} \end{pmatrix} = B\left[A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{m+1} \\ x_1, \ldots, x_{m+1} \end{pmatrix}\right].$$

En développant ici $A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{m+1} \\ x_1, \ldots, x_{m+1} \end{pmatrix}$ par rapport aux éléments de la première ligne, nous avons

$$A\begin{pmatrix}x_1, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix} = (x_1 x_1)\, A\begin{pmatrix}x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}$$

$$- (x_1 x_2)\, A\begin{pmatrix}x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, x_3, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (-1)^m (x_1 x_{m+1})\, A\begin{pmatrix}x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, x_2, \ldots, x_m\end{pmatrix}$$

$$= (x_1 x_1)\, A\begin{pmatrix}x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}$$

$$- \sum_{i=2}^{m+1} (x_1 x_i)\, A\begin{pmatrix}x_i, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}$$

et, par conséquent, l'opération B étant évidemment distributive,

$$\Delta\begin{pmatrix}x_1, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix} = B\left[(x_1 x_1)\, A\begin{pmatrix}x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}\right]$$

(64)

$$- \sum_{i=2}^{m+1} B\left[(x_1 x_i)\, A\begin{pmatrix}x_i, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}\right].$$

Un membre quelconque du développement du produit

$$(x_1 x_1)\, A\begin{pmatrix}x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}$$

étant

$$\pm\, (x_1 x_1)(x_2 x_{\alpha_2}) \ldots (x_{m+1} x_{\alpha_{m+1}}),$$

où la suite $\alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ est une permutation de $2, \ldots, m+1$, nous avons

$$B[\pm\, (x_1 x_1)(x_2 x_{\alpha_2}) \ldots (x_{m+1} x_{\alpha_{m+1}})]$$

$$= \pm\, \varphi(x_1, x_1, x_1)\, B[(x_2 x_{\alpha_2}) \ldots (x_{m+1} x_{\alpha_{m+1}})],$$

d'où

$$B\left[(x_1 x_1)\, A\begin{pmatrix}x_2, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}\right] = \varphi(x_1, x_1, x_1)\, B\left[A\begin{pmatrix}x_2, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}\right]$$

(65)

$$= \varphi(x_1, x_1, x_1)\, \Delta\begin{pmatrix}x_2, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}.$$

Prenons maintenant

$$-B\left[(x_1\,x_i)\,A\begin{pmatrix}x_i, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}\right],$$

qui est la somme des membres de la forme

$$B\,[\mp\,(x_1\,x_i)\,(x_i x_\alpha)\,(x_\alpha\,x_\beta)\ldots(x_\lambda\,x_1)\,(x'_1\,x'_{\alpha_1})\ldots(x'_s\,x'_{\alpha_s})]$$
$$=\mp\,\varphi\,(x_1, x_i, x_\alpha)\,\varphi\,(x_i, x_\alpha, x_\beta)\ldots\varphi\,(x_\lambda, x_1, x_i)\,\varphi\,(x'_1, x'_{\alpha_1}, x'_{\beta_1})\ldots\varphi\,(x'_s, x'_{\alpha_s}, x'_{\beta_s}).$$

Mais

$$\frac{x_1\,x_i}{x_1\,x_i}\,B\left[A\begin{pmatrix}x_i, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}\right]$$

représente la somme des mêmes membres, donc

$$\begin{aligned}(66)\qquad -B&\left[(x_1\,x_i)\,A\begin{pmatrix}x_i, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}\right]\\ &=\frac{x_1\,x_i}{x_1\,x_i}\,B\left[A\begin{pmatrix}x_i, x_2, \ldots\\ x_1, x_2 \ldots\end{pmatrix}\right]\\ &=\frac{x_1\,x_i}{x_1\,x_i}\,\Delta\begin{pmatrix}x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi (64), (65), (66) nous donnent la relation

$$\begin{aligned}(67)\qquad \Delta\begin{pmatrix}x_1, \ldots, x_{m+1}\\ x_1, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}&=\varphi\,(x_1, x_1, x_1)\,\Delta\begin{pmatrix}x_2, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix}\\ &+\sum_{i=2}^{m+1}\frac{x_1\,x_i}{x_1\,x_i}\,\Delta\begin{pmatrix}x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

qui représente le développement du quasi déterminant d'ordre $m+1$ et de classe 0 rappelant à un certain degré le développement des déterminants ordinaires suivants leurs mineurs.

En intégrant cette relation par rapport à $x_1, \ldots, x_{m+1}$ entre les limites a et b, on obtient la relation (62), car, à cause des définitions des A_m et $\Phi_m\begin{pmatrix}s, t\\ x, y\end{pmatrix}$,

$$\int_a^b \varphi(x_1, x_1, x_1)\, \Delta\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_{m+1} \\ x_2, \ldots, x_{m+1} \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{m+1} = A_1 A_m$$

et

$$\sum_{i=2}^{m+1} \int {}^{x_1 x_i}_{x_1 x_i}\Delta\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1} \\ x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1} \end{pmatrix} d\,x_1 \ldots d\,x_{m+1}$$

$$= -\sum_{i=2}^{m+1} \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} x_1, x_i \\ x_1, x_i \end{pmatrix} d\,x_1\, d\,x_i$$

$$= -\, m \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} x, y \\ x, y \end{pmatrix} d\,x\, d\,y.$$

Passons à la démonstration de la relation (63).

On a, d'après (57),

$$\Phi_m\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} = -\int_a^b {}^{s\,t}_{x\,y}\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} d\,\theta_1 \ldots d\,\theta_m,$$

où

$$ {}^{s\,t}_{x\,y}\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} = {}^{s\,t}_{x\,y}B\left[A\begin{pmatrix} t, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}\right].$$

En utilisant, comme plus haut, le développement

$$A\begin{pmatrix} t, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} = (t\,x)\, A\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$$

$$-\sum_{i=1}^{m} (t\,\theta_i)\, A\begin{pmatrix} \theta_i, \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m \\ x, \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$$

et en appliquant l'opération ${}^{s\,t}_{x\,y}B$ aux membres types des développements des déterminants, qui s'y trouvent dans la partie droite, on vérifiera sans difficulté la relation

$$(68)\qquad {}^{s\,t}_{x\,y}\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} = -\, \varphi(s, t, x)\, \varphi(t, x, y)\, \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \varphi(s, t, \theta_i) \cdot {}^{t\,\theta_i}_{x\,y}\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix},$$

qui est intéressante par elle-même, car elle donne un développement du quasi déterminant d'ordre m et de classe 1. En l'intégrant par rapport à $\theta_1, \ldots, \theta_m$ de a à b, on parvient facilement à (63).

Par la même méthode, en développant le déterminant $\Delta\begin{pmatrix} t, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$ suivant les éléments de sa première colonne, on arrive à la relation

$$(68') \quad \begin{aligned} {}^{s\,t}_{x\,y}\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} &= -\varphi(s, t, x)\,\varphi(t, x, y)\,\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} \varphi(\theta_i, x, y)\cdot {}^{s\,t}_{\theta_i x}\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit facilement (63').

Remarquons encore qu'on peut utiliser les relations (67), (68) et (68') pour le calcul de proche en proche des quasi déterminants d'ordre m et de classes 0 et 1. Ce calcul se termine par les relations

$$(69) \qquad \Delta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \varphi(x_1, x_1, x_1),$$

$${}^{s\,t}_{x\,y}\Delta\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = -\varphi(s, t, x)\,\varphi(t, x, y)\,\varphi(\theta_1, \theta_1, \theta_1) + \varphi(s, t, \theta_1)\,\varphi(t, \theta_1, x)\,\varphi(\theta_1, x, y)$$

qu'il est utile à remarquer et qu'on trouve immédiatement.

7. *Equations fonctionnelles pour* $D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix} \mid \lambda\Big)$. *Premier théorème fondamental.*

La fonction $D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix} \mid \lambda\Big)$ que nous avons appelée mineur de l'équation (1) satisfait aux relations fonctionnelles

$$(70) \qquad D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \mid \lambda\right) = D(\lambda)\,\varphi_0(s, t, x, y) + \lambda \int_a^b D\left(\begin{matrix} \theta, x \\ s, t \end{matrix} \mid \lambda\right) \varphi(\theta, x, y)\, d\theta,$$

$$(70') \qquad D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \mid \lambda\right) = D(\lambda)\,\varphi_0(s, t, x, y) + \lambda \int_a^b \varphi(s, t, \theta)\, D\left(\begin{matrix} x, y \\ t, \theta \end{matrix} \mid \lambda\right) d\theta,$$

qui jouent un rôle important dans la démonstration du premier théorème fondamental pour l'équation (1).

Pour démontrer, par exemple, (70), prenons la relation (63'), multiplions-la de deux côtés par $\frac{(-\lambda)^m}{m!}$ et faisons ensuite la somme depuis $m = 0$ à $m = \infty$: en tenant compte des relations (36) et (58), qui définissent $D(\lambda)$ et $D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix} \lambda \Big)$, on obtient (70). La même opération appliquée à (63) donnera (70').

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème 2 *(Premier théorème fundamental). Si*

$$D(\lambda) \neq 0,$$

l'équation (1),

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt,$$

admet une solution et une seule qui est donnée par la formule

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt + \lambda^2 \int_a^b \frac{D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \,\middle|\, \lambda\right)}{D(\lambda)} f(s, t)\, ds\, dt. \tag{71}$$

Démontrons d'abord que (71) est en effet une solution de l'équation (1). En substituant dans (1) au lieu de $u(x, y)$ l'expression (71), on trouve

$$f(x, y) + \lambda \int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt + \lambda^2 \int_a^b \frac{D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \,\middle|\, \lambda\right)}{D(\lambda)} f(s, t)\, ds\, dt =$$

$$= f(x, y) + \lambda \int_a^b \Bigg[f(t, x) + \lambda \int_a^b f(\theta, t)\, \varphi(\theta, t, x)\, d\theta +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b \frac{D\left(\begin{matrix} t, x \\ s, \theta \end{matrix} \,\middle|\, \lambda\right)}{D(\lambda)} f(s, \theta)\, ds\, d\theta \Bigg] \varphi(t, x, y)\, dt,$$

ou, en réduisant, et en faisant des transformations évidentes,

$$\int_a^b \frac{D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)} f(s,t)\,ds\,dt = \int_a^b f(\theta, t)\,\varphi(\theta, t, x)\,\varphi(t, x, y)\,d\theta\,dt +$$

$$+ \lambda \int_a^b \frac{D\begin{pmatrix} t, x \\ s, \theta \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)} f(s,\theta)\,\varphi(t, x, y)\,ds\,dt\,d\theta$$

$$= \int_a^b f(s,t)\,\varphi(s, t, x)\,\varphi(t, x, y)\,ds\,dt$$

$$+ \lambda \int_a^b \frac{D\begin{pmatrix} \theta, x \\ s, t \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)} f(s,t)\,\varphi(\theta, x, y)\,ds\,dt\,d\theta.$$

En portant à gauche tous les membres et en tenant compte de (70) on trouve l'identité

$$\int_a^b \left[\frac{D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)} - \varphi(s, t, x)\,\varphi(t, x, y) - \lambda \int_a^b \frac{D\begin{pmatrix} \theta, x \\ s, t \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)} \varphi(\theta, x, y)\,d\theta \right] f(s,t)\,ds\,dt = 0,$$

qui prouve notre proposition.

Démontrons ensuite que toute solution de (1) doit avoir la forme (71) quand $D(\lambda) \neq 0$.

Soit $u(x, y)$ une solution quelconque de (1), de sorte que

$$u(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_a^b u(t,x)\,\varphi(t, x, y)\,dt \tag{72}$$

est une identité. Remplaçons ici t, x, y par s, t, x respectivement, multiplions les deux côtés par $\lambda D(\lambda)\,\varphi(t, x, y)$ et intégrons ensuite par rapport à t entre les limites a et b: on trouve

$$\begin{aligned} \lambda D(\lambda) \int_a^b u(t,x)\,\varphi(t, x, y)\,dt &= \lambda D(\lambda) \int_a^b f(t,x)\,\varphi(t, x, y)\,dt \\ &+ \lambda^2 D(\lambda) \int_a^b u(s,t)\,\varphi(s, t, x)\,\varphi(t, x, y)\,ds\,dt. \end{aligned} \tag{73}$$

Remplaçons ensuite dans (72) t, x, y par θ, s, t respectivement, multiplions les deux côtés par $\lambda^2 D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix}\lambda$ et intégrons par rapport à s et t de a à b, ce qui donne

$$\lambda^2 \int_a^b u(s, t) D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds\, dt = \lambda^2 \int_a^b f(s, t) D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds\, dt$$
$$+ \lambda^3 \int_a^b u(\theta, s) \varphi(\theta, s, t) D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \middle| \lambda\right) d\theta\, ds\, dt,$$

ou, à cause de (70'),

(74)
$$\lambda^2 \int_a^b u(s, t) D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds\, dt = \lambda^2 \int_a^b f(s, t) D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds\, dt$$
$$+ \lambda^2 \int_a^b u(\theta, s) \left[D\left(\begin{matrix} x, y \\ \theta, s \end{matrix} \middle| \lambda\right) - \varphi_0(\theta, s, x, y) D(\lambda)\right] d\theta\, ds.$$

Enfin, multiplions (72) par $D(\lambda)$ et ajoutons au résultat membre à membre (73) et (74): des simples réductions faites, on aura

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b f(t, x) \varphi(t, x, y)\, dt + \lambda^2 \int_a^b \frac{D\left(\begin{matrix} x, y \\ s, t \end{matrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)} f(s, t)\, ds\, dt,$$

ce qui prouve notre proposition et, avec celle-ci, l'unicité de la solution obtenue.

On déduit du théorème démontré une conclusion importante: *pour λ tel que $D(\lambda) \neq 0$, l'équation homogène* (2),

$$u(x, y) = \lambda \int_a^b u(t, x) \varphi(t, x, y)\, dt,$$

n'admet qu'une seule solution $u(x, y) = 0$.

8. *Quasi déterminants d'ordre et de classe quelconques.* Désignons par

(75)
$$\Delta_{p_1 q_1 | p_2 q_2 | \ldots | p_\mu q_\mu}$$

un mineur du déterminant Δ, qui résulte en supprimant dans Δ les lignes p_1, $p_2, \ldots, p_\mu$ et les colonnes $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$. Nous supposons que ces lignes et ces colonnes sont toutes différentes et que, en posant

$$p_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad q_\beta = g_\beta f_\beta,$$

on a $g_\beta \neq i_\alpha$ et, en particulier,

$$f_\beta \neq i_\alpha \, (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{76}$$

Le développement de (75) suivant les puissances de λ a, en général, la forme

$$\begin{aligned}\Delta_{p_1 q_1 \mid p_2 q_2 \mid \ldots \mid p_\mu q_\mu} = (\lambda\delta)^\mu \Bigg[& D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu \\ p_1, \ldots, p_\mu \end{pmatrix} \\ & - \frac{\lambda\delta}{1} \sum_{r_1} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1 \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{(\lambda\delta)^2}{2!} \sum_{r_1, r_2} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, r_2 \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, r_2 \end{pmatrix} \\ & - \cdots \Bigg]\end{aligned} \tag{77}$$

mais, à cause des conditions (76), les μ premiers membres de ce développement sont nuls.

En effet, en posant $r_\lambda = k_\lambda l_\lambda$, nous aurons

$$D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{g_1 f_1 \mid i_1 h_1} & \ldots & a_{g_1 f_1 \mid i_\mu h_\mu} & a_{g_1 f_1 \mid k_1 l_1} & \ldots & a_{g_1 f_1 \mid k_\nu l_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{g_\mu f_\mu \mid i_1 h_1} & \ldots & a_{g_\mu f_\mu \mid i_\mu h_\mu} & a_{g_\mu f_\mu \mid k_1 l_1} & \ldots & a_{g_\mu f_\mu \mid k_\nu l_\nu} \\ a_{k_1 l_1 \mid i_1 h_1} & \ldots & a_{k_1 l_1 \mid i_\mu h_\mu} & a_{k_1 l_1 \mid k_1 l_1} & \ldots & a_{k_1 l_1 \mid k_\nu l_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k_\nu l_\nu \mid i_1 h_1} & \ldots & a_{k_\nu l_\nu \mid i_\mu h_\mu} & a_{k_\nu l_\nu \mid k_1 l_1} & \ldots & a_{k_\nu l_\nu \mid k_\nu l_\nu} \end{vmatrix} \tag{78}$$

$$= 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

On peut le voir par le raisonnement suivant. Tous les éléments de la matrice

$$\begin{matrix} a_{g_1 f_1 \mid i_1 h_1} & \ldots & a_{g_1 f_1 \mid i_\mu h_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{g_\mu f_\mu \mid i_1 h_1} & \ldots & a_{g_\mu f_\mu \mid i_\mu h_\mu} \end{matrix}$$

sont nuls à cause de (76) et (12′). Donc, pour qu'aucune des μ premières colonnes de (78) ne soit vide, il faut que chacun de μ indices $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ soit égal à un de ν indices $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$. Cela est impossible pour $\nu < \mu$, si les indices $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ sont tous différents, comme nous avons supposé, donc l'égalité (78) a bien place pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$.

Pour $\nu = \mu$ nous pouvons écrire

$$D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\mu \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_\mu \end{pmatrix} = (-1)^\mu D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu \\ r_1, \ldots, r_\mu \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} r_1, \ldots, r_\mu \\ p_1, \ldots, p_\mu \end{pmatrix}$$

$$(79) \qquad = (-1)^\mu \begin{vmatrix} a_{g_1 f_1 \mid k_1 l_1} & \ldots & a_{g_1 f_1 \mid k_\mu l_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{g_\mu f_\mu \mid k_1 l_1} & \ldots & a_{g_\mu f_\mu \mid k_\mu l_\mu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1 \mid i_1 h_1} & \ldots & a_{k_1 l_1 \mid i_\mu h_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k_\mu l_\mu \mid i_1 h_1} & \ldots & a_{k_\mu l_\mu \mid i_\mu h_\mu} \end{vmatrix}.$$

Il est clair qu'en posant

$$(80) \qquad \begin{aligned} k_1 &= f_{\alpha_1},\ k_2 = f_{\alpha_2}, \ldots, k_\mu = f_{\alpha_\mu}; \\ l_1 &= i_{\beta_1},\ l_2 = i_{\beta_2}, \ldots, l_\mu = i_{\beta_\mu}, \end{aligned}$$

où $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots, f_{\alpha_\mu}$ et $i_{\beta_1}, i_{\beta_2}, \ldots, i_{\beta_\mu}$ sont des permutations de $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ et $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ respectivement, on aura dans la partie droite de (79) un produit de deux déterminants non nuls. Toute autre supposition sur les indices k et l, différente de (80), nous conduira à un déterminant (79) identiquement nul. Donc, il y a $(\mu!)^2$ valeurs de (79) non identiquement nulles. Mais entre ces $(\mu!)^2$ valeurs il n'y a que $\mu!$ différentes. En effet, l'association (80) des indices en les permutant convenablement, peut être écrite comme il suit

$$(80') \qquad \begin{aligned} f_1 &= k_{\nu_1},\ f_2 = k_{\nu_2}, \ldots, f_\mu = k_{\nu_\mu}; \\ l_{\nu_1} &= i_{\delta_1},\ l_{\nu_2} = i_{\delta_2}, \ldots, l_{\nu_\mu} = i_{\delta_\mu}, \end{aligned}$$

d'où découle la valeur correspondante de (79) suivante

$$(81) \qquad \pm\, \varphi_{g_1 f_1 i_{\delta_1}} \ldots \varphi_{g_\mu f_\mu i_{\delta_\mu}} \varphi_{f_1 i_{\delta_1} h_{\delta_1}} \ldots \varphi_{f_\mu i_{\delta_\mu} h_{\delta_\mu}},$$

qui montre qu'on ne peut obtenir de toutes les permutations telles que (80) que $\mu!$ valeurs différentes (81). On conclut donc que, en prenant toutes les permutations (80), on obtiendra chacune des valeurs différentes (81) $\mu!$ fois.

Par conséquent, en désignant par

$$\Phi_0\begin{pmatrix} s_1, & t_1; \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix}$$

la limite de la somme

$$\frac{(-1)^\mu}{\mu!} \sum_{r_1, \ldots, r_\mu} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\mu \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_\mu \end{pmatrix},$$

on aura

$$(82) \quad \begin{aligned} &\Phi_0\begin{pmatrix} s_1, & t_1; \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} \\ &= \Sigma \pm \varphi(s_1, t_1, x_{\delta_1})\, \varphi(t_1, x_{\delta_1}, y_{\delta_1}) \ldots \varphi(s_\mu, t_\mu, x_{\delta_\mu})\, \varphi(t_\mu, x_{\delta_\mu}, y_{\delta_\mu}) \end{aligned}$$

en supposant que les points

$$x_{g_\lambda}, x_{f_\lambda}, x_{i_\lambda}, x_{h_\lambda}$$

de la subdivision équidistante

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$$

de l'intervalle (a, b) tendent, pour $n \to \infty$, respectivement vers

$$s_\lambda, t_\lambda, x_\lambda, y_\lambda.$$

Dans l'égalité (82) la suite $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\mu$ est une permutation de $1, 2, \ldots, \mu$ et le signe $\pm$ se définit par la permutation $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\mu$, comme on le définit dans la théorie des déterminants.

Envisageons maintenant le déterminant (78) pour $\nu > \mu$. Nous l'écrirons, en tenant compte de ce que tous les $a_{g_\lambda f_\lambda \mid i_{\lambda_1} h_{\lambda_1}} = 0$, sous la forme

$$(83) \quad D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots 0 & a_{g_1 f_1 \mid k_1 l_1} & \ldots a_{g_1 f_1 \mid k_\nu l_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots 0 & a_{g_\mu f_\mu \mid k_1 l_1} & \ldots a_{g_\mu f_\mu \mid k_\nu l_\nu} \\ a_{k_1 l_1 \mid i_1 h_1} & \ldots a_{k_1 l_1 \mid i_\mu h_\mu} & a_{k_1 l_1 \mid k_1 l_1} & \ldots a_{k_1 l_1 \mid k_\nu l_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k_\nu l_\nu \mid i_1 h_1} & \ldots a_{k_\nu l_\nu \mid i_\mu h_\mu} & a_{k_\nu l_\nu \mid k_1 l_1} & \ldots a_{k_\nu l_\nu \mid k_\nu l_\nu} \end{vmatrix}.$$

Pour déterminer dans quels cas ce déterminant dépend du plus grand nombre possible des indices k et l variant indépendemment et ne s'évanouit pas identiquement, on pourrait raisonner comme plus haut, dans le cas du déterminant Δ_{pq} dans n° 5. Mais on peut procéder autrement et cette autre méthode nous sera avantageuse plus loin, quand nous considérons les équations intégrales transgressives à $\nu > 2$ variables. Elle consiste dans la considération des membres du développement de (83), mis dans une forme qu'on peut appeler quasi cyclique.

Soit

$$
(84) \qquad \begin{aligned} A' \equiv \pm & \left(a_{g_1 f_1 \mid k_\alpha l_\alpha}\, a_{k_\alpha l_\alpha \mid k_\beta l_\beta} \ldots a_{k_\lambda l_\lambda \mid i_{\tau_1} h_{\tau_1}}\right) \ldots \\ & \left(a_{k'_1 l'_1 \mid k'_{\alpha_1} l'_{\alpha_1}}\, a_{k'_{\alpha_1} l'_{\alpha_1} \mid k'_{\alpha_2} l'_{\alpha_2}} \ldots a_{k'_{\alpha_s} l'_{\alpha_s} \mid k'_1 l'_1}\right) \ldots \end{aligned}
$$

un membre quelconque du développement de (83). Nous appelons *quasi cycles* de ce membre des groupes tels que

$$a_{g_1 f_1 \mid k_\alpha l_\alpha},\ a_{k_\alpha l_\alpha \mid k_\beta l_\beta},\ \ldots\ a_{k_\lambda l_\lambda \mid i_{\tau_1} h_{\tau_1}},$$

dont les indices commencent par les paires

$$g_1 f_1,\ g_2 f_2,\ \ldots,\ g_\mu f_\mu$$

et se terminent par les paires

$$i_1 h_1,\ i_1 h_2,\ \ldots,\ i_\mu h_\mu$$

et *cycles*, comme d'ordinaire, des groupes tels que

$$a_{k'_1 l'_1 \mid k'_{\alpha_1} l'_{\alpha_1}},\ a_{k'_{\alpha_1} l'_{\alpha_1} \mid k'_{\alpha_2} l'_{\alpha_2}},\ \ldots,\ a_{k'_{\alpha_s} l'_{\alpha_s} \mid k'_1 l'_1},$$

qui commencent et se terminent par les mêmes paires.

Recherchons quelles conditions doivent être satisfaites pour que A' ne soit pas égal à zéro.

D'abord, aucune des quantités a_{pq}, qui y entrent, ne doit pas être égal à zéro, d'où les conditions telles que

$$(85) \qquad k_\alpha = f_1 \text{ et } l_\lambda = i_{\tau_1}$$

d'une part et telles que

$$(86) \qquad l_\alpha = k_\beta,\ l_\beta = k_\gamma,\ \ldots,\ l'_{\alpha_1} = k'_{\alpha_2},\ \ldots,\ l'_{\alpha_s} = k'_1$$

de l'autre.

Il y a, évidemment, dans A', μ quasi cycles différents commençant par $g_1 f_1, \ldots, g_\mu f_\mu$ et se terminant par $i_1 h_1, \ldots, i_\mu h_\mu$, donc les conditions pareilles à (85) exigent qu'il y ait μ indices $k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\mu}$ et μ indices $l_{\beta_1}, \ldots, l_{\beta_\mu}$ tels que

$$k_{\alpha_1} = f_1, \ldots, k_{\alpha_\mu} = f_\mu \text{ et } l_{\beta_1} = i_1, \ldots, l_{\beta_\mu} = i_\mu. \tag{87}$$

Ces indices doivent donc avoir des valeurs fixes.

Soient

$$k'_1, k'_2, \ldots, k'_m \quad (m = \nu - \mu) \tag{88}$$

et

$$l'_1, l'_2, \ldots, l'_m \quad (m = \nu - m) \tag{89}$$

les indices k et l qui restent après l'exclusion des indices $k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\mu}$ et $l_{\beta_1}, \ldots, l_{\beta_\mu}$ des suites $k_1, \ldots, k_\nu$ et $l_1, \ldots, l_\nu$ respectivement. Ils ne sont pas tous indépendants parce qu'ils doivent satisfaire aux conditions de la forme (87). Il n'est pas difficile de voir de ces conditions que les indices (89) doivent représenter une permutation quelconque des indices (88).

Donc, pour que A' soit différent de zéro, il faut (et il suffit, cela se comprend) que les conditions (87) soient satisfaites et que (89) soit une permutation de (88). Alors A' aura la valeur

$$\begin{aligned} A' = \pm \left(\varphi_{g_1 f_1 l_\alpha} \varphi_{f_1 l_\alpha l_\beta} \cdots \varphi_{l_\lambda i_{\tau_1} h_{\tau_1}}\right) \cdots \\ \cdot \left(\varphi_{k'_{\alpha_1} l'_{\alpha_1} l'_{\alpha_2}} \cdots \varphi_{k'_{\alpha_8} k'_{\alpha_1} l'_{\alpha_1}}\right) \cdots, \end{aligned} \tag{90}$$

où on a mis en parenthèses les membres qui proviennent des quasi cycles et des cycles correspondants de la forme précédente de A'.

Remarquons enfin que, pour le choix des indices k et l que nous considérons, il n'y a dans le déterminant (83) qu'un seul membre qui est différent de zéro et que c'est précisement A'. En effet, deux membres différents de (83) se diffèrent au moins par un quasi cycle ou par un cycle d'où résultent des conditions incompatibles pour k et l, si l'on voulait que ces membres soient tous les deux différent de zéro.

Les choix divers des indices, pareils au considéré et soumis aux mêmes conditions, se peuvent obtenir de la manière suivante.

Prenons le déterminant

$$(91)\qquad A\begin{pmatrix} f_1, \ldots, f_\mu, k'_1, \ldots, k'_m \\ i_1, \ldots, i_\mu, k'_1, \ldots, k'_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 i_1 & \ldots f_1 i_\mu & f_1 k'_1 & \ldots & f_1 k'_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k'_m i_1 & \ldots k'_m i_\mu & k'_m k'_1 & \ldots & k'_m k'_m \end{vmatrix}.$$

Les membres de son développement nous donneront précisement les paires des indices pour lesquelles les membres correspondants A' seront différents de zéro, si à chaque membre on ajoute les paires

$$g_1 f_1, \ldots, g_\mu f_\mu, i_1 h_1, \ldots, i_\mu h_\mu$$

comme facteurs et si l'on écrit chaque ensemble d'indices obtenu en cycles et quasi cycles. En d'autres termes, prenons un membre quelconque

$$a' = \pm (f_1 u_1) \ldots (f_\mu u_\mu)(k'_1 u_{\mu+1}) \ldots (k'_m u_\nu)$$

de (91), où $u_1, \ldots, u_\nu$ est une permutation de

$$i_1, \ldots, i_\mu, k'_1, \ldots, k'_m,$$

et considérons le déterminant (83) correspondant:

$$D\begin{pmatrix} g_1 f_1, \ldots, g_\mu f_\mu, f_1 u_1, \ldots, f_\mu u_\mu, k'_1 u_{\mu+1}, \ldots, k'_m u_\nu \\ i_1 h_1, \ldots, i_\mu h_\mu, f_1 u_1, \ldots, f_\mu u_\mu, k'_1 u_{\mu+1}, \ldots, k'_m u_\nu \end{pmatrix}.$$

Ce déterminant se réduit, comme nous savons, à un seul membre, qui sera A', si la permutation $u_1, \ldots, u_\nu$ est convenablement choisie. Le choix, qui donne un A' déterminé, peut être fait d'une seule manière et aux choix divers correspondent les valeurs diverses de (83). Il est clair que de cette manière, à l'aide de (91), on obtiendra toutes les valeurs de (83) dépendant du plus grand nombre possible $m = \nu - \mu$ des indices indépendants qui satisfont aux conditions (87), où $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$ parcourent toutes les permutations de la suite $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$.

On remarque encore que le signe de A' est égal au signe de a' μ fois changé.

Désignons maintenant par

$$\begin{matrix} g_1 f_1, \ldots, g_\mu f_\mu \\ i_1 h_1, \ldots, i_\mu h_\mu \end{matrix} B$$

l'opération qui consiste dans ce qu'on associe à un a' le A' correspondant, c'est-à-dire qui se définit par l'égalité symbolique

$$\begin{matrix} g_1 f_1, \ldots, g_\mu f_\mu \\ i_1 h_1, \ldots, i_\mu h_\mu \end{matrix} B[a'] = A'.$$

Alors on obtiendra la somme de toutes les valeurs non nulles de (83), correspondant à la supposition (87) où $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ sont fixes et $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$ passent par toutes les permutations de $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$, en appliquant cette opération à tous les membres du développement de (91) et en faisant la somme des résultats obtenus. Soit

$$\begin{matrix} g_1 f_1, \ldots, g_\mu f_\mu \\ i_1 h_1, \ldots, i_\mu h_\mu \end{matrix} \varDelta\begin{pmatrix} k'_1, \ldots, k'_m \\ k'_1, \ldots, k'_m \end{pmatrix} = \begin{matrix} g_1 f_1, \ldots, g_\mu f_\mu \\ i_1 h_1, \ldots, i_\mu h_\mu \end{matrix} B\left[A\begin{pmatrix} f_1, \ldots, f_\mu, k'_1, \ldots, k'_m \\ i_1, \ldots, i_\mu, k'_1, \ldots, k'_m \end{pmatrix}\right]$$

cette somme. En faisant la somme de ces quantités pour tous les arrangements $k'_1, \ldots, k'_m$, $m = \nu - \mu$, qu'on peut former de $k_1, \ldots, k_\nu$, et pour toutes les valeurs de 1 à n de $k'_1, \ldots, k'_m$ on obtient la somme de toutes les valeurs possibles de (83) à $m = \nu - \mu$ indices indépendants que nous appellerons comme plus haut partie principale de la somme

$$\sum_{r_1, \ldots, r_\nu} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \end{pmatrix}.$$

En désignant par $\sum\limits_{(k'_1, \ldots, k'_m)}$ la somme prise pour tous les arrangements $k'_1, \ldots, k'_m$, nous pouvons donc écrire

$$\sum_{(k'_1 \ldots k'_{\nu-\mu})} \sum_{k'_1, \ldots, k'_{\nu-\mu}=1}^{n} \begin{matrix} g_1 f_1, \ldots, g_\mu f_\mu \\ i_1 h_1, \ldots, i_\mu h_\mu \end{matrix} \varDelta\begin{pmatrix} k'_1, \ldots, k'_{\nu-\mu} \\ k'_1, \ldots, k'_{\nu-\mu} \end{pmatrix} =$$

$$= \text{partie princ. de } \sum_{r_1, \ldots, r_\nu} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \end{pmatrix}.$$

De là on arrive tout de suite à la conclusion

$$\lim_{n\to\infty} \delta^{\nu-\mu} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_\nu \end{pmatrix} =$$

(92)

$$= \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1) \int_a^b \begin{matrix} s_1 t_1, \ldots, s_\mu t_\mu \\ x_1 y_1, \ldots, x_\mu y_\mu \end{matrix} \varDelta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_{\nu-\mu} \\ \theta_1, \ldots, \theta_{\nu-\mu} \end{pmatrix} d\theta_1 \ldots d\theta_{\nu-\mu},$$

en remarquant que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k'_1,\ldots,k'_{\nu-\mu}=1}^{n} {}^{g_1 f_1,\ \ldots,\ g_\mu f_\mu}_{i_1 h_1,\ \ldots,\ i_\mu h_\mu} \Delta\begin{pmatrix} k'_1, \ldots, k'_{\nu-\mu} \\ k'_1, \ldots, k'_{\nu-\mu}\end{pmatrix} =$$

$$= \int\limits_a^b {}^{s_1 t_1,\ \ldots,\ s_\mu t_\mu}_{x_1 y_1,\ \ldots,\ x_\mu y_\mu} \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_{\nu-\mu} \\ \theta_1, \ldots, \theta_{\nu-\mu}\end{pmatrix} d\theta_1 \ldots d\theta_{\nu-\mu},$$

quand les points

$$x_{g_\alpha},\ x_{f_\alpha},\ x_{i_\alpha},\ x_{h_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu)$$

de la subdivision

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ b$$

de l'intervalle (a, b) tendent avec $n \to \infty$ vers

$$s_\alpha,\ t_\alpha,\ x_\alpha,\ y_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu)$$

respectivement et quand on définit la fonction

$${}^{s_1 t_1,\ \ldots,\ s_\mu t_\mu}_{x_1 y_1,\ \ldots,\ x_\mu y_\mu} \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m\end{pmatrix}$$

par l'égalité symbolique

$$(93)\quad {}^{s_1 t_1,\ \ldots,\ s_\mu t_\mu}_{x_1 y_1,\ \ldots,\ x_\mu y_\mu} \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m\end{pmatrix} = {}^{s_1 t_1,\ \ldots,\ s_\mu t_\mu}_{x_1 y_1,\ \ldots,\ x_\mu y_\mu} B\left[A\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_1, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m\end{pmatrix}\right],$$

où l'opération

$${}^{s_1 t_1,\ \ldots,\ s_\mu t_\mu}_{x_1 y_1,\ \ldots,\ x_\mu y_\mu} B$$

doit être effectuée sur tous les membres du déterminant

$$A\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_1, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m\end{pmatrix}$$

et suit les règles, qui sont claires de l'exemple suivant. Soit

$$a' = \pm (t_1 x_1)(t_2 x_3)(t_3 \theta_1)(\theta_1 x_2)(\theta_2 \theta_2)(\theta_3 \theta_4)(\theta_4 \theta_5)(\theta_5 \theta_3) \ldots$$

un membre du déterminant A développé. Alors

$$\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B[a'] = (-1)^\mu [\pm\, \varphi(s_1, t_1, x_1)\varphi(t_1, x_1, y_1) .$$
$$.\, \varphi(s_2, t_2, x_3)\varphi(t_2, x_3, y_3) .$$
$$.\, \varphi(s_3, t_3, \theta_1)\varphi(t_3, \theta_1, x_2)\varphi(\theta_1, x_2, y_2) .$$
$$.\, \varphi(\theta_2, \theta_2, \theta_2) .$$
$$.\, \varphi(\theta_3, \theta_4, \theta_5)\varphi(\theta_4, \theta_5, \theta_3)\varphi(\theta_5, \theta_3, \theta_4) .$$
$$\ldots .].$$

En calculant par ces règles

$$\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1 y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B\left[A\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\mu \\ x_1, \ldots, x_\mu \end{pmatrix}\right],$$

on apercevra tout de suite que cette quantité n'est autre chose que

$$(-1)^\mu \Phi_0 \begin{pmatrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{pmatrix}$$

défini par l'égalité (82). Donc

$$(94) \qquad (-1)^\mu \Phi_0 \begin{pmatrix} s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \\ x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \end{pmatrix} = \begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1 y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B\left[A\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\mu \\ x_1, \ldots, x_\mu \end{pmatrix}\right].$$

Nous appelons la fonction

$$\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$$

quasi déterminant d'ordre m et de classe μ.

Revenons au développement (77). D'après les égalités (77) et (92) et la remarque faite plus haut sur la limite de la somme

$$\frac{(-1)^\mu}{\mu!} \sum_{r_1, \ldots, r_\mu} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\mu \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_\mu \end{pmatrix},$$

en tenant compte de l'évanouissement des μ premiers membres du développement (77) et en introduisant les notations

$$(95) \qquad \Phi_m \begin{pmatrix} s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \\ x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \end{pmatrix} = (-1)^\mu \int_a^b \begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu y_\mu \end{matrix} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} d\theta_1 \ldots d\theta_m,$$

on parvient au résultat formel suivant:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{p_1 q_1 | \ldots | p_\mu q_\mu}}{(\lambda\delta)^{2\mu}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \Phi_m \begin{pmatrix} s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \\ x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \end{pmatrix}, \tag{96}$$

ou encore

$$D\begin{pmatrix} x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{pmatrix} \lambda \Bigg) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \Phi_m \begin{pmatrix} s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \\ x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \end{pmatrix}, \tag{97}$$

si l'on pose

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{p_1 q_1 | \ldots | p_\mu q_\mu}}{(\lambda\delta)^{2\mu}} = D\left(\begin{matrix} x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right). \tag{98}$$

La fonction

$$D\left(\begin{matrix} x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right)$$

sera dite *le mineur d'ordre* μ *de l'équation (1). C'est une fonction entière en* λ *pour* s_i, t_i, x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ *contenus dans* (a, b).

En effet, d'après le théorème de Hadamard sur la valeur absolue d'un déterminant,

$$\left| D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_{m+\mu} \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_{m+\mu} \end{pmatrix} \right| \leqq (M\sqrt{m+\mu})^{m+\mu},$$

M étant, comme toujours, la borne supérieure de $|\varphi(t, x, y)|$ dans (a, b), et, par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \text{partie princ. de} \sum_{r_1, \ldots, r_{m+\mu}} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_{m+\mu} \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_{m+\mu} \end{pmatrix} \right|$$

$$\leqq (M\sqrt{m+\mu})^{m+\mu}(b-a)^m.$$

On achève la démonstration, en comparant la série considérée à une série dont le terme général est

$$a_m = \frac{|\lambda|^m (M\sqrt{m+\mu})^{m+\mu}(b-a)^m}{m!}$$

et en remarquant que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = 0$$

pour tout λ fini.

9. *Développement d'un quasi déterminant d'ordre m et de classe μ.* Il est très important pour la théorie des équations intégrales transgressives à deux variables d'obtenir les relations fonctionnelles qui lient leurs mineurs d'ordre quelconque. Pour ce but nous établirons d'abord une formule de développement des quasi déterminants qui étaient introduits dans le numéro précédent.

Nous partirons du développement du déterminant

$$A\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_1, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$$

suivant les éléments de la première ligne en mettant ce développement sous la forme

$$A\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_1, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} (t_1 x_i) A\begin{pmatrix} t_2, \ldots, t_i \quad, t_{i+1}, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} (t_1 \theta_j) A\begin{pmatrix} \theta_j, \; t_2, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}$$

et de la relation (93), qui, appliquée à cette égalité, nous donne

$$\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \varDelta \begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} =$$

$$(99) \quad = \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B\left[(t_1\, x_i) A\begin{pmatrix} t_2, \ldots, t_i \quad, t_{i+1}, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} \right]$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B\left[(t_1\, \theta_j) A\begin{pmatrix} \theta_j, \; t_2, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} \right].$$

Prenons un membre quelconque du développement de

$$(t_1\, x_i) A\begin{pmatrix} t_2, \ldots, t_i \quad, t_{i+1}, \ldots, t_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix},$$

soit

$$A' = \pm\, (t_1\, x_i)(t_2\, u_2) \ldots (t_\mu u_\mu)(\theta_1 u_{\mu+1}) \ldots (\theta_m u_{\mu+m}),$$

où $u_2, \ldots, u_{\mu+m}$ désigne une permutation de

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m$$

et appliquons-lui l'opération $\begin{smallmatrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{smallmatrix} B$; il vient:

$$\begin{aligned}
&\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B[A'] = D\begin{pmatrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu, t_1 x_i, t_2 u_2, \ldots, \theta_m u_{\mu+m} \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu, t_1 x_i, t_2 u_2, \ldots, \theta_m u_{\mu+m} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{\mu+\mu-1} \varphi(s_1, t_1, x_i) \varphi(t_1, x_i, y_i)\, D\begin{pmatrix} s_2\, t_2, \ldots, s_i \quad t_i \quad, s_{i+1}\, t_{i+1}, \ldots, s_\mu\, t_\mu, t_2 u_2, \ldots \\ x_1\, y_1, \ldots, x_{i-1} y_{i-1}, x_{i+1}\, y_{i+1}, \ldots, x_\mu\, y_\mu, t_2 u_2, \ldots \end{pmatrix} \\
&= -\varphi(s_1, t_1, x_i) \varphi(t_1, x_i, y_i) \cdot \begin{matrix} s_2\, t_2, \ldots, s_i \quad t_i \quad, s_{i+1}, t_{i+1}, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_{i-1} y_{i-1}, x_{i+1}, y_{i+1}, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B[\pm (t_2 u_2) \ldots].
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
&\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B\left[(t_1 x_i)\, A\begin{pmatrix} t_2, \ldots \\ x_1, \ldots \end{pmatrix}\right] \\
&= -\varphi_0(s_1, t_1, x_i, y_i) \cdot \begin{matrix} s_2\, t_2, \ldots, s_i \quad t_i \quad, s_{i+1}, t_{i+1}, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_{i-1} y_{i-1}, x_{i+1}, y_{i+1}, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De la même manière on établit la formule

$$\begin{aligned}
&\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B\left[(t_1 \theta_j)\, A\begin{pmatrix} \theta_j, t_2, \ldots \\ x_1, x_2, \ldots \end{pmatrix}\right] \\
&= \varphi(s_1, t_1, \theta_j) \cdot \begin{matrix} t_1 \theta_j, s_2\, t_2, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En substituant ces deux résultats dans (99), on trouve le développement cherché du quasi déterminant d'ordre m et de classe μ:

$$\begin{aligned}
&\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^i \varphi_0(s_1, t_1, x_i, y_i) \cdot \\
(100)\qquad &\quad \cdot \begin{matrix} s_2\, t_2, \ldots, s_i \quad t_i \quad, s_{i+1}\, t_{i+1}, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1 y_1, \ldots, x_{i-1}\, y_{i-1}, x_{i+1}\, y_{i+1}, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} \\
&- \sum_{j=i}^{m} \varphi(s_1, t_1, \theta_j) \cdot \begin{matrix} t_1\, \theta_j, s_2\, t_2, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, x_2\, y_2, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si l'on développe le même déterminant A suivant les éléments de la première colonne et qu'on applique à lui ainsi qu'à son développement la même opération ${}^{s_1\, t_1,\, \ldots,\, s_\mu\, t_\mu}_{x_1\, y_1,\, \ldots,\, x_\mu\, y_\mu} B$, on obtiendra un second développement de notre quasi déterminant:

$$
{}^{s_1\, t_1,\, \ldots,\, s_\mu\, t_\mu}_{x_1\, y_1,\, \ldots,\, x_\mu\, y_\mu} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} =
$$

$$
(100') \qquad = \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^i \varphi(s_i, t_i, x_1, y_1) \cdot {}^{s_1\, t_1,\, \ldots,\, s_{i-1}\, t_{i-1},\, s_{i+1}\, t_{i+1},\, \ldots,\, s_\mu\, t_\mu}_{x_2\, y_2,\, \ldots,\, x_i \quad y_i \quad,\, x_{i+1} y_{i+1},\, \ldots,\, x_\mu\, y_\mu} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}
$$

$$
- \sum_{j=1}^{m} \varphi(\theta_j, x_1, y_1) \cdot {}^{s_1\, t_1,\, s_2\, t_2,\, \ldots,\, s_\mu\, t_\mu}_{\theta_j\, x_1,\, x_2\, y_2,\, \ldots\, x_\mu\, y_\mu} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}.
$$

Les formules (100) et (100′) nous montrent que le calcul d'un quasi déterminant d'ordre m et de classe μ se ramène au calcul de quasi déterminants d'ordre m et de classe $\mu - 1$ et de quasi déterminants d'ordre $m - 1$ et de classe μ. Par conséquent, pour achever le calcul, on doit savoir calculer les quasi déterminants tels que

$$
{}^{s_1\, t_1}_{x_1\, y_1} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^{s_1\, t_1,\, \ldots,\, s_\mu\, t_\mu}_{x_1\, y_1,\, \ldots,\, x_\mu\, y_\mu} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}.
$$

Mais nous avons déjà considéré les déterminants de la première espèce et nous savons les calculer (n° 6). Considérons donc les quasi déterminants de la seconde espèce.

Pour avoir

$$
{}^{s_1\, t_1,\, \ldots,\, s_\mu\, t_\mu}_{x_1\, y_1,\, \ldots,\, x_\mu\, y_\mu} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},
$$

on doit, d'après la règle générale, calculer

$$
{}^{s_1\, t_1,\, \ldots,\, s_\mu\, t_\mu}_{x_1\, y_1,\, \ldots,\, x_\mu\, y_\mu} B \left[A \begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\mu, \theta_1 \\ x_1, \ldots, x_\mu, \theta_1 \end{pmatrix} \right].
$$

Or, en procédant comme dans le ca général, on trouve sans peine

$$\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^i \varphi_0(s_1, t_1, x_i, y_i) \cdot \begin{matrix} s_2\, t_2, \ldots, s_i \quad t_i \quad, s_{i+1}\, t_{i+1}, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_{i-1} y_{i-1}, x_{i+1}\, y_{i+1}, \ldots, x_\mu y_\mu \end{matrix} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$- \varphi(s_1, t_1, \theta_1) \cdot \begin{matrix} t_1\, \theta_1, s_2\, t_2, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1 y_1, x_2\, y_2, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B \left[A \begin{pmatrix} \theta_1, & t_2, & \ldots, & t_\mu \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_\mu \end{pmatrix} \right],$$

ou, en s'appuyant sur la relation (94),

$$\begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$(101) \quad = \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^i \varphi_0(s_1, t_1, x_i, y_i) \cdot \begin{matrix} s_2\, t_2, \ldots, s_i \quad t_i \quad, s_{i+1}\, t_{i+1}, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_{i-1} y_{i-1}, x_{i+1}\, y_{i+1}, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{\mu-1} \varphi(s_1, t_1, \theta_1)\, \Phi_0 \begin{pmatrix} t_1, \theta_1; & s_2, t_2; & \ldots; & s_\mu, t_\mu \\ x_1, y_1; & x_2, y_2; & \ldots; & x_\mu, y_\mu \end{pmatrix}.$$

On peut encore appliquer le même procédé au calcul de la fonction

$$\Phi_0 \begin{pmatrix} s_1 & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix}.$$

En effet, on obtient sans difficulté

$$\Phi_0 \begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} = (-1)^\mu \begin{matrix} s_1\, t_1, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B \left[A \begin{pmatrix} t_1, & \ldots, & t_\mu \\ x_1, & \ldots, & x_\mu \end{pmatrix} \right]$$

$$= (-1)^\mu \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^i \varphi_0(s_1, t_1, x_i, y_i) \cdot$$

$$\begin{matrix} s_2\, t_2, \ldots, s_i \quad t_i \quad, s_{i+1}\, t_{i+1}, \ldots, s_\mu\, t_\mu \\ x_1\, y_1, \ldots, x_{i-1} y_{i-1}, x_{i+1}\, y_{i+1}, \ldots, x_\mu\, y_\mu \end{matrix} B \left[A \begin{pmatrix} t_2, & \ldots, & t_i \quad, & t_{i+1}, & \ldots, & t_\mu \\ x_1, & \ldots, & x_{i-1}, & x_{i+1}, & \ldots, & x_\mu \end{pmatrix} \right],$$

d'où la formule récurrente

$$(102) \quad \begin{aligned} &\Phi_0 \begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^{\mu} (-1)^{i-1} \varphi_0(s_1, t_1, x_i, y_i)\, \Phi_0 \begin{pmatrix} s_2, t_2; & \ldots; & s_i \quad, t_i \quad; & s_{i+1}, t_{i+1}; & \ldots; & s_\mu, t_\mu \\ x_1, y_1; & \ldots; & x_{i-1}, y_{i-1}; & x_{i+1}, y_{i+1}; & \ldots; & x_\mu, y_\mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui, jointe à la formule déjà établie plus haut,

$$\Phi_0\begin{pmatrix} s, & t \\ x, & y \end{pmatrix} = \varphi_0(s, t, x, y) = \varphi(s, t, x)\,\varphi(t, x, y),$$

permet d'achever le calcul de $\Phi_0\begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix}$.

10. *Formules récurrentes pour* $\Phi_m\begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix}$ *et relations fonctionnelles pour* $D\left(\begin{matrix} x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \\ s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \end{matrix} \,\Big|\, \lambda\right)$. Nous établirons maintenant quelques relations utiles.

Si l'on intègre les relations (100) et (100′) par rapport à $\theta_1, \ldots, \theta_m$ entre les limites a et b et si l'on tient compte des égalités (95), on obtiendra les formules récurrentes

$$\begin{aligned} &\Phi_m\begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \varphi_0(s_1, t_1, x_i, y_i)\, \Phi_m\begin{pmatrix} s_2, & t_2; & \ldots; & s_i & , t_i & ; s_{i+1}, & t_{i+1}; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_{i-1}, & y_{i-1}; & x_{i+1}, & y_{i+1}; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} \\ &\quad - m \int_a^b \varphi(s_1, t_1, \theta)\, \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} t_1, & \theta; & s_2, & t_2; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & x_2, & y_2; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} d\theta, \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_m\begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \varphi_0(s_i, t_i, x_1, y_1)\, \Phi_m\begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_{i-1}, & t_{i-1}; & s_{i+1}, & t_{i+1}; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_2, & y_2; & \ldots; & x_i & , y_i & ; x_{i+1}, & y_{i+1}; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} \\ &\quad - m \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} s_1, & t_1; & s_2, & t_2; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ \theta, & x_1; & x_2, & y_2; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix} \varphi(\theta, x_1, y_1)\, d\theta. \end{aligned} \tag{103'}$$

Ces formules et les formules (63), (63′) pour $\Phi_m\begin{pmatrix} s, & t \\ x, & y \end{pmatrix}$ et (82) ou (102) pour $\Phi_0\begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix}$ donnent le moyen de calculer $\Phi_m\begin{pmatrix} s_1, & t_1; & \ldots; & s_\mu, & t_\mu \\ x_1, & y_1; & \ldots; & x_\mu, & y_\mu \end{pmatrix}$ de proche en proche.

19 — 3298. *Acta mathematica.* 59. Imprimé le 4 mai 1932.

Mais l'importance des relations (103) et (103′) est encore plus grande, car elles nous permettent d'établir les équations fonctionnelles auxquelles satisfont les mineurs d'ordre quelconque de l'équation (1).

En effet, multiplions les deux côtés de (103) et de (103′) par $\frac{(-\lambda)^m}{m!}$ et sommons ensuite pour $m = 0, 1, 2, \ldots$: l'égalité (97), définissant $D\begin{pmatrix} x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{pmatrix}\lambda\Big)$, nous conduira tout de suite aux relations cherchées:

(104) $$D\left(\begin{matrix} x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \varphi_0(s_1, t_1, x_i, y_i)\, D\left(\begin{matrix} x_1, y_1; \ldots; x_{i-1}, y_{i-1}; x_{i+1}, y_{i+1}; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_2, t_2; \ldots; s_i\ \ , t_i\ \ ; s_{i+1}, t_{i+1}; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right)$$

$$+ \lambda \int_a^b \varphi(s_1, t_1, \theta)\, D\left(\begin{matrix} x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ t_1, \theta\ ; s_2, t_2; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right) d\theta,$$

(104′) $$D\left(\begin{matrix} x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \varphi_0(s_i, t_i, x_1, y_1)\, D\left(\begin{matrix} x_2, y_2; \ldots; x_i\ \ , y_i\ \ ; x_{i+1}, y_{i+1}; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; \ldots; s_{i-1}, t_{i-1}; s_{i+1}, t_{i+1}, \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right)$$

$$+ \lambda \int_a^b D\left(\begin{matrix} \theta, x_1; x_2, y_2; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; s_2, t_2; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right) \varphi(\theta, x_1, y_1)\, d\theta.$$

Il faut encore remarquer les propriétés simples suivantes des fonctions que nous considérons ici.

Théorème 3. *Si l'on change de place deux paires d'arguments de la première ou de la seconde ligne, les fonctions*

$$\Phi_m\begin{pmatrix} s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \\ x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D\left(\begin{matrix} x_1, y_1; \ldots; x_\mu, y_\mu \\ s_1, t_1; \ldots; s_\mu, t_\mu \end{matrix} \middle| \lambda\right)$$

changent de signe en conservant la même valeur absolue. Si l'on change de place deux paires d'argument simultanément haut et bas, ces fonctions ne changent ni de signe ni de valeur.

Pour la première des fonctions considérées ces propriétés découlent facilement de sa définition [n° 8, (95) et (93)] et pour la seconde de l'égalité (97).

Nous finissons ce numéro par la recherche de la liaison entre les dérivées de divers ordres de $D(\lambda)$ et les mineurs de l'équation (1). On sait que, dans la théorie des équations de Fredholm, une liaison analogue joue un rôle fondamental. On verra qu'elle est également importante pour notre théorie.

Nous établirons une relation entre $D'(\lambda)$ et $D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix} \lambda\Big)$ au moyen de l'égalité

$$A_{m+1} = A_1 A_m - m \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} x, y \\ x, y \end{pmatrix} dx\, dy.$$

En effet, en la multipliant par $\frac{(-\lambda)^m}{m!}$ et en sommant ensuite pour $m = 0, 1, 2, \ldots$, on obtient tout de suite

$$(105) \qquad - D'(\lambda) = A_1 D(\lambda) + \lambda \int_a^b D\begin{pmatrix} x, y \\ x, y \end{pmatrix} \lambda\Big) dx\, dy.$$

Pour avoir une relation analogue pour la seconde dérivée de $D(\lambda)$, $D''(\lambda)$, nous partirons du développement du déterminant

$$(106) \qquad A\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \\ x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \end{pmatrix}$$

suivant les déterminants du second ordre formés par les éléments des deux premières lignes et du procédé de formation du déterminant

$$\Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \\ x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \end{pmatrix}$$

au moyen de (106) et de l'opération B.

Le théorème de Laplace sur les déterminants nous donne

$$A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{m+2} \\ x_1, \ldots, x_{m+2} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_3, \ldots, x_{m+2} \\ x_3, \ldots, x_{m+2} \end{pmatrix}$$
$$- \sum_{i=3}^{m+2} A\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_i \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_i, x_3, \ldots, x_{m+2} \\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+2} \end{pmatrix} -$$

$$-\sum_{i=3}^{m+2} A\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_i, & x_2\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_i, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_1, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i,\,h>i} A\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_i, & x_h\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix},$$

d'où, en appliquant l'opération B aux deux parties de cette égalité,

$$\Delta\begin{pmatrix}x_1, \ldots, x_{m+2}\\ x_1, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix} = B\left[A\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_1, & x_2\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right]$$

$$(107)\qquad -\sum_{i=3}^{m+2} B\left[A\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_1, & x_i\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_i, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right]$$

$$-\sum_{i=3}^{m+2} B\left[A\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_i, & x_2\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_i, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_1, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right]$$

$$+\sum_{i,\,h>i} B\left[A\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_i, & x_h\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right].$$

Considérons un à un les membres de la partie droite de cette égalité. On voit immédiatement que

$$(108)\qquad B\left[A\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_1, & x_2\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right] = \Delta\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_1, & x_2\end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix}x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}.$$

Nous avons ensuite

$$B\left[A\begin{pmatrix}x_1, & x_2\\ x_1, & x_i\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_i, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right] =$$

$$= B\left[(x_1 x_1)(x_2 x_i) A\begin{pmatrix}x_i, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right]$$

$$(109)\qquad - B\left[(x_1 x_i)(x_2 x_1) A\begin{pmatrix}x_i, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right]$$

$$= -\varphi(x_1, x_1, x_1)\cdot \frac{x_2,\ x_i}{x_2,\ x_i} B\left[A\begin{pmatrix}x_i, x_3, \ldots, x_{m+1}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right]$$

$$+\varphi(x_2, x_1, x_i)\cdot \frac{x_1\, x_i}{x_2\, x_1} B\left[A\begin{pmatrix}x_i, x_3, \ldots, x_{m+2}\\ x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right] =$$

$$(109)\qquad \begin{aligned} &= -\varphi(x_1, x_1, x_1)\cdot \frac{x_2\, x_i}{x_2\, x_i}\varDelta\begin{pmatrix} x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+2} \\ x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix} \\ &+ \varphi(x_2, x_1, x_i)\cdot \frac{x_1\, x_i}{x_2\, x_1}\varDelta\begin{pmatrix} x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+2} \\ x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De même,

$$B\left[A\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_i, x_2\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_i, x_3, \ldots, x_{m+2} \\ x_1, x_3, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}\right]$$

$$(110)\qquad \begin{aligned} &= -\varphi(x_2, x_2, x_2)\cdot \frac{x_1\, x_i}{x_1\, x_i}\varDelta\begin{pmatrix} x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+2} \\ x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix} \\ &+ \varphi(x_1, x_2, x_i)\cdot \frac{x_2\, x_i}{x_1\, x_2}\varDelta\begin{pmatrix} x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+2} \\ x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a utilisé ici les relations

$$\begin{aligned} B\left[(x_1\, x_1)(x_1\, x_i)\, A\begin{pmatrix} x_i, x_3, \ldots \\ x_2, x_3, \ldots\end{pmatrix}\right] &= \varphi(x_1, x_1, x_1)\, B\left[(x_2\, x_i)\, A\begin{pmatrix} x_i, x_3, \ldots \\ x_2, x_3, \ldots\end{pmatrix}\right] \\ &= -\varphi(x_1, x_1, x_1)\cdot \frac{x_2\, x_i}{x_2\, x_i} B\left[A\begin{pmatrix} x_i, x_3, \ldots \\ x_2, x_3, \ldots\end{pmatrix}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B&\left[(x_2\, x_1)(x_1\, x_i)\, A\begin{pmatrix} x_i, x_3, \ldots \\ x_2, x_3, \ldots\end{pmatrix}\right] \\ &= -\varphi(x_2, x_1, x_i)\cdot \frac{x_1\, x_i}{x_2\, x_1} B\left[A\begin{pmatrix} x_i, x_3, \ldots \\ x_2, x_2, \ldots\end{pmatrix}\right], \end{aligned}$$

qui s'obtiennent, si l'on écrit les membres générals des parties gauches et les compare avec les membres correspondants des parties droites. Ces relations peuvent être généralisées comme il suit:

$$(111)\qquad \begin{aligned} B&\Bigg[(x_1\, x_2)(x_2\, x_3)\ldots(x_\lambda\, x_1)(x_{\lambda+1}\, x_{i_1})(x_{\lambda+2}\, x_{i_2})\ldots(x_{\lambda+\mu}\, x_{i_\mu})\cdot \\ &\cdot A\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\mu}, x_{\lambda+\mu+1}, \ldots \\ x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \ldots, x_{\lambda+\mu}, x_{\lambda+\mu+1}, \ldots\end{pmatrix}\Bigg] = \\ &= (-1)^\mu \varphi(x_1, x_2, x_3)\,\varphi(x_2, x_3, x_4)\ldots\varphi(x_\lambda, x_1, x_2)\cdot \\ &\cdot \frac{x_{\lambda+1}\, x_{i_1}, \ldots, x_{\lambda+\mu}\, x_{i_\mu}}{x_{\lambda+1}\, x_{i_1}, \ldots, x_{\lambda+\mu}\, x_{i_\mu}} B\left[A\begin{pmatrix} x_{i_1}, \ldots, x_{i_\mu}, x_{\lambda+\mu+1}, \ldots \\ x_{\lambda+1}, \ldots, x_{\lambda+\mu}, x_{\lambda+\mu+1}, \ldots\end{pmatrix}\right]; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(112)\qquad & B\Big[(x_{\alpha_1}x_{\alpha_2})(x_{\alpha_2}x_{\alpha_3})\ldots(x_{\alpha_a}x_{i_1})\cdot \\
& \cdot(x_{\beta_1}x_{\beta_2})(x_{\beta_2}x_{\beta_3})\ldots x_{\beta_b}x_{i_2})\cdot \\
& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& \cdot(x_{\lambda_1}x_{\lambda_2})(x_{\lambda_2}x_{\lambda_3})\ldots(x_{\lambda_l}x_{i_\mu})\cdot \\
& \cdot A\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\mu}, x'_1, x'_2, \ldots \\ x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\lambda_1}, x'_1, x'_2, \ldots \end{pmatrix}\Big] = \\
& = (-1)^\mu \varphi(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3})\varphi(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, x_{\alpha_4})\ldots\varphi(x_{\alpha_a}, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})\cdot \\
& \quad\cdot\varphi(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, x_{\beta_3})\varphi(x_{\beta_2}, x_{\beta_3}, x_{\beta_4})\ldots\varphi(x_{\beta_b}, x_{\beta_1}, x_{\beta_2})\cdot \\
& \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& \quad\cdot\varphi(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, x_{\lambda_3})\varphi(x_{\lambda_2}, x_{\lambda_3}, x_{\lambda_4})\ldots\varphi(x_{\lambda_l}, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})\cdot \\
& \quad\cdot\frac{x_{\alpha_a}x_{i_1}, x_{\beta_b}x_{i_2}, \ldots, x_{\lambda_l}x_{i_\mu}}{x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}, x_{\beta_1}x_{\beta_2}, \ldots, x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}} B\Big[A\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\mu}, x'_1, x'_2, \ldots \\ x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\lambda_1}, x'_1, x'_2, \ldots \end{pmatrix}\Big].
\end{aligned}
$$

Ces relations se prouvent de la même manière que dans les cas spéciaux précédents.

Enfin, moyennant (111),

$$
\begin{aligned}
& B\Big[A\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_i, x_h \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_i, x_h, x_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_2, \ldots \end{pmatrix}\Big] \\
& \qquad = B\Big[(x_1x_i)(x_2x_h)A\begin{pmatrix} x_i, x_h, x_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{pmatrix}\Big] \\
& \qquad - B\Big[(x_1x_h)(x_2x_i)A\begin{pmatrix} x_i, x_h, x_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{pmatrix}\Big] \\
(113)\qquad & \qquad = \frac{x_1x_i,\ x_2x_h}{x_1x_i,\ x_2x_h} B\Big[A\begin{pmatrix} x_i, x_h, x_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{pmatrix}\Big] \\
& \qquad - \frac{x_1x_h,\ x_2x_i}{x_1x_h,\ x_2x_i} B\Big[A\begin{pmatrix} x_i, x_h, x_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{pmatrix}\Big] \\
& \qquad = \frac{x_1x_i,\ x_2x_h}{x_1x_i,\ x_2x_h} B\Big[A\begin{pmatrix} x_i, x_h, x_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{pmatrix}\Big] \\
& \qquad + \frac{x_2x_i,\ x_1x_h}{x_2x_i,\ x_1x_h} B\Big[A\begin{pmatrix} x_i, x_h, x_3, \ldots \\ x_2, x_1, x_3, \ldots \end{pmatrix}\Big]
\end{aligned}
$$

$$(113)\qquad = \frac{x_1\, x_i,\ x_2\, x_h}{x_1\, x_i,\ x_2\, x_h}\,\Delta\begin{pmatrix}x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_{m+2}\\ x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{x_2\, x_i,\ x_1\, x_h}{x_2\, x_i,\ x_1\, x_h}\,\Delta\begin{pmatrix}x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_{m+2}\\ x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}.$$

Substituons (108), (109), (110) et (113) dans la partie droite de (107) et nous obtiendrons un développement de

$$\Delta\begin{pmatrix}x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}\\ x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}\end{pmatrix}$$

qu'on doit intégrer par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}$ entre les limites a et b, pour avoir une relation, qui lie A_{m+2} avec A_m et les fonctions Φ. De cette manière on trouve sans difficulté, ayant égard à la définition des fonctions Φ:

$$A_{m+2} = A_2\, A_m - 2\, m\, A_1 \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix}x, y\\ x, y\end{pmatrix} dx\, dy$$

$$+ 2\, m \int_a^b \varphi(x, y, t)\, \Phi_{m-1}\begin{pmatrix}y, & t\\ x, & y\end{pmatrix} dx\, dy\, dt$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \int_a^b \left[\Phi_{m-2}\begin{pmatrix}x, y; u, v\\ x, y; u, v\end{pmatrix} + \Phi_{m-2}\begin{pmatrix}u, y; x, v\\ u, y; x, v\end{pmatrix}\right] dx\, dy\, du\, dv$$

$$= A_2\, A_m - 2\, m\, A_1 \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix}x, y\\ x, y\end{pmatrix} dx\, dy$$

$$+ 2\, m \int_a^b \varphi(x, y, t)\, \Phi_{m-1}\begin{pmatrix}y, & t\\ x, & y\end{pmatrix} dx\, dy\, dt$$

$$+ m(m-1) \int_a^b \Phi_{m-2}\begin{pmatrix}x, y; u, v\\ x, y; u, v\end{pmatrix} dx\, dy\, du\, dv.$$

Multiplions cette égalité de deux côtés par $\frac{(-\lambda)^m}{m!}$ et faisons la somme pour $m = 0, 1, 2, \ldots$: nous trouverons

$$D''(\lambda)=A_2\,D(\lambda)+2\,A_1\lambda\int\limits_a^b D\binom{x,\,y}{x,\,y}\Big|\,\lambda\Big)\,dx\,dy \tag{114}$$

$$-\,2\,\lambda\int\limits_a^b \varphi(x,\,y,\,t)\,D\Big(\begin{matrix}x,\,y\\y,\,t\end{matrix}\Big|\,\lambda\Big)\,dx\,dy\,dt$$

$$+\,\lambda^2\int\limits_a^b D\Big(\begin{matrix}x,\,y;\,u,\,v\\x,\,y;\,u,\,v\end{matrix}\Big|\,\lambda\Big)\,dx\,dy\,du\,dv.$$

Trouvons encore $D'''(\lambda)$.

On a, en utilisant le théorème de Laplace,

$$\varDelta\begin{pmatrix}x_1,\,\ldots,\,x_{m+3}\\x_1,\,\ldots,\,x_{m+3}\end{pmatrix}=B\left[A\begin{pmatrix}x_1,\,\ldots,\,x_{m+3}\\x_1,\,\ldots,\,x_{m+3}\end{pmatrix}\right]$$

$$=B\left[A\begin{pmatrix}x_1,\,x_2,\,x_3\\x_1,\,x_2,\,x_3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_4,\,\ldots,\,x_{m+3}\\x_4,\,\ldots,\,x_{m+3}\end{pmatrix}\right]$$

$$-\,S_1\sum_{i=4}^{m}B\left[A\begin{pmatrix}x_1,\,x_2,\,x_3\\x_1,\,x_2,\,x_i\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_i,\,x_4,\,\ldots\\x_3,\,x_4,\,\ldots\end{pmatrix}\right] \tag{115}$$

$$+\,S_2\sum_{i,\,h>i}B\left[A\begin{pmatrix}x_1,\,x_2,\,x_3\\x_1,\,x_i,\,x_h\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_i,\,x_h,\,x_4,\,\ldots\\x_2,\,x_3,\,x_4,\,\ldots\end{pmatrix}\right]$$

$$-\sum_{i,\,h>i,\,g>h}B\left[A\begin{pmatrix}x_1,\,x_2,\,x_3\\x_i,\,x_h,\,x_g\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_i,\,x_h,\,x_g,\,x_4,\,\ldots\\x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,\ldots\end{pmatrix}\right]$$

les signes S_1, S_2 indiquant les sommes des membres analogues à ceux qui se trouvent sous ces signes. Ensuite, en tenant compte de (111) et (112),

$$B\left[A\begin{pmatrix}x_1,\,x_2,\,x_3\\x_1,\,x_2,\,x_3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_4,\,\ldots\\x_4,\,\ldots\end{pmatrix}\right]=\varDelta\begin{pmatrix}x_1,\,x_2,\,x_3\\x_1,\,x_2,\,x_3\end{pmatrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_4,\,\ldots,\,x_{m+3}\\x_4,\,\ldots,\,x_{m+3}\end{pmatrix};$$

$$B\left[A\begin{pmatrix}x_1,\,x_2,\,x_3\\x_1,\,x_2,\,x_i\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_i,\,x_4,\,\ldots\\x_3,\,x_4,\,\ldots\end{pmatrix}\right]=$$

$$=B[x_1\,x_1)\,(x_2\,x_2)\,(x_3\,x_i)\,A-(x_1\,x_1)\,(x_2\,x_i)\,(x_3\,x_2)\,A+\cdots]$$

$$= -\varDelta\begin{pmatrix}x_1, x_2\\ x_1, x_2\end{pmatrix}\cdot \begin{matrix}x_3\ x_i\\ x_3\ x_i\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_4, \ldots, x_{m+3}\\ x_4, \ldots, x_{m+3}\end{pmatrix}$$

$$+ \varphi(x_1, x_1, x_1)\,\varphi(x_3, x_2, x_i)\cdot \begin{matrix}x_2\ x_i\\ x_3\ x_2\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_4, \ldots\\ x_4, \ldots\end{pmatrix}$$

$$- \varphi(x_3, x_1, x_2)\,\varphi(x_1, x_2, x_i)\cdot \begin{matrix}x_2\ x_i\\ x_3\ x_1\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_4, \ldots\\ x_4, \ldots\end{pmatrix}$$

$$+ \varphi(x_2, x_2, x_2)\,\varphi(x_3, x_1, x_i)\cdot \begin{matrix}x_1\ x_i\\ x_3\ x_1\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_4, \ldots\\ x_4, \ldots\end{pmatrix}$$

$$- \varphi(x_3, x_2, x_1)\,\varphi(x_2, x_1, x_i)\cdot \begin{matrix}x_1\ x_i\\ x_3\ x_2\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_4, \ldots\\ x_4, \ldots\end{pmatrix};$$

$$B\left[A\begin{pmatrix}x_1, x_2, x_3\\ x_1, x_i, x_h\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_4, \ldots\\ x_2, x_3, x_4, \ldots\end{pmatrix}\right] =$$

$$= B[(x_1\,x_1)(x_2\,x_i)(x_3\,x_h)\,A - (x_1\,x_1)(x_3\,x_i)(x_2\,x_h)\,A + \cdots]$$

$$= \varphi(x_1, x_1, x_1)\left[\begin{matrix}x_2\,x_i, x_3\,x_h\\ x_2\,x_i, x_3\,x_h\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_4, \ldots\\ x_2, x_3, x_4, \ldots\end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{matrix}x_3\,x_i, x_2\,x_h\\ x_3\,x_i, x_2\,x_h\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_4, \ldots\\ x_3, x_2, x_4, \ldots\end{pmatrix}\right]$$

$$- \varphi(x_2, x_1, x_i)\cdot \begin{matrix}x_1\,x_i, x_3\,x_h\\ x_2\,x_1, x_3\,x_h\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_4, \ldots\\ x_2, x_3, x_4, \ldots\end{pmatrix}$$

$$- \varphi(x_3, x_1, x_i)\cdot \begin{matrix}x_1\,x_i, x_2\,x_h\\ x_3\,x_1, x_2\,x_h\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_4, \ldots\\ x_3, x_2, x_4, \ldots\end{pmatrix}$$

$$- \varphi(x_2, x_1, x_h)\cdot \begin{matrix}x_3\,x_i, x_1\,x_h\\ x_3\,x_i, x_2\,x_1\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_4, \ldots\\ x_3, x_2, x_4, \ldots\end{pmatrix}$$

$$- \varphi(x_3, x_1, x_h)\cdot \begin{matrix}x_2\,x_i, x_3\,x_h\\ x_2\,x_i, x_3\,x_1\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_4, \ldots\\ x_2, x_3, x_4, \ldots\end{pmatrix};$$

$$B\left[A\begin{pmatrix}x_1, x_2, x_3\\ x_i, x_h, x_g\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_i, x_h, x_g, x_4, \ldots\\ x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{matrix}x_1\,x_i, x_2\,x_h, x_3\,x_g\\ x_1\,x_i, x_2\,x_h, x_3\,x_g\end{matrix}\varDelta\begin{pmatrix}x_4, \ldots, x_{m+3}\\ x_4, \ldots, x_{m+3}\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{x_1 x_i,\ x_3 x_h,\ x_2 x_g}{x_1 x_i,\ x_3 x_h,\ x_2 x_g} \varDelta\begin{pmatrix} x_4, \ldots \\ x_4, \ldots \end{pmatrix} + \frac{x_2 x_i,\ x_1 x_h,\ x_3 x_g}{x_2 x_i,\ x_1 x_h,\ x_3 x_g} \varDelta\begin{pmatrix} x_4, \ldots \\ x_4, \ldots \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

En substituant ces résultats et tous ceux qui leurs sont analogues dans la partie droite de l'égalité (115), puis en intégrant les deux côtés par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{m+3}$ entre les limites a et b on obtient sans difficulté

$$\begin{aligned} A_{m+3} = A_3 A_m - 3\, m A_2 \int_a^b \varPhi_{m-1} \begin{pmatrix} x, y \\ x, y \end{pmatrix} dx\, dy \\ + 6\, m A_1 \int_a^b \varphi(x, y, s)\, \varPhi_{m-1} \begin{pmatrix} y, s \\ x, y \end{pmatrix} dx\, dy\, ds \\ - 6\, m \int_a^b \varphi(x, y, s)\, \varphi(y, s, t)\, \varPhi_{m-1} \begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} dx\, dy\, ds\, dt \\ + 3\, m(m-1) A_1 \int_a^b \varPhi_{m-2} \begin{pmatrix} x, y;\ s, t \\ x, y;\ s, t \end{pmatrix} dx\, dy\, ds\, dt \\ - 6\, m(m-1) \int_a^b \varphi(x, y, s)\, \varPhi_{m-2} \begin{pmatrix} y, s;\ u, v \\ x, y;\ u, v \end{pmatrix} dx\, dy\, ds\, du\, dv \\ - m(m-1)(m-2) \int_a^b \varPhi_{m-3} \begin{pmatrix} x, y;\ s, t;\ u, v \\ x, y;\ s, t;\ u, v \end{pmatrix} dx\, dy\, ds\, dt\, du\, dv. \end{aligned}$$

En multipliant cette relation par $\frac{(-\lambda)^m}{m!}$ et en sommant pour $m=0, 1, 2, \ldots$, on trouve

$$(116)\quad \begin{aligned} - D'''(\lambda) = A_3 D(\lambda) + 3\, A_2 \lambda \int_a^b D\begin{pmatrix} x, y \\ x, y \end{pmatrix}\lambda\Big) dx\, dy\, - \\ - 6\, A_1 \lambda \int_a^b \varphi(x, y, s)\, D\begin{pmatrix} x, y \\ y, s \end{pmatrix}\lambda\Big) dx\, dy\, ds \end{aligned}$$

$$+ 6\lambda \int_a^b \varphi(x, y, s)\varphi(y, s, t) D\begin{pmatrix} x, y \\ s; t \end{pmatrix} \lambda\Big) dx\,dy\,ds\,dt$$

(116) $$+ 3 A_1 \lambda^2 \int_a^b D\begin{pmatrix} x, y; s, t \\ x, y; s, t \end{pmatrix} \lambda\Big) dx\,dy\,ds\,dt$$

$$- 6\lambda^2 \int_a^b \varphi(x, y, s) D\begin{pmatrix} x, y; u, v \\ y, s; u, v \end{pmatrix} \lambda\Big) dx\,dy\,ds\,du\,dv$$

$$+ \lambda^3 \int_a^b D\begin{pmatrix} x, y; s, t; u, v \\ x, y; s, t; u, v \end{pmatrix} \lambda\Big) dx\,dy\,ds\,dt\,du\,dv.$$

Enfin, pour k entier positif quelconque, en partant de l'égalité

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{m+k} \\ x_1, \ldots, x_{m+k} \end{pmatrix} = B\left[A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{m+k} \\ x_1, \ldots, x_{m+k} \end{pmatrix}\right]$$
$$= B\left[A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_k \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_{k+1}, \ldots, x_{m+k} \\ x_{k+1}, \ldots, x_{m+k} \end{pmatrix}\right]$$
$$- S_1 \sum_{i_1=k+1}^{m+k} B\left[A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \\ x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{i_1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{k+1}, \ldots \\ x_k, x_{k+1}, \ldots \end{pmatrix}\right]$$
$$+ S_2 \sum_{i_1, i_2 > i_1} B\left[A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k \\ x_1, \ldots, x_{k-2}, x_{i_1}, x_{i_2} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, x_{k+1}, \ldots \\ x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots \end{pmatrix}\right]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (-1)^k \sum_{i_1, i_2 > i_1, \ldots, i_k > i_{k-1}} B\left[A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_k \\ x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{k+1}, \ldots \\ x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots \end{pmatrix}\right],$$

par la même méthode, on arrive à la formule

$$A_{m+k} = A_k A_m - km A_{k-1} \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} x, y \\ x, y \end{pmatrix} dx\,dy + \cdots$$
$$+ (-1)^k m(m-1)\ldots(m-k+1) \int_a^b \Phi_{m-k}\begin{pmatrix} x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k \\ x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k \end{pmatrix} dx_1\,dy_1 \ldots dx_k\,dy_k,$$

d'où

$$
(117)\qquad \begin{aligned}(-1)^k D^{(k)}(\lambda) = A_k D(\lambda) + k A_{k-1}\lambda \int_a^b D\begin{pmatrix} x, y \\ x, y \end{pmatrix}\lambda\Big) dx\, dy - \cdots \\ + \lambda^k \int_a^b D\begin{pmatrix} x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k \\ x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k \end{pmatrix}\lambda\Big) dx_1\, dy_1 \ldots dx_k\, dy_k.\end{aligned}
$$

Les égalités (105), (114), (116) et (117) montrent que les dérivées de $D(\lambda)$ sont des fonctions intégrales linéaires de $D(\lambda)$ et des mineurs de l'équation (1) d'ordres 1, 2, ..., jusqu'à l'ordre de la dérivée considérée de $D(\lambda)$. On pourrait établir ce fait important par une autre méthode en recherchant la limite pour $n \to \infty$ des dérivées d'ordres 1, 2, ... par rapport à λ du déterminant Δ défini au n° 3.

On en déduit une conséquence très importante:

Théorème 4. *Si $\lambda = c$ est une racine multiple d'ordre k de l'équation*

$$
(118)\qquad D(\lambda) = 0
$$

les quantités

$$
(119)\qquad D\begin{pmatrix} x_1, y_1 \\ s_1, t_1 \end{pmatrix} c\Big), \quad D\begin{pmatrix} x_1, y_1; x_2, y_2 \\ s_1, t_1; s_2, t_2 \end{pmatrix} c\Big), \quad \ldots, \quad D\begin{pmatrix} x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k \\ s_1, t_1; \ldots; s_k, t_k \end{pmatrix} c\Big)
$$

ne peuvent toutes s'annuler identiquement.

En effet, alors

$$
D^{(k)}(c) \neq 0
$$

et (117) montre tout de suite que notre proposition et vraie.

Appelons *indice de la racine c* le nombre n qui est égal à l'ordre du premier mineur dans la suite (119) qui n'est pas identiquement nul. Alors le théorème démontré peut encore être formulé comme il suit:

L'indice d'une racine quelconque de l'équation $D(\lambda) = 0$ ne peut pas surpasser l'ordre de multiplicité de cette racine.

11. *Résolution de l'équation homogène.* Nous sommes maintenant en état de résoudre l'équation homogène

(2) $$u(x, y) = \lambda \int_a^b u(t, x)\,\varphi(t, x, y)\,dt.$$

Soit $\lambda = c$ une racine d'ordre k et d'indice $n \leqq k$ de l'équation caractéristique (118), de sorte que

(120) $$D\begin{pmatrix} x_1, y_1 \\ s_1, t_1 \end{pmatrix} c \Bigg) \equiv 0, \quad D\begin{pmatrix} x_1, y_1;\ x_2, y_2 \\ s_1, t_1;\ s_2, t_2 \end{pmatrix} c \Bigg) \equiv 0, \ldots, D\begin{pmatrix} x_1, y_1;\ \ldots;\ x_{n-1}, y_{n-1} \\ s_1, t_1;\ \ldots;\ s_{n-1}, t_{n-1} \end{pmatrix} c \Bigg) \equiv 0$$

et

(121) $$D\left(\begin{matrix} x_1, y_1;\ \ldots;\ x_n, y_n \\ s_1, t_1;\ \ldots;\ s_n, t_n \end{matrix} \,\middle|\, c\right) \not\equiv 0.$$

Ces conditions et les équations fonctionnelles (104) montrent que les fonctions

(122) $$u_h(x, y) = \frac{\Delta_h(x, y)}{\Delta} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

où

(123) $$\Delta = D\left(\begin{matrix} a_1, b_1;\ \ldots;\ a_n, b_n \\ c_1, d_1;\ \ldots;\ c_n, d_n \end{matrix} \,\middle|\, c\right),$$

(124) $$\Delta_h(x, y) = D\left(\begin{matrix} a_1, b_1;\ \ldots;\ a_{h-1}, b_{h-1};\ x, y;\ a_{h+1}, b_{h+1};\ \ldots;\ a_n, b_n \\ c_1, d_1;\ \ldots;\ c_{h-1}, d_{h-1};\ c_h, d_h;\ c_{h+1}, d_{h+1};\ \ldots;\ c_n, d_n \end{matrix} \,\middle|\, c\right)$$

et les nombres a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des nombres constants quelconques, mais tels que

(125) $$\Delta \neq 0,$$

satisfont bien à l'équation (2), donc sont des solutions de cette équation.

Ces solutions sont linéairement indépendantes.

En effet, on vérifie facilement qu'un mineur d'ordre quelconque de l'équation (1) s'évanouit identiquement si deux paires quelconques de ses arguments haut ou bas sont les mêmes. De là

$$u_h(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x = a_g,\ y = b_g,\ g \neq h; \\ 1 \text{ pour } x = a_h,\ y = b_h \end{cases}$$

et par suite

$$c\int_a^b u_h(t, x)\,\varphi(t, x, y)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ pour } x = a_g,\ y = b_g,\ g \neq h; \\ 1 \text{ pour } x = a_h,\ y = b_h. \end{cases}$$

Cela étant, admettons que $u_h(x, y)$ soient linéairement liées, c'est-à-dire que les nombres constants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ existent non tous nuls et tels que

$$\lambda_1 u_1(x, y) + \lambda_2 u_2(x, y) + \cdots + \lambda_n u_n(x, y) = 0.$$

Mais cela est impossible, parce que, si l'on multiplie cette égalité par $\varphi(t, a_h, b_h)$, en y ayant remplacé x et y par t et a_h, et si l'on intègre ensuite par rapport à t de a à b, on trouve

$$\lambda_h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui prouve notre assertion.

Nous avons donc le théorème suivant:

Théorème 5. *(Second théorème fondamental). Si $\lambda = c$ est une racine d'ordre k et d'indice n de l'équation $D(\lambda) = 0$, l'équation homogène*

$$u(x, y) = c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt \tag{126}$$

admet n solutions $u_h(x, y)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ linéairement distinctes.

Ces solutions $u_h(x, y)$ ont encore cette propriété importante que *toute autre solution de l'équation homogène* (126) *est une combinaison linéaire à coefficients constants de $u_h(x, y)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.* La démonstration de cette propriété repose sur le théorème suivant.

Théorème 6. *Toute sotution $u(x, y)$ de l'équation* (2) *est aussi une solution de l'équation*

$$u(x, y) = \lambda^2 \int_a^b u(s, t)\, \omega(s, t, x, y)\, ds\, dt, \tag{127}$$

où

$$\begin{aligned} \omega(s, t, x, y) = \varphi(s, t, x)\, \varphi(t, x, y) - \psi(s, t, x, y) \\ + \lambda \int_a^b \varphi(s, t, \theta)\, \psi(t, \theta, x, y)\, d\theta, \end{aligned} \tag{128}$$

$\psi(s, t, x, y)$ étant une fonction arbitraire intégrable de s, t, x, y.

La démonstration de ce théorème est très simple. Soit $u(x, y)$ une solution de l'équation (2), de sorte que

$$u(x, y) = \lambda \int_a^b u(t, x) \varphi(t, x, y) \, dt$$

est une identité. On peut encore écrire

$$u(t, x) = \lambda \int_a^b u(\theta, t) \varphi(\theta, t, x) \, d\theta$$

et substituer cette expression de $u(t, x)$ dans l'identité précédente, ce qui donnera

$$u(x, y) = \lambda^2 \int_a^b u(\theta, t) \varphi(\theta, t, x) \varphi(t, x, y) \, d\theta \, dt. \tag{129}$$

Prenons encore

$$u(\theta, t) = \lambda \int_a^b u(s, t) \varphi(s, \theta, t) \, ds,$$

multiplions cette identité par $\lambda^2 \psi(\theta, t, x, y)$ et intégrons le résultat par rapport à θ et t entre les limites a et b: nous aurons

$$\lambda^2 \int_a^b u(\theta, t) \psi(\theta, t, x, y) \, d\theta \, dt = \lambda^3 \int_a^b u(s, \theta) \varphi(s, \theta, t) \psi(\theta, t, x, y) \, ds \, d\theta \, dt.$$

En ajoutant cette identité à (129), on obtient (127), où $\omega(s, t, x, y)$ est défini par l'égalité (128).

Démontrons maintenant la propriété des solutions $u_h(x, y)$ mentionnée plus haut.

Soit $u(x, y)$ une solution de l'équation (2) pour $\lambda = c$ différant des solutions $u_h(x, y) \, (h = 1, 2, \ldots, n)$. Posons

$$\psi(s, t, x, y) = \varphi(s, t, x)\varphi(t, x, y) -$$

$$- \sum_{h=1}^{n} \varphi(s, t, a_h)\varphi(t, a_h, b_h) \frac{D\begin{pmatrix} a_1, b_1; \ldots; x, y; \ldots; a_n, b_n \\ c_1, d_1; \ldots; c_h, d_h; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c}{D\begin{pmatrix} a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c} -$$

$$+ \lambda \int_a^b \varphi(s, t, \theta) \frac{D\begin{pmatrix} x, y; a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ t, \theta; c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c}{D\begin{pmatrix} a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c} d\theta.$$

En substituant ici à la place de

$$D\begin{pmatrix} x, y; a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ t, \theta; c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c$$

son expression tirée de la relation fonctionnelle (104), nous trouvons

$$\psi(s, t, x, y) = \frac{1}{\varDelta} D\begin{pmatrix} x, y; a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ s, t; c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c,$$

où $\varDelta$ est la quantité définie par l'égalité (123). Donc, on peut remplacer dans l'égalité précédente le quotient de deux déterminants sous le signe de l'intégrale par $\psi(s, t, x, y)$. Faisons cette substitution et tenons compte des égalités (122), (123) et (124), nous obtenons une nouvelle expression pour $\psi(s, t, x, y)$:

$$\psi(s, t, x, y) = \varphi(s, t, x, y) - \sum_{h=1}^{n} \varphi(s, t, a_h)\varphi(t, a_h, b_h) u_h(x, y)$$

$$+ \lambda \int_a^b \varphi(s, t, \theta)\psi(t, \theta, x, y)\, d\theta.$$

Substituons enfin cette expression pour $\psi(s, t, x, y)$ dans l'égalité (128) et nous aurons

(130) $$\omega(s, t, x, y) = \sum_{h=1}^{n} \varphi(s, t, a_h)\varphi(t, a_h, b_h) u_h(x, y).$$

Par supposition, on a identiquement

$$u(x, y) = c \int_a^b u(t, x) \varphi(t, x, y) \, dt,$$

donc, par le théorème 6, on aura, en prenant pour $\omega(s, t, x, y)$ l'expression (130),

$$u(x, y) = \sum_{h=1}^{n} C_h u_h(x, y),$$

où

$$C_h = c^2 \int_a^b u(s, t) \varphi(s, t, a_h) \varphi(t, a_h, b_h) \, ds \, dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous appelons les nombres c, racines de l'équation caractéristique $D(\lambda) = 0$, *valeurs caractéristiques* ou *nombres fondamentaux;* les solutions de l'équation homogène correspondante sont les *fonctions caractéristiques*, ou *fonctions fondamentales*, ou *solutions fondamentales.*

Considérons encore l'équation

$$v(x, y) = \lambda \int_a^b \varphi(x, y, t) v(y, t) \, dt \tag{131}$$

qui sera dite dans le suivant l'équation associée de l'équation (2).

On s'assure sans peine que son déterminant et ses mineurs sont les mêmes que pour l'équation (2) et que, $\lambda = c$ étant une racine d'ordre k et d'indice $n \leqq k$, elle a les solutions

$$v_h(x, y) = \frac{1}{\Delta} D\begin{pmatrix} a_1, b_1; \ldots; a_h, b_h; \ldots; a_n, b_n \\ c_1, d_1; \ldots; \; x, \; y; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c \Bigg),$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

où Δ est toujours la quantité définie par l'égalité (123) et différente de zéro. Ces solutions sont linéairement indépendantes et toute autre solution de l'équation associée (131) est une combinaison linéaire à coefficients constants de $v_h(x, y)$.

On démontre encore très facilement le théorème suivant:

Théorème 7. *Les solutions des équations homogènes* (2) *et* (131), *appartenant aux diverses racines de l'équation* $D(\lambda) = 0$, *sont orthogonales l'une à l'autre.*

Soit $u(x, y)$ une solution de l'équation (2) pour $\lambda = c$ et $v(x, y)$ une solution de l'équation associée (131) pour $\lambda = c_1$, $c_1 \neq c$.

Alors on a identiquement

$$u(x, y) = c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt,$$

$$v(x, y) = c_1 \int_a^b \varphi(x, y, t)\, v(y, t)\, dt.$$

Multiplions la première de ces identités par $v(x, y)$, la seconde par $u(x, y)$ et intégrons les résultats par rapport à x et y de a à b, nous aurons les égalités

$$\int_a^b u(x, y)\, v(x, y)\, dx\, dy = c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, v(x, y)\, dt\, dx\, dy,$$

$$\int_a^b u(x, y)\, v(x, y)\, dx\, dy = c_1 \int_a^b u(x, y)\, \varphi(x, y, t)\, v(y, t)\, dt\, dx\, dy,$$

où les secondes intégrales sont identiques. Donc, comme $c \neq c_1$, on a en effet

$$\int_a^b u(x, y)\, v(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

ce qui montre l'orthogonalité de $u(x, y)$ et $v(x, y)$.

12. *Résolution de l'équation inhomogène pour* $D(\lambda) = 0$. Nous avons vu comment on peut résoudre l'équation (1) dans le cas $D(\lambda) \neq 0$. Nous allons maintenant voir comment on la résout dans le cas contraire et quelles sont les conditions pour que cela soit possible.

Théorème 8. *(Troisième théorème fondamental.) Soit* $\lambda = c$ *une racine d'ordre* k *et d'indice* n *de l'équation* $D(\lambda) = 0$; *soient*

$$v_h(x, y) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

les solutions de l'équation associée

(132) $$v(x, y) = c \int_a^b \varphi(x, y, t)\, v(y, t)\, dt$$

appartenant à cette racine. Alors, pour que l'équation

(133) $$u(x, y) = f(x, y) + c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt$$

admette une solution, il faut et il suffit qu'on ait

(134) $$\int_a^b f(x, y)\, v_h(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces conditions étant remplies, l'équation (1) *a une solution*

(135) $$\begin{aligned} u_0(x, y) &= f(x, y) + c \int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt \\ &+ \frac{c^2}{\varDelta} \int_a^b f(s, t)\, D\left(\begin{matrix} x, y;\ a_1, b_1;\ \ldots;\ a_n, b_n \\ s,\ t;\ c_1, d_1;\ \ldots;\ c_n, d_n \end{matrix} \middle|\, c\right) ds\, dt \end{aligned}$$

$$\left(\varDelta = D\left(\begin{matrix} a_1, b_1;\ \ldots;\ a_n, b_n \\ c_1; d_1;\ \ldots;\ c_n, d_n \end{matrix} \middle|\, c\right) \neq 0\right)$$

et toutes les autres solutions sont contenues dans l'expression

(136) $$u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{h=1}^{n} C_h\, u_h(x, y),$$

C_h étant des constantes arbitraires et $u_h(x, y)$ les solutions fondamentales de l'équation

$$u(x, y) = c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt,$$

définies par les égalités (122).

Il est très facile de démontrer la nécéssité des conditions (134). En effet, si $u(x,y)$ est une solution de l'équation (133), on obtient, en la multipliant par $v_h(x,y)$ et en intégrant,

$$\int_a^b u(x,y)\,v_h(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b f(x,y)\,v_h(x,y)\,dx\,dy$$

$$+ c\int_a^b u(t,x)\,\varphi(t,x,y)\,v_h(x,y)\,dt\,dx\,dy,$$

ou encore

$$\int_a^b f(x,y)\,v_h(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b u(x,y)\left[v_h(x,y) - c\int_a^b \varphi(x,y,t)\,v_h(y,t)\,dt\right]dx\,dy$$

$$= 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

car $v_h(x,y)$ sont les solutions de (132).

Pour démontrer la suffisance des conditions (134) nous ferons voir que l'expression (135) est bien une solution de (133), si l'on suppose que les conditions (134) soient satisfaites.

En effet, cette supposition étant admise, considérons l'expression (135) en y développant

$$D\begin{pmatrix} x, y;\ a_1, b_1;\ \ldots;\ a_n, b_n & \\ s,\ t;\ c_1, d_1;\ \ldots;\ c_n, d_n & c \end{pmatrix}$$

au moyen de la relation (104'); ce qui nous donne

$$u_0(x,y) = f(x,y) + c\int_a^b f(t,x)\,\varphi(t,x,y)\,dt$$

$$+ \frac{c^2}{\varDelta}\int_a^b f(s,t)\Big[\varphi_0(s,t,x,y)\,\varDelta -$$

$$- \varphi_0(c_1, d_1, x, y)\,D\begin{pmatrix} a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \ldots;\ a_n, b_n & \\ s\ ,\ t\ ;\ c_2, d_2;\ \ldots;\ c_n, d_n & c \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n \varphi_0(c_n, d_n, x, y)\, D\begin{pmatrix} a_1, b_1; \ldots; a_{n-1}, b_{n-1}; a_n, b_n \\ c_1, d_1; \ldots; c_{n-1}, d_{n-1}; s\ , t \end{pmatrix} c \Big)$$

$$+ c\int_a^b D\begin{pmatrix} \theta, x; a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ s,\ t;\ c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c \Big)\, \varphi(\theta, x, y)\, d\theta \Bigg]\, ds\, dt.$$

Mais

$$\frac{1}{\Delta} D\begin{pmatrix} a_1, b_1; \ldots; a_h, b_h; \ldots; a_n, b_n \\ c_1, d_1; \ldots; s\ , t\ ; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c \Big) = v_h(s, t),$$

donc, en tenant compte des conditions (134) que nous supposons satisfaites,

$$\begin{aligned} u_0(x, y) = f(x, y) &+ c\int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt \\ &+ c^2 \int_a^b f(s, t)\, \varphi_0(s, t, x, y)\, ds\, dt \qquad (137) \\ &+ \frac{c^3}{\Delta}\int_a^b f(s, t)\, D\begin{pmatrix} \theta, x; a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ s,\ t;\ c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c \Big)\, \varphi(\theta, x, y)\, ds\, dt\, d\theta. \end{aligned}$$

Substituons maintenant (135) dans (133): nous aurons

$$\begin{aligned} f(x, y) &+ c\int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt \\ &+ \frac{c^2}{\Delta}\int_a^b f(s, t)\, D\begin{pmatrix} x, y; a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ s,\ t;\ c_1; d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c \Big)\, ds\, dt = \\ &= f(x, y) + c\int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt \\ &+ c^2 \int_a^b f(s, t)\, \varphi_0(s, t, x, y)\, ds\, dt \\ &+ \frac{c^3}{\Delta}\int_a^b f(s, t)\, D\begin{pmatrix} \theta, x; a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n \\ s,\ t;\ c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n \end{pmatrix} c \Big)\, \varphi(\theta, x, y)\, ds\, dt\, d\theta, \end{aligned}$$

ce qui se réduit à une identité à cause de (135) et (137). Donc, $u_0(x, y)$, défini par (135), est bien une solution de (133) quand les conditions (134) sont remplies.

Soit enfin

$$u(x, y) = u_0(x, y) + U(x, y)$$

une solution quelconque de (133). En la mettant dans (133) on verra immédiatement que $U(x, y)$ doit satisfaire à l'équation homogène

$$U(x, y) = c\int_a^b U(t, x)\,\varphi(t, x, y)\,dt$$

donc doit être de la forme

$$U(x, y) = \sum_{h=1}^{n} C_h\, u_h(x, y).$$

Par suite, dans le cas considéré, toute solution de (133) est contenue dans la formule générale

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{h=1}^{n} C_h\, u_h(x, y).$$

Ainsi, le troisième théorème fondamental est complètement démontré.

13. *Liaison des équations intégrales linéaires transgressives à deux variables avec les équations intégrales de Fredholm.* Notre exposition précédente montre au quel degré la théorie de nos équations intégrales est analogue à celle des équations intégrales de Fredholm et tout naturellement se pose la question sur la liaison entre les deux classes d'équations intégrales. Sans nous approfondir dans ce problème, nous nous contenterons ici de démontrer quelques théorèmes les plus simples dont le but principal est de montrer que la théorie des équations transgressives ne peut pas être entièrement réduite à celle des équations de Fredholm.

Quelque soit λ pour lequel $D(\lambda) \neq 0$ l'équation

$$(1) \qquad u(x, y) = f(x, y) + \lambda\int_a^b u(t, x)\,\varphi(t, x, y)\,dt$$

admet une seule solution continue. Donc, en comprenant sous $u(x, y)$ cette solution, portons dans (1)

$$u(t, x) = f(t, x) + \lambda \int_a^b u(s, t)\, \varphi(s, t, x)\, ds.$$

Il vient

$$(138) \qquad \begin{aligned} u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b f(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt + \\ + \lambda^2 \int_a^b u(s, t)\, \varphi_0(s, t, x, y)\, ds\, dt, \end{aligned}$$

d'où il suit que $u(x, y)$ est en même temps une solution de cette équation inhomogène de Fredholm à deux variables.

Si $D(\lambda) = 0$ et que l'équation (1) admette des solutions, toutes ces solutions satisfont aussi à (138).

De même, si l'équation transgressive homogène

$$(2) \qquad u(x, y) = \lambda \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt$$

admet des solutions non nulles, l'équation homogène de Fredholm

$$(139) \qquad u(x, y) = \lambda^2 \int_a^b u(s, t)\, \varphi_0(s, t, x, y)\, ds\, dt$$

est satisfaite par ces solutions.

Les mêmes remarques s'appliquent, évidemment, aux équations associées aux équations (1) et (138), (2) et (139) respectivement.

Nous voyons que les solutions des équations transgressives (1) et (2) représentent en même temps des solutions des équations correspondantes de Fredholm (138) et (139). La conclusion inverse est elle vraie? Pour répondre à cette question, il faut auparavant établir un théorème préliminaire.

Théorème 9. *Soit $D_1(\lambda^2)$ le déterminant de l'équation de Fredholm* (138) *et $D(\lambda)$, comme toujours, le déterminant de l'équation transgressive* (1). *Alors nous avons identiquement*

$$D_1(\lambda^2) = D(\lambda)\, D(-\lambda). \tag{140}$$

En effet, nous avons vu que $D(\lambda)$ est la limite du déterminant $\varDelta \equiv \varDelta(\lambda)$ du système

$$u_{kl} = \lambda\delta \sum_{h=1}^{n} u_{hk}\, \varphi_{hkl} \qquad (k,\, l = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

On sait aussi que $D_1(\lambda^2)$ est la limite du déterminant $\varDelta_1(\lambda^2)$ du système

$$u_{kl} = (\lambda\delta)^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} u_{ih}\, \varphi_{ihk}\, \varphi_{hkl} \qquad (k,\, l = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

où l'on pose, conformément aux notations du n° 3,

$$u_{kl} = u(x_k,\, y_l), \qquad u_{ih} = u(s_i,\, t_h),$$
$$\varphi_{ihk} = \varphi(s_i,\, t_h,\, x_k), \quad \varphi_{hkl} = \varphi(t_h,\, x_k,\, y_l).$$

Par suite, pour établir la relation (140), il suffit de montrer que

$$\varDelta_1(\lambda^2) = \varDelta(\lambda)\, \varDelta(-\lambda).$$

Mais cette relation s'établit très facilement, si l'on multiplie les déterminants $\varDelta(\lambda)$ et $\varDelta(-\lambda)$ en appliquant la règle connue et en ayant soin de multiplier les lignes de $\varDelta(\lambda)$ par les colonnes de $\varDelta(-\lambda)$, $\varDelta(\lambda)$ et $\varDelta(-\lambda)$ étant écrits comme il est indiqué dans le n° 3.

On voit de (140) que l'égalité $D(\lambda) = 0$ entraîne $D_1(\lambda^2) = 0$, mais que $D_1(\lambda^2)$ peut s'annuler sans que $D(\lambda)$ soit nul pour la même valeur de λ, parce que cette valeur peut bien annuler $D(-\lambda)$ sans annuler $D(\lambda)$.

Considérons donc les cas suivants.

Premier cas: $D(\lambda) \neq 0$, $D_1(\lambda^2) \neq 0$. Dans ce cas les équations (1) et (138) n'ont chacune qu'une seule solution continue, donc, d'après les remarques faites plus haut, ces solutions sont nécessairement identiques et les équations (1) et (138) sont équivalentes: on peut résoudre l'équation (1) en résolvant l'équation (138).

En même temps les équations homogènes correspondantes, transgressive et de Fredholm, ont la même solution nulle, par suite sont aussi équivalentes.

Deuxième cas: $D(\lambda) \neq 0$, $D_1(\lambda^2) = 0$. Dans ce cas on doit avoir $D(-\lambda) = 0$. Pour fixer les idées soit $\lambda = c$ la valeur considérée de λ, de sorte que $D(c) \neq 0$, $D_1(c^2) = 0$, $D(-c) = 0$, et soit $\lambda = c$ une racine d'ordre k et d'indice n de l'équation $D(-\lambda) = 0$.

Alors l'équation homogène associée

$$v(x,y) = -c \int_a^b \varphi(x,y,t)\, v(y,t)\, dt \tag{141}$$

a n solutions fondamentales

$$v_1(x,y),\ v_2(x,y),\ \ldots,\ v_n(x,y). \tag{142}$$

Comme il a été remarqué plus haut, ces solutions sont aussi des solutions de l'équation homogène associée de Fredholm

$$v(x,y) = c^2 \int_a^b \varphi_0(x,y,s,t)\, v(s,t)\, ds\, dt. \tag{143}$$

D'après (140), $\lambda^2 = c^2$ est une racine d'ordre k de l'équation $D_1(\lambda^2) = 0$ et, d'après la remarque de tout à l'heure, l'indice de cette racine ne peut pas être moindre que n. Soit n_1 cet indice.

Si $n_1 > n$, l'équation (143) a des solutions distinctes des solutions (142) et ces solutions ne satisfont pas à l'équation (141), car autrement elles seraient linéairement dépendantes des solutions (142). Soient

$$v'_g(x,y) \qquad (g = 1, 2, \ldots, m; \quad m \leqq k - n)$$

ces solutions. Comme

$$-c \int_a^b \varphi(x,y,t)\, v'_g(y,t) \neq v'_g(x,y),$$

on peut poser

$$-c \int_a^b \varphi(x,y,t)\, v'_g(x,y) = v'_g(x,y) + w_g(x,y), \tag{144}$$

où $w_g(x,y)$ $(g = 1, 2, \ldots, m)$ ne s'annulent pas identiquement.

La théorie des équations de Fredholm nous apprend que l'équation

$$(145)\qquad \begin{aligned} u(x,y) = f(x,y) &+ c\int_a^b f(t,x)\,\varphi(t,x,y)\,dt \\ &+ c^2\int_a^b u(s,t)\,\varphi_0(s,t,x,y)\,ds\,dt \end{aligned}$$

ne peut avoir des solutions que si

$$(146)\qquad \int_a^b\left[f(x,y) + c\int_a^b f(t,x)\,\varphi(t,x,y)\,dt\right]v_h(x,y)\,dx\,dy = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(147)\qquad \int_a^b\left[f(x,y) + c\int_a^b f(t,x)\,\varphi(t,x,y)\,dt\right]v'_g(x,y)\,dx\,dy = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots, m).$$

Or les conditions (146) sont satisfaites identiquement. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} c\int_a^b f(t,x)\,\varphi(t,x,y)\,v_h(x,y)\,dt\,dx\,dy &= \\ &= \int_a^b f(t,x)\,dt\,dx\,.\,c\int_a^b \varphi(t,x,y)\,v_h(x,y)\,dy \\ &= -\int_a^b f(t,x)\,v_h(t,x)\,dt\,dx; \end{aligned}$$

en portant ce résultat dans (146), on verra que notre remarque est juste. De la même manière, en tenant compte de (144), on s'assure que les conditions (147) sont équivalentes aux conditions

$$(147')\qquad \int_a^b f(x,y)\,w_g(x,y)\,dx\,dy = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots, m).$$

Les fonctions $w_g(x, y)$ sont indépendantes de $f(x,y)$ et bien déterminées. Evidemment on peut choisir une fonction $f(x,y)$ continue et telle que les conditions

(147') ne seront pas satisfaites, de sorte que, pour cette fonction $f(x, y)$, l'équation (145) n'admettra pas de solutions. Mais quelle que soit $f(x, y)$ continu, l'équation

$$(148) \qquad u(x, y) = f(x, y) + c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt,$$

à cause de $D(c) \neq 0$, admettra une solution, qui est aussi une solution de (145), ce qui est contraire à la conclusion obtenue.

On voit que la supposition $n_1 > n$ est inadmissible, donc on doit avoir $n_1 = n$. En d'autres termes, *si $\lambda = c$ est une racine d'ordre k et d'indice n de l'équation $D(-\lambda) = 0$ et si $D(c) \neq 0$, $\lambda^2 = c^2$ est une racine d'ordre k et d'indice n de l'équation $D_1(\lambda^2) = 0$.*

Dans le même temps les équations

$$u(x, y) = -c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt$$

et

$$u(x, y) = c^2 \int_a^b u(s, t)\, \varphi_0(s, t, x, y)\, ds\, dt$$

et leurs associées ont les mêmes solutions fondamentales, donc sont équivalentes. Mais les équations (145) *et* (148) *ne le sont pas*, car l'équation (148) a dans le cas considéré une seule solution, tandis que l'équation (145) en a une infinité.

Troisième cas: $D(c) = 0$, $D_1(c^2) = 0$, c étant une valeur fixe de λ. Quand $D(-c) \neq 0$, nous arrivons au premier cas, par suite nous supposerons encore que $D(-c) = 0$.

Considérons d'abord les équations homogènes

$$(149) \qquad v(x, y) = c \int_a^b \varphi(x, y, t)\, v(y, t)\, dt,$$

$$(149') \qquad v(x, y) = -c \int_a^b \varphi(x, y, t)\, v(y, t)\, dt,$$

$$(150) \qquad v(x, y) = c^2 \int_a^b \varphi_0(x, y, s, t)\, v(s, t)\, ds\, dt.$$

Supposons que $\lambda = c$ soit une racine d'ordre k et d'indice n de $D(\lambda) = 0$ et d'ordre l et d'indice m de $D(-\lambda) = 0$. Alors, d'après les remarques faites au commencement de ce numéro, l'équation (150) aura comme solutions fondamentales au moins $n + m$ solutions

$$(151) \qquad v_h(x,y) \quad (h = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{et} \qquad v'_g(x,y) \quad (g = 1, 2, \ldots, m)$$

des équations (149) et (149′) respectivement.

Elle n'en peut avoir plus que ce nombre. En effet, supposons qu'au contraire, outre les solutions (151), elle a encore une solution $w(x,y)$, linéairement indépendante de (151), et considérons les équations inhomogènes (148) et (145). Pour que ces équations aient des solutions on doit satisfaire aux conditions

$$(152) \qquad \int_a^b f(x,y)\, v_h(x,y)\, dx\, dy = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

pour l'équation (148) et aux conditions

$$(153) \qquad \int_a^b F(x,y)\, v_h(x,y)\, dx\, dy = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(153') \qquad \int_a^b F(x,y)\, v'_g(x,y)\, dx\, dy = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(153'') \qquad \int_a^b F(x,y)\, w(x,y)\, dx\, dy = 0,$$

$$F(x,y) \equiv f(x,y) + c \int_a^b f(t,x)\, \varphi(t,x,y)\, dt,$$

pour l'équation (145).

Or les conditions (153), à cause de (149), se réduisent aux conditions (152); les conditions (153′), à cause de (149′), sont satisfaites identiquement. Enfin on peut écrire

$$-c \int_a^b \varphi(t,x,y)\, w(x,y)\, dy = w(t,x) + \psi(t,x),$$

où $\psi(t,x) \not\equiv 0$, car $w(x,y)$ n'est pas une solution de (149′), et alors la condition (153″) se transforme en celle-ci:

$$\int_a^b f(x,y)\,\psi(x,y)\,dx\,dy = 0. \tag{154}$$

En somme, nous avons les conditions (152) et (154), qui sont nécessaires et suffisantes pour que l'équation (145) ait des solutions.

Prenons maintenant la suite

$$v_1(x,y), \quad v_2(x,y), \quad \ldots, \quad v_n(x,y), \quad \psi(x,y).$$

Par un procédé bien connu, on peut écrire une autre suite de fonctions

$$v_1''(x,y), \quad v_2''(x,y), \quad \ldots, \quad v_n''(x,y), \quad \psi'(x,y),$$

qui seront orthogonales et telles que, pour tout h, v_h'' sera une combinaison linéaire à coefficients constants des fonctions $v_1, \ldots, v_h$ et $\psi'(x, y)$ sera une combinaision analogue de $v_1, \ldots, v_n, \psi$. On voit tout de suite que les conditions (152) sont équivalentes aux conditions

$$\int_a^b f(x,y)\,v_h''(x,y)\,dx\,dy = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{155}$$

et la condition (154) à celle-ci:

$$\int_a^b f(x,y)\,\psi'(x,y)\,dx\,dy = 0. \tag{156}$$

Remplaçons dans ces égalités $f(x,y)$ par $f(x,y) + \psi'(x,y)$: les conditions (155) seront toujours satisfaites, à cause de l'orthogonalité de ψ' à $v_1'', \ldots, v_n''$, mais la condition (156) cesse d'être satisfaite, car

$$\int_a^b \psi'(x,y)\,\psi'(x,y)\,dx\,dy \neq 0.$$

Cela signifie que, après ce remplacement, l'équation (148) aura encore des solutions, tandis que l'équation (145) n'en aura plus. Mais cela est impossible, parce que, comme nous savons, toute solution de l'équation (148) est aussi une solution de l'équation (145), quel que soit $f(x, y)$ continu.

Nous arrivons de cette manière à la conclusion que l'équation (150) n'a pas de solutions linéairement indépendantes des solutions des équations (149) et (149').

De la même manière, en considérant les conditions de résolubilité des équations

$$u(x, y) = f(x, y) + c \int_a^b \varphi(x, y, t)\, u(y, t)\, dt$$

et

$$u(x, y) = f(x, y) + c \int_a^b \varphi(x, y, t)\, f(y, t)\, dt$$

$$+ c^2 \int_a^b \varphi_0(x, y, s, t)\, u(s, t)\, ds\, dt,$$

on s'assurera que, pour $\lambda = c$ tel que $D(c) = 0$ et $D(-c) = 0$, l'équation

$$u(x, y) = c^2 \int_a^b u(s, t)\, \varphi_0(s, t, x, y)\, ds\, dt$$

a pour solutions fondamentales l'ensemble des solutions fondamentales des équations

$$u(x, y) = c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt$$

et

$$u(x, y) = -c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt.$$

On voit donc que, *dans le cas considéré, les équations homogènes transgressives et de Fredholm ne sont pas équivalentes*, l'équation homogène de Fredholm ayant parmi ses solutions fondamentales des solutions autres que celles de l'équation homogène transgressive.

Les raisonnements précédents montrent aussi que les équations inhomogènes transgressives et de Fredholm ne sont pas équivalentes, l'équation inhomogène de Fredholm ayant pour solution générale

$$u_0(x, y) + \sum_{h=1}^{n} C_h v_h(x, y) + \sum_{g=1}^{m} C'_g v'_g(x, y),$$

$u_0(x, y)$ étant une solution commune à cette équation et à l'équation inhomogène transgressive correspondante, tandis que cette dernière équation à la solution générale

$$u_0(x, y) + \sum_{h=1}^{n} C_h v_h(x, y).$$

En résumé, nous voyons que les équations transgressives et les équations correspondantes de Fredholm ne sont pas toujours équivalentes et que, par conséquent, la théorie des premières, comme nous l'avons affirmé, ne peut pas être entièrement réduite à la théorie des équations de Fredholm.

14. *Développement des noyaux itérés.* Soient

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots$$

les racines de l'équation $D(\lambda) = 0$ rangées dans l'ordre grandissant de leurs modules. Soient

(157) $$u_{h1}(x, y),\quad u_{h2}(x, y),\quad \ldots,\quad u_{hn_h}(x, y),$$

(158) $$v_{h1}(x, y),\quad v_{h2}(x, y),\quad \ldots,\quad v_{hn_h}(x, y)$$

les solutions fondamentales des équations

(159) $$u(x, y) = c_h \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt,$$

(160) $$v(x, y) = c_h \int_a^b \varphi(x, y, t)\, v(y, t)\, dt$$

respectivement, de sorte que n_h est l'indice de la racine c_h.

Supposons que les fonctions u et v dans les suites (157) et (158) sont telles qu'il n'existe aucune combinaison linéaire à coefficients constants des u_{hi} qui soit orthogonale à tous les v_{hi} et inversement. On sait qu'en s'appuyant sur cette supposition on peut remplacer les suites (157) et (158) par des nouvelles séries

(161) $$U_{h1}(x,y),\quad U_{h2}(x,y),\quad \ldots,\quad U_{hn_h}(x,y),$$

(162) $$V_{h1}(x,y),\quad V_{h2}(x,y),\quad \ldots,\quad V_{hn_h}(x,y),$$

qui représentent un système biorthogonal et normal, les U_h et V_h étant des combinaisons linéaires des u_h et v_h respectivement. Donc nous aurons

(163) $$\int_a^b U_{hk}(x,y)\,V_{hl}(x,y)\,dx\,dy = \begin{cases} 1 \text{ pour } k = l, \\ 0 \text{ pour } k \neq l. \end{cases}$$

Evidemment U_h et V_h seront toujours les solutions des équations (159) et (160).

Supposons que ce procédé de biorthogonalisation soit possible et soit accompli pour toutes les suites (157) et (158), c'est-à-dire pour $h = 1, 2, 3, \ldots$ Nous savons que les solutions des équations analogues à (159) et (160), appartenant aux racines c_h et c_g différentes, sont orthogonales. De là et des relations (163) il est clair que les séries

$$U_{h1}(x,y),\quad \ldots,\quad U_{hn_h}(x,y) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$V_{h1}(x,y),\quad \ldots,\quad V_{hn_h}(x,y) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

forment aussi un système biorthogonal et normal.

Pour simplifier l'écriture, nous numéroterons les fonctions de ces séries et les écrirons comme il suit:

(164) $$U_1(x,y),\quad U_2(x,y),\quad \ldots,$$

(165) $$V_1(x,y),\quad V_2(x,y),\quad \ldots,$$

en les rapportant aux racines

$$c',\quad c'',\quad \ldots$$

respectivement, où $c', c'', \ldots, c^{(n_1)}$ sont tous égals à c_1, et ainsi de suite. Nous aurons donc

(166) $$\int_a^b U_h(x,y)\,V_k(x,y)\,dx\,dy = \begin{cases} 1 \text{ pour } h = k, \\ 0 \text{ pour } h \neq k. \end{cases}$$

Cela étant, prenons l'équation

$$u(x, y) = c \int_a^b u(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt,$$

où c est une des racines c', c'', ... Elle est satisfaite par $U(x, y)$ correspondant, de sorte que nous avons identiquement

$$U(x, y) = c \int_a^b U(t, x)\, \varphi(t, x, y)\, dt.$$

De cette identité, de proche en proche, on déduit

$$U(x, y) = c^2 \int_a^b U(s, t)\, \varphi_0(s, t, x, y)\, ds\, dt,$$

$$U(x, y) = c^3 \int_a^b U(s, t)\, \varphi_1(s, t, x, y)\, ds\, dt,$$

et ainsi de suite, généralement

$$(167) \qquad U(x, y) = c^{k+2} \int_a^b U(s, t)\, \varphi_k(s, t, x, y)\, ds\, dt.$$

De même

$$(168) \qquad V(x, y) = c^{k+2} \int_a^b \varphi_k(x, y, s, t)\, V(s, t)\, ds\, dt,$$

quel que soit k entier positif.

Les fonctions φ_0, φ_1, ..., qui entrent dans les identités (167) et (168), sont les noyaux itérés de l'équation intégrale considérée que nous avons déjà rencontrés dans le n° 2 et qui sont définis par les relations récurrentes

23 — 3298. *Acta mathematica*. 59. Imprimé le 6 mai 1932.

$$\varphi_m(s,t,x,y) = \int_a^b \varphi(s,t,\theta)\,\varphi_{m-1}(t,\theta,x,y)\,dt$$

$$= \int_a^b \varphi_{m-1}(s,t,\theta,x)\,\varphi(\theta,x,y)\,dt$$

$$[m = 1, 2, 3, \ldots;\ \varphi_0(s,t,x,y) = \varphi(s,t,x)\,\varphi(t,x,y)].$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant qui est bien simple et qui nous sera utile:

Théorème 10. *S'il existe un développement de $\varphi_k(s,t,x,y)$ en une série de $U_i(x,y)$ ou $V_i(s,t)$ uniformément convergente pour s, t, x, y contenus dans (a, b), il a la forme*

$$\varphi_k(s,t,x,y) = \frac{U_1(x,y)\,V_1(s,t)}{(c')^{k+2}} + \frac{U_2(x,y)\,V_2(s,t)}{(c'')^{k+2}} + \cdots. \tag{169}$$

En effet, supposons que $\varphi_k(s,t,x,y)$ soit développable en une série

$$\varphi_k(s,t,x,y) = A_1(s,t)\,U_1(x,y) + A_2(s,t)\,U_2(x,y) + \cdots$$

uniformément convergente pour x, y contenus dans (a, b). Alors, en multipliant les deux côtés de ce développement par $V_h(x,y)$ et en intégrant ensuite par rapport à x et y entre les limites a et b, nous obtenons, à cause de (166) et (168),

$$\int_a^b \varphi_k(s,t,x,y)\,V_h(x,y)\,dx\,dy = \frac{V_h(s,t)}{(c^{(h)})^{k+2}} = A_h(s,t),$$

d'où le développement (169).

15. *Propriétés des noyaux stocastiques.* Nous ne poursuivrons plus loin les propriétés des équations intégrales transgressives, mais nous considérerons encore le cas des noyaux $\varphi(t,x,y)$ représentant la loi différentielle de probabilités, introduite au n° 1. Nous les appelons noyaux stocastiques et rappelons que $\varphi(t,x,y)\,dy$ est la probabilité des inégalités $y < X < y + dy$ dans une épreuve quelconque quand on sait que dans les deux épreuves précédentes on a eu $X = t$ et $X = x$.

Nous supposons, comme toujours, que $\varphi(t, x, y)$ est une fonction continue pour t, x, y dans (a, b). Suivant sa nature même elle n'acquiert jamais des valeurs négatives et, suivant le théorème d'addition des probabilités,

$$\int_a^b \varphi(t, x, y)\, dy = 1. \tag{170}$$

Les noyaux stocastiques ont des propriétés intéressantes et importantes pour la théorie des probabilités. Nous allons en considérer les plus remarquables et les plus importantes.

Théorème 11. *L'équation caractéristique*

$$D(\lambda) = 0 \tag{171}$$

d'un noyau stocastique $\varphi(t, x, y)$ a toujours la racine

$$\lambda_0 = 1$$

et cette racine, à l'exception d'un cas spécial, est simple. Ce cas spécial toujours s'exclue si $\varphi(t, x, y)$ ne s'annule pas pour t, x, y dans (a, b) ou s'annule pour un ensemble de valeurs de t, x, y de mesure nulle. Toutes les autres racines de (171) sont de module $\geqq 1$.

Nous pouvons démontrer de plusieurs manières que $\lambda_0 = 1$ est une racine de (171).

1°. Nous avons les relations

$$\Phi_m\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} = A_m\, \Phi_0\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} - m \int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} s, t \\ \theta, x \end{pmatrix} \varphi(\theta, x, y)\, d\theta$$

$$\left[m = 1, 2, \ldots;\ \Phi_0\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} = \varphi(s, t, x)\, \varphi(t, x, y)\right].$$

En les intégrant par rapport à x, y entre a et b et en tenant compte de (170), nous aurons

$$\varphi_0(s, t) = \int_a^b \Phi_0\begin{pmatrix} s, t \\ x, y \end{pmatrix} dx\, dy = 1, \quad \varphi_m(s, t) = A_m - m\, \varphi_{m-1}(s, t),$$

où

$$\varphi_m(s,\,t) = \int_a^b \Phi_m\begin{pmatrix} s, & t \\ x, & y \end{pmatrix} dx\,dy.$$

On en obtient de proche en proche

$$\varphi_m = A_m - \frac{m!}{(m-1)!}A_{m-1} + \frac{m!}{(m-2)!}A_{m-2} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{m!}{1!}A_1 + (-1)^m\frac{m!}{0!},$$

où l'on peut ommettre l'indication des arguments s, t, car, comme on voit, $\varphi_m(s,\,t)$ sont constants. Il s'ensuit que

$$1 - \frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{2!} - \cdots + (-1)^m\frac{A_m}{m!} = (-1)^m\frac{\varphi_m}{m!} = \frac{(-1)^m}{m!}\int_a^b \Phi_m\begin{pmatrix} s, & t \\ x, & y \end{pmatrix} dx\,dy,$$

d'où

$$\begin{aligned} D(1) &= \lim_{m\to\infty}\left[1 - \frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{2!} - \cdots + (-1)^m\frac{A_m}{m!}\right] \\ &= \lim_{m\to\infty}(-1)^m\frac{\varphi_m}{m!} \\ &= 0, \end{aligned}$$

car [voir la fin du n° 8]

$$|\varphi_m| \leqq \int_a^b \left|\Phi_m\begin{pmatrix} s, & t \\ x, & y \end{pmatrix}\right| dx\,dy \leqq [(b-a)\,M\sqrt{m} + 2]^{m+2},$$

$$M \geqq |\varphi(t,\,x,\,y)|,$$

donc en effet

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\varphi_m}{m!} = 0.$$

2°. Considérons le déterminant Δ du n° 3. En ajoutant à sa première colonnes toutes les autres et en le développant ensuite suivant les éléments de la première colonne, on obtient

$$\Delta = \sum_{k,\,l=1}^{n}\left[1 - \lambda\delta\sum_{m=1}^{n}\varphi_{klm}\right]\Delta_{kl\ 11}$$

d'où, pour $n\to\infty$,

$$D(\lambda) = (1 - \lambda) \int_a^b D\begin{pmatrix} x, y \\ y, a \end{pmatrix} \lambda \Big) \, dx \, dy$$

donc

$$D(1) = 0.$$

On peut encore prendre la relation

$$D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix} \lambda \Big) = D(\lambda) \varphi_0(s, t, x, y) + \lambda \int_a^b D\begin{pmatrix} \theta, x \\ s, t \end{pmatrix} \lambda \Big) \varphi(\theta, x, y) \, d\theta$$

et l'intégrer par rapport à x, y de a à b. Alors, à cause de (170),

$$D(\lambda) = (1 - \lambda) \int_a^b D\begin{pmatrix} x, y \\ s, t \end{pmatrix} \lambda \Big) \, dx \, dy.$$

3°. Considérons une matrice carrée

$$\begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{matrix} \tag{172}$$

qui a les propriétés suivantes:

a) *Tous les a_{ih} ne sont pas négatifs.*

b) *Quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$*

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} = 1.$$

c) *Dans chaque colonne il y a au moins un élément qui est différent de zéro.*

J'ai appelé les matrices ayant ces propriétés *matrices stocastiques* et j'ai considéré en détail les propriétés de leurs zéros dans un mémoire intitulé *Sur les zéros des matrices stocastiques* qui sera publié dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., 1932, en russe.

On sait que les zéros de la matrice (172) ne sont pas autre chose que les racines de l'équation

$$(173) \qquad \Phi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

dite l'équation caractéristique de la matrice (172).

Or, j'ai démontré dans ce mémoire que *cette équation a toujours la racine* $\lambda_0 = 1$ *et que cette racine est simple, si la matrice* (172) *n'a pas la forme*

$$\begin{matrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1k}, & a_{1,k+1} & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1}, & \ldots, & a_{kk}, & a_{k,k+1} & \ldots, & a_{k,n} \\ 0, & \ldots, & 0, & a_{k+1,k+1}, & \ldots, & a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots, & 0, & a_{n,k+1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{matrix}$$

ou ne peut pas être écrite sous cette forme après une permutation identique des lignes et des colonnes, où les carrés non vides peuvent avoir de nouveau cette forme spéciale, et que toutes les autres racines de (173) *sont de module* $\geqq 1$.

Ce résultat reste valable pour l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0$$

qu'on obtient en égalant à zéro le determinant du n° 3, si l'on a le soin d'y prendre pour φ_{ihk} les quantités $\varphi(\tau_i, \xi_h, \eta_k)$ telles que

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(\tau_i, \xi_h, \eta_k)\,\delta = 1,$$

ce qu'on peut toujours faire au moyen du théorème de la moyenne du calcul intégral et de la relation (170) et ce qui ne change pas la limite de $\Delta(\lambda)$ et de ses mineurs des divers ordres et, généralement, tous nos résultats obtenus plus haut pour l'équation (1). Donc, en allant à la limite, on voit que les propriétés des racines de (173) sont valables pour les racines de l'équation (171). Sans doute, on pourrait les démontrer directement, mais, pour abréger l'exposition, nous nous appuierons ici et plus loin sur les résultats du mémoire cité.

On voit maintenant, quel est le cas spécial dans lequel $\lambda_0 = 1$ n'est pas une racine simple de (171) et qu'il ne peut avoir lieu, si $\varphi(t, x, y)$ ne s'annule que pour un ensemble de valeurs de t, x, y de mesure nulle.

Nous supposerons que $\varphi(t, x, y)$ satisfait à cette dernière condition. Alors $\lambda_0 = 1$ est une racine simple de (171).

Théorème 12. *Soient $u_0(x, y)$ et $v_0(x, y)$ les solutions des équations*

$$u(x, y) = \int_a^b u(t, x)\,\varphi(t, x, y)\,dt, \tag{174}$$

$$v(x, y) = \int_a^b \varphi(x, y, t)\,v(y, t)\,dt. \tag{175}$$

Alors, $\lambda = 1$ étant une racine simple de (171) $u_0(x, y)$ est une fonction qui ne change jamais son signe dans (a, b) et $v_0(x, y)$ est une constante.

On voit immédiatement que $v_0(x, y)$ est une constante, car l'équation (175), à cause de (170), se vérifie par $v(x, y) = 1$ et, $\lambda_0 = 1$ étant une racine simple de (171), toutes les autres solutions de cette équation sont des constantes multipliées par 1.

La constance du signe de $u_0(x, y)$ se déduit du résultat suivant du mémoire cité plus haut.

Supposons que la matrice (172) a le zéro $\lambda_0 = 1$ simple. Alors les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, représentant une solution non nulle du système d'équations linéaires

$$x_h = \sum_{g=1}^{n} x_g\,a_{gh} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

sont de même signe.

Ce résultat s'étend immédiatement au système

$$u_{kl} = \delta \sum_{\lambda=1}^{n} u_{hk}\,\varphi_{hkl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

qu'on obtient en posant dans le système (11) du n° 3 $f_{kl} = 0$, $\lambda = 1$ et, comme plus haut, $\varphi_{hkl} = \varphi(\tau_h, \xi_k, \eta_l)$. Ensuite on verra sans beaucoup de peine que la limite de la solution non nulle de ce système est, à un facteur constant près, $u_0(x, y)$. Par conséquent, $u_0(x, y)$ ne change jamais son signe, donc peut toujours être posé égal à une fonction positive que nous désignerons par $p(x, y)$.

Remarquons encore que $p(x, y)$ est déterminé à un facteur constant près, donc on peut toujours supposer que cette fonction satisfait à la condition

$$\int_a^b p(x, y)\, dx\, dy = 1. \tag{176}$$

Théorème 13. *Si $\varphi(t, x, y)$ ne s'annule que pour un ensemble de valeurs de t, x, y de mesure nulle, l'équation $D(\lambda) = 0$ n'a qu'une seule racine de module 1 et cette racine est $\lambda_0 = 1$.*

Nous nous appuierons de nouveau sur le mémoire cité. On y trouve démontrés les résultats suivants.

I. *Pour que $\lambda = -1$ soit un zéro de la matrice* (172) *il faut et il suffit qu'elle soit de la forme*

$$\begin{array}{cccccc} 0, & \ldots, & 0 & a_{1,k+1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots, & 0 & a_{k,k+1}, & \ldots, & a_{k,n} \\ a_{k+1,1}, & \ldots, & a_{k+1,k} & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k} & 0, & \ldots, & 0 \end{array}$$

ou puisse être ramenée à cette forme par une permutation identique des lignes et des colonnes.

Soit ensuite

$$a_{hh} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{177}$$

et

$$a_{hg} = 0 \text{ toutes les fois que } a_{gh} \neq 0. \tag{178}$$

Alors on peut toujours trouver dans la matrice (172) des suites de la forme

$$a_{gh_1} \neq 0,\ a_{h_1 h_2} \neq 0,\ \ldots,\ a_{h_{k-1} g} \neq 0$$

que nous appelons *cycles de l'indice k*. La matrice (172) sera dite *matrice cycliquement homéomorphique et de l'indice k*, si les conditions (177) et (178) sont satisfaites et si les indices de tous les cycles de la matrice (172) ont pour plus grand diviseur commun le nombre $k \neq 1$. Alors on a le théorème:

II. *Pour que la matrice* (172) *ait comme zéros les racines complexes de l'unité d'ordre* k

$$\lambda_l = \cos\frac{2\pi + 2l\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi + 2l\pi}{k} \qquad (l = 0, 1, \ldots, k-1;\ k \geqq 2;\ \varepsilon = 0 \text{ ou } 1),$$

il faut et il suffit qu'elle soit cycliquement homéomorphique et de l'indice k (*pour* $\varepsilon = 0$) *ou* $2k$ (*pour* $\varepsilon = 1$).

En s'aidant de ces deux propositions on verra aisément que le théorème 13 est juste.

En résumant les résultats de ce numéro, nous pouvons dire que le noyau stocastique $\varphi(t, x, y)$, qui ne s'annule dans (a, b) que pour un ensemble de valeurs de t, x, y de mesure nulle, a une seule racine de module un, $\lambda_0 = 1$, que cette racine est simple et que toutes ses autres racines sont en valeur absolue plus grand que un.

Il s'ensuit que, si, pour un k, on a le développement uniformément convergent

$$\varphi_k(s, t, x, y) = \frac{U_1(x, y)\, V_1(s, t)}{(c')^{k+2}} + \frac{U_2(x, y)\, V_2(s, t)}{(c'')^{k+2}} + \cdots,$$

on aura

$$c' = 1;\ |c^{(h)}| > 1 \qquad (h = 2, 3, \ldots).$$

De plus, comme nous avons remarqué plus haut, on peut poser $U_1(x, y) = p(x, y)$, où $p(x, y)$ est une fonction qui n'est jamais négative et telle que

$$\int_a^b p(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Quant à $V_1(x, y)$ nous savons que c'est une constante arbitraire que nous pouvons donc poser égal à un. Par conséquent, on peut écrire

$$(179) \qquad \varphi_k(s, t, x, y) = p(x, y) + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{U_h(x, y)\, V_h(s, t)}{(c^{(h)})^{k+2}}.$$

La série (179) converge évidemment pour toute valeur plus grande de k et converge uniformément, — on en conclut que, uniformément dans (a, b),

$$(180) \qquad \lim_{k \to \infty} \varphi_k(s, t, x, y) = p(x, y).$$

C'est un résultat d'une grande importance pour la théorie des probabilités.

En effet, dans le problème de probabilités, qui a été posé dans le n° 1, on a eu

$$p_k(x, y) = \int_a^b p_{k-1}(t, x)\,\varphi(t, x, y)\,dt$$

et

$$p_k(x) = \int_a^b p_{k-3}(s, t)\,\varphi(s, t, x)\,ds\,dt,$$

où $p_k(x, y)$ et $p_k(x)$ sont les lois différentielles de probabilités des valeurs x, y et x de X dans le chaînon de numéro k et dans la k-ième épreuve respectivement quand les résultats de toutes les autres épreuves sont inconnus. De la première de ces égalités, de proche en proche, on obtient

$$p_{k+2}(x, y) = \int_a^b p_0(s, t)\,\varphi_k(s, t, x, y)\,ds\,dt. \tag{181}$$

Donc, à cause de (180),

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} p_{k+2}(x, y) &= \int_a^b p_0(s, t)\,p(x, y)\,ds\,dt \\ &= p(x, y).\end{aligned}$$

La seconde des égalités nous donne alors

$$\lim_{k\to\infty} p_k(x) = \int_a^b p(s, t)\,\varphi(s, t, x)\,ds\,dt.$$

Or $p(x, y)$, satisfaisant à l'équation intégrale

$$p(x, y) = \int_a^b p(t, x)\,\varphi(t, x, y)\,dt,$$

ne dépend pas de la loi initiale de probabilités $p_0(x, y)$ et nous voyons que, dans nos conditions, les lois finales de probabilités pour les chaînons et pour les épreuves quand les résultats des autres épreuves sont inconnus sont indépendantes de la loi initiale $p_0(x, y)$.

Remarquons encore deux résultats simples qui découlent de notre théorie des noyaux stocastiques.

Comme $|c^{(h)}| > 1$ pour $h = 2, 3, \ldots$, on tire de l'équation

$$U_h(x, y) = c^{(h)} \int_a^b U_h(t, x) \varphi(t, x, y)\, dt$$

la conclusion immédiate

$$(182) \qquad \int_a^b U_h(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots).$$

Enfin, en posant

$$(183) \qquad A_h = \int_a^b p_0(s, t)\, V_h(s, t)\, ds\, dt \qquad (h = 2, 3, \ldots),$$

on obtient à l'aide du développement (179) et de la relation (181), en y remplaçant $k + 2$ par k,

$$(184) \qquad p_k(x, y) = p(x, y) + \sum_{h=2}^{\infty} A_h (c^{(h)})^{-k}\, U_h(x, y).$$

16. *Extension des résultats précédents.* Nous avons considéré dans le n° 1 les chaînes de Markoff qu'on peut appeler biconnexes, car les probabilités des valeurs différentes de X dans une épreuve quelconque dépendent des valeurs de X dans les *deux* épreuves précédentes. La généralisation naturelle du problême que nous avons considéré consiste à considérer les chaînes de Markoff multiconnexes, ce qui conduit aux équations intégrales de la forme suivante

$$(185) \quad u(x_1, \ldots, x_\nu) = f(x_1, \ldots, x_\nu) + \lambda \int_a^b u(t, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt,$$

$$(186) \qquad u(x_1, \ldots, x_\nu) = \lambda \int_a^b u(t, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt,$$

où $u(x_1, \ldots, x_\nu)$ est une fonction inconnue à ν variables, λ un paramètre et $f(x_1, \ldots, x_\nu)$ et $\varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)$, le noyau de ces équations, des fonctions données, que nous supposerons continues pour $t, x_1, \ldots, x_\nu$ contenus dans l'intervalle fini (a, b).

Nous appelons ces équations *équations intégrales linéaires transgressives à ν variables.*

Dans la théorie des équations de Fredholm, comme dans celle des équations considérés plus haut, le rôle fondamental est joué par les déterminants de ces équations, leurs mineurs, les relations fonctionnelles entre les mineurs de divers ordres, les relations entre les dérivées du déterminant par rapport à λ et les mineurs et, enfin, par le théorème sur la possibilité de former pour l'équation homogène des noyaux arbitraires équivalents l'un à l'autre dans un certain sens (théorème 6, n° 11). Par cette cause nous n'établirons dans le suivant pour les équations (185) et (186) que ces points fondamentaux; le reste en découle tout à fait comme pour les équations déjà considérées ou comme pour les équations de Fredholm. De plus, la théorie des équations (185) et (186) est dans un tel degré analogue à celle qui est exposée plus haut que nous pouvons abréger notre exposition et n'en décrire que les points les plus importants.

Comme point de départ nous prendrons de nouveau le problème algébrique correspondant et considérons le système

(187)
$$u_{k_1 \ldots k_\nu} = f_{k_1 \ldots k_\nu} + \lambda\delta \sum_{h=1}^{n} u_{h k_1 \ldots k_{\nu-1}} \varphi_{h k_1 \ldots k_\nu}$$
$$(k_1, \ldots, k_\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$u_{k_1 \ldots k_\nu} = u(x_{1k_1}, \ldots, x_{\nu k_\nu}),$$
$$u_{h k_1 \ldots k_{\nu-1}} = u(t_k, x_{1k_1}, \ldots, x_{\nu-1, k_{\nu-1}}),$$
etc.,

$x_{l0}, x_{l1}, \ldots, x_{ln}$ $(l = 1, 2, \ldots, \nu)$; $t_0, t_1, \ldots, t_n$ $(x_{l0} = a,\ x_{ln} = b,\ t_0 = a,\ t_n = b)$ étant les points d'une subdivision équidistante de l'intervalle (a, b) telle que

$$\delta = x_{li} - x_{l,i-1} = t_i - t_{i-1}$$

et

$$x_{1i} = x_{2i} = \cdots = x_{\nu i} = t_i \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Nous pouvons encore écrire (187) sous la forme

(187′)
$$u_q = f_q + \lambda\delta \sum_p u_p a_{pq},$$

en posant

$$q = k_1 \dots k_\nu,\ p = l_1 \dots l_\nu,$$

et sommer $\left(\sum\limits_p\right)$ pour toutes les n^ν valeurs de p, si nous convenons que

$$(188) \qquad a_{pq} = \varphi_{l_1 k_1 \dots k_\nu} \text{ pour } l_2 = k_1, \dots, l_\nu = k_{\nu-1},$$

$$(188') \qquad a_{pq} = 0 \text{ pour } l_2 \neq k_1, \text{ ou } l_3 \neq k_2, \dots, \text{ ou } l_\nu \neq k_{\nu-1}.$$

Nous dirons que dans le cas (188) les indices p et q sont congruents et qu'ils sont incongruents dans le cas (188'). Il est commode, comme on constatera plus loin, d'écrire le groupe $k_1 k_2 \dots k_\nu$ soit dans la forme $k_1 k'_1$ soit dans la forme $k'_\nu k_\nu$ en posant $k'_1 = k_2 k_3 \dots k_\nu$ et $k'_\nu = k_1 k_2 \dots k_{\nu-1}$. Nous écrirons

$$(189) \qquad \begin{aligned} &l'_1 = k'_\nu \text{ si } l_2 = k_1,\ l_3 = k_2, \dots, l_\nu = k_{\nu-1}; \\ &l'_1 \neq k'_\nu \text{ si } l_2 \neq k_1, \text{ ou } l_3 \neq k_2, \dots, \text{ ou } l_\nu \neq k_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Alors les conditions (188) et (188') peuvent s'écrire comme il suit

$$(190) \qquad a_{l_2 l'_1 | k'_\nu k_\nu} = \begin{cases} \varphi_{l_1 l'_1 k_\nu} & \text{pour } l'_1 = k'_\nu, \\ 0 & \text{pour } l'_1 \neq k'_\nu. \end{cases}$$

On voit que les conditions (189) sont les conditions de congruence et d'incongruence des indices multiples $l_1 l_2 \dots l_\nu$ et $k_1 k_2 \dots k_\nu$.

Considérons maintenant le déterminant

$$(191) \qquad \varDelta = | e_{pq} - \lambda \delta a_{pq} |$$

du système (187), en posant $e_{pq} = 1$ si p et q sont identiques et $e_{pq} = 0$ s'ils ne le sont pas.

Le développement de $\varDelta$ sera, comme toujours,

$$(192) \qquad \varDelta = 1 - \frac{\lambda\delta}{1} \sum_{p_1} D\begin{pmatrix} p_1 \\ p_1 \end{pmatrix} + \frac{(\lambda\delta)^2}{1 \cdot 2} \sum_{p_1, p_2} D\begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix} - \cdots$$

et, pour trouver sa limite quand $n \to \infty$, on doit trouver les limites des sommes

$$(193) \qquad \delta^m \sum_{p_1, \dots, p_m} D\begin{pmatrix} p_1, \dots, p_m \\ p_1, \dots, p_m \end{pmatrix},$$

où

$$D\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{p_1 p_1} & \ldots & a_{p_1 p_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_m p_1} & \ldots & a_{p_m p_m} \end{vmatrix}, \tag{194}$$

$$p_i = k_{1i} k_{2i} \ldots k_{\nu i} = k_{1i} k'_{1i} = k'_{\nu i} k_{\nu i},$$

et la somme doit être prise pour chaque p_i, en donnant à chacun des indices $k_{1i}, k_{2i}, \ldots, k_{\nu i}$ les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Comme plus haut on peut séparer dans la somme (193) sa partie principale qui consiste de la somme des déterminants (194) dépendant de m indices variant indépendamment. La limite de la partie principale de (193) est un nombre défini différent en général de zéro et la limite de la somme de tous les autres membres est égale à zéro.

Pour que (194) ne soit pas identiquement nul il faut que dans chaque ligne et dans chaque colonne se trouve au moins une paire d'indices congruents. Le plus grand nombres des k_{ih} ($i=1, 2, \ldots, \nu$; $h=1, 2, \ldots, m$) variant indépendamment pour lequel cela se vérifie est m. On peut le voir de la manière suivante.

Un membre quelconque du déterminant (194) est, sauf le signe,

$$a_{p_1 p'_1} a_{p_2 p'_2} \ldots a_{p_m p'_m}, \tag{195}$$

où $p_1', p_2', \ldots, p'_m$ est une permutation des indices $p_1, p_2, , \ldots, p_m$. Ces indices, p_i et p'_i, se partagent dans des groupes cycliques, tels, par exemple, que $p_1 p_3$, $p_3 p_5$, $p_5 p_1$, si l'on permute convenablement les facteurs de (195). Voyons quelles conditions doivent être satisfaites pour que chacun de ces cycles contienne le plus grand nombre d'indices k_{ih} indépendants et (195) ne soit pas zéro, c'est-à-dire que toutes ses paires d'indices soient congruentes.

Commençons par le cas le plus simple: par un cycle tel que $p_1 p_1$. On voit immédiatement que p_1 n'est congruent à lui même que quand il consiste de ν indices simples identiques, c'est-à-dire quand il est de la forme $p_1 = k_1 k_1 \ldots k_1$.

Prenons ensuite le cycle $p_1 p_2$, $p_2 p_1$. On vérifie que $p_1 p_2$ et $p_2 p_1$ sont congruents en même temps quand

$$p_1 = k_1 k_2 \, k_1 k_2 \ldots \quad \text{et} \quad p_2 = k_2 k_1 \, k_2 k_1 \ldots$$

et dans ce cas seulement, si l'on s'efforce de conserver le plus grand nombre des indices k_{ih} indépendants.

Généralement, le cycle $p_1 p_2, p_2 p_3, \ldots, p_\mu p_1$ ne sera composé de paires congruentes et ne contiendra le plus grand nombre d'indices indépendants simples que quand on aura

$$(196)\qquad \begin{aligned} p_1 &= k_1 k_2 \ldots k_\mu k_1 k_2 \ldots k_\mu \ldots, \\ p_2 &= k_2 \ldots k_\mu k_1 k_2 \ldots k_\mu k_1 \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu &= k_\mu k_1 \ldots k_{\mu-1} k_\mu k_1 \ldots k_{\mu-1} \ldots. \end{aligned}$$

Nous écrirons ces égalités et leurs analogues sous la forme abrégée

$$(197)\qquad p_1 = (k_1 k_2 \ldots k_\mu),\ p_2 = (k_2 \ldots k_\mu k_1), \ldots, p_\mu = (k_\mu k_1 \ldots k_{\mu-1}),$$

en indiquant dans les parenthèses les cycles dont consistent les indices multiples $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$.

On voit par ce raisonnement que (195) ne peut pas contenir plus que m indices k_{ih} indépendants à condition de ne pas être identique à zéro. De plus, on voit que le développement du déterminant (194) ne peut avoir qu'un seul membre différent de zéro et contenant m indices k_{ih} indépendants. Cela découle de ce qu'un indice p_i ne peut être congruent qu'à un indice qui le suit dans un cycle défini.

Définissons maintenant l'opération C comme il suit. On prend un membre quelconque

$$(198)\qquad \pm (k_1 k_{\alpha_1})(k_2 k_{\alpha_2}) \ldots (k_m k_{\alpha_m})$$

du déterminant

$$(199)\qquad A\begin{pmatrix} k_1, k_2, \ldots, k_m \\ k_1, k_2, \ldots, k_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k_1\ k_1 & k_1\ k_2 \ldots k_1\ k_m \\ k_2\ k_1 & k_2\ k_2 \ldots k_2\ k_m \\ \ldots & \ldots\ldots \\ k_m k_1 & k_m k_2 \ldots, k_m k_m \end{vmatrix}$$

et on l'arrange suivant ses cycles

$$(198')\qquad \begin{aligned} \pm (k_1 k_{\alpha_1}) \ldots (k_m k_{\alpha_m}) = \pm & (k'_1 k'_2)(k'_2 k'_3) \ldots (k'_{\mu_1} k'_1) \\ & (k''_1 k''_2)(k''_2 k''_3) \ldots (k''_{\mu_2} k''_1) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Alors l'opération C, appliquée à ce membre, consistera, par définition, dans l'association à ce membre du nombre

$$\text{(200)} \qquad \begin{array}{l} \pm\, a_{p'_1 p'_2}\, a_{p'_2 p'_3} \ldots a_{p'_{\mu_1} p'_1} \\ a_{p''_1 p''_2}\, a_{p''_2 p''_3} \ldots a_{p''_{\mu_2} p''_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

pris avec le signe du membre (198) et contenant les indices

$$\begin{aligned} p'_1 &= (k'_1\, k'_2 \ldots k'_{\mu_1}), \\ p'_2 &= (k'_2 \ldots k'_{\mu_1}\, k'_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p'_{\mu_1} &= (k'_{\mu_1}\, k'_1 \ldots k'_{\mu_1-1}); \\ p''_1 &= (k''_1\, k''_2 \ldots k''_{\mu_2}), \\ p''_2 &= (k''_2 \ldots k''_{\mu_2}\, k''_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p''_{\mu_2} &= (k''_{\mu_2}\, k''_1 \ldots k''_{\mu_2-1}) \end{aligned}$$

etc.

Evidemment (200) est égal à

$$\text{(200')} \qquad \begin{array}{l} \pm\, \varphi(k'_1 k'_2 \ldots k'_{\mu_1})\, \varphi(k'_2 \ldots k'_{\mu_1} k'_1) \ldots \varphi(k'_{\mu_1} k'_1 \ldots k'_{\mu_1-1}) \cdot \\ \cdot\, \varphi(k''_1 k''_2 \ldots k''_{\mu_2})\, \varphi(k''_2 \ldots k''_{\mu_2} k''_1) \ldots \varphi(k''_{\mu_2} k''_1 \ldots k''_{\mu_2-1}) \cdot \\ \cdot \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

$(k'_1\, k'_2 \ldots k'_{\mu_1})$, $(k'_2\, k'_3 \ldots k'_{\mu_1} k'_1)$ etc. désignant ici les indices $(\nu+1)$-iples formés avec les cycles $k'_1\, k'_2 \ldots k'_{\mu_1}$ etc., de sorte que

$$(k'_1\, k'_2 \ldots k'_{\mu_1}) = k'_1\, k'_2 \ldots k'_{\mu_1}\, k'_1\, k'_2 \ldots k'_{\mu_1} \ldots$$

etc., la partie droite consistant de $\nu+1$ indices simples.

Désignons maintenant par

$$C\left[A\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_m \\ k_1, \ldots, k_m \end{pmatrix}\right]$$

la somme des quantités (200′) obtenues au moyen de tous les membres du développement du déterminant (199) par application de l'opération C à chacun d'eux. Alors il est claire qu'on peut écrire

$$A_m \equiv \lim_{n\to\infty} \delta^m \sum_{p_1,\ldots,p_m} D\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix}$$

(201)
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} C\left[A\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_m \\ k_1, \ldots, k_m \end{pmatrix}\right]\delta^m$$

$$= \int_a^b \varDelta\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ x_1, \ldots, x_m \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_m,$$

où

(202)
$$\varDelta\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ x_1, \ldots, x_m \end{pmatrix} = C\left[A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ x_1, \ldots, x_m \end{pmatrix}\right].$$

Par exemple, pour $\nu=4$, $m=1, 2, 3$:

$$\varDelta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = C\left[A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = \varphi(x_1, x_1, x_1, x_1, x_1);$$

$$\varDelta\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} = C\left[A\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix}\right] = C\left[(x_1 x_1)(x_2 x_2) - (x_1 x_2)(x_2 x_1)\right]$$

$$= \varphi(x_1, x_1, x_1, x_1, x_1)\,\varphi(x_2, x_2, x_2, x_2, x_2)$$

$$- \varphi(x_1, x_2, x_1, x_2, x_1)\,\varphi(x_2, x_1, x_2, x_1, x_2);$$

$$\varDelta\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} = C\left[A\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= C\left[(x_1 x_1)(x_2 x_2)(x_3 x_3) - (x_1 x_1)(x_2 x_3)(x_3 x_2)\right.$$

$$+ (x_1 x_2)(x_2 x_3)(x_3 x_1) - (x_1 x_2)(x_2 x_1)(x_3 x_3)$$

$$\left.+ (x_1 x_3)(x_3 x_2)(x_2 x_1) - (x_1 x_3)(x_3 x_1)(x_2 x_2)\right]$$

$$= \varphi(x_1, x_1, x_1, x_1, x_1)\,\varphi(x_2, x_2, x_2, x_2, x_2)\,\varphi(x_3, x_3, x_3, x_3, x_3)$$

$$- \varphi(x_1, x_1, x_1, x_1, x_1)\,\varphi(x_2, x_3, x_2, x_3, x_2)\,\varphi(x_3, x_2, x_3, x_2, x_3)$$

$$+ \varphi(x_1, x_2, x_3, x_1, x_2)\,\varphi(x_2, x_3, x_1, x_2, x_3)\,\varphi(x_3, x_1, x_2, x_3, x_1)$$

$$- \varphi(x_1, x_2, x_1, x_2, x_1)\,\varphi(x_2, x_1, x_2, x_1, x_2)\,\varphi(x_3, x_3, x_3, x_3, x_3)$$

$$+ \varphi(x_1, x_3, x_2, x_1, x_3)\,\varphi(x_3, x_2, x_1, x_3, x_2)\,\varphi(x_2, x_1, x_3, x_2, x_1)$$

$$- \varphi(x_1, x_3, x_1, x_3, x_1)\,\varphi(x_3, x_1, x_3, x_1, x_3)\,\varphi(x_2, x_2, x_2, x_2, x_2).$$

Revenons au développement (192). On obtient à l'aide de (201)

$$D(\lambda) \equiv \lim_{n\to\infty} \varDelta = 1 - \frac{\lambda}{1} A_1 + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2} A_2 - \cdots \tag{203}$$

et on démontre aisément que la série à droite représente une fonction entière de λ.

Envisageons maintenant le système (187). Sa solution peut être mise dans la forme

$$\begin{aligned} u_{k_1\ldots k_\nu} \equiv u_p &= \frac{1}{\varDelta}\sum_{pq} \varDelta_{pq} f_q \\ &= \frac{\varDelta_{k_1\ldots k_\nu|k_1\ldots k_\nu}}{\varDelta} f_{k_1\ldots k_\nu} \\ &+ \frac{1}{\varDelta}\sum_{l_1=1}^{n}{}' \varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1 k_1\ldots k_{\nu-1}} f_{l_1 k_2\ldots k_{\nu-1}} \\ &+ \frac{1}{\varDelta}\sum_{l_1,l_2=1}^{n}{}' \varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1 l_2 k_1\ldots k_{\nu-2}} f_{l_1 l_2 k_1\ldots k_{\nu-2}} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{1}{\varDelta}\sum_{l_1,\ldots,l_{\nu-1}=1}^{n}{}' \varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1\ldots l_{\nu-1}k_1} f_{l_1\ldots l_{\nu-1}k_1} \\ &+ \frac{1}{\varDelta}\sum_{l_1,\ldots l_\nu=1}^{n}{}' \varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1\ldots l_\nu} f_{l_1\ldots l_\nu}, \end{aligned} \tag{204}$$

où Σ' désigne que dans chaque sommation on exclue les membres déjà contenus dans les sommes précédentes, y inclus le premier membre

$$\frac{1}{\varDelta}\varDelta_{k_1\ldots k_\nu|k_1\ldots k_\nu} f_{k_1\ldots k_\nu},$$

$\varDelta_{k_1\ldots k_\nu|k_1\ldots k_\nu}$, $\varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1 k_2\ldots k_\nu}$, etc. désignant les mineurs de $\varDelta$.

Supposons que $D(\lambda) \neq 0$.

Par un raisonnement tout à fait pareil à celui qui nous a conduit à (201) et (202), on établit les limites suivantes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varDelta_{k_1\ldots k_\nu|k_1\ldots k_\nu}}{\varDelta} f_{k_1\ldots k_\nu} = f(x_1,\ldots,x_\nu);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varDelta} \sum_{l_1}' \varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1 k_1\ldots k_{\nu-1}} f_{l_1 k_1\ldots k_{\nu-1}} = \lambda \int_a^b f(t_1, x_1,\ldots,x_{\nu-1})\,\varphi(t_1,x_1,\ldots,x_\nu)\,dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varDelta} \sum_{l_1,l_2}' \varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1 l_2 k_1\ldots k_{\nu-2}} f_{l_1 l_2 k_1\ldots k_{\nu-2}}$$

$$= \lambda^2 \int_a^b f(t_1,t_2,x_1,\ldots,x_{\nu-2})\,\varphi(t_1,t_2,x_1,\ldots,x_{\nu-1})\,\varphi(t_2,x_1,\ldots,x_\nu)\,dt_1\,dt_2,$$

(205) etc.,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varDelta} \sum_{l_1,\ldots,l_{\nu-1}}' \varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1 l_2\ldots l_{\nu-1}k_1} f_{l_1 l_2\ldots l_{\nu-1}k_1} =$$

$$= \lambda^{\nu-1} \int_a^b f(t_1,\ldots,t_{\nu-1},x_1)\,\varphi(t_1,\ldots,t_{\nu-1},x_1,x_2)\,\varphi(t_2,\ldots,t_{\nu-1},x_1,x_2,x_3)\ldots$$

$$\cdot\,\varphi(t_{\nu-1},x_1,\ldots,x_\nu)\,dt_1\ldots dt_{\nu-1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varDelta} \sum_{l_1,\ldots,l_\nu}' \varDelta_{k_1\ldots k_\nu|l_1\ldots l_\nu} f_{l_1\ldots l_\nu}$$

$$= \lambda^\nu \int_a^b \frac{D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_\nu \\ t_1,\ldots,t_\nu \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)} f(t_1,\ldots,t_\nu)\,dt_1\ldots dt_\nu$$

où

$$D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_\nu \\ t_1,\ldots,t_\nu \end{pmatrix}\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!}\,\varPhi_m\begin{pmatrix} t_1,\ldots,t_\nu \\ x_1,\ldots,x_\nu \end{pmatrix}, \tag{206}$$

$$\varPhi_m\begin{pmatrix} t_1,\ldots,t_\nu \\ x_1,\ldots,x_\nu \end{pmatrix} = (-1)^{\nu-1} \int_a^b \begin{matrix} t_1\ldots t_\nu \\ x_1\ldots x_\nu \end{matrix}\, \varDelta\begin{pmatrix} \theta_1,\ldots,\theta_m \\ \theta_1,\ldots,\theta_m \end{pmatrix} d\theta_1\ldots d\theta_m, \tag{207}$$

$$\begin{matrix} t_1\ldots t_\nu \\ x_1\ldots x_\nu \end{matrix}\, \varDelta\begin{pmatrix} \theta_1,\ldots,\theta_m \\ \theta_1,\ldots,\theta_m \end{pmatrix} = \begin{matrix} t_1\ldots t_\nu \\ x_1\ldots x_\nu \end{matrix}\, C\left[A\begin{pmatrix} t_\nu,\theta_1,\ldots,\theta_m \\ x_1,\theta_1,\ldots,\theta_m \end{pmatrix}\right] \tag{208}$$

et

$$\begin{matrix} t_1\ldots t_\nu \\ x_1\ldots x_\nu \end{matrix}\, C\left[A\begin{pmatrix} t_\nu,\theta_1,\ldots,\theta_m \\ x_1,\theta_1,\ldots,\theta_m \end{pmatrix}\right]$$

désigne la somme qu'on obtient en appliquant à chaque membre du développement du déterminant

$$A\begin{pmatrix} t_\nu, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_1, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}, \tag{209}$$

pris avec son signe, l'opération

$$\begin{matrix} t_1 \ldots t_\nu \\ x_1 \ldots x_\nu \end{matrix} C,$$

définie comme il suit.

Soient

$$A' = \pm\, (t_\nu x_1)(\theta_1 \theta_2)(\theta_2 \theta_3)(\theta_3 \theta_1) \ldots,$$

$$A'' = \pm\, (t_\nu \theta_1)(\theta_1 \theta_2)(\theta_1 x_1)(\theta_3 \theta_3) \ldots$$

des membres quelconques du développement du déterminant (209). Alors

$$\begin{matrix} t_1 \ldots t_\nu \\ x_1 \ldots x_\nu \end{matrix} C[A'] = (-1)^{\nu-1} [\pm\, \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_\nu, x_1)\, \varphi(t_2, \ldots, t_\nu, x_1, x_2) \ldots \varphi(t_\nu, x_1, \ldots x_\nu) \cdot$$
$$\cdot\, \varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots)\, \varphi(\theta_2, \theta_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_1, \ldots)\, \varphi(\theta_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_1, \theta_2, \ldots)$$
$$\ldots.],$$

$$\begin{matrix} t_1 \ldots t_\nu \\ x_1 \ldots x_\nu \end{matrix} C[A''] = (-1)^{\nu-1} [\pm\, \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \theta_1)\, \varphi(t_2, t_3, \ldots, t_\nu, \theta_1, \theta_2) \cdot$$
$$\cdot\, \varphi(t_3, t_4, \ldots, t_\nu, \theta_1, \theta_2, x_1)\, \varphi(t_4, \ldots, t_\nu, \theta_1, \theta_2, x_1, x_2) \ldots \varphi(\theta_2, x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \cdot$$
$$\cdot\, \varphi(\theta_3, \theta_3, \theta_3, \ldots) \ldots].$$

Cette définition de l'opération considérée découle du fait que, par exemple, les seuls membres non identiquement nuls dans le développement du déterminant

$$D\begin{pmatrix} q, r_1, \ldots, r_m \\ p, r_1, \ldots, r_m \end{pmatrix} \qquad (m \geqq \nu - 1)$$

sont ceux qui contiennent des quasi cycles

$$(q\, r'_1)(r'_1\, r'_2) \ldots (r'_\sigma\, p)$$

avec $\sigma \geqq \nu - 1$, et de la condition qu'on considère seulement ceux des déterminants

$$D\begin{pmatrix} q, r_1, \ldots, r_m \\ p, r_1, \ldots, r_m \end{pmatrix}$$

qui dépendent du plus grand nombre possible d'indices indépendants, les indices p et q étant supposés fixes.

Remarquons que le mineur (206) s'obtient comme la limite du développement

$$\Delta_{pq}=\lambda\delta\left[a_{qp}-\frac{\lambda\delta}{1}\sum_{r_1} D\begin{pmatrix} q, r_1 \\ p, r_1 \end{pmatrix}+\frac{(\lambda\delta)^2}{1\cdot 2}\sum_{r_1, r_2} D\begin{pmatrix} q, r_1, r_2 \\ p, r_1, r_2 \end{pmatrix}-\ldots\right],$$

divisé par $(\lambda\delta)^r$; ce développement, pour $k_2 \neq l_1$, $k_3 \neq l_2$, ..., $k_\nu \neq l_{\nu-1}$, commence par le membre

$$(-1)^{\nu-1}\frac{\lambda^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\sum_{r_1, \ldots, r_{\nu-1}} D\begin{pmatrix} q, r_1, \ldots, r_{\nu-1} \\ p, r_1, \ldots, r_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

tous les membres précédents étant nécessairement nuls.

On démontre aisément que (206) représente une fonction entière en λ pour $x_1, \ldots, x_\nu$, $t_1, \ldots, t_\nu$ contenus dans (a, b).

Les quantités A_m, Φ_m et le mineur (206) satisfont aux relations

$$(210) \qquad A_{m+1}=A_1 A_m - m\int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_\nu \\ x_1, \ldots, x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu;$$

$$(211) \quad \Phi_m\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\nu \\ x_1, \ldots, x_\nu \end{pmatrix}=A_m\Phi_0\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\nu \\ x_1, \ldots, x_\nu \end{pmatrix}$$
$$-m\int_a^b \varphi(t_1, \ldots, t_\nu, \theta)\,\Phi_{m-1}\begin{pmatrix} t_2, \ldots, t_\nu, \theta \\ x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu \end{pmatrix} d\theta$$
$$=A_m\Phi_0\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\nu \\ x_1, \ldots, x_\nu \end{pmatrix}$$
$$-m\int_a^b \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_{\nu-1}, t_\nu \\ \theta, x_1, \ldots, x_{\nu-1} \end{pmatrix}\varphi(\theta, x_1, \ldots, x_\nu)\,d\theta,$$

$$(212) \quad \Phi_0\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\nu \\ x_1, \ldots, x_\nu \end{pmatrix}=\varphi(t_1, \ldots, t_\nu, x_1)\,\varphi(t_2, \ldots, t_\nu, x_1, x_2)\ldots\varphi(t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu);$$

$$
(212)\quad
\begin{aligned}
D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_\nu \\ t_1, \ldots, t_\nu \end{pmatrix} \lambda\Bigg) &= D(\lambda)\, \Phi_0 \begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\nu \\ x_1, \ldots, x_\nu \end{pmatrix} + \\
&+ \lambda \int_a^b D\begin{pmatrix} \theta, x_1, \ldots, x_{\nu-1} \\ t_1, t_2, \ldots, t_\nu \end{pmatrix} \lambda\Bigg) \varphi(\theta, x_1, \ldots, x_\nu)\, d\theta \\
&= D(\lambda)\, \Phi_0 \begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_\nu \\ x_1, \ldots, x_\nu \end{pmatrix} \\
&+ \lambda \int_a^b \varphi(t_1, \ldots, t_\nu, \theta)\, D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu \\ t_2, \ldots, t_\nu, \theta \end{pmatrix} d\theta.
\end{aligned}
$$

Au moyen des relations (212) on démontre que l'équation (185) a une seule solution continue, donnée par la formule

$$
(213)\quad
\begin{aligned}
u(x_1, \ldots, x_\nu) &= f(x_1, \ldots, x_\nu) + \lambda \int_a^b f(t_1, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t_1, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt, \\
&+ \lambda^2 \int_a^b f(t_1, t_2, x_1, \ldots, x_{\nu-2})\, \varphi(t_1, t_2, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t_2, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1\, dt_2 \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \lambda^{\nu-1} \int_a^b f(t_1, \ldots, t_{\nu-1}, x_1)\, \varphi(t_1, \ldots, t_{\nu-1}, x_1, x_2) \ldots \varphi(t_{\nu-1}, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1 \ldots dt_{\nu 1-} \\
&+ \lambda^\nu \int_a^b f(t_1, \ldots, t_\nu) \frac{D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_\nu \\ t_1, \ldots, t_\nu \end{pmatrix} \lambda\Bigg)}{D(\lambda)}\, dt_1 \ldots dt_\nu,
\end{aligned}
$$

si

$$
D(\lambda) \neq 0.
$$

Pour déterminer les mineurs de l'équation (185) d'ordres supérieurs nous introduirons des notations simplifiées, et nommément nous désignerons les ensembles de variables tels que

$$
x_{i1},\ x_{i2},\ \ldots,\ x_{i\nu} \quad \text{ou} \quad t_{h1},\ t_{h2},\ \ldots,\ t_{h\nu}
$$

par

$$
X_i \quad \text{ou} \quad T_h.
$$

Alors, en considérant la limite du développement

$$\Delta_{p_1 q_1 | p_2 q_2 \ldots | p_\mu q_\mu} = (\lambda\,\delta)^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\delta)^m}{m!} \sum_{r_1, \ldots, r_m} D\begin{pmatrix} q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_m \\ p_1, \ldots, p_\mu, r_1, \ldots, r_m \end{pmatrix}$$

d'un mineur d'ordre $n-\mu$ du déterminant Δ, où p_i et q_i sont les indices multiples $k_{1i}, \ldots, k_{\nu i}$ et $l_{1i}, \ldots, l_{\nu i}$ tels que $l_{\nu i} \neq k_{1i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$, on parvient aux résultats suivants:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{p_1 q_1 | \ldots | p_\mu q_\mu}}{(\lambda\,\delta)^{\nu\mu}} \equiv D\begin{pmatrix} X_1, \ldots, X_\mu \\ T_1, \ldots, T_\mu \end{pmatrix}\lambda$$

(214)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!}\,\Phi_m \begin{pmatrix} T_1, \ldots, T_\mu \\ X_1, \ldots, X_\mu \end{pmatrix},$$

(215) $$\Phi_m \begin{pmatrix} T_1, \ldots, T_\mu \\ X_1, \ldots, X_\mu \end{pmatrix} = (-1)^{(\nu-1)\mu} \int_a^b \frac{T_1 \ldots T_\mu}{X_1 \ldots X_\mu}\,\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} d\theta_1 \ldots d\theta_m,$$

où

(216) $$\frac{T_1 \ldots T_\mu}{X_1 \ldots X_\mu}\,\Delta\begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} = \frac{T_1 \ldots T_\mu}{X_1 \ldots X_\mu}\,C\left[A\begin{pmatrix} t_{1\nu}, t_{2\nu}, \ldots, t_{\mu\nu}, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{\mu 1}, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix}\right],$$

l'opération $\dfrac{T_1 \ldots T_\mu}{X_1 \ldots X_\mu}\,C$ étant appliquée à tous les membres du développement du déterminant placé sous le signe de cette opération et suivant une règle qui est claire de l'exemple suivant:

$$\frac{T_1 \ldots T_\mu}{X_1 \ldots X_\mu}\,C[\pm (t_{1\nu} x_{11})(t_{2\nu} x_{31})(t_{3\nu}\theta_1)(\theta_1\theta_2)(\theta_2 x_{21})(\theta_3\theta_3)(\theta_4\theta_5)(\theta_5\theta_4)\ldots]$$

$$= (-1)^{(\nu-1)\mu}[\pm\varphi(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1\nu}, x_{11})\,\varphi(t_{12}, \ldots, t_{1\nu}, x_{11}, x_{12}) \ldots \varphi(t_{1\nu}, x_{11}, \ldots, x_{1\nu}).$$

$$.\,\varphi(t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{2\nu}, x_{31})\,\varphi(t_{22}, \ldots, t_{2\nu}, x_{31}, x_{32}) \ldots \varphi(t_{2\nu}, x_{31}, \ldots, x_{3\nu})\,.$$

$$.\,\varphi(t_{31}, t_{32}, \ldots, t_{3\nu}, \theta_1)\,\varphi(t_{32}, \ldots, t_{3\nu}, \theta_1, \theta_2)\,\varphi(t_{33}, \ldots, t_{3\nu}, \theta_1, \theta_2, x_{21}) \ldots \varphi(\theta_2, x_{21}, \ldots, x_{2\nu})\,.$$

$$.\,\varphi(\theta_3, \theta_3, \theta_3, \ldots, \theta_3)\,\varphi(\theta_4, \theta_5, \theta_4, \theta_5, \ldots)\,\varphi(\theta_5, \theta_4, \theta_5, \theta_4, \ldots) \ldots].$$

On peut écrire (216) comme il suit:

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} T_1 \ldots T_\mu \\ X_1 \ldots X_\mu \end{matrix} \Delta \begin{pmatrix} \theta_1, \ldots, \theta_m \\ \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} = \\ &= \begin{matrix} T_1 \ldots T_\mu \\ X_1 \ldots X_\mu \end{matrix} C \left[\sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} (t_{1\nu} x_{i1}) A \begin{pmatrix} t_{2\nu}, \ldots, t_{i\nu}, & t_{i+1,\nu}, \ldots, t_{\mu\nu}, \theta_1, \ldots, \theta_m \\ x_{1\nu}, \ldots, x_{i-1,\nu}, & x_{i+1,\nu}, \ldots, x_{\mu\nu}, \theta_1, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} \right. \\ &\left. - \sum_{h=1}^{m} (t_{1\nu} \theta_h) A \begin{pmatrix} \theta_h, t_{2\nu}, \ldots, t_{\mu\nu}, \theta_1, \ldots, \theta_{h-1}, \theta_{h+1}, \ldots, \theta_m \\ x_{11}, x_{2\nu}, \ldots, x_{\mu\nu}, \theta_1, \ldots, \theta_{h-1}, \theta_{h+1}, \ldots, \theta_m \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de (215), on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_m \begin{pmatrix} T_1, \ldots, T_\mu \\ X_1, \ldots, X_\mu \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \Phi_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ X_i \end{pmatrix} \Phi_m \begin{pmatrix} T_2, \ldots, T_i, & T_{i+1}, \ldots, T_\mu \\ X_1, \ldots, X_{i-1}, & X_{i+1}, \ldots, X_\mu \end{pmatrix} \\ &- m \int_a^b \varphi(t_{11}, \ldots, t_{1\nu}, \theta) \, \Phi_{m-1} \begin{pmatrix} t_{12}, \ldots, t_{1\nu}, \theta; & T_2, \ldots, T_\mu \\ X_1 ; & X_2, \ldots, X_\mu \end{pmatrix} d\theta. \end{aligned} \tag{217}$$

Pareillement on trouve:

$$\begin{aligned} \Phi_m \begin{pmatrix} T_1, \ldots, T_\mu \\ X_1, \ldots, X_\mu \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \Phi_0 \begin{pmatrix} T_i \\ X_1 \end{pmatrix} \Phi_m \begin{pmatrix} T_1, \ldots, T_{i-1}, & T_{i+1}, \ldots, T_\mu \\ X_2, \ldots, X_i, & X_{i+1}, \ldots, X_\mu \end{pmatrix} \\ &- m \int_a^b \Phi_{m-1} \begin{pmatrix} T_1 ; & T_2, \ldots, T_\mu \\ \theta, x_{11}, \ldots, x_{1,\nu-1}; & X_2, \ldots, X_\mu \end{pmatrix} \varphi(\theta, x_{11}, \ldots, x_{1\nu}) \, d\theta. \end{aligned} \tag{217'}$$

De ces deux relations on obtient les relations fonctionnelles pour les mineurs (214):

$$\begin{aligned} D \begin{pmatrix} X_1, \ldots, X_\mu \\ T_1, \ldots, T_\mu \end{pmatrix} \lambda \Bigg) &= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \Phi_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ X_i \end{pmatrix} D \left(\begin{matrix} X_1, \ldots, X_{i-1}, & X_{i+1}, \ldots, X_\mu \\ T_2, \ldots, T_i, & T_{i+1}, \ldots, T_\mu \end{matrix} \,\middle|\, \lambda \right) \\ &+ \lambda \int_a^b \varphi(t_{11}, \ldots, t_{1\nu}, \theta) \, D \left(\begin{matrix} X_1 ; & X_2, \ldots, X_\mu \\ t_{12}, \ldots, t_{1\nu}, \theta; & T_2, \ldots, T_\mu \end{matrix} \,\middle|\, \lambda \right) d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} (-1)^{i-1} \Phi_0 \begin{pmatrix} T_i \\ X_1 \end{pmatrix} D \left(\begin{matrix} X_2, \ldots, X_i, & X_{i+1}, \ldots, X_\mu \\ T_1, \ldots, T_{i-1}, & T_{i+1}, \ldots, T_\mu \end{matrix} \,\middle|\, \lambda \right) \\ &+ \lambda \int_a^b D \left(\begin{matrix} \theta_1, x_{11}, \ldots, x_{1,\nu-1}; & X_2, \ldots, X_\mu \\ T_1 ; & T_2, \ldots, T_\mu \end{matrix} \,\middle|\, \lambda \right) \varphi(\theta, x_{11}, \ldots, x_{1\nu}) \, d\theta. \end{aligned} \tag{218}$$

Au moyen de la relation (210) on trouve facilement l'expression suivante pour la dérivée $D'(\lambda)$:

$$-D'(\lambda) = A_1 D(\lambda) + \lambda \int_a^b D\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} d X_1$$

(219)

$$(d X_1 \equiv d x_{11}\, d x_{12} \ldots d x_{1\nu}).$$

En général, en partant de la relation

$$\begin{aligned} \varDelta\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{m+k} \\ x_1, \ldots, x_{m+k} \end{pmatrix} = C\Bigg[& A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_k \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_{k+1}, \ldots, x_{k+m} \\ x_{k+1}, \ldots, x_{k+m} \end{pmatrix} \\ & - S_1 \sum_{i_1=k+1}^{m} A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \\ x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{i_1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m} \\ x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m} \end{pmatrix} \\ & + \cdots \\ & + (-1)^k \sum_{i_1, i_2 > i_1, \ldots, i_k > i_{k-1}} A\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_k \\ x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m} \\ x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m} \end{pmatrix} \Bigg], \end{aligned}$$

on obtient, en effectuant l'opération C et en intégrant ensuite le résultat par rapport à $x_1, \ldots, x_{m+k}$ entre les limites a et b,

$$\begin{aligned} A_{m+k} = A_k A_m - km \int_a^b A_{k-1}\, \Phi_{m-1}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_1 \end{pmatrix} d U_1 + \cdots \\ + (-1)^k m(m-1)\ldots(m-k+1) \int_a^b \Phi_{m-k}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_k \\ U_1, \ldots, U_k \end{pmatrix} d U_1 \ldots d U_k, \end{aligned}$$

où

$$U_h = x_h, y_h, x_h, y_h, \ldots; \quad d U_h = d x_h\, d y_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, k).$$

De là

$$(-1)^k D^{(k)}(\lambda) = A_k D(\lambda) + k A_{k-1} \lambda \int_a^b D\begin{pmatrix} U_1 \\ U_1 \end{pmatrix} \lambda \Big) d U_1 + \cdots$$

(220)

$$+ (-1)^{\nu k} \lambda^k \int_a^b D\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_k \\ U_1, \ldots, U_k \end{pmatrix} \lambda \Big) d U_1 \ldots d U_k.$$

Enfin on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 14. *Toute solution de l'équation*

$$(221)\qquad u(x_1, \ldots, x_\nu) = \lambda \int_a^b u(t, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt$$

est une solution de l'équation

$$(222)\qquad u(x_1, \ldots, x_\nu) = \lambda^\nu \int_a^b u(t_1, \ldots, t_\nu)\, \omega(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1 \ldots dt_\nu,$$

où

$$(223)\qquad \begin{aligned} \omega(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu) = {} & \varphi(t_1, \ldots, t_\nu, x_1)\, \varphi(t_2, \ldots, t_\nu, x_1, x_2) \ldots \varphi(t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu) \\ & - \psi(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu) \\ & + \lambda \int_a^b \varphi(t_1, \ldots, t_\nu, \theta)\, \psi(t_2, \ldots, t_\nu, \theta, x_1, \ldots, x_\nu)\, d\theta, \end{aligned}$$

$\psi(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)$ *étant une fonction arbitraire intégrable dans* (a, b).

En effet, en utilisant (221) plusieurs fois on trouve d'abord qu'en même temps que (221) l'équation

$$(224)\qquad u(x_1, \ldots, x_\nu) = \lambda^\nu \int_a^b u(t_1, \ldots, t_\nu)\, \varphi(t_1, \ldots, t_\nu, x_1) \ldots \varphi(t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1 \ldots dt_\nu$$

est satisfaite. Ensuite, en multipliant l'équation

$$u(t_1, \ldots, t_\nu) = \lambda \int_a^b u(\theta, t_1, \ldots, t_{\nu-1})\, \varphi(\theta, t_1, \ldots, t_\nu)\, d\theta$$

par $\lambda^\nu \psi(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)$, en intégrant le résultat par rapport à $t_1, \ldots, t_\nu$ de a à b et en ajoutant ce qui résulte à (224), on obtient (222), où ω est défini par (223).

Ainsi nous avons trouvé toutes les relations fondamentales desquelles on déduira sans peine pour les équations (185) et (186) tous les théorèmes pareils à ceux qui ont été démontrés plus haut pour les équations transgressives à deux variables.

17. *Liaison des équations* (185) *et* (186) *avec les équations correspondantes de Fredholm. Application aux chaînes multiconnexes de Markhoff.* Prenons l'équation transgressive à ν variables

$$(185)\qquad u(x_1, \ldots, x_\nu) = f(x_1, \ldots, x_\nu) + \lambda \int_a^b u(t, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt$$

et l'équation homogène correspondante

$$(186)\qquad u(x_1, \ldots, x_\nu) = \lambda \int_a^b u(t, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt.$$

Par la méthode de substitutions successives on trouve que toute solution de chacune de ces équations est aussi une racine des équations de Fredholm correspondantes

$$(225)\qquad u(x_1, \ldots, x_\nu) = F(x_1, \ldots, x_\nu; \lambda) + \lambda^\nu \int_a^b u(t_1, \ldots, t_\nu)\, \varphi_0(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1 \ldots dt_\nu$$

et

$$(226)\qquad u(x_1, \ldots, x_\nu) = \lambda^\nu \int_a^b u(t_1, \ldots, t_\nu)\, \varphi_0(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1 \ldots dt_\nu,$$

où l'on a posé

$$(227)\qquad \begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_\nu; \lambda) = {} & f(x_1, \ldots, x_\nu) + \lambda \int_a^b f(t_1, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t_1, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1 \\ & + \lambda^2 \int_a^b f(t_1, t_2, x_1, \ldots, x_{\nu-2})\, \varphi(t_1, t_2, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t_2, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1\, dt_2 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \lambda^{\nu-1} \int_a^b f(t_1, \ldots, t_{\nu-1}, x_1)\, \varphi(t_1, \ldots, t_{\nu-1}, x_1, x_2) \ldots \varphi(t_{\nu-1}, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt_1 \ldots dt_{\nu-1} \end{aligned}$$

et

$$(228)\qquad \varphi_0(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu) = \varphi(t_1, \ldots, t_\nu, x_1)\, \varphi(t_2, \ldots, t_\nu, x_1, x_2) \ldots \varphi(t_\nu, x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

L'inverse de cette proposition n'est pas toujours vrai, ce qui se prouve comme plus haut, dans le cas des équations transgressives à deux variables. Nous nous contenterons donc de démontrer seulement le théorème suivant qui est nécessaire pour l'étude approfondie du problème posé.

Théorème 15. *Soient $D_1(\lambda^\nu)$ le déterminant de l'équation de Fredholm* (225), *$D(\lambda)$ le déterminant de l'équation transgressive* (185) *et ω une des racines primitives de l'équation*

$$\omega^\nu = 1.$$

Alors

$$D_1(\lambda^\nu) = D(\lambda)\, D(\omega\lambda)\, D(\omega^2\lambda) \ldots D(\omega^{\nu-1}\lambda).$$

Pour démontrer ce théorème remarquons d'abord que, par la méthode d'approximations successives, pour

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \qquad |\varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)| \leqq M,$$

on peut obtenir la solution unique de l'équation (185) dans la forme

$$(229) \qquad \begin{aligned} u(x_1, \ldots, x_\nu) &= F(x_1, \ldots, x_\nu, \lambda) \\ &+ \lambda^\nu \int_a^b f(t_1, \ldots, t_\nu)\, \Gamma(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu; \lambda)\, dt_1 \ldots dt_\nu, \end{aligned}$$

où la résolvente Γ est définie par les égalités

$$(230) \qquad \Gamma(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \varphi_m(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)$$

$$(231) \qquad \begin{aligned} \varphi_{m+1}(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu) &= \int_a^b \varphi_m(t_1, \ldots, t_\nu, \theta, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(\theta, x_1, \ldots, x_\nu)\, d\theta \\ &= \int_a^b \varphi(t_1, \ldots, t_\nu, \theta)\, \varphi_m(t_2, \ldots, t_\nu, \theta, x_1, \ldots, x_\nu)\, d\theta \\ &\qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \end{aligned}$$

la série définissant Γ étant uniformément convergente par rapport à t_i, x_i dans (a, b) pour tout λ de module ne surpassant pas $\frac{1}{M(b-a)}$.

Pour un tel λ les solutions (229) et (213) doivent être identiques, donc

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_\nu \\ t_1, \ldots, t_\nu \end{matrix} \,\Big|\, \lambda\right) = \Gamma(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu; \lambda) D(\lambda).$$

En remplaçant ici $t_1, \ldots, t_\nu$ par $x_1, \ldots, x_\nu$ et en intégrant ensuite par rapport à $x_1, \ldots, x_\nu$ de a à b, on obtient, en tenant compte de (219) et (230),

$$-D'(\lambda) - A_1 D(\lambda) = (C_1 + C_2\lambda + C_3\lambda^2 + \cdots) D(\lambda),$$

$$C_m = \int_a^b \varphi_{m-1}(x_1, \ldots, x_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)\, dx_1 \ldots dx_\nu \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ou

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = A_1 - \sum_{m=1}^{\infty} C_m \lambda^{m-1}.$$

De là la relation

$$D(\lambda) = e^{A_1\lambda - \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m \frac{\lambda^m}{m}} \tag{232}$$

d'où

$$D(\lambda) D(\omega\lambda) \ldots D(\omega^{\nu-1}\lambda) = e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{\nu k} \frac{\lambda^{\nu k}}{k}}$$

Mais on sait que pour l'équation de Fredholm (225) a place la relation

$$D_1(\lambda^\nu) = e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{\nu k} \frac{\lambda^{\nu k}}{k}}$$

Par conséquent,

$$D_1(\lambda^\nu) = D(\lambda) D(\omega\lambda) \ldots D(\omega^{\nu-1}\lambda), \tag{233}$$

— la relation cherchée est démontrée.

Nous concluons ce mémoire par une remarque brève concernant le problème stocastique qui est intimement lié aux équations transgressives à ν variables.

Soit X une variable aléatoire continue dont les valeurs sont contenues dans un intervalle fini (a, b). Comme plus haut, nous donnerons aux épreuves avec cette variable les numéros 1, 2, 3, ... et appellerons les épreuves 1, 2, ..., ν chaînon initial, n° 0; les épreuves 2, 3, ..., $\nu+1$ chaînon n° 1; et ainsi de suite. La suite infinie de ces chaînons constituera une chaîne multiconnexe de Markoff, si l'on aura satisfait les conditions suivantes.

Les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ de X dans le chaînon initial étant assujetties à une loi différentielle de probabilités $p_0(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, dite la loi initiale, la loi différentielle de l'égalite $X = x_\nu$ dans une épreuve quelconque est donnée par une fonction $\varphi(t, x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu)$, à condition que dans les ν épreuves précédentes on a eu

$$X = t, \quad X = x_1, \ldots, \quad X = x_{\nu-1}.$$

Evidemment, on doit avoir

$$\int_a^b \varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)\, dx_\nu = 1.$$

En désignant par $p_k(x_1, \ldots, x_\nu)$ la loi différentielle de probabilités des égalités

$$X = x_1, \quad X = x_2, \ldots, \quad X = x_\nu$$

dans le chaînon n° k, à condition qu'on ne sait rien sur les résultats de toutes les autres épreuves, on aura la relation

$$p_{k+1}(x_1, \ldots, x_\nu) = \int_a^b p_k(t, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, \varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)\, dt \tag{234}$$

dont la liaison avec les équations transgressives homogènes à ν variables est évidente.

En désignant ensuite par $p_k(x)$ la loi différentielle de probabilités de l'égalité $X = x$ dans la $k^{\text{ième}}$ épreuve, à condition que les résultats de toutes les autres épreuves restent inconnus, on obtient

$$p_k(x) = \int_a^b p_{k-\nu-1}(t_1, \ldots, t_\nu)\, \varphi(t_1, \ldots, t_\nu, x)\, dt_1 \ldots dt_\nu. \tag{235}$$

De la relation (234) on obtient facilement la relation

$$(236)\qquad p_{k+\nu}(x_1,\ldots,x_\nu)=\int_a^b p_0(t_1,\ldots,t_\nu)\,\varphi_k(t_1,\ldots,t_\nu,x_1,\ldots,x_\nu)\,dt_1\ldots dt_\nu,$$

où φ_k est défini par (231). Or, comme plus haut, en supposant que $p_0(x_1,\ldots,x_\nu)$ et $\varphi(t,x_1,\ldots,x_\nu)$ sont continues dans (a,b), $\varphi(t,x_1,\ldots,x_\nu)$ ne s'annulant que pour un ensemble de valeurs de $t,x_1,\ldots,x_\nu$ de mesure nulle, on trouve le développement

$$(237)\qquad \varphi_k(x_1,\ldots,x_\nu)=p(x_1,\ldots,x_\nu)+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{U_h(x_1,\ldots,x_\nu)\,V_h(t_1,\ldots,t_\nu)}{c_h^{k+\nu}},$$

si $\varphi_k(x_1,\ldots,x_\nu)$ peut être développée en une série uniformément convergente dans (a, b) suivant les fonctions $p, U_1,\ldots$ ou $V_0=1$, $V_1,\ldots$, ces fonctions représentant les solutions des équations

$$u(x_1,\ldots,x_\nu)=\lambda\int_a^b u(t,x_1,\ldots,x_{\nu-1})\,\varphi(t,x_1,\ldots,x_\nu)\,dt$$

$$v(x_1,\ldots,x_\nu)=\lambda\int_a^b \varphi(x_1,\ldots,x_\nu,t)\,v(x_2,\ldots,x_\nu,t)\,dt$$

pour les racines $\lambda=1, c_1, c_2,\ldots$ de l'équation $D(\lambda)=0$. La première de ces racines est simple et les autres ont les modules >1. La fonction $p(x_1,\ldots,x_\nu)$ n'est jamais négative et est telle que

$$\int_a^b p(x_1,\ldots,x_\nu)\,dx_1\ldots dx_\nu=1.$$

Au moyen des relations (235), (236) et (237) on trouve:

$$(238)\qquad \lim_{k\to\infty} p_k(x_1,\ldots,x_\nu)=p(x_1,\ldots,x_\nu)$$

et

$$(239)\qquad \lim_{k\to\infty} p_k(x)=\int_a^b p(t_1,\ldots,t_\nu)\,\varphi(t_1,\ldots,t_\nu,x)\,dt_1\ldots dt_\nu.$$

Ces limites sont évidemment indépendantes de la loi initiale $p_0(x_1,\ldots,x_\nu)$.

On arrive donc à ce résultat fondamental pour les chaînes multiconnexes de Markoff:

Si la fonction $\varphi(t, x_1, \ldots, x_\nu)$, *loi de la chaîne, ne s'évanouit dans* (a, b) *que pour un ensemble de valeurs de* $t, x_1, \ldots, x_\nu$ *de mesure nulle et représente une loi continue et telle que, pour un* k *défini, l'itération* $\varphi_k(t_1, \ldots, t_\nu, x_1, \ldots, x_\nu)$ *admet le développement uniformément convergent* (237), *les lois* $p_k(x)$ *et* $p_k(x_1, \ldots, x_\nu)$ *tendent avec* $k \to \infty$ *aux lois finales définies* (238) *et* (239) *quel que soit la loi initiale continue* $p_0(x_1, \ldots, x_\nu)$.

Remarquons encore le développement

$$p_k(x_1, \ldots, x_\nu) = p(x_1, \ldots, x_\nu) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{A_h}{c_h^k} U_h(x_1, \ldots, x_\nu), \tag{240}$$

qui a lieu dans les mêmes hypothèses et dans lequel

$$A_h = \int_a^b p_0(t_1, \ldots, t_\nu) V_h(t_1, \ldots, t_\nu) \, dt_1 \ldots dt_\nu.$$