ÜBER DIE INVARIANTEN VON LINEAREN GRUPPEN.

VON

R. WEITZENBÖCK

in AMSTERDAM.

Einleitung.

Der klassischen Invariantentheorie liegt die allgemeine projektive Gruppe, gebildet aus allen linearen und homogenen Transformationen von n Veränderlichen zu Grunde. Ihre zwei Hauptprobleme: die Frage nach der allgemeinen Struktur der projektiven Invarianten gegebener Grundformen und die nach der Endlichkeit, sind gelöst, die erstere durch die symbolische Methode, die alles auf Linearformen und deren Invarianten zurückführt, die letztere allgemein durch den berühmten Basissatz von HILBERT und den unmittelbar darauf beruhenden HILBERTschen Endlichkeitsbeweis.[1] Seine Methode ist, wie HILBERT selbst angibt[2], übertragbar auf Gruppen, »wenn die Koeffizienten der die Gruppe bestimmenden Substitutionen ganze und rationale Funktionen einer gewissen Anzahl von Parametern sind, derart, dass durch Zusammensetzung zweier beliebiger Substitutionen der Gruppe eine Substitution entsteht, deren Parameter bilineare Funktionen der Parameter der beiden ursprünglich ausgewählten Substitutionen sind und wenn es zugleich einen Differenziationsprozess gibt, welcher sich in entsprechender Weise zur Erzeugung der zur vorgelegten Gruppe gehörigen Invarianten verwenden lässt, wie der Differenziationsprozess Ω im Falle der zur allgemeinen projektiven Gruppe gehörigen Invarianten.»

HILBERT zeigt an derselben Stelle die Anwendbarkeit dieser Methode für die orthogonale Gruppe und führt als weiteres Beispiel für quaternäre Formen

[1] D. HILBERT, »Über die Theorie der algebraischen Formen», Mathem. Ann. 36 (1890), S. 473—534.

[2] Ebenda, S. 532.

die drei-gliedrige Gruppe[1] von linearen Punkttransformationen an, die eine irreduzible Raumkurve dritter Ordnung ungeändert lassen.

Eine zweite Methode für den Beweis der Endlichkeit von Invarianten hat HURWITZ[2] gegeben und für die projektiven und orthogonalen Invarianten auch durchgerechnet. Sie entstand aus der für endliche diskrete Gruppen Γ brauchbaren Methode, eine gegebene Form allen Transformationen von Γ zu unterwerfen und aus den transformierten Formen symmetrische Funktionen, insbesondere ihre Summe zu bilden, die dann Invarianten bei Γ sind.[3]

Bei kontinuierlichen Gruppen geht die Summation über in eine Integration und dass diese für die allgemeine projektive und für die orthogonale Gruppe sinnvoll ausführbar ist, konnte HURWITZ nachweisen.

In den letzten Jahren haben im Zusammenhange mit der Darstellungstheorie kontinuierlicher abstrakter Gruppen durch lineare Transformationen I. SCHUR[4] und H. WEYL[5] diesen Gedanken von HURWITZ wieder aufgegriffen. Insbesondere konnte WEYL nachweisen, dass die durch ihn verallgemeinerte Methode von HURWITZ für alle halbeinfachen Gruppen brauchbar gemacht werden kann und dass »damit zum erstenmale auf natürliche Weise ein gruppentheoretischer Giltigkeitsbereich für die Invariantentheorie abgegrenzt ist».[6] Ich habe mich nie damit befreunden können, dass man zu derartigen rein algebraischen Sätzen wie den, betreffend die Existenz einer endlichen Integritätsbasis in Polynomringen bestimmter Art, transzendente Hilfsmittel wie Volumsintegrale, Überlagerungsflächen und dgl. nötig haben sollte. Es kommt dies, um ein einmal von H. WEYL selbst gebrauchtes Wort zu verwenden, einem »mit Kanonen auf Spatzen schiessen» gleich.

Das Problem der Endlichkeit bei beliebigen kontinuierlichen Untergruppen $\mathfrak{G}_r$ der allgemeinen projektiven Gruppe formuliert D. HILBERT in seinem Pariser Vortrag von 1900.[7] Es dürfte ihm jedenfalls entgangen sein, dass ein Jahr

---

[1] Auf einem anderen Wege habe ich deren Invarianten behandelt in Proceed. Akad. van Wetensch. Amsterdam 33 (1930), S. 1125—1132.

[2] A. HURWITZ, Göttinger Nachr. (1897), S. 71.

[3] Vgl. etwa H. WEBER, Lehrb. d. Algebra II (2. Aufl.) (1899), S. 227 oder ausführlicher: E. NOETHER, Mathem. Ann. 77 (1915), S. 90. — Diese Methode kann bei Kongruenzgruppen und den dazugehörigen Modular-Invarianten versagen.

[4] I. SCHUR, Berliner Ber. (1924), S. 189, 297 u. 346.

[5] H. WEYL, Mathem. Zeitschr. 23 (1925), S. 271 und 24 (1925), S. 238 u. 377.

[6] H. WEYL, Mathem. Zeitschr. 24 (1925), S. 392.

[7] D. HILBERT, Göttinger Nachr. (1900), S. 281 und Compte rendu du 2ième congrès international des Mathém. Paris (1902), S. 92.

früher (1899) dieses Problem im Prinzip durch L. MAURER gelöst wurde.[1] Auch mir war diese Tatsache bis vor kurzem unbekannt. Obwohl MAURER nur die Endlichkeit der absoluten Invarianten beweist, treten bei ihm doch die drei wesentlichen Punkte deutlich hervor: *Erstens* die Endlichkeit bei eingliedrigen Gruppen (vgl. den folgenden Abschnitt I), die auf die binären Semi-Invarianten führt und wobei von der Jordanschen Normalform einer Matrix Gebrauch gemacht wird.[2] *Zweitens* der Aufbau der $\mathfrak{G}_r$-Invarianten aus den Invarianten bezgl. eingliedriger Gruppen, wobei auch auf die Abhängigkeit der letzteren Rücksicht genommen wird (Vgl. Abschnitt II).[3] Schliesslich *drittens* in einer besonderen Behandlung der *einfachen* Gruppen[4], wobei betreffs deren Struktur die von W. KILLING und E. CARTAN gefundenen Resultate verwendet werden.[5]

Sowohl der von MAURER skizzierte als auch der von mir gegebene Endlichkeitsbeweis ist rein algebraisch und von einer *bestimmten* Darstellung der Gruppen $\mathfrak{G}_r$ unabhängig. Dass die Ergebnisse MAURERS solange unbeachtet blieben, mag vielleicht auf den Umstand zurückzuführen sein, dass MAURER wiederholt auf nicht ganz leicht lesbare frühere Arbeiten verweist.[6] Inbesondere ist für den Endlichkeitsbeweis seine Einteilung der infinitesimalen Transformationen $X = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k$ in drei Klassen und die Voraussetzung, dass $\mathfrak{G}_r$ »regulär» sei, unnötig.[7]

Der im folgenden in den Abschnitten I und II gegebene Endlichkeitsbeweis lässt uns erkennen: der wahre Grund für die Existenz einer endlichen Integritätsbasis für die Invarianten bezüglich beliebiger kontinuierlicher Unter-

---

[1] L. MAURER, »Ueber die Endlichkeit der Invariantensysteme», Sitzungsber. der bayr. Akad. d. Wiss. 29 (1899), S. 147—175; zum Teil mit einer angekündigten Fortsetzung (die niemals erschienen ist) neu bearbeitet in Mathem. Ann. 57 (1903), S. 265—313.

[2] Bei mir behandelt in Proceed. Akad. van Wetensch. Amsterdam 33 (1930), S. 47—50 u. 227—231.

[3] Bei mir zum Teile behandelt ebenda, S. 233—242.

[4] Bei mir durchgeführt ebenda, S. 996—1002.

[5] Vgl. die im § 14 genannte Literatur.

[6] Vgl. auch eine Kritik dreier früherer Arbeiten im 3. Bande der »Theorie der Transformationsgruppen» von S. LIE, Leipzig (1893), S. 806.

[7] MAURER nennt die infinitesimale Transformation $X(f)$ »regulär von erster Art», wenn die zu $X(f)$ gehörige charakteristische Gleichung n-ten Grades $\Delta(\omega) = |a_i^k - \omega\delta_i^k| = 0$ nur die Wurzeln $\omega = 0$ hat; $X(f)$ ist »regulär von zweiter Art», wenn $\Delta(\omega) = 0$ nur ganze rationale Wurzeln und nur Elementarteiler erster Ordnung hat. In allen anderen Fällen wird $X(f)$ »irregulär» genannt. Eine lineare homogene Gruppe nennt er »regulär», wenn die erzeugenden infinitesimalen Transformationen so gewählt werden können, dass sie regulär (1. und 2. Art) sind.

gruppen der allgemeinen projektiven Gruppe ist der, dass sie ganze rationale Funktionen sind, die durch lineare Operatoren (= infinitesimale Transformationen) reproduziert werden oder Null liefern: *diese Reproduktion durch lineare Operatoren liefert die natürliche Abgrenzung der algebraischen Invariantentheorie.*[1]

Im Abschnitt III behandle ich zwei Probleme, die sich bei der wirklichen Aufstellung der $\mathfrak{G}_r$-Invarianten einstellen und *auf Grund des Endlichkeitssatzes* gelöst werden können: Das *Typenproblem* und der sogenannte *Adjunktionssatz*. Sie sind zum Teile schon in grobem Umrisse formuliert von F. KLEIN in seinem »Erlanger Programm».[2] Er stellt dort die beiden Aufgaben:

1. »Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.»

2. »Es sei eine Mannigfaltigkeit und zu ihrer Behandlung eine auf sie bezügliche Transformationsgruppe gegeben. Es werde das Problem vorgelegt, die in der Mannigfaltigkeit enthaltenen Gebilde hinsichtlich eines gegebenen Gebildes zu untersuchen.»

Sie können, wie wir im folgenden zeigen wollen, für das lineare Gebiet G_n (($n - 1$)-dimensionaler projektiver Raum), für kontinuierliche Gruppen von linearen homogenen Transformationen in ihm und für algebraische, durch n-äre Formen darstellbare Mannigfaltigkeiten gelöst werden.

Ist wieder $\mathfrak{G}_r$ die gegebene lineare homogene Gruppe des Gebietes n-ter Stufe G_n, so kommt die erste obiger Aufgaben in exakter Formulierung auf Folgendes hinaus: Gegeben sind eine Reihe $\{F\} = F_1, F_2, \ldots$ von n-ären Grundformen: es ist ein volles System von ganzen und rationalen $\mathfrak{G}_r$-Invarianten derselben zu ermitteln. Wir werden zeigen, dass dies geschehen kann durch Aufbau der $\mathfrak{G}_r$-Invarianten aus »Invarianten-Typen», das sind $\mathfrak{G}_r$-Invarianten von höchstens $n - 1$ Linearformen, und dass letzten Endes die Ermittlung dieser Invariantentypen eine Aufgabe der Theorie der projektiven Invarianten *binärer* Formen ist.

Die zweite der obigen Aufgaben lautet in strenger Fassung wie folgt: Im G_n sind neben den Grundformen $\{F\}$ n-äre Formen $\{G\} = G_1, G_2, \ldots$ gegeben, welche die linearen Transformationen einer Gruppe G_r gestatten und bestimmen.

---

[1] Dass die $\mathfrak{G}_r$-Invarianten eine endliche *Rational*basis besitzen folgt unabhängig vom Endlichkeitssatze aus einem allgemeinen Theoreme von E. NOETHER, Göttinger Nachr. (30. Juli 1926), S. 29.

[2] F. KLEIN, »Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen», Erlangen (1872); wieder abgedruckt in Mathem. Ann. 43 (1893), S. 63—100.

Es sind die $\mathfrak{G}_r$-Invarianten von $\{F\}$ zu ermitteln. Wir werden zeigen, dass hier in allgemeinster Weise der »Adjunktionssatz» gilt: Man erhält alle $\mathfrak{G}_r$-Invarianten der Grundformen $\{F\}$, wenn man die *projektiven* Invarianten des vereinigten Systems $\{F\}+\{G\}$ ermittelt, die in den Koeffizienten der Formen $\{F\}$ ganz und rational, in den Koeffizienten der Formen $\{G\}$ hingegen algebraisch sind.

Der Adjunktionssatz führt auf bekannte Probleme der projektiven Invariantentheorie. Ist hingegen die Gruppe nicht durch ihre Invarianten, sondern durch ihre infinitesimalen Transformationen gegeben, so muss man erst die in den beiden ersten Abschnitten dargestellten Methoden anwenden um die zur Gruppe $\mathfrak{G}_r$ gehörigen Invariantentypen zu berechnen. Und hier öffnet sich für die Invariantentheorie der linearen Gruppen ein weites Feld.

Inhalt.

Abschnitt I. Eingliedrige Gruppen.

Abschnitt II. Mehrgliedrige Gruppen.

Abschnitt III. Das Typenproblem und der Adjunktionssatz.

ABSCHNITT I.

Eingliedrige Gruppen.

§ 1. Die Jordansche Normalform.

Eine eingliedrige Gruppe linearer Transformationen in n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist durch eine einzelne infinitesimale Transformation

$$(1) \qquad A(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k$$

also durch eine Matrix $\|a_i^k\|$ gegeben. Gilt für eine Form $f(x)$ der x_i identisch in diesen Veränderlichen

$$(2) \qquad A(f) = \alpha \cdot f,$$

so nennen wir f eine *A-Invariante.*

Zwecks Ermittlung aller A-Invarianten $f(x)$ gehen wir vermittels einer linearen homogenen Transformation $x = S(y)$ oder $x_i = s_i^k y_k$ mit nicht verschwindender Determinante $|s_i^k|$ zu n neuen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ über. Dabei wird aus jedem $f(x)$ ein $g(y)$, aus (2) entsteht

$$(3) \qquad N(g) = \alpha \cdot g,$$

wobei $N(g)$ gleich dem transformierten $A(f)$, also gleich

$$(4) \qquad N(g) = \frac{\partial g}{\partial y_i} S_i^k a_k^l s_l^m y_m = \frac{\partial g}{\partial y_i} n_i^k y_k$$

ist. Statt der Matrix $A = \|a_i^k\|$ haben wir dann die transformierte Matrix

$$N = S^{-1} A S = \|n_i^k\| \text{ mit } n_i^k = S_i^l a_l^m s_m^k. \tag{5}$$

Wir wollen nun S so wählen, dass N die sogenannte JORDANsche Normalform von A darstellt. Hierzu die folgende Erklärung.[1]

Die zur Matrix A gehörige charakteristische Gleichung

$$\text{Det } |\lambda \cdot E - A| = (\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\nu_2} \ldots (\lambda-\lambda_h)^{\nu_h} = 0 \tag{6}$$

$$(\lambda_i \neq \lambda_k), \quad (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_h = n)$$

habe h verschiedene Eigenwerte oder Wurzeln λ_i und zwar λ_1 ν_1-fach, λ_2 ν_2-fach, ..., λ_h ν_h-fach. Für die JORDANsche Normalform gilt dann *erstens*

$$\|N\| = \|L_1\| + \|L_2\| + \cdots + \|L_h\|, \tag{7}$$

wobei die »Länder» L_i quadratische Matrizen mit ν_i Reihen sind und die rechte Seite von (7) andeuten soll, dass diese Länder längs ihren Hauptdiagonalen nacheinander aufgereiht werden. In $\|N\|$ ist dann jedes Element ausserhalb der Länder gleich Null, z. B.:

$$\|N\| = \begin{Vmatrix} \boxed{L_1} & & \\ & \boxed{L_2} & \\ & & \boxed{L_3} \end{Vmatrix}$$

Zweitens gehört zu jedem Lande L_i mit ν_i Reihen eine geordnete Folge von wenigstens einer und höchstens ν_i ganzen positiven Zahlen $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{i\varrho_i}$, $(1 \leq \varrho_i \leq \nu_i)$, deren Summe $= \nu_i$ ist. Diese »Feldzahlen» bestimmen die ϱ_i Felder $F_{\delta_{ik}}$, in die das Land L_i zerfällt:

$$\|L_i\| = \|F_{\delta_{i1}}\| + \|F_{\delta_{i2}}\| + \cdots + \|F_{\delta_{i\varrho_i}}\|. \tag{8}$$

Alle Elemente von L_i ausserhalb dieser Felder sind wieder $= 0$.

---

[1] Vgl. J. WELLSTEIN, Crelle 163 (1930), S. 166—182. Wegen eines Beweises für die Transformierbarkeit auf die Jordansche Normalform (nach H. WEYL) vgl. z. B. F. KLEIN-BLASCHKE, Vorles. über höhere Geom., Sammlung Springer Nr. 22. 3. Aufl. (1926), S. 388.

Ein Feld $F_{\delta_{ik}}$ schliesslich hat die Gestalt

$$\| F_{\delta_{ik}} \| = \left\| \begin{matrix} \lambda_i & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \lambda_i \end{matrix} \right\| .$$

Zusammenfassend haben wir also für die Jordansche Normalform: N hat in der Hauptdiagonale die Eigenwerte λ_i, unmittelbar rechts von diesen Null oder Eins und die Einsen bilden eine Reihe von Einser-Serien, deren Längen durch die Zahlen $\delta_{ik} - 1$ gegeben sind; alle anderen Elemente in N sind Null.

Nach (4) haben wir dann

$$N(y_j) = \lambda_i \cdot y_j \quad \text{oder} \quad = \lambda_i \cdot y_j + y_{j+1} \tag{9}$$

je nachdem in der j-ten Zeile von N rechts der Hauptdiagonale eine Null oder eine Eins steht. Steht eine Null, so zeigt (9), dass y_j eine *lineare N-Invariante* mit dem Multiplikator λ_i darstellt. Es gilt auch das Umgekehrte: alle linearen N-Invarianten setzen sich linear und homogen aus den N-Invarianten $y_{j1}, y_{j2}, \ldots$ zusammen, die zum selben Multiplikator λ_i gehören. Soll nämlich

$$m^i y_i = \sum_{i=1}^{n} m^i y_i$$

eine N-Invariante sein, so muss $N(m^i y_i) = \alpha \cdot m^i y_i$, also

$$m^i (\lambda_k y_i + \varepsilon_i y_{i+1}) = \alpha \cdot m^i y_i, \text{ d. h.}$$

$$m^i \cdot \lambda_k + m^{i-1} \cdot \varepsilon_{i-1} = \alpha \cdot m^i \tag{10}$$

werden, wo α konstant ist und ε_i gleich Null oder gleich Eins zu setzen ist, je nachdem in der i-ten Zeile von N eine Eins steht oder nicht. Aus (10) folgt dann, dass nur diejenigen, zum selben Multiplikator λ_k gehörenden m^i nicht Null sein müssen, die zu einer Zeile mit $\varepsilon_i = 0$ gehören.

Treten in der Normalform keine Einsen auf, so ist jedes y_i eine N-Invariante und die y_i bilden also selbst eine endliche Integritätsbasis für alle N-Invarianten $g(y)$. Wenn in N nur ein einziger Einser vorhanden ist, z. B. bei

$N(y_1) = \lambda_1 \cdot y_1 + y_2$, so bilden $y_2, y_3, \ldots, y_n$ die Integritätsbasis für alle N-Invarianten und y_1 kann in keinem $g(y)$ auftreten. Erst von zwei Einsen an findet man neue, nicht-lineare N-Invarianten $g(y)$.

§ 2. Die nicht-linearen N-Invarianten.

Um diese letzteren zu ermitteln gehen wir allgemein aus von einer Form p-ten Grades der $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$(11) \qquad g(y) = \Sigma g_{p_1 p_2 \ldots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2} \ldots y_n^{p_n} \qquad (p_1 + p_2 + \cdots + p_n = p)$$

mit Koeffizienten $g_{p_1 p_2 \ldots p_n}$, die wir uns lexikografisch geordnet denken: wir sagen $g_{p_1 p_2 \ldots p_n} > g_{q_1 q_2 \ldots q_n}$, wenn beim ersten der n Indizespaare $p_1 q_1$, $p_2 q_2, \ldots$, $p_n q_n$, bei dem nicht beide Ziffern gleich sind, $p_i > q_i$. Es ist also z. B. $g_{141} \ldots > g_{136} \ldots$ u. s. w. und $g_{p00\ldots}$ ist der grösste, $g_{00\ldots p}$ der kleinste Koeffizient.

Wir berechnen $N(g) = \dfrac{\partial g}{\partial y_i} n_i^k y_k$ und finden aus (11):

$$N(g) = \sum \Big\{ p_1 g_{p_1 p_2 \ldots p_n} y_1^{p_1 - 1} (\lambda_1 y_1 + \varepsilon_1 y_2) y_2^{p_2} \ldots y_n^{p_n} + p_2 g_{p_1 p_2 \ldots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2 - 1} \cdot$$
$$\cdot (\lambda_2 y_2 + \varepsilon_2 y_3) y_3^{p_3} \ldots y_n^{p_n} + \cdots \Big\}$$
$$= \sum \Big\{ (p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n) g_{p_1 \ldots p_n} y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} + \sum_p p_1 \varepsilon_1 \cdot g_{p_1 \ldots p_n} \cdot$$
$$\cdot y_1^{p_1 - 1} y_2^{p_2 + 1} \ldots y_n^{p_n} \Big\},$$

oder, wenn wir die innere Summe rechts wieder nach den Potenzprodukten $y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}$ ordnen und ein $g_{ikl\ldots}$ mit einem negativen Index gleich Null setzen:

$$(12) \quad N(g) = \sum \Big\{ (p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n) \cdot g_{p_1 \ldots p_n} y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} +$$
$$+ \sum_p p_1 \varepsilon_1 \cdot g_{p_1 + 1, p_2 - 1, p_3 \ldots p_n} y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} \Big\}.$$

Hieraus ergeben sich die Koeffizienten $\bar{g}$ von $N(g)$:

$$(13) \quad \bar{g}_{p_1 p_2 \ldots p_n} = \Big\{ (p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n) \cdot g_{p_1 p_2 \ldots p_n} + p_1 \varepsilon_1 \cdot g_{p_1 + 1, p_2 - 1, p_3 \ldots p_n} +$$
$$+ p_2 \varepsilon_2 \cdot g_{p_1, p_2 + 1, p_3 - 1, \ldots p_n} + \cdots \Big\}$$

wobei wie oben $\varepsilon_i = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem N in der i-ten Zeile eine Eins hat oder nicht.

Die durch die Gleichung (13) dargestellte lineare Transformation der Koeffizienten $g_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ ist wegen

$$g_{p_1+1,\, p_2-1,\, p_3 \ldots p_n} > g_{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

$$g_{p_1,\, p_2+1,\, p_3-1,\, p_4, \ldots p_n} > g_{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

halbreduziert, das heisst ihre Transformationsmatrix hat in der Hauptdiagonale überall eine Zahl $p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n$ und rechts oberhalb der Hauptdiagonale Nullen stehen. Für eine N-Invariante $g(y) \not\equiv 0$, bei der $N(g) = \bar{g}(y) = \alpha \cdot g(y)$ ist, folgt also zunächst, dass der Multiplikator α die Gestalt

$$\alpha = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n \tag{14}$$

hat und dass weiters

$$\varepsilon_1 \frac{\partial g}{\partial y_1} y_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial g}{\partial y_2} y_3 + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial g}{\partial y_k} y_{k+1} + \cdots + \varepsilon_{n-1} \frac{\partial g}{\partial y_{n-1}} y_n = 0 \tag{15}$$

sein muss. Letzteres beweist man wie folgt. Wir teilen die n Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ entsprechend den Einserserien und den in der Hauptdiagonale von N allenfalls stehenden λ_i, die weder oberhalb noch rechts eine Eins haben, in Abschnitte

$$y_1, y_2, \ldots, y_{\mu+1};\ z_1, z_2, \ldots, z_{\nu+1};\ \ldots \qquad (\mu \geqq 0,\ \nu \geqq 0, \ldots).$$

Eine N-Invariante $g(y)$ geht dann über in ein Polynom $G(y, z, \ldots)$, das wir in eindeutiger Weise in $G = G_1 + G_2 + \cdots$ so zerlegen, dass G_1 homogen vom Grade p' in den y, homogen vom Grade q' in den $z, \ldots$; dass G_2 homogen vom Grade p'' in den y, homogen vom Grade q'' in den $z, \ldots$; u. s. w. wird. Diese Zerlegung sei angedeutet durch

$$G = G_1(\overset{p'}{y}, \overset{q'}{z}, \ldots) + G_2(\overset{p''}{y}, \overset{q''}{z}, \ldots) + \cdots.$$

Keine zwei der Zahlenfolgen $p', q', \ldots;\ p'', q'', \ldots;\ \ldots$ sind dann identisch.

Aus $N(G) = \alpha \cdot G$ folgt dann, dass dieselbe Gleichung für jedes G_i gilt:

$$N(G_i) = \alpha \cdot G_i,$$

d. h. wir können von vorneherein annehmen, dass g homogen vom Grade p in den y, homogen vom Grade q in den z, ... ist. Gehört dann λ_1 zu den y, λ_2 zu den z, ... (es kann auch $\lambda_1 = \lambda_2$ sein), so gibt $N(g) = \alpha \cdot g$:

$$N(g) = \alpha \cdot g = (p\lambda_1 + q\lambda_2 + \cdots) \cdot g + \sum \frac{\partial g}{\partial y_i} \varepsilon_i y_{i+1} + \sum \frac{\partial g}{\partial z_k} \varepsilon_k z_{k+1} + \cdots$$

Hieraus ergibt sich dann wegen $\alpha = p\lambda_1 + q\lambda_2 + \cdots$ die Gleichung (15).

Umgekehrt ist (15) auch hinreichend für die N-Invarianz von $g(y)$.

Bezeichnen wir jetzt die y_i, die zur ersten Einserserie gehören, mit $y_1, y_2 \ldots, y_{\mu+1}$, die zur zweiten Einserserie gehörigen mit $z_1, z_2, \ldots, z_{\nu+1}$ u. s. f., so können wir an Stelle von (15) auch schreiben

$$(16) \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial g}{\partial y_2} y_3 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_\mu} y_{\mu+1}\right) + \\ + \left(\frac{\partial g}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial g}{\partial z_2} z_3 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial z_\nu} z_{\nu+1}\right) + \cdots = 0$$

oder, wenn $\sum\limits_s$ die Summation über alle verschiedenen Einserserien bedeutet:

$$(17) \qquad \sum_s \left(\frac{\partial g}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial g}{\partial y_2} y_3 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_\mu} y_{\mu+1}\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist aber nichts anderes als die charakteristische Differentialgleichung *für Semi-Invarianten binärer Formen*[1]

$$(18) \qquad \begin{aligned} \varphi_y(\xi_1, \xi_2) = \alpha_\xi^\mu = \mu!\, y_1 \xi_1^\mu + (\mu-1)!\, y_2 \binom{\mu}{1} \xi_1^{\mu-1} \xi_2 + (\mu-2)!\, y_3 \binom{\mu}{2} \xi_1^{\mu-2} \xi_2^2 + \cdots + \\ + 1!\, y_\mu \binom{\mu}{\mu-1} \xi_1 \xi_2^{\mu-1} + y_{\mu+1} \xi_2^\mu \\ \varphi_z(\xi_1, \xi_2) = \beta_\xi^\nu = \nu!\, z_1 \xi_1^\nu + (\nu-1)!\, z_2 \binom{\nu}{1} \xi_1^{\nu-1} \xi_2 + \cdots + z_{\nu+1} \xi_2^\nu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Eine Integritätsbasis für alle N-Invarianten $g(y)$ — und damit auch für alle A-Invarianten $f(x)$ — wird also gegeben durch *ein volles System von Semiinvarianten dieser binären Formen* (18). Die Grade dieser letzteren sind durch die Anzahl der Einsen in den verschieden Einserserien s festgelegt.

[1] Vgl. z. B. E. B. ELLIOT, Algebra of Quantics, Oxford (1895), S. 112 ff. (»Annihilator» O, der die »Anti-Semiinvarianten» charakterisiert). Hierzu auch L. MAURER, Münchener Ber. 29 (1899), S. 152.

Die Semiinvarianten sind projektive Invarianten der Grundformen, zu denen noch eine spezielle Linearform hinzu genommen wird (hier ξ_2). Man erhält also die Endlichkeit für die Semiinvarianten aus der für die projektiven Invarianten und die Semiinvarianten selbst findet man, indem man alle Komitanten (In- und Kovarianten) der Grundformen (18) aufsucht und in den Kovarianten ξ_1, ξ_2 durch 0, 1 ersetzt.

§ 3. Die Rationalbasis.

Da die Aufstellung voller Systeme von Semiinvarianten bei längeren Einserserien eine reichlich komplizierte Sache sein kann, wollen wir auch eine *Rational-Basis* für alle N-Invarianten $g(y)$ ermitteln, hier lassen sich nämlich die Basisinvarianten explicite angeben.

Sei zunächst eine einzige Einserserie mit den dazu gehörigen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_\mu, y_{\mu+1}$ gegeben. Dann haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial g}{\partial y_2} y_3 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_\mu} y_{\mu+1} = 0, \tag{19}$$

die leicht auf die gewöhnliche Weise zu integrieren ist und die μ unabhängigen Integrale liefert:

$$\tag{20} \begin{cases} C_1(y) = y_{\mu+1} \\ C_2(y) = y_{\mu-1} y_{\mu+1} - \frac{1}{2} y_\mu^2 \\ C_3(y) = y_{\mu-2} y_{\mu+1}^2 - y_{\mu-1} y_\mu y_{\mu+1} + \frac{1}{3} y_\mu^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_\mu(y) = y_1 y_{\mu+1}^{\mu-1} - \frac{1}{1!} y_\mu y_2 y_{\mu+1}^{\mu-2} + \frac{1}{2!} y_\mu^2 y_3 y_{\mu+1}^{\mu-3} + \cdots \\ \qquad + (-1)^\mu \frac{1}{(\mu-2)!} y_\mu^{\mu-2} y_{\mu-1} y_{\mu+1} - (-1)^\mu \frac{\mu-1}{\mu!} y_\mu^\mu . \end{cases}$$

Für C_m haben wir neben

$$\tag{21} \begin{aligned} C_m = {} & y_{\mu-m+1} y_{\mu+1}^{m-1} - \frac{1}{1!} y_\mu y_{\mu-m+2} y_{\mu+1}^{m-2} + \cdots \\ & + (-1)^m \frac{1}{(m-2)!} y_\mu^{m-2} y_{\mu-1} y_{\mu+1} - (-1)^m \frac{m-1}{m!} y_\mu^m . \end{aligned}$$

die Rekursionsformel

(22) $$C_m = y_{\mu-m+1}\, y_{\mu+1}^{m-1} - \frac{1}{1!}\, y_\mu\, C_{m-1} - \frac{1}{2!}\, y_\mu^2\, C_{m-2} - \cdots - \frac{1}{(m-2)!}\, y_\mu^{m-2}\, C_2 - \frac{1}{m!}\, y_\mu^m.$$

Jedes rationale Integral von (19) ist dann ein Polynom der $C_m(y)$ von (20), geteilt durch eine Potenz von $y_{\mu+1}$.

Analog für eine zweite Einserserie von ν Einsen und den dazu gehörigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, z_{\nu+1}$. Hier tritt dann neben die Polynome

$$\begin{cases} C_1(z) = z_{\nu+1} \\ C_2(z) = z_{\nu-1}\, z_{\nu+1} - \frac{1}{2}\, z_\nu^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_\nu(z) = z_1\, z_{\nu+1}^{\nu-1} - \frac{1}{1!}\, z_\nu\, z_2\, z_{\nu+1}^{\nu-2} + \cdots + (-1)^\nu \frac{\nu-1}{\nu!}\, z_\nu^\nu \end{cases}$$

noch die N-Invariante

(23) $$\Delta_{12} = y_\mu\, z_{\nu+1} - y_{\mu+1}\, z_\nu$$

und dasselbe gilt für alle weiteren Einserserien.

So ergibt sich im allgemeinsten Falle das Resultat, dass jede rationale N-Invariante $g(y, z, \ldots)$ ein Bruch ist, in dessen Zähler ein Polynom der $C_m(y)$, $C_m(z), \ldots, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{23}, \ldots$ steht und dessen Nenner von einem Potenzprodukte $y_{\mu+1}^\alpha\, z_{\nu+1}^\beta \ldots$ gebildet wird.

§ 4. Beispiele.

Zur Verdeutlichung des Obigen seien einige einfache Beispiele besprochen.

1. Sei $n = 4$. Dann haben wir die folgenden fünf nicht-äquivalenten Typen von Normalformen:

$$\underset{T_1}{\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{Vmatrix}} \quad \underset{T_2}{\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_3 \end{Vmatrix}} \quad \underset{T_3}{\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{Vmatrix}} \quad \underset{T_4}{\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 \end{Vmatrix}} \quad \underset{T_5}{\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{Vmatrix}}$$

Bei T_1 sind alle vier y_i selbst N-*I*nvarianten; bei T_2 nur y_2, y_3 und y_4; bei T_3 haben wir zwei Einserserien von je einer Eins, also nach (18) die beiden binären Linearformen

$$\varphi_y = \alpha_\xi = y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2$$
$$\varphi_z = \beta_\xi = z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 = y_3 \xi_1 + y_4 \xi_2.$$

Ihre Semiinvarianten sind also y_2, y_4 und $(\alpha\beta) = y_1 y_4 - y_2 y_3$ und diese drei Polynome bilden die Integritätsbasis für diesen Fall.

Bei T_4 ergeben sich neben y_4 aus der binären quadratischen Form

$$\varphi_y = \alpha_\xi^2 = \frac{1}{2} y_1 \cdot \xi_1^2 + 2 y_2 \cdot \xi_1 \xi_2 + y_3 \cdot \xi_2^2$$

zunächst deren Semiinvarianten α_ξ^2, $(\alpha\beta)^2$ und aus diesen die N-Invarianten y_3 und $y_1 y_3 - \frac{1}{2} y_2^2$ (vgl. (20)).

Bei T_5 schliesslich haben wir y_4 und die binäre kubische Form

$$\varphi_y = \alpha_\xi^3 = \frac{1}{6} y_1 \cdot \xi_1^3 + \frac{3}{2} y_2 \cdot \xi_1^2 \xi_2 + 3 y_3 \cdot \xi_1 \xi_2^2 + y_4 \cdot \xi_2^3.$$

Deren Semiinvarianten sind

$$\alpha_\xi^3,\ (\alpha\beta)^2 \alpha_\xi \beta_\xi,\ (\alpha\beta)^2 (\gamma\alpha) \beta_\xi \gamma_\xi^2 \quad \text{und} \quad (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (\alpha\delta)(\beta\gamma);$$

sie liefern (vgl. (20)) neben y_4 die N-Invarianten

$$C_2(y) = y_2 y_4 - \frac{1}{2} y_3^2$$
$$C_3(y) = y_1 y_4^2 - y_2 y_3 y_4 + \frac{1}{3} y_3^3$$
$$D(y) = -18 y_1 y_2 y_3 y_4 + 6 y_1 y_3^3 + 9 y_1^2 y_4^2 + 8 y_2^3 y_4 - 3 y_2^2 y_3^2.$$

Dies ist die Integritätsbasis für alle $g(y)$; y_4, $C_2(y)$ und $C_3(y)$ bilden die Rationalbasis. Wir haben in der Tat[1]

$$D(y) = \frac{1}{y_4^2}(8 C_2^3 + 9 C_3^2).$$

[1] Vgl. ELLIOT, l. c. S. 219.

2. Sei $n = 8$ und N die Matrix

$$N = \left\Vert \begin{array}{cccc|c|ccc}
\lambda_1 & 1 & & & & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
 & & \lambda_1 & 1 & & & & \\
 & & & \lambda_1 & & & & \\
\hline
 & & & & \lambda_2 & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_3 & 1 & \\
 & & & & & & \lambda_3 & 1 \\
 & & & & & & & \lambda_3
\end{array} \right\Vert$$

Wir haben hier also drei Länder mit je einem Feld und im ganzen zwei Einserserien. Für die N-Invarianten $g(y)$ erhalten wir die Rationalbasis

$$y_4,\ y_5,\ y_8 = z_3,\quad \Delta_{12} = y_3 z_3 - y_4 z_2 = y_3 y_8 - y_4 y_7$$

$$C_2(y) = y_2 y_4 - \frac{1}{2} y_3^2;\qquad C_3(y) = y_1 y_4^2 - y_2 y_3 y_4 + \frac{1}{3} y_3^3$$

$$C_2(z) = z_1 z_3 - \frac{1}{2} z_2^2 = y_6 y_8 - \frac{1}{2} y_7^2$$

nnd als Nenner treten nur Potenzprodukte $y_4^\alpha z_3^\beta = y_4^\alpha y_8^\beta$ auf.

Die Bestimmung einer Integritätsbasis für die N-Invarianten $g(y)$ erfordert die Berechnung eines vollen Systems von Semiinvarianten einer binären kubischen Form

$$\varphi_3 = 6 y_1 \cdot \xi_1^3 + 6 y_2 \cdot \xi_1^2 \xi_2 + 3 y_3 \cdot \xi_1 \xi_2^2 + y_4 \cdot \xi_2^3$$

und einer binären quadratischen Form

$$\varphi_2 = 2 y_6 \cdot \xi_1^2 + 2 y_7 \cdot \xi_1 \xi_2 + y_8 \cdot \xi_2^2 .$$

Man hat also ein volles System von projektiven Invarianten von φ_3 und φ_2 aufzustellen und in den Kovarianten ξ_1, ξ_2 durch 0, 1 zu ersetzen. Es ergeben sich so 15 Invarianten[1]; also enthält die gesuchte Integritätsbasis, da noch y_5 mit zu zählen ist, 16 Invarianten.

[1] Vgl. GORDAN-KERSCHENSTEINER, Vorlesungen über Invariantentheorie II, Leipzig (1887), S. 323.

§ 5. Absolute und relative A-Invarianten.

Wir schreiben jetzt wieder x statt y und es sei die Form $f(x)$ eine A-Invariante mit dem Multiplikator α[1]:

$$(2) \qquad A(f) = \alpha \cdot f.$$

Wann gibt es absolute A-Invarianten? Wir wissen nach (14), dass α die Gestalt hat

$$(14) \qquad \alpha = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n$$

wo die p_i ganze Zahlen $\geqq 0$ und die λ_i die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $|\lambda E - A| = 0$ sind. Notwendig für die Existenz von absoluten Invarianten ($\alpha = 0$) ist also das Bestehen einer positiv-ganzzahligen Relation

$$(24) \qquad p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n = 0.$$

Und dies ist auch hinreichend, denn es gibt nach (10) zu jedem λ_i wenigstens eine lineare Invariante L_i und nach (24) ist also $L_1^{p_1} L_2^{p_2} \ldots L_h^{p_h}$ eine absolute A-Invariante. Ferner: es gibt nur relative, ganze, rationale Invarianten, wenn keine Gleichung (24) möglich ist, und es gibt nur absolute Invarianten, wenn alle $\lambda_i = 0$ sind.

Jetzt seien $f \neq \text{const.}$, $f_1, f_2, \ldots f_s$ A-Invarianten mit den Multiplikatoren $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Dann gilt der

Satz 1: *Ist*

$$(25) \qquad f = f_1 + f_2 + \cdots + f_s,$$

so können rechts alle f_i weggelassen werden, bei denen $\alpha_i \neq \alpha$ ist. Sind also z. B. alle $\alpha_i \neq \alpha$, so folgt $f \equiv 0\{x\}$.[2]

Beweis. Es seien $\alpha_i, \alpha_k, \ldots, \alpha_r$ die untereinander und von α verschiedenen Multiplikatoren der Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Wir bilden den Operator

$$\varphi(A) = (A - \alpha_i E)(A - \alpha_k E) \ldots (A - \alpha_r E);$$

---

[1] L. Maurer, l. c. S. 154 nennt bei einem regulären $A(f)$ zweiter Art eine relative Invariante f eine »ausgezeichnete Funktion« und die ganze Zahl α in (2) ihren »Index«.

[2] Hierzu H. Weyl, Mathem. Zeitschr. 23 (1925) S. 277.

wenden wir ihn auf (25) an, so ensteht rechter Hand Null und links

$$f \cdot \varphi(\alpha) = (\alpha - \alpha_i)(\alpha - \alpha_k) \ldots (\alpha - \alpha_r) \cdot f,$$

wir würden also $f = 0$ bekommen, wenn ein α_i von α verschieden wäre, gegen unsere Voraussetzung $f \neq \text{const.}$

Satz 1 gilt in derselben Weise, wenn $A(f)$ durch eine beliebige Transformation X einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ersetzt wird und f sowie die f_i $\mathfrak{G}$-Invarianten sind.

Es gilt weiters der

Satz 2. *Auch die absoluten A-Invarianten $F(x)$ bilden einen endlichen Integritätsbereich.*[1]

Beweis. Die absoluten A-Invarianten $F(x)$ sind nämlich Polynome $P(f_i)$ absoluter und relativer A-Invarianten $f_i(x)$ mit $A(F) = 0$. Nach dem Hilbertschen Basissatz lassen sich aus allen F eine endliche Anzahl $F_1, F_2, \ldots, F_m$ so auswählen, dass jede absolute A-Invariante F in der Gestalt

$$F = F_1 \cdot G_1(f) + F_2 \cdot G_2(f) + \cdots + F_m \cdot G_m(f) \tag{26}$$

geschrieben werden kann, wo die $G_j(f)$ wieder Polynome der f_i, also entweder selbst A-Invarianten oder Summen solcher sind. Wenden wir also Satz 1 an auf die Gleichung (26), so folgt $A(G_j) = 0$, d. h. die G_j können so gewählt werden, dass sie auch absolute A-Invarianten sind, wodurch Satz 2 bewiesen ist.

Zu jeder absoluten A-Invariante $F(x)$ gehört, wenn sie als Polynom der relativen Invarianten dargestellt wird — wir setzen jetzt voraus, dass es solche gibt — nach (24) eine verschwindende Linearform der λ_i mit ganzzahligen Koeffizienten $p_i \geqq 0$ und umgekehrt. Der Inhalt des Satzes 2 kann dann auch wie folgt formuliert werden:

Satz 3. *Gegeben n komplexe Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Aus der Gesamtheit der Gleichungen $P = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n = 0$ mit ganzen $p_i \geqq 0$ lässt sich eine endliche Anzahl $P_1, P_2, \ldots, P_m$ derart auswählen, dass jedes P in der Gestalt*

$$P = g_1 P_1 + g_2 P_2 + \cdots + g_m P_m$$

mit ganzen $g_i \geqq 0$ dargestellt werden kann.[2]

---

[1] L. Maurer, l. c. S. 162.

[2] Dies ist ein spezieller Fall eines allgemeinen Satzes über Linearformen von J. G. van der Corput; vgl. Proceed. Akad. von Wetensch. Amsterdam 34 (1931), S. 372—382. Vgl. auch A. Ostrowski, Math. Ann. 78 (1918), S. 98 und 81 (1920), S. 22.

Schliesslich können wir die Endlichkeit der A-Invarianten noch wie folgt formulieren als

Satz 4: *Alle ganzen rationalen Integrale der Differentialgleichung* $a_i^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha \cdot f$ *oder auch die der homogenen Differentialgleichung* $a_i^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ *bilden einen endlichen Integritätsbereich.*

Es sei hier noch auf den Unterschied hingewiesen zwischen A-Invarianten $f(x)$ und den Invarianten $g(x)$ bei der *einzelnen endlichen linearen Transformation* A: für erstere haben wir $A(f) = a_i^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha \cdot f$, für letztere hingegen $g(\bar{x}_i) = g(a_i^k x_k) = \mu \cdot g(x_i)$. Diese letzteren Formen $g(x)$ bilden im allgemeinen *keinen endlichen Integritätsbereich.* Denn wenn wir die Matrix $\|a_i^k\|$ wieder auf die Jordansche Normalform transformieren, so gibt es zu jeder Wurzel λ_i wenigstens eine lineare Invariante y_i, wofür also $a_i^k y_k = \lambda_i y_i$ ist. Ist nun $\lambda_i = 0$, so gilt für jedes Polynom $g(y) = y_i \cdot P(y)$, wo $P(y)$ beliebig, $g(\bar{y}) = 0$, d. h. jedes solche $g(y)$ ist eine Invariante bei der endlichen Transformation A und es existiert hier keine endliche Integritätsbasis.[1]

§ 6. Minimalpolynome $D(A)$.

Sei $f(x) \neq$ const. eine Form p-ten Grades der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nicht notwendig eine A-Invariante. $A(f) = a_i^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist dann wieder eine Form der x_i, vom selben Grade wie f oder $= 0$. Ebenso $A^2(f) = A(A(f))$, $A^3(f), \ldots$. Da es nur endlich-viele linear-unabhängige Polynome vom Grade p in den x_i gibt, muss zu jedem $f(x)$ mit kleinstem $m \geqq 0$ ein »*Minimalpolynom*« $D_{m+1}(A)$ der Gestalt

$$(27)\quad \begin{cases} D_{m+1}(A) = A^{m+1} + d_1 A^m + d_2 A^{m-1} + \cdots + d_m A + d_{m+1} = \\ \qquad = (A - \delta_1)(A - \delta_2) \ldots (A - \delta_{m+1}) \end{cases}$$

existieren, derart, dass

$$(28)\qquad D_{m+1}(A)(f) \equiv 0 \{x_i\}$$

[1] Invarianten bei einer einzelnen endlichen Transformation A behandelt H. HILTON, Proc. London Mat. Soc. 10 (1902), S. 423—445 und 11 (1912), S. 96—103.

gilt. Ist $f(x)$ eine A-Invariante mit dem Multiplikator α, so ist bereits $(A-\alpha)\cdot(f)=0$, also $m=0$ und $D_{m+1}(A)=D_1(A)=A-\alpha$. Und umgekehrt ist für $m=0$ f eine A-Invariante.

Von diesen Minimalpolynomen gilt der

Satz 5: *Zu jedem $f(x)\neq const.$ gibt es ein einziges Minimalpolynom $D_{m+1}(A)$. Ist $P(A)\neq const.$ ein Polynom in A und verschwindet $P(A)(f)$,* so ist *$P(A)$ durch $D_{m+1}(A)$ teilbar.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt aus der Minimaleigenschaft und aus (27); denn hätten $D'_{m+1}(A)$ und $D''_{m+1}(A)$ die Eigenschaft (28), so würde ihre Differenz ein kleineres m ergeben. Zum Beweise des zweiten Teiles dividieren wir $P(A)$ mit $D_{m+1}(A)$:

$$P(A)=Q(A)\cdot D_{m+1}(A)+R(A),$$

wo $R(A)$ höchstens vom m-ten Grade in A ist. Schreiben wir rechts von allen Gliedern der letzten Gleichung f, so folgt $R(A)(f)=0$, also $R(X)\equiv 0$ für alle X, w. z. b. w.

Es seien jetzt $f_1, f_2, \ldots, f_j$ A-Invarianten mit den Multiplikatoren α_i, also

$$A(f_i(x))=\alpha_i\cdot f_i(x)$$

und weiter $\Phi(f)$ ein Polynom dieser $f_i\cdot$ Φ ist i. a. nicht wieder eine A-Invariante. Wir bilden das zu $\Phi(f)$ gehörige Minimalpolynom $D_{m+1}(A)$ und beweisen hierüber den

Satz 6: *Die Gleichung $D_{m+1}(X)=0$ hat nur einfache Wurzeln.*

Sei nämlich Φ als Polynom der f_i ausgeschrieben, mit Koeffizienten $\Phi_{p_1p_2\ldots p_j}$

$$\Phi=\Sigma\,\Phi_{p_1p_2\ldots p_j}\cdot f_1^{p_1}f_2^{p_2}\ldots f_j^{p_j}. \tag{29}$$

Wir haben dann:

$$\begin{cases} A(\Phi)=\Sigma\,\Phi_{p_1p_2\ldots p_j}(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\cdots+p_j\alpha_j)\,f_1^{p_1}f_2^{p_2}\ldots f_j^{p_j} \\ A^2(\Phi)=\Sigma\,\Phi_{p_1p_2\ldots p_j}(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\cdots+p_j\alpha_j)^2 f_1^{p_1}f_2^{p_2}\ldots f_j^{p_j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{30}$$

$D_{m+1}(A)$ entsteht aus (29) und (30) durch Elimination der Produkte $\Phi_{p_1\ldots p_j}\cdot$ $\cdot f_1^{p_1}\ldots f_j^{p_j}$. Bezeichnen wir also mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m+1}$ die untereinander verschiedenen Werte von $p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\cdots+p_j\alpha_j$ in den Gleichungen (30), so wird

$$D_{m+1}(A)(\Phi)=\begin{vmatrix} \Phi & 1 & \dots & 1 \\ A(\Phi) & \delta_1 & \dots & \delta_{m+1} \\ A^2(\Phi) & \delta_1^2 & \dots & \delta_{m+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m+1}(\Phi) & \delta_1^{m+1} & \dots & \delta_{m+1}^{m+1} \end{vmatrix}=0.$$

und hieraus

$$D_{m+1}(A)=(A-\delta_1)(A-\delta_2)\dots(A-\delta_{m+1})\cdot\Pi(\delta_i-\delta_k),$$

woraus wegen $\delta_i \neq \delta_k$ Satz 6 folgt.

Ist Φ selbst wieder A-Invariante, so wird $m=1$ und $\delta_1=p_1\alpha_1+\dots+p_j\alpha_j$ hat für alle Exponentensysteme p_i denselben Wert.

ABSCHNITT II.

Mehrgliedrige Gruppen.

§ 7. Die allgemeine Struktur von $\mathfrak{G}$.

Jetzt sei

$$\mathfrak{G}=G_1,\ G_2,\dots,G_r\ (r>1)$$

eine r-gliedrige kontinuierliche Gruppe homogener linearer Transformationen in n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und erzeugt durch die r linear-unabhängigen (mit konstanten Koeffizienten!) infinitesimalen Transformationen

$$(1)\qquad G_1=A(f)=\frac{\partial f}{\partial x_i}a_i^k x_k,\quad G_2=B(f)=\frac{\partial f}{\partial x_i}b_i^k x_k,\dots$$

(über i und k wird von 1 bis n summiert).

Ist $\mathfrak{H}=G_1, G_2, \dots, G_j$ ein Teilsystem von $\mathfrak{G}$, für welches alle Klammerausdrücke

$$[G_i\,G_k]=\Gamma_{ik}^l\,G_l\qquad (i,k=1,2,\dots,j)$$

wieder nur durch $G_1, G_2, \dots, G_j$ allein ausdrückbar sind, so ist $\mathfrak{H}$ eine *Untergruppe* von $\mathfrak{G}$. Gilt für jedes G_m aus $\mathfrak{G}\,(m=1,2,\dots,r)$:

$$(2)\qquad [G_i\,G_m]=\Gamma_{im}^1\,G_1+\Gamma_{im}^2\,G_2+\dots+\Gamma_{im}^j\,G_j\qquad (i=1,2,\dots,j),$$

so heisst $\mathfrak{H}$ eine *invariante* oder *ausgezeichnete Untergruppe* (*Normalteiler*) von $\mathfrak{G}$.

Hat $\mathfrak{G}$ ausser sich selbst und der Identität 0 keinen Normalteiler, ist also ohne »eigentlichen» Normalteiler, so heisst $\mathfrak{G}$ *einfach*. Einfache, nicht ein-gliedrige Gruppen haben wenigstens die Ordnung drei.

Die Gesamtheit der Klammerausdrücke $[G_i\, G_k]$ $(i,\, k = 1, 2, \ldots, r)$ bilden einen Normalteiler $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$; er wird die (erste) *Ableitung* von $\mathfrak{G}$ genannt. Endigt die Reihe der Ableitungen $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots, \mathfrak{G}^{(s-1)}, \mathfrak{G}^{(s)}$ mit $\mathfrak{G}^{(s)} = 0$, dann sind alle infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}^{(s-1)}$ untereinander vertauschbar, $\mathfrak{G}^{(s-1)}$ ist also ein ABELscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ heisst dann *auflösbar* oder *integrabel*.

Enthält eine Gruppe $\mathfrak{G}$ keinen *auflösbaren* Normalteiler, so heisst sie *halbeinfach*. Jede halb-einfache Gruppe $\mathfrak{E}$ ist als direktes Produkt $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_m\, (m \geqq 1)$ von einfachen Gruppen darstellbar[1]: ist E_i aus $\mathfrak{E}_i$, E_k aus $\mathfrak{E}_k$, so gilt für $i \neq k$ stets $[E_i\, E_k] = 0$.

Wir werden in diesem § von einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ausgehen, bei der die Reihe der Ableitungen mit $\mathfrak{G}^{(s)}\, (s \geqq 1)$ abbricht, wo also $\mathfrak{G}^{(s)} = \mathfrak{G}^{(s+1)} = \cdots$ ist. Ist $\mathfrak{G}^{(s)} = 0$, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar; ist $\mathfrak{G}^{(s)} \neq 0$, so stellt $\mathfrak{G}^{(s)}$ eine Gruppe dar, die mit ihrer Ableitung zusammenfällt. Letzteres ist z. B. bei allen halb-einfachen Gruppen der Fall; es gibt aber auch nicht-halb-einfache Gruppen mit dieser Eigenschaft.

Nehmen wir dann eine Basis (1) für $\mathfrak{G}$ so an, dass in ihr die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}^{(s)}$ enthalten sind, so haben wir folgendes Schema:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
\mathfrak{G} = G_1, & G_2, & \ldots & & G_h; & \mathfrak{G}^{(s)} \\
\mathfrak{G}' = & G'_1, & G'_2, & \ldots & G'_{h_1}; & \mathfrak{G}^{(s)} \\
\ldots & & & & & \\
\mathfrak{G}^{(i)} = & & G^{(i)}_1, & G^{(i)}_2, \ldots & G^{(i)}_{h_i}; & \mathfrak{G}^{(s)} \\
\ldots & & & & & \\
\mathfrak{G}^{(s)} = & & & & & \mathfrak{G}^{(s)}
\end{array}\right.$$

Hierbei ist $h > h_1 > h_2 \cdots > h_{s-1} > h_s = 0$.

Ist ferner $X^{(i-1)}$ eine willkürliche infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}^{(i-1)}$ und $X^{(i)}$ aus $\mathfrak{G}^{(i)}$, so ist $[X^{(i-1)}\, X^{(i)}]$ entweder Null oder wieder in $\mathfrak{G}^{(i)}$ enthalten.

Wir setzen $h \geqq 1$ voraus; die Gruppen $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$ werden wir später behandeln.

---

[1] Vgl. E. CARTAN, Thèse, Paris (1894), S. 53.

§ 8. $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten.

Eine Form $F(x)$ der Veränderlichen x_i, für die identisch in allen x_i die r Gleichungen gelten

$$A(F) = \alpha \cdot F, \qquad B(F) = \beta \cdot F, \ \ldots,$$

heisst $\mathfrak{G}$-Invariante.

Wir werden die Endlichkeit der $\mathfrak{G}$-Invarianten schrittweise beweisen. Ist $\mathfrak{G}$ nicht selbst auflösbar, so werden wir voraussetzen, *dass die Endlichkeit der $\mathfrak{G}^{(s)}$-Invarianten feststeht und dass wir eine Integritätsbasis der $\mathfrak{G}^{(s)}$-Invarianten kennen.* Von diesen ausgehend werden wir die Endlichkeit der $\mathfrak{G}^{(s-1)}$-Invarianten, dann die der $\mathfrak{G}^{(s-2)}$-Invarianten u. s. f. bis zu den $\mathfrak{G}$-Invariaten selbst beweisen. Ist dagegen $\mathfrak{G}^{(s)} = 0$, also $\mathfrak{G}$ selbst auflösbar, so nehmen wir eine beliebige infinitesimale Transformation $X^{(s-1)}_{h_{s-1}}$ von $\mathfrak{G}^{(s-1)}$ und suchen deren Invarianten; die Endlichkeit dieser $X^{(s-1)}_{h_{s-1}}$-Invarianten steht nach Abschnitt I fest. Ist $h_{s-1} > 1$, so nehmen wir eine zweite infinitesimale Transformation $X^{(s-1)}_{h_{s-1}-1}$ und bestimmen die Polynome der x_i, die bei $X^{(s-1)}_{h_{s-1}-1}$ und $X^{(s-1)}_{h_{s-1}}$ invariant sind. Dies wird solange fortgesetzt, bis wir die $\mathfrak{G}^{(s-1)}$-Invarianten haben. Von diesen kommen wir dann wieder zu den $\mathfrak{G}^{(s-2)}$-Invarianten u. s. f. bis zu den $\mathfrak{G}$-Invarianten. Es erübrigt sich dann noch die Fälle $\mathfrak{G} = \mathfrak{E} =$ halb-einfache Gruppe und $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$ zu behandeln. Wir werden sehen, dass der Endlichkeitsbeweis für diese Fälle auf ganz ähnliche Weise, wie eben geschildert, geliefert werden kann durch Aufbauen von $\mathfrak{E}$ aus einfachen Gruppen $\mathfrak{E}_i$.

Es sei f eine $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invariante, also $X(f) = \xi \cdot f$ für jede infinitesimale Transformation X aus $\mathfrak{G}^{(i)}$ und A sei eine infinitesimale Transformation aus $\mathfrak{G}^{(i-1)}$, aber nicht auch von $\mathfrak{G}^{(i)}$. Es ist dann $[AX]$ wieder in $\mathfrak{G}^{(i)}$ enthalten oder verschwindet. Wir beweisen jetzt den

Satz: *Ist f eine $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invariante, so auch $A(f)$.*

Beweis[1]: Die $m+1$ Formen der linearen Formenschaar S_{m+1}

$$(4) \qquad A^0(f) = f, \quad A(f) = f', \quad A(f') = A^2(f) = f'', \ \ldots, \quad A^m(f) = f^{(m)}$$

seien linear unabhängig, $f^{(m+1)} = A^{m+1}(f)$ dagegen linear-abhängig von den Formen (4). Ist $A(f) = 0$ oder $= \alpha \cdot f$, so ist nichts mehr zu beweisen; wir kön-

[1] Vgl. den von H. Weyl gegebenen Beweis des Lieschen Theorems über die Existenz von Invarianten bei auflösbaren Gruppen: Mathem. Zeitschr. 24 (1925), S. 375.

nen also $m \geqq 1$ voraussetzen. Jedes $f^{(m+k)} = A^{m+k}(f)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist dann linear-homogen durch die Formen der Schaar S_{m+1} auszudrücken: S_{m+1} bleibt also als $(m+1)$-dimensionaler Raum bei der Operation A invariant. Wir wollen zeigen, dass S_{m+1} auch bei jeder Operation $X, X', X'', \ldots$ von $\mathfrak{G}^{(i)}$ invariant bleibt.

Zunächst ist, da f eine $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invariante:

$$X(f) = \xi \cdot f, \quad X'(f) = \xi' \cdot f, \quad X''(f) = \xi'' \cdot f, \ldots; \tag{5}$$

dann:

$$X(f') = XA(f) = [XA](f) + AX(f) = X'(f) + \xi \cdot A(f),$$

da $[XA] = X'$ wieder in $\mathfrak{G}^{(i)}$ liegt; also wird

$$X(f') = \xi' \cdot f + \xi \cdot f'. \tag{6}$$

Weiters, in derselben Weise:

$$X(f'') = XA(f') = [XA](f') + AX(f') = X'(f') + AX(f'),$$

also, da

$$X'(f') = X'A(f) = [X'A](f) + AX'(f) = X''(f) + \xi' \cdot A(f) = \xi'' \cdot f + \xi' \cdot f'$$

ist und $X(f')$ aus (6) entnommen werden kann:

$$X(f'') = \xi'' \cdot f + \xi' \cdot f' + A(\xi' \cdot f + \xi \cdot f') = \xi'' \cdot f + \xi' \cdot f + \xi' \cdot f + \xi \cdot f'', \quad \text{d. h.}$$

$$X(f'') = \xi'' \cdot f + 2\xi' \cdot f' + \xi \cdot f''. \tag{7}$$

Allgemein hat man bei X die folgende Transformation des Raumes S_{m+1}:

$$\left\{\begin{array}{ll} X(f) & = \xi \cdot f \\ X(f') & = \xi' \cdot f + \xi \cdot f' \\ X(f'') & = \xi'' \cdot f + 2\xi' \cdot f' + \xi \cdot f'' \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ X(f^{(m)}) & = \xi^{(m)} \cdot f + \ldots\ldots\ldots + \xi \cdot f^{(m)}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Diese Gleichungen stellen eine lineare Transformation X des Raumes S_{m+1} dar, deren Spur $= (m+1) \cdot \xi$ ist, wobei nach (5) ξ der zu f gehörige Multiplikator von X war. Die S_{m+1}-Transformationen $X', X'', \ldots$ haben also die Spuren $(m+1) \cdot \xi'$, $(m+1) \cdot \xi'', \ldots$. Nun ist aber A ebenfalls eine lineare S_{m+1}-Transformation und es war $X' = [XA]$ gesetzt; daher: Spur von $X' =$ Spur von

$[XA] = XA - AX$, also $=$ Null, also $\xi' = 0$. Und ebenso schliesst man $\xi'' = \cdots = \xi^{(m)} = 0$, so dass (8) übergeht in

$$X(f^{(k)}) = \xi \cdot f^{(k)}.$$

Also ist insbesondere

$$X(f') = XA(f) = \xi \cdot f' = \xi \cdot A(f), \text{ d. h.}$$

$$XA(f) = AX(f) = \xi \cdot A(f). \tag{9}$$

$A(f)$ ist also so wie f selbst eine $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invariante, w. z. b. w.

Man sieht sofort, dass obiger Satz für jede Gruppe und allgemeiner für jede Menge infinitesimaler Transformationen $\mathfrak{K} = X_1, X_2, \ldots$ und eine ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegende infinitesimale Transformation A gilt, wenn nur jedes $[AX_i]$ wieder zu $\mathfrak{K}$ gehört: für jede $\mathfrak{K}$-Invariante f ist auch $A(f)$ eine $\mathfrak{K}$-Invariante.

§ 9. **Die infinitesimale Transformation $\mathfrak{A}$.**

Wir setzen jetzt voraus, dass wir ein kleinstes volles System

$$\Sigma = \{f_\nu\} = f_1, f_2, \ldots, f_s \tag{10}$$

von $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten kennen. f_ν sei eine dieser Basisinvarianten und vom Grade p_ν in den x_i. Es gibt zu jedem Grade p_ν nur endlich-viele *linear*-unabhängige $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten $f_\nu, f'_\nu, f''_\nu, \ldots$. Nehmen wir diese für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots, s$ zum Systeme Σ hinzu, so entsteht wieder ein endliches System

$$\Sigma' = \{f_\nu, f'_\nu, f''_\nu, \ldots\} \tag{11}$$

von *untereinander linear-unabhängigen* Formen und jede $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invariante ist ganz und rational durch die Formen aus Σ' darstellbar. In Σ' werden aber, was bei Σ nicht der Fall ist, im allgemeinen Formen $f(x)$ vorhanden sein, die ganz und rational — aber nicht linear — durch andere Invarianten von Σ' ausgedrückt werden können. Ist z. B.

$$\Sigma = x_1, x_2;\ x_3 x_4 + x_5 x_6,$$

so lautet Σ':

$$x_1, x_2;\ x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_3 x_4 + x_5 x_6.$$

Nun sei A eine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}^{(i-1)}$ ausserhalb $\mathfrak{G}^{(i)}$ gelegen, sodass also entweder $\mathfrak{G}_1^{(i-1)} = A$, $\mathfrak{G}^{(i)}$ mit $\mathfrak{G}^{(i-1)}$ identisch ist oder doch eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}^{(i-1)}$ darstellt, deren Ableitung $= \mathfrak{G}^{(i)}$ ist.

Wir denken uns die $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten (11) nach den Graden in den x_i geordnet:

(12) $$\Sigma' = f_\lambda, f'_\lambda, f''_\lambda, \ldots, f_\lambda^{(\sigma_1)}; f_\mu, f'_\mu, \ldots, f_\mu^{(\sigma_2)}; \cdots = \{f_\lambda\}, \{f_\mu\}, \ldots,$$

sodass alle f_λ Formen vom Grade p_λ, alle f_μ Formen vom Grade $p_\mu, \ldots$ in den Veränderlichen x_i sind. Jedes f von Σ' hat dann bei der allgemeinen infinitesimalen Transformation $\lambda X + \lambda' X' + \lambda'' X'' + \cdots$ von $\mathfrak{G}^{(i)}$ einen bestimmten Multiplikator $\lambda \cdot \xi + \lambda' \cdot \xi' + \cdots$:

(13) $$(\lambda X + \lambda' X' + \cdots)(f) = (\lambda \cdot \xi + \lambda' \cdot \xi' + \cdots) \cdot f = \varDelta \cdot f.$$

Wir ordnen ferner die $f_\lambda^{(\tau)}$ jedes Abschnittes $\{f_\lambda\}$ von (12) nach diesen Multiplikatoren und erhalten so schliesslich statt (11):

(14) $$\Sigma' = f_1, f_2, \ldots, f_{s_1}; g_1, g_2, \ldots, g_{s_2}; h_1, h_2, \ldots, h_{s_3}; \ldots.$$

Dann haben alle f_i aus (14) denselben Grad p_1 in den x_i und denselben Multiplikator $\varDelta_1$ bei einem beliebigen X aus $\mathfrak{G}^{(i)}$; ebenso sind alle g_i Formen vom Grade $p_2 \geqq p_1$ in den x_i und haben denselben Multiplikator $\varDelta_2 \neq \varDelta_1$ u. s. f.

Nun bilden wir $A(f_i)$. Dies ist wieder vom Grade p_1 in den x_i (oder verschwindet) und ist nach dem vorigen § wieder eine $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invariante und also wegen der Konstruktion von Σ' linear und homogen durch die $f_\lambda, g_\mu, \ldots$ vom Grade p_1 darstellbar.[1]

(15) $$A(f_i) = \mathfrak{A}_i^\lambda f_\lambda + \mathfrak{A}_i^\mu g_\mu + \cdots$$

Der Multiplikator von $A(f_i)$ bei $\mathfrak{G}^{(i)}$ ist nach (9) gleich dem von f_i, also $= \varDelta_1$. Nach dem Satze 1 des § 5 stehen dann in (15) rechts nur die f_λ und keine $g_\mu, h_\nu, \ldots$; dies gibt

(16) $$A(f_i) = \mathfrak{A}_i^\lambda f_\lambda, \quad A(g_k) = \mathfrak{A}_k^\mu g_\mu, \quad A(h_j) = \mathfrak{A}_j^\nu h_\nu, \ldots.$$

Hieraus folgt, dass die infinitesimale Transformation A in den Formenreihen $f_\lambda, g_\mu, h_\nu, \ldots$ eine infinitesimale Transformation $\mathfrak{A}$ induziert mit

---

[1] Für absolute Invarianten vgl. L. Maurer, l. c. S. 166 (infinitesimale Transformation $\overline{C}_\lambda(f)$); bei Maurer fehlt die hier unerlässliche Erweiterung von Σ zu Σ'.

$$\mathfrak{A}(F(f,\ g,\ldots)) = \frac{\partial F}{\partial f_i}\mathfrak{A}_i^\lambda f_\lambda + \frac{\partial F}{\partial g_k}\mathfrak{A}_k^\mu g_\mu + \cdots \tag{17}$$

wo F ein beliebiges Polynom der $f_\lambda,\ g_\mu,\ldots$ vorstellt.

Nehmen wir jetzt die Formen $f,\ g,\ h,\ldots$ von (14) als neue Veränderliche und wenden wir den Satz von Abschnitt I an, demzufolge die Invarianten einer eingliedrigen Gruppe, hier die $\mathfrak{A}$-Invarianten $\Phi(f,\ g,\ h,\ldots)$ mit

$$\mathfrak{A}(\Phi) = \alpha\cdot\Phi \tag{18}$$

eine endliche Integritätsbasis $\Phi_1,\ \Phi_2,\ldots,\ \Phi_\varrho$ haben, deren Basisinvarianten Φ_i homogen bezüglich der f_λ, homogen bezüglich der $g_\mu,\ldots$ sind, so ergibt sich aus dieser Homogeneität, dass die Φ_i auch $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten, also auch $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invarianten sind.

Sei nun umgekehrt $F(x)$ eine $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invariante. Dann ist F auch eine $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invariante und also ein Polynom $\Phi(f_\lambda,\ g_\mu,\ h_\nu,\ldots)$ der Formen (14), das bei A invariant bleibt und wofür also (18) gilt. Somit ist Φ ein Polynom der $\Phi_1,\ \Phi_2,\ldots,\ \Phi_\varrho$, d. h. auch die $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invarianten haben eine endliche Basis.

§ 10. Die $\mathfrak{A}$-Invarianten Φ.

Das »Somit», mit dem der letzte Satzt beginnt, bedarf einiger Erörterung. Wir haben nämlich aus dem Bestehen der Gleichung (18) oder

$$\mathfrak{A}(\Phi(f,\ g,\ldots)) = \alpha\cdot\Phi(f,\ g,\ldots)$$

auf Φ = Polynom von endlich-vielen Basisinvarianten $\Phi_1,\ \Phi_2,\ldots,\ \Phi_\varrho$ geschlossen. Dies ist nach den Ausführungen des ersten Abschnittes sicher richtig, wenn die Veränderlichen $f_i,\ g_k,\ldots$ *untereinander unabhängig* sind; die Schlussweisen, die zu diesem Resultate führten, werden aber hinfällig, wenn dies nicht der Fall ist. Und gerade dieses letztere wird hier im allgemeinen eintreten: die Polynome $f_i,\ g_k,\ldots$ von (14) sind $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten zwischen denen eine Reihe von Syzygien

$$S \equiv 0\ \{x\},\quad S \not\equiv 0\ \{f,\ g,\ldots\} \tag{19}$$

bestehen, d. h. das Polynom S ist nicht Null, wenn seine Argumente $f_i,\ g_k,\ldots$ als unabhängige Veränderliche betrachtet werden; dagegen verschwindet S identisch, wenn alle $f_i,\ g_k,\ldots$ durch die n unabhängigen Veränderlichen $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ ausgedrückt werden.

Alle Syzygien zwischen den endlich-vielen Formen f_i, $g_k, \ldots$ der x_i haben nach einem Satze von D. HILBERT[1] eine endliche Basis

$$S_1, S_2, \ldots, S_\sigma \tag{20}$$

von *irreduziblen* Syzygien (erster Art), d. h. es gilt erstens (19) für jedes S_i, zweitens ist für jedes S von (19) mit geeigneten Polynomen $P_i(f, g, \ldots)$

$$S \equiv S_1 P_1 + S_2 P_2 + \cdots + S_\sigma P_\sigma = \Sigma S_i P_i \qquad \{f, g, \ldots\} \tag{21}$$

und drittens ist kein S_i von (20) durch die übrigen S_k analog (21) ausdrückbar.

Wenn nun $F(x)$ eine $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invariante ist, so ist, wie schon im vorigen § bemerkt wurde, $F(x)$ auch ein Polynom Ψ der $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten f_i, $g_k, \ldots$. Ψ ist aber nur modd S_i bestimmt:

$$F(x) = \Psi(f, g, \ldots) + \Sigma S_i U_i. \tag{22}$$

Und weiter, aus $A(F(x)) \equiv \alpha \cdot F(x)$ identisch in allen x_i kann nur auf

$$\mathfrak{A}(\Psi) \equiv \alpha \cdot \Psi \quad \{x\}$$

nicht aber auf

$$\mathfrak{A}(\Psi) \equiv \alpha \cdot \Psi \quad \{f, g, \ldots\}$$

geschlossen werden.

Ist andererseits, wenn die f_i, $g_k, \ldots$ als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, $\Phi(f, g, \ldots)$ eine Lösung von (18), so ist dieses Φ gewiss auch eine $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invariante, wenn nachträglich die Giltigkeit von (22) vorausgesetzt wird; d. h. es ist wohl jedes $\Phi(f, g, \ldots)$ auch ein Ψ (oder verschwindet), aber es muss nicht umgekehrt jedes $\Psi(f, g, \ldots)$ von (22) ein Φ sein.

Aus

$$\mathfrak{A}(\Psi) - \alpha \cdot \Psi \equiv 0 \{x\}, \ \not\equiv 0 \{f, g, \ldots\}$$

folgt nun, dass $\mathfrak{A}(\Psi) - \alpha \cdot \Psi = 0$ eine Syzygie $S = 0$ darstellt, dass also

$$\mathfrak{A}(\Psi) - \alpha \cdot \Psi \equiv S_i P_i \{f, g, \ldots\} \tag{23}$$

identisch in den f_i, $g_k, \ldots$ gilt. Wir wollen jetzt zeigen, dass hieraus auf

$$\Psi \equiv \Phi + \Sigma S_i Q_i \{f, g, \ldots\} \tag{24}$$

[1] Mathem. Ann. 36 (1890).

geschlossen werden kann, d. h. dass man also tatsächlich alle $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invarianten Ψ aus den $\mathfrak{A}$-Invarianten (18) (bei unabhängigen $f_i, g_k, \ldots$) erhält. Denn (24) gibt unmittelbar

$$\Psi(x) \equiv \Phi(f(x),\ g(x), \ldots)\ \{x\}. \tag{25}$$

Zum *Beweise* von (24) gehen wir auf die Bedeutung der Polynome Φ zurück: sie sind *Semi-Invarianten* einer Reihe von binären Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ mit Koeffizienten $f_i, g_k, \ldots$, also *projektive* Invarianten der Formen[1]

$$\{\varphi\}' = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu \quad \text{und} \quad L = 0 \cdot \xi_1 + 1 \cdot \xi_2 = l_\xi. \tag{26}$$

Daraus haben wir auf die Endlichkeit aller Φ geschlossen unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten $f_i, g_k, \ldots$ dieser Formen untereinander unabhängig sind. Es ist also die Frage zu beantworten: bleibt diese Endlichkeit bestehen, wenn diese Koeffizienten nicht mehr unabhängig sind und wie erhält man dann die Invarianten Ψ dieser Formen (26)?

Hierauf gibt ein Theorem von J. Deruyts Antwort: Man erhält jedes Ψ der Formen (26) mit *abhängigen* Koeffizienten aus einer projektiven Invariante Φ derselben Formen mit *unabhängigen* Koeffizienten in der Gestalt (24), vorausgesetzt, *dass das System der Gleichungen $S_i = 0$, das die Abhängigkeit der Koeffizienten der Formen (26) darstellt, selbst ein projektiv-invariantes Gleichungssystem ist.*[2]

Es kommt also nur noch darauf an zu zeigen, dass die Syzygien $S_i = 0$ (Vgl. (20)) ein projektiv-invariantes Gleichungssystem der Formen (26) darstellen. Lassen wir in (26) die Linearform L weg, so heisst dies: die Gleichungen $S_i = 0$ müssen *semi-invariant* sein. Dies ist nun in der Tat der Fall. Aus $S_i \equiv 0\ \{x\}$ folgt zunächst $\mathfrak{A}(S_i) \equiv 0\ \{x\}$ und daher ist entweder auch

$$\mathfrak{A}(S_i) \equiv 0 \quad \{f, g, \ldots\}$$

oder $\mathfrak{A}(S_i) = 0$ stellt selbst eine Syzygie dar, d. h. wir haben in jedem Falle

$$\mathfrak{A}(S_i) \equiv \Sigma S_i U_i \quad \{f, g, \ldots\} \tag{27}$$

woraus die Semi-Invarianz aller $S_i = 0$ folgt.

[1] Semi-Invarianten bei binären Formen = affine binäre Invarianten!

[2] J. Deruyts, Essai d'une théorie générale des formes algébriques, Luik (1890), S. 148 ff. Deruyts sagt dann, dass die Formen mit abhängigen Koeffizienten eine »particularité essentielle« besitzen.

L. Maurer, l. c. S. 148 nennt die Ψ »spezielle«, die Φ »allgemeine« Invarianten.

§ 11. Der Übergang von $\mathfrak{G}^{(i)}$- zu $\mathfrak{G}^{(i-1)}$-Invarianten.

Wir hatten

$$\mathfrak{G}_1^{(i-1)} = A\,,\ \mathfrak{G}^{(i)}$$

und $\Sigma = \{f_\nu\}$ war ein kleinstes volles System von als bekannt vorausgesetzten $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten. Wir haben Σ erweitert zu einem System (11)

$$\Sigma' = \{f_\nu,\ f'_\nu,\ f''_\nu,\ \ldots\}$$

von linear-unabhängigen $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten.

Die $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invarinten findet man dann auf die folgende Weise. Im Raume der Formen von Σ' induziert A eine infinitesimale Transformation $\mathfrak{A}$ und von dieser hat man alle $\mathfrak{A}$-Invarianten $\Phi(f_\nu,\ f'_\nu,\ \ldots)$ zu ermitteln, was wieder auf die Berechnung eines vollen Systems von Semi-Invarianten binärer Formen führt. Aus einer Integritätsbasis $\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_\varrho$ können wir dann diejenigen Φ_j weglassen, für die

$$\Phi_j(f_\nu(x)) \equiv 0 \quad \{x\}$$

ist und die, die ganz und rational durch die anderen Φ_k ausdrückbar sind. Die übrigbleibenden Φ_i bilden dann eine Basis für alle $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invarianten. Wir sehen: der Übergang von den gegebenen $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invarianten f_ν zu den $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invarianten Φ ist *konstruktiv*, d. h. in endlich-vielen Schritten wirklich ausführbar.[1]

Jetzt gehen wir zurück zur Strukturtabelle (3) der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wenn die Untergruppe $\mathfrak{G}^{(i-1)}$ ausserhalb der $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$ noch eine infinitesimale Transformation B enthält, so setzen wir

$$\mathfrak{G}_2^{(i-1)} = B,\ \mathfrak{G}_1^{(i-1)} = B,\ A,\ \mathfrak{G}^{(i)}$$

und vollziehen den Übergang von den $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invarianten Φ_j zu den $\mathfrak{G}_2^{(i-1)}$-Invarianten Ω_k in derselben Weise mit Hilfe der durch B bei den Φ_i induzierten infinitesimalen Transformation $\mathfrak{B}(\Phi_j) = \mathfrak{B}_j^{k}\Phi_k$.

So fortfahrend gelangen wir nach $h_{i-1} - h_i$ Schritten zu den $\mathfrak{G}^{(i-1)}$-Invarianten selbst. Von diesen in derselben Weise zu den $\mathfrak{G}^{(i-2)}$-Invarianten u. s. f. bis zu den $\mathfrak{G}$-Invarianten. Bei (3) müssen wir also beginnen bei den $\mathfrak{G}^{(s)}$-Invari-

[1] Beim ursprünglichen Beweise für die Endlichkeit der $\mathfrak{G}_1^{(i-1)}$-Invarianten in den Proceed. der Akademie van Wetensch. Amsterdam, 33 (1930) wurde noch der Basissatz von HILBERT benutzt.

anten und dann die ganze Reihe $G_1, G_2, \ldots, G_h$ durchlaufen, was höchstens h Übergänge $\mathfrak{G}^{(i)} \to \mathfrak{G}^{(i-1)}$ verlangt.

Hiermit ist insbesondere für auflösbare Gruppen $\mathfrak{G}$ die Endlichkeit der Invarianten bewiesen.

§ 12. Beispiel für eine auflösbare Gruppe.

Wir behandeln als Beispiel für eine auflösbare Gruppe die Gruppe $\mathfrak{G}_3$ der *Euklidischen Bewegungen* in der Ebene und suchen ein volles System von $\mathfrak{G}_3$-Invarianten bei zwei Punkten x und y.

Sind $x_1 : x_2 : x_3$ die homogen-rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes x, so ist die $\mathfrak{G}_3 = A, B, C$ gegeben durch die drei infinitesimalen Transformationen

$$A(F) = x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad B(F) = x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad C(F) = x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} \tag{28}$$

mit den Zusammensetzungsgleichungen

$$[BC] = 0, \quad [BA] = C, \quad [AC] = B.$$

Es ist also $\mathfrak{G}_3' = B, C$ und $\mathfrak{G}_3'' = 0$.

Wir beginnen mit der infinitesimalen Transformation C. Aus

$$C(f) = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

für eine Form $f(x_i, y_k)$ erhalten wir die Matrix (die leeren Stellen bedeuten Nullen):

$$(C) \ldots \quad \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \left\| \begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array} \right\|$$

Hieraus folgt, dass

(29) $$x_1,\ x_3,\ y_1,\ y_3 \quad \text{und} \quad x_2 y_3 - x_3 y_2$$

alle C-Invarianten sind. Die letzte ergibt sich als Invariante der beiden binären Linearformen

$$x_2 \xi_1 + x_3 \xi_2 \quad \text{und} \quad y_2 \xi_1 + y_3 \xi_2$$

entsprechend den beiden Einsen in (C).

Jetzt nehmen wir die C-Invarianten (29) und ergänzen sie zu einem vollen System Σ' von *linear-unabhängigen* Invarianten

(30) $$x_1,\ x_3,\ y_1,\ y_3;\ x_i x_k,\ x_i y_k,\ y_i y_k \ \text{für}\ i,\ k = 1,\ 3 \quad \text{und} \quad x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

Diese $4 + 10 + 1 = 15$ C-Invarianten nehmen wir nun als neue Veränderliche $(f_i,\ g_k, \ldots)$ und unterwerfen sie der infinitesimalen Transformation B. Da

$$B(x_2 y_3 - x_3 y_2) = 0, \quad B(x_1) = x_3, \quad B(x_3) = 0$$

ist, so führt $B(x_i y_k)$ wieder auf $x_i y_k$ mit $i,\ k = 1, 3$ und wir brauchen aus (30) nur für $x_1,\ x_3,\ y_1,\ y_3$ und $x_2 y_3 - x_3 y_2 = (xy)_{23}$ die durch B erzeugte Matrix (B) hinzuschreiben:

$$(B) \ldots \quad \left\|\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & y_1 & y_3 & (xy)_{23} \\ \hline 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right\|$$

Hieraus erhalten wir also ein volles System von $\mathfrak{G}_3'$-Invarianten

(31) $$x_3,\ y_3;\ x_3 y_1 - x_1 y_3;\ x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

$\mathfrak{G}_3'$ ist die zweigliedrige Translationsgruppe der Ebene; (31) gibt also die Translationsinvarianten zweier Punkte x und y.

Der letzte Schritt führt durch Hinzunahme der infinitesimalen Transformation A zu den gesuchten $\mathfrak{G}_3$-Invarianten. Wir können vorerst x_3 und y_3 absondern, die auch bei A absolut-invariant sind. Für die beiden anderen haben wir

$$A(x_3 y_1 - x_1 y_3) = +(x_2 y_3 - x_3 y_2) = (xy)_{23}$$
$$A(x_2 y_3 - x_3 y_2) = -(x_3 y_1 - x_1 y_3) = -(xy)_{31}$$

mit der zugehörigen Matrix

$$(A) \ldots \quad \left\| \begin{array}{cc} (xy)_{31} & (xy)_{23} \\ \hline 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|$$

Setzen wir dann

(32) $$f_1 = (xy)_{23} + i\,(xy)_{31}, \quad f_2 = (xy)_{23} - i\,(xy)_{31} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

so ist

$$A(f_1) = i \cdot f_1, \quad A(f_2) = -i \cdot f_2,$$

wodurch (A) in die Normalform $\begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}$ transformiert ist. Also bilden

(33) $$x_3,\ y_3;\ f_1 = (xy)_{23} + i \cdot (xy)_{31} \quad \text{und} \quad f_2 = (xy)_{23} - i \cdot (xy)_{31}$$

das volle System von Euklidischen Bewegungsinvarianten zweier Punkte x und y in der Ebene. x_3 und y_3 sind absolute, f_1 und f_2 relative Bewegungsinvarianten.

(34) $$f_1 f_2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2$$

ist absolut-invariant und bildet mit x_3 und y_3 zusammen das volle System von absoluten $\mathfrak{G}_3$-Invarianten. (34) gibt in inhomogenen Koordinaten ($x_3 = y_3 = 1$) das Quadrat des Abstandes der beiden Punkte.

§ 13. Absolute Invarianten bei auflösbaren Gruppen.

Es sei

$$\mathfrak{H} = X_1, X_2, \ldots, X_h$$

eine auflösbare Gruppe linearer Transformationen in n homogenen Veränderlichen x_i; $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\varrho$ sei eine Integritätsbasis der $\mathfrak{H}$-Invarianten $\Phi(x)$. Wenn wir die allgemeine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{H}$ durch

(35) $$X = t^1 X_1 + t^2 X_2 + \cdots + t^h X_h = t^i X_i$$

darstellen, so gilt für jede Basisinvariante Φ_ν:

(36) $$X(\Phi_\nu) = (t^1\lambda_{1\nu} + t^2\lambda_{2\nu} + \cdots + t^h\lambda_{h\nu}) \cdot \Phi = t^i\lambda_{i\nu} \cdot \Phi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

und wir wollen den Multiplikator

$$T_\nu = t^i\lambda_{i\nu}$$

das »*Gewicht*» von Φ_ν nennen. Die $h \cdot \varrho$ Zahlen $\lambda_{i\nu}$ sind dabei die Gewichte der Φ_ν bei den infinitesimalen Transformationen X_i:

(37) $$X_i(\Phi_\nu) = \lambda_{i\nu} \cdot \Phi.$$

So wie bei einer einzelnen infinitesimalen Transformation (vgl. Abschnitt I, § 5, Gleichung (16)) gilt auch hier für $\mathfrak{H}$-Invarianten Φ, Φ', Φ'', ... der

Satz 1: *Ist*

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' + \cdots,$$

so sind Φ', Φ'', ... alle vom selben Gewichte wie Φ.

Er wird genau so wie bei einer einzelnen infinitesimalen Transformation bewiesen.

In derselben Art folgt hieraus mit Hilfe des Hilbertschen Basissatzes der

Satz 2: *Auch die absoluten $\mathfrak{H}$-Invarianten besitzen eine endliche Integritätsbasis.*

Für absolute $\mathfrak{H}$-Invarianten Ω haben wir mit Hilfe der Basis aller (absoluter und relativer) $\mathfrak{H}$-Invarianten: $\Omega =$ Polynom der $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\varrho$. Jedes Ω hat das Gewicht Null. Daraus folgt, wenn es überhaupt absolute $\mathfrak{H}$-Invarianten gibt, dass erstens mit gewissen ganzen Zahlen $\geqq 0$ zwischen den ϱ Gewichten $T_\nu = \lambda_{i\nu} t^i$ Beziehungen

(38) $$U_r = p_r^1\, T_1 + p_r^2\, T_2 + \cdots + p_r^\varrho\, T_\varrho = p_r^\nu \lambda_{i\nu} t^i \equiv 0 \qquad \{t^i\}$$

bestehen mit $r = 1, 2, \ldots, \sigma$, wo $\sigma \leqq$ der Gliederzahl aller absoluten Basisinvarianten $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\tau$ ist. Zweitens müssen — da jede absolute $\mathfrak{H}$-Invariante Ω nach Satz 2 ein Polynom der $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\tau$ wird, *alle* Beziehungen der Gestalt (38) mit ganzen Zahlen ($\geqq 0$) $q^1, q^2, \ldots, q^\sigma$ in der Form

(39) $$U = q^1\, U_1 + q^2\, U_2 + \cdots + q^\sigma\, U_\sigma \equiv 0 \quad \{t^i\}$$

darstellbar sein.

Kennt man umgekehrt die σ identisch verschwindenden Linearformen U_r der Gewichte T_ν, so bilden die Formen

$$\Phi_1^{p_r^1} \cdot \Phi_2^{p_r^2} \cdot \ldots \cdot \Phi_\varrho^{p_r^\varrho}$$

für $r = 1, 2, 3, \ldots, \sigma$ eine Basis für alle absoluten $\mathfrak{H}$-Invariaten Ω.

§ 14. Einfache Gruppen.[1]

Wir stellen in diesem § vorerst Alles zusammen, was für den Endlichkeitsbeweis aus der rein algebraischen Theorie der einfachen Gruppen benötigt wird.[2] Die Beweise für die benutzten Tatsachen finden sich in den angeführten Arbeiten bei Killing, Cartan und bei Weyl und eine Wiedergabe derselben würde den Umfang der vorliegenden Arbeit wenigstens verdoppeln.

Es sei $r \geqq 3$ die Ordnung der einfachen Gruppe $\mathfrak{G}_r$, $l \geqq 1$ ihr Rang.[3] Dann kann man die r infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}_r$ — unabhängig von jeder besonderen Darstellung — in der folgenden Gestalt als gegeben annehmen:

---

[1] Vgl. Proceed. d. Akad. van Wetensch. Amsterdam; 33. November 1930.

[2] W. Killing, Mathem. Ann. 31, 33, 34 und 36 (1888—1890); E. Cartan, Thèses, Paris (1894); H. Weyl, Mathem. Zeitschr. 24 (1925), S. 354.

[3] Der *Rang* einer Gruppe $\mathfrak{G}_r$ ist nach Killing wie folgt definiert. Sind

$$X_\lambda(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{i,\lambda}^k x_k \text{ für } \lambda = 1, 2, \ldots, r$$

die infinitesimalen Transformationen, also

$$X(f) = t^\lambda X_\lambda(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{i,\lambda}^k t^\lambda x_k$$

die allgemeine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}_r$, so gelten die Zusammensetzungsgleichungen

$$[X_\lambda X_\mu] = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu X_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_{i,\lambda}^k a_{k,\mu}^j - a_{i,\mu}^k a_{k,\lambda}^j) x_j = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{i,\nu}^j x_j.$$

Die r infinitesimalen Transformationen E_λ der *adjungierten Gruppe* sind dann

$$E_\lambda(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t^\sigma} \Gamma_{\varrho\lambda}^\sigma t^\varrho$$

und $|\zeta \delta_\lambda^\mu - \Gamma_{\varrho\lambda}^\mu t^\varrho| = 0$ gibt die »*charakteristische Gleichung*« der Gruppe $\mathfrak{G}_r$:

$$\zeta^r - \psi_1(t)\zeta^{r-1} + \psi_2(t)\zeta^{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}(t)\zeta = 0.$$

($\psi_r(t)$ ist $\equiv 0$). Hier sind die Koeffizienten $\psi_i(t)$ Formen i-ten Grades in den $t^1, t^2, \ldots, t^r$. Die Anzahl der untereinander unabhängigen $\psi_i(t)$ ist dann der *Rang* der Gruppe $\mathfrak{H}_r$.

(40) $$\mathfrak{G}_r = H_1,\, H_2,\, \ldots,\, H_l;\; E_\alpha,\, E_{-\alpha},\, E_\beta,\, E_{-\beta},\, \ldots,\, E_\sigma,\, E_{-\sigma}.$$

Hier bilden die l infinitesimalen Transformationen $H_1, H_2, \ldots, H_l$ eine l-gliedrige ABELsche Untergruppe $\mathfrak{H}_l$ von $\mathfrak{G}_r$ (mit vertauschbaren infinitesimalen Transformationen), sodass also jeder Klammerausdruck $[H_i H_k] = 0$ ist. Die $r-l$ übrigen infinitesimalen Transformationen von (40) zerfallen in $\frac{1}{2}(r-l)$ Paare wie z. B. E_α, $E_{-\alpha}$ und es gilt, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ l komplexe Zahlenkoeffizienten bedeuten, die nicht alle gleichzeitig Null sind:

(41) $$\begin{cases} [H_i E_\alpha] = \alpha_i \cdot E_\alpha, \quad [H_i E_{-\alpha}] = -\alpha_i \cdot E_{-\alpha} \\ [E_\alpha E_{-\alpha}] = H_\alpha = \alpha_1 \cdot H_1 + \alpha_2 \cdot H_2 + \cdots + \alpha_l \cdot H_l. \end{cases}$$

Ist dann

$$H = \lambda_1 \cdot H_1 + \lambda_2 \cdot H_2 + \cdots + \lambda_l \cdot H_l$$

die allgemeine infinitesimale Transformation aus $\mathfrak{H}_l$, so wird:

(42) $$[H E_\alpha] = (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_l \alpha_l) \cdot E_\alpha = \alpha \cdot E_\alpha \quad \text{und} \quad [H E_{-\alpha}] = -\alpha \cdot E_{-\alpha}.$$

Die in (42) stehende, nicht identisch verschwindende Linearform der l Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$

(43) $$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_l \alpha_l$$

heisst die der infinitesimalen Transformation E_α entsprechende »*Wurzel*». Wir haben dann die $r-l$ verschiedenen Wurzeln

(44) $$\alpha,\; -\alpha,\; \beta,\; -\beta,\; \ldots,\; \sigma,\; -\sigma$$

und für die Zusammensetzung von E_α und E_β gilt

$$[E_\alpha E_\beta] = N_{\alpha\beta} \cdot E_{\alpha+\beta},$$

wobei die Konstante $N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha} \neq 0$ ist, wenn $\alpha + \beta$ wieder als Wurzel in (44) vorkommt. Ist hingegen $\alpha + \beta$ keine Wurzel, so ist $N_{\alpha\beta} = 0$ und E_α ist mit E_β vertauschbar.

Aus den Wurzeln (44) kann man ein sogenanntes »*Fundamentalsystem*» auswählen: dies sind l linear-unabhängige Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (zwischen denen also keine lineare Beziehung mit konstanten Koeffizienten besteht) und jede weitere Wurzel ϱ ist eine lineare Form

$$\varrho = a \cdot \alpha + b \cdot \beta + \cdots$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten.[1]

Zusammengestellt haben wir also die folgenden Konstitutionsformeln:

$$(45)\qquad \begin{cases} [H_i H_k] = 0, \quad [H E_\alpha] = \alpha \cdot E_\alpha, \quad [H E_{-\alpha}] = -\alpha \cdot E_{-\alpha} \\ [E_\alpha E_{-\alpha}] = \alpha_1 \cdot H_1 + \alpha_2 \cdot H_2 + \cdots + a_l \cdot H_l, \quad [E_\alpha E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}_r$ mit $X_1, X_2, \ldots, X_r$, und ist $[X_\lambda X_\mu] = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} X_\nu$, so sind die Zusammensetzungskoeffizienten $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ durch (45) vollständig bestimmt.

Bei dreigliedrigen einfachen Gruppen $\mathfrak{G}_3$ kann man wegen $l = 1$ überdies von den Parametern λ_i absehen und hat statt (45):

$$(46)\qquad [H E_\alpha] = -2 E_\alpha, \quad [H E_{-\alpha}] = 2 E_{-\alpha}, \quad [E_\alpha E_{-\alpha}] = H.$$

Der Zusammenhang mit einer bestimmten *Darstellung* D von $\mathfrak{G}_r$ durch lineare homogene Transformationen

$$(47)\qquad \bar{x}_i = \alpha_i^k x_k$$

in n Veränderlichen ergibt sich wie folgt. In (47) können die α_i^k als rationale Funktionen der r Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \lambda_\alpha, \lambda_{-\alpha}, \ldots, \lambda_\sigma, \lambda_{-\sigma}$ vorausgesetzt werden[2], die sich in der Umgebung der Identität $\lambda_\nu = 0$ regulär verhalten. Setzen wir dann

$$\left(\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial \lambda_\nu}\right)_{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 0} = a^k_{i,\nu},$$

so sind

$$(48)\qquad X_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_i} a^k_{i,\nu} x_k \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma, -\sigma)$$

die r infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}_r$, die zu dieser Darstellung D gehören.

Die kleinsten Werte von n, für die eine solche Darstellung D von einfachen Gruppen möglich ist, sind von E. Cartan bestimmt worden: $l + 1$ bei der allgemeinen linearen Gruppe, $2l$ und $2l + 1$ bei der orthogonalen, $2l$ bei der

---

[1] Cartan, l. c., S. 65.

[2] ebenda, S. 133.

Komplexgruppe; bei den übrigen einfachen Gruppen der Ordnung 78, 133, 248, 52 und 14 ist das kleinste n resp. 27, 56, 248, 26 und 7.[1]

Gilt $X_\nu(f) = \varDelta_\nu \cdot f$, so ist f eine X_ν-Invariante. Die Multiplikatoren $\varDelta_\nu$ heissen bei $\mathfrak{H}_l$-Invarianten »*Gewichte*». Ist

$$H = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \cdots + \lambda_l H_l = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_l X_l$$

die allgemeine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{H}_l$, so hat eine $\mathfrak{H}_l$-Invariante f bei H das Gewicht $\varDelta = \lambda_1 \varDelta_1 + \lambda_2 \varDelta_2 + \cdots + \lambda_l \varDelta_l$:

$$H(f) = \varDelta \cdot f. \tag{49}$$

Es gelten dann die *Sätze*[2]:

1. Hat die $\mathfrak{H}_l$-Invariante f das Gewicht $\varDelta$ und ist f gleich der Summe von Formen $f', f'', \ldots$ mit Gewichten $\neq \varDelta$, so folgt $f \equiv 0$, d. h. f verschwindet für alle x_i (vgl. Satz 1 in § 13).

2. Ist $f \not\equiv 0$ eine $\mathfrak{H}_l$-Invariante vom Gewichte $\varDelta$, so ist $E_\alpha(f)$ entweder $\equiv 0$ oder ebenfalls eine $\mathfrak{H}_l$-Invariante und hat dann das Gewicht $\varDelta + \alpha$.

3. Ist f eine $\mathfrak{H}_l$-Invariante vom Gewichte $\varDelta$, so gibt es ein kleinstes m, so dass

$$E_\alpha^m(f) = E_\alpha(E_\alpha^{m-1}(f)) \not\equiv 0, \quad E_\alpha^{m+1}(f) \equiv 0$$

ist. $E_\alpha^m(f)$ hat dann das Gewicht $\varDelta + m \cdot \alpha$.

4. Es gibt bei einfachen (und ebenso bei halb-einfachen) Gruppen $\mathfrak{G}$ nur *absolute* $\mathfrak{G}$-Invarianten. Sei nämlich $X_\mu(f) = \varDelta_\mu \cdot f$ und $X_\nu(f) = \varDelta_\nu \cdot f$, so ist $[X_\mu X_\nu]\,(f) = 0$ und jedes X_ϱ von $\mathfrak{G}$ ist als Summe $\Sigma\,[X_\mu X_\nu]$ zu schreiben.

§ 15. **Dreigliedrige einfache Gruppen.**

Wir behandeln zuerst dreigliedrige einfache Gruppen[3]

$$\mathfrak{G}_3 = H,\ E_\alpha,\ E_{-\alpha}$$

mit den Gleichungen (46). Sei

$$\Sigma = f_1, f_2, \ldots, f_\mu$$

---

[1] ebenda, S. 147.

[2] H. WEYL, Mathem. Zeitschr. 23 (1925), S. 277.

[3] L. MAURER, Math. Ann. 57 (1903), S. 284 nennt H, E_α und $E_{-\alpha}$ ein »Tripelsystem».

ein volles System von H-Invarianten. Es kann als bekannt vorausgesetzt werden, da H eine einzelne infinitesimale Transformation ist. Wir ergänzen Σ zu einem vollen System Σ' von *linear-unabhängigen* H-Invarianten (vgl. § 9).

Sei f_i eine H-Invariante aus Σ' vom Gewichte λ_i. Dann ist $E_\alpha(f_i)$ wieder eine H-Invariante vom Gewichte $\lambda_i - 2$ und also linear-homogen durch die Invarianten des Systems Σ' darstellbar:

$$E_\alpha(f_i) = \mathfrak{A}_i^k f_k. \tag{50}$$

Von dieser inf. Tr. $\frac{\partial F}{\partial f_i} \mathfrak{A}_i^k f_k$ suchen wir ein volles System $F_1, F_2, \ldots, F_m$ von *absoluten* $\mathfrak{A}$-Invarianten. Dann gilt

$$H(F_k) = \Lambda_k \cdot F_k, \quad E_\alpha(F_k) = 0.$$

Vom System der F_i ausgehend suchen wir ein volles System von *absoluten* H-Invarianten F_k^0:

$$H(F_k^0) = 0, \quad E_\alpha(F_k^0) = 0. \tag{51}$$

Ich behaupte, dass diese F_k^0 auch bei $E_{-\alpha}$ absolut invariant sind und also die gesuchte Integritätsbasis für die $\mathfrak{G}_3$-Invarianten bilden.

Es gilt nämlich der *Satz: Ist φ bei H und bei E_α absolut invariant, so auch bei $E_{-\alpha}$.*[1]

Beweis. Es sei p die kleinste Zahl, wofür $E_{-\alpha}^{p+1}(\varphi) = 0$ ist. (Vgl. Satz 3 des vorigen §.) Dann haben wir

$$\left\{\begin{array}{l}
E_\alpha E_{-\alpha}(\varphi) = [E_\alpha E_{-\alpha}](\varphi) + E_{-\alpha} E_\alpha(\varphi) = 0 \\
E_\alpha E_{-\alpha}^2(\varphi) = [E_\alpha E_{-\alpha}]\, E_{-\alpha}(\varphi) + E_{-\alpha} E_\alpha E_{-\alpha}(\varphi) = H E_{-\alpha}(\varphi) = -\alpha \cdot E_{-\alpha}(\varphi) \\
E_\alpha E_{-\alpha}^3(\varphi) = -\alpha \cdot (1 + 2) \cdot E_{-\alpha}^2(\varphi) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E_\alpha E_{-\alpha}^p(\varphi) = -\alpha \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (p-1)) \cdot E_{-\alpha}^{p-1}(\varphi) \\
E_\alpha E_{-\alpha}^p(\varphi) = -\alpha \cdot \frac{p}{2} \cdot (p-1) \cdot E_{-\alpha}^{p-1}(\varphi)
\end{array}\right. \tag{52}$$

[1] Für reguläre inf. Transf. bewiesen bei L. MAURER, l. c., S. 288. Vgl. Anm. 16 der Einleitung.

Wird nun $[E_\alpha E_{-\alpha}] = E_\alpha E_{-\alpha} - E_{-\alpha} E_\alpha$ auf $E^p_{-\alpha}(\varphi)$ angewendet, so ergibt sich wegen $E^{p+1}_{-\alpha}(\varphi) = 0$ und (52)

$$H E^p_{-\alpha}(\varphi) = -p \cdot \alpha \cdot F^p_{-\alpha}(\varphi) = \alpha \cdot \frac{p}{2}(p-1) \cdot E^p_{-\alpha}(\varphi),$$

also, da $\alpha \cdot E^p_{-\alpha}(\varphi) \neq 0$ ist: $p = 0$, w. z. b. w.

§ 16. r-gliedrige einfache Gruppen.

Jetzt sei

$$\mathfrak{G}_r = \mathfrak{H}_l;\ E_\alpha,\ E_{-\alpha},\ E_\beta,\ E_{-\beta},\ \ldots,\ E_\sigma,\ E_{-\sigma}$$

eine einfache Gruppe mit $r > 3$. Die l-gliedrige Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}_l$ ist *auflösbar;* wir können daher (vgl. § 11) alle $\mathfrak{H}_l$-Invarianten ermitteln.

Sei

$$f_1, f_2, \ldots, f_\mu$$

ein volles System von *linear-unabhängigen* (absoluten und relativen) $\mathfrak{H}_l$-Invarianten f:

(53) $$H_i(f_k) = \lambda_{ik} f_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Ferner sei $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ ein Fundamentalsystem von Wurzeln (vgl. § 14).

Wir konstruieren genau so wie im vorigen § (Gleichung (50)) ein volles System von linear-unabhängigen absoluten E_α-Invarianten f'_k:

(54) $$H_i(f'_k) = \lambda'_{ik} \cdot f'_k,\ E_\alpha(f'_k) = 0.$$

Jetzt sei β eine von α und von $-\alpha$ verschiedene Wurzel. Es gibt dann ein ganzes $a \geqq 0$ derart, dass $\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \ldots, \beta + a\alpha$ Wurzeln sind, $\beta + (a+1)\alpha$ aber nicht mehr.

Wir bilden $E_{\beta + a\alpha}(f'_k) = E_{\beta'}(f'_k)$. Wegen $[E_\alpha E_{\beta'}] = 0$ ($\alpha + \beta'$ ist keine Wurzel!) haben wir $E_\alpha E_{\beta'}(f'_k) = 0$, d. h. $E_{\beta'}(f'_k)$ ist wieder absolute E_α-Invariante und daher wird:

(55) $$E_{\beta'}(f'_k) = \mathfrak{B}^j_k f'_j.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung suchen wir wieder die absoluten $E_{\beta'}$-Invarianten f''_k und bekommen so ein volles System von linear-unabhängigen Formen f''_k mit

(56) $$H_i(f''_k) = \lambda''_{ik} \cdot f''_k,\ E_\alpha(f''_k) = 0,\ E_{\beta'}(f''_k) = 0\ \ (\beta' = \beta + a\alpha).$$

Nun sei γ eine weitere Wurzel des Fundamentalsystems. Zu dieser Wurzel gibt es dann mit ganzen b' und a' eine Wurzel $\gamma' = \gamma + b'\beta' + a'\alpha$ $(b' \geqq 0, a' \geqq 0)$ derart, dass weder $\gamma + (b'+1)\beta' + a'\alpha$ noch $\gamma + b'\beta' + (a'+1)\alpha$ Wurzeln sind. Dies kann man wie folgt einsehen. Es sei b' maximal gewählt: $\gamma, \gamma + \beta', \ldots, \gamma + b'\beta'$ seien Wurzeln, nicht aber $\gamma + (b'+1)\beta'$. Zu diesem $\gamma + b'\beta'$ suchen wir das maximale a', so dass also $\gamma + b'\beta + \alpha$, $\gamma + b'\beta' + 2\alpha, \ldots, \gamma + b'\beta' + a'\alpha$ Wurzeln sind. Wäre bei $\gamma + b'\beta' + a'\alpha$ der Koeffizient b' weiter zu vergrössern, so hätten wir die Wurzel $\gamma + b'_1\beta' + a'\alpha$ mit maximalem $b'_1 > b'$. Wäre hier wieder a' zu vergrössern, so ergäbe sich die Wurzel $\gamma + b'_1\beta' + a'_1\alpha$ mit $b'_1 > b_1$ und $a'_1 > a'$. Dieses Anwachsen der Koeffizienten von β' und von α kann nicht stets neue Wurzeln erzeugen; es müsste also einmal $\gamma + b'_i\beta' + a'_i\alpha = \gamma + b'_k\beta' + a'_k\alpha$ werden, was auf eine lineare Abhängigkeit zwischen α und β führen würde.

Für $E_{\gamma'} = E_{\gamma + b'\beta' + a'\alpha}$ gilt dann

$$E_\alpha E_{\gamma'}(f''_k) = 0, \quad E_{\beta'} E_{\gamma'}(f''_k) = 0,$$

d. h. $E_{\gamma'}(f''_k)$ ist wieder eine Invariante f'' von (56), also:

$$E_{\gamma'}(f''_k) = \mathfrak{C}^j_k f''_j. \tag{57}$$

Wir finden hieraus die absoluten $E_{\gamma'}$-Invarianten f'''

$$\left\{\begin{aligned} &H_i(f'''_k) = \lambda'''_{ik} f'''_k, \quad E_\alpha(f'''_k) = 0, \quad E_{\beta'}(f'''_k) = 0, \quad E_{\gamma'}(f'''_k) = 0 \\ &\qquad \beta' = \beta + a\alpha, \quad \gamma' = \gamma + b'\beta' + a'\alpha. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Wir gehen in dieser Weise weiter bis alle Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$ eines Fundamentalsystems aufgebraucht sind und erhalten so ein volles System $f^{(\mu)}_k$ von Invarianten, für die

$$H_i(f^{(\mu)}_k) = \lambda^{(\mu)}_{ik} \cdot f^{(\mu)}_k, \quad E_\alpha(f^{(\mu)}_k) = 0, \quad E_{\beta'}(f^{(\mu)}_k) = 0, \ldots, \quad E_{\mu'}(f^{(\mu)}_k) = 0 \tag{59}$$

gilt, wobei mit ganzen $p_{ik} \geqq 0$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \\ \beta' &= p_{21}\alpha + \beta \\ \gamma' &= p_{31}\alpha + p_{32}\beta + \gamma \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu' &= p_{l1}\alpha + p_{l2}\beta + \cdots + \mu \end{aligned}\right. \tag{60}$$

ebenfalls ein Fundamentalsystem von Wurzeln bilden.

Gehen wir jetzt vom vollen System der $f_k^{(\mu)}$ über zu einem vollen System von *absoluten* $\mathfrak{H}_l$-Invarianten F_i, so sind diese F_i nach (59) und dem im § 15 bewiesenen Satze auch bei $E_{-\alpha}$ absolut invariant: $E_{-\alpha}(F_i) = 0$. Wegen

$$[E_{-\alpha} E_{\beta'}] = N_{-\alpha,\beta'} \cdot E_{(p_{21}-1)\alpha+\beta} \quad \text{mit} \quad N_{-\alpha,\beta'} \neq 0$$

folgt die absolute Invarianz bei $E_{\beta'-\alpha}$, ebenso die bei $E_{\beta'-2\alpha}, \ldots, E_\beta$. Daraus wieder nach dem Satze des § 15: $E_{-\beta}(F_i) = 0$, also schliesslich: die F_i sind bei $\mathfrak{H}_l$ und bei allen $E_{\pm\eta}$ des Fundamentalsystems absolut invariant, daher auch bei allen E_ν der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}_r$.

§ 17. Halb-einfache Gruppen.

Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_m$$

eine halb-einfache Gruppe mit $m > 1$. Um auch für die $\mathfrak{G}$-Invarianten die Endlichkeit nachzuweisen, fassen wir $\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots, \mathfrak{G}_m$ zur halb-einfachen Gruppe

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots, \mathfrak{G}_m$$

zusammen und setzen voraus, dass wir die $\mathfrak{G}_0$-Invarianten $\varphi_i(x)$ schon kennen. Es sei

$$\Sigma = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\pi$$

ein kleinstes volles System von $\mathfrak{G}_0$-Invarianten; wir ergänzen es zu einem vollen System $\Sigma' = \{\varphi_j\}$ von *linear-unabhängigen* $\mathfrak{G}_0$-Invarianten.

Jetzt sei so wie in § 14 bei (40)

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_l;\ E_\alpha,\ E_{-\alpha}, \ldots, E_\sigma,\ E_{-\sigma}.$$

Wir konstruieren dann die $\mathfrak{G}_1$-Invarianten genau so wie im vorigen §, indem wir jetzt nicht die x_i, sondern die $\mathfrak{G}_0$-Invarianten φ_j von Σ' als Veränderliche nehmen. Hierzu haben wir vorerst die $\mathfrak{H}_l$-Invarianten aufzusuchen, d. h., wenn wieder

$$\mathfrak{H}_l = H_1, H_2, \ldots, H_l$$

ist, zuerst die H_l-Invarianten $\Psi_i(\varphi_j)$, mit diesen wieder die H_{l-1}-Invarianten $\Omega(\Psi_i)$ u. s. f., so wie wir dies in § 11 für auflösbare Gruppen getan haben. Hierbei bleiben die Überlegungen des § 10 vollinhaltlich gültig und alle auftretenden Formen $\Psi, \Omega, \ldots$ bleiben $\mathfrak{G}_0$-Invarianten, denn jede infinitesimale Transformation von $\mathfrak{C}_1$ ist mit allen infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{C}_0$ vertauschbar.

Von den $\mathfrak{H}_l$-Invarianten $f_k(\varphi_j)$ gehen wir dann so wie im vorigen § mit Hilfe eines Fundamentalsystems $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, von Wurzeln in $\mathfrak{C}_1$ weiter.

Es steht somit jetzt auch die Endlichkeit der $\mathfrak{C}$-Invarianten fest und damit erledigt sich auch der Fall des § 7, Gleichung (3), in welchem $\mathfrak{G}^{(s)} = \mathfrak{C}$ ist. Sind nämlich die $\mathfrak{C}$-Invarianten $\psi_i(x)$ bekannt, so nehmen wir diese wieder als neue Veränderliche und haben dann noch die Invarianten bezüglich der Gruppen $\mathfrak{G}^{(i)}$ von (3) zu ermitteln, was wieder nach § 11 geschehen kann.

§ 18. Gruppen mit $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$, die nicht halb-einfach sind.

Wir haben jetzt noch den Schlusstein des Endlichkeitsbeweises zu legen und noch Gruppen $\mathfrak{G}$ zu behandeln, die mit ihrer Ableitung $\mathfrak{G}'$ zusammenfallen und doch nicht halb-einfach sind. Ist dies geschehen, so sind wir nach § 7 mit allen linearen Gruppen fertig.

Es sei $\mathfrak{K} = K_1, K_2, \ldots, K_r$ eine nicht halb-einfache Gruppe mit $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$. Wir bemerken vorerst, dass es nur absolute $\mathfrak{K}$-Invarianten gibt. Wegen $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$ ist nämlich jedes K_i linear durch die $[K_m K_n]$ auszudrücken. Wir können uns also, so wie bei den halb-einfachen Gruppen, auf absolute Invarianten beschränken.

$\mathfrak{K}$ enthält einen *maximalen auflösbaren* Normalteiler $\mathfrak{N}$, dessen infinitesimale Transformationen $t^1 K_1 + t^2 K_2 + \cdots + t^r K_r$ durch die aus den r Gleichungen[1] $\dfrac{\partial \psi_2(t)}{\partial t^i} = 0$ sich ergebenden Parameterwerte $t^1 : t^2 : \cdots : t^r$ dargestellt werden. Die Faktorgruppe $\mathfrak{e} = \mathfrak{K}/\mathfrak{N}$ ist halb-einfach[2] und also das direkte Produkt von einfachen Gruppen. Wir werden, um die folgenden Überlegungen möglichst übersichtlich zu gestalten, $\mathfrak{e}$ als einfache Gruppe voraussetzen. Bei halb-einfachem $\mathfrak{e}$ führt die im vorigen § gebrauchte Schlussweise zum Ziel.

Sei also (vgl. (40))

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{h};\ \mathfrak{e}_\alpha,\ \mathfrak{e}_{-\alpha},\ \mathfrak{e}_\beta,\ \mathfrak{e}_{-\beta}, \ldots, \mathfrak{e}_\sigma,\ \mathfrak{e}_{-\sigma} \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_l,$$

wobei die Strukturformeln (41) und (45) mit kleinen Deutschen Buchstaben gelten. Für unsere Gruppe $\mathfrak{K}$ haben wir dann:

---

[1] Vgl. die dritte Anmerkung des § 14.

[2] Vgl. hierzu LIE-ENGEL I, S. 301 ff. und E. CARTAN, l. c., S. 97 ff. (Faktorgruppe = groupe associé).

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{N};\ K_1, K_2, \ldots, K_l;\ K_\alpha, K_{-\alpha}, \ldots, K_\sigma, K_{-\sigma} \tag{61}$$

und es gelten mod $\mathfrak{N}$ die Kongruenzen[1]:

$$[K_i K_\alpha] \equiv \alpha_i K_\alpha \qquad [K_i K_{-\alpha}] \equiv -\alpha_i K_{-\alpha} \qquad [K_i K_j] \equiv 0$$
$$[K_\alpha K_{-\alpha}] \equiv \Sigma \alpha_i K_i \qquad [K_\alpha K_\beta] \equiv N_{\alpha\beta} \cdot K_{\alpha+\beta}.$$

Bedeutet N eine infinitesimale Transformation aus $\mathfrak{N}$, so können wir diese Kongruenzen als Gleichungen wie folgt schreiben:

$$\left\{\begin{array}{lll} [K_i K_\alpha] = \alpha_i K_\alpha + N & [K_i K_{-\alpha}] = -\alpha_i K_{-\alpha} + N & [K_i K_j] = N \\ [K_\alpha K_{-\alpha}] = \Sigma \alpha_i K_i + N & [K_\alpha K_\beta] = N_{\alpha\beta} \cdot K_{\alpha+\beta} + N & \\ [N N'] = N'' & [N K_i] = N' & [N K_\alpha] = N'. \end{array}\right. \tag{62}$$

Wir gehen nun so vor wie in § 16, indem wir zuerst ein volles System $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ von linear-unabhängigen *absoluten* Invarianten bezüglich der *auflösbaren* Gruppe

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{N};\ K_1, K_2, \ldots, K_l \tag{63}$$

ermitteln. Dann ist jedes $K_\alpha(f_i)$ ebenfalls eine $\mathfrak{H}$-Invariante, denn der Satz 2 des § 14 bleibt nach (62) für *absolute* $\mathfrak{H}$-Invarianten gültig. Wir gehen dann so weiter wie bei Gleichung (50). Auch der Satz des § 15 bleibt hier giltig: ist φ bei $\mathfrak{H}$ und bei K_α absolut-invariant, so auch bei $K_{-\alpha}$. Demzufolge verläuft die weitere Konstruktion der $\mathfrak{K}$-Invarianten so wie von Gleichung (54) an: statt der Gruppe $\mathfrak{H}_l$ des § 16 tritt hier die Gruppe (63).

Ein Beispiel für eine derartige Gruppe $\mathfrak{K}$ bildet die Gruppe der Euklidischen Bewegungen im R_3. In homogen-rechtwinkligen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ lauten ihre sechs infinitesimalen Transformationen:

$$\left\{\begin{array}{ll} H_i'(f) = x_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) & \text{(Translationen)} \\ \left.\begin{array}{l} E_1'(f) = x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ E_2'(f) = x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ E_3'(f) = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \end{array}\right\} & \text{(Drehungen)} \end{array}\right. \tag{64}$$

[1] Diese Kongruenzen könnte man auch durch Gleichungen ersetzen, doch brauchen wir dies

Wir stellen bei $\mathfrak{E} = E_1', E_2', E_3'$ vorerst die Normalform her, indem wir setzen

$$(65) \quad \begin{cases} E_1 = H = E_3' = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ E_\alpha = E_1' + i \cdot E_2', \; E_{-\alpha} = E_1' - i \cdot E_2' \end{cases}$$

wofür dann gilt, vgl. § 15:

$$[HE_\alpha] = i \cdot E_\alpha, \; [HE_{-\alpha}] = - i \cdot E_{-\alpha}, \; [E_\alpha E_{-\alpha}] = 2\,i\,H \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Wir haben dann auszugehen von der viergliedrigen auflösbaren Gruppe

$$(66) \quad \mathfrak{H} = H_1', \; H_2', \; H_3'; \; H.$$

Nehmen wir etwa zwei Punkte x und y. Als Translationsinvarianten findet man leicht

$$(67) \quad x_4, \; y_4 \text{ und } (xy)_{i4} = x_i y_4 - x_4 y_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wovon x_4 und y_4 auch bei H absolut-invariant sind. Dagegen wird

$$H(xy)_{14} = -(xy)_{24}, \; H(xy)_{24} = (xy)_{14}, \; H(xy)_{34} = 0.$$

Hieraus das volle System von $\mathfrak{H}$-Invarianten:

$$(68) \quad x_4, \; y_4 : \begin{cases} f_1 = (xy)_{14} - i \cdot (xy)_{24} \\ f_2 = (xy)_{34} & (i = \sqrt{-1}) \\ f_3 = (xy)_{14} + i \cdot (xy)_{24}. \end{cases}$$

Die beiden ersten sind auch absolute E_α-Invarianten, also überhaupt $\mathfrak{K}$-Invarianten; bei den f_i dagegen führt $E_\alpha(f_i)$ wegen

$$E_\alpha(f_1) = 2\,i \cdot f_2, \; E_\alpha(f_2) = - i \cdot f_3, \; E_\alpha(f_3) = 0$$

zur Matrix

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array} \quad (i = \sqrt{-1})$$

hier nicht. Es ist nämlich, wie KILLING behauptete, CARTAN bestätigte und E. E. LEVI bewies $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}, \mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{N}$ auflösbar und $\mathfrak{E}$ halbeinfach. Vgl. E. E. LEVI, Atti di Torino, 40 (1905), S. 551—565 und LIE-ENGEL III, S. 778, Satz 10.

woraus sich neben dem bei H nicht absolut-invariantem $f_3 = (xy)_{14} + i \cdot (xy)_{24}$ aus der binären quadratischen Form (vgl. § 2)

$$\varphi(\xi) = f_1 \cdot \xi_1^2 + 2\,i f_2 \cdot \xi_1 \xi_2 + f_3 \cdot \xi_2^2 \tag{69}$$

die einzige nicht-lineare absolute $\mathfrak{K}$-Invariante

$$J = f_1 f_3 + f_2^2 = \Sigma\,(xy)_{i4}^2$$

ergibt. Für inhomogene Koordinaten $x_4 = y_4 = 1$ haben wir

$$J = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2,$$

also das Quadrat der Euklidischen Entfernung der beiden Punkte.

§ 19. Zusammenfassung.

Wir fassen unser Hauptergebnis zusammen in folgendem

Satz 1: *Sei $\mathfrak{G}$ eine kontinuierliche Gruppe linearer, homogener Transformationen der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $F(x)$ eine $\mathfrak{G}$-Invariante, d. h. es bestehe für jede infinitesimale Transformation A ans $\mathfrak{G}$ identisch in allen x_i eine Gleichung $A(F) = \frac{\partial F}{\partial x_i} a_i^k x_k = \alpha \cdot F$. Dann bilden alle diese ganzen rationalen $F(x)$ einen endlichen Integritätsbereich, d. h. jedes F ist ganz und rational durch endlich viele Basis-Invarianten $F_1, F_2, \ldots, F_s$ darstellbar.*[1]

Unser Beweis war von einer besonderen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch lineare homogene Transformationen unabhängig. Dies ermöglicht sofort eine Anwendung auf m-äre Formen. Wenn man nämlich von projektiven Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ und gegebenen Grundformen $f(\xi), g(\xi), \ldots$ dieser ξ_i ausgeht, dann erzeugt jede homogene lineare Gruppe $\mathfrak{G}$ der ξ_i eine isomorphe lineare Gruppe im $(N-1)$-dimensionalen Koeffizientenraum der Grundformen. Satz 1 kann dann auch wie folgt ausgesprochen werden:

Satz 2: *Die ganzen rationalen Invarianten von m-ären Grundformen bezüglich jeder Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe von m Veränderlichen besitzen eine endliche Integritätsbasis.*

[1] Proceed. Akad. van Wetensch. Amsterdam, 33 (1930), S. 241; L. MAURER, Münchner Ber. 29 (1899), S. 175, wo der Satz 1 ohne Beweis ausgesprochen ist.

Kehren wir zur Fassung von Satz 1 zurück. Ist in $A(F) = \alpha \cdot F$ für jede infinitesimale Transformation A aus $\mathfrak{G}$ der Multiplikator α gleich Null, so ist F eine absolute $\mathfrak{G}$-Invariante. Hierüber gilt der

Satz 3: *Auch die absoluten $\mathfrak{G}$-Invarianten bilden einen endlichen Integritätsbereich.*

Sein Beweis wird mit Hilfe des Hilbertschen Basissatzes genau so geführt wie bei einer einzelnen infinitesimalen Transformation in Abschnitt I, § 5. So gibt es z. B. bei halb-einfachen Gruppen nur absolute Invarianten.

Dem letzten Satze kann man dann, da für absolute Invarianten $A(F) = 0$ gilt, noch die folgende Fassung geben:

Satz 4: *Gegeben sei in n unabhängigen Veränderlichen ein System von linearen, homogenen, partiellen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} a_i^k x_k = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial x_i} b_i^k x_k = 0, \ldots \tag{70}$$

Alle ganzen und rationalen Integrale J dieses Systems bilden einen endlichen Integritätsbereich.

Denn fassen wir die linken Seiten $\frac{\partial I}{\partial x_i} a_i^k x_k$, .. von (70) als infinitesimale Transformationen $A(I)$ auf, so erzeugen alle $A, B, \ldots$ und die daraus durch den Klammerprozess $[AB], \ldots$ abgeleiteten infinitesimalen Transformationen eine r-gliedrige Gruppe, deren absolute Invarianten Integrale von (70) sind und umgekehrt.

ABSCHNITT III.

Das Typenproblem und der Adjunktionssatz.

§ 20. Die symbolische Methode.

Im Gebiete n-ter Stufe G_n (projektiver, $(n-1)$-dimensionaler Raum R_{n-1}) hat man die Koordinatenreihen: Punktkoordinaten x_i, Linienkoordinaten $\pi_{ik} = (xy)_{ik}$, Ebenenkoordinaten $\pi_{ikl} = (xyz)_{ikl}$, G_d-Koordinaten

$$\pi_{i_1 i_2 \cdots i_d} = (xy \cdots z)_{i_1 i_2 \cdots i_d} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_d} \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \cdots & y_{i_d} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z_{i_1} & z_{i_2} & \cdots & z_{i_d} \end{vmatrix}$$

... und schliesslich G_{n-1}-Koordinaten oder Raumkoordinaten u_i'. Eine n-äre »*Grundform*» F ist dann ein Polynom mit einer oder mehrerer dieser Koordinatenreihen, homogen in den Grössen jeder Reihe.

Ist im G_n eine Gruppe $\mathfrak{G}_r$ linearer homogener Transformationen $\bar{x}_i = a_i^k x_k$ gegeben, so induziert jede ihrer Transformationen in den verschiedenen Koordinatenreihen und in den Koeffizienten $A_{ikl} \ldots$, $B_{ikl} \ldots$, ... von gegebenen Grundformen $F_1, F_2, \ldots$ ebenfalls lineare homogene Transformationen. Das Hauptproblem der zur Gruppe $\mathfrak{G}_r$ gehörigen Invariantentheorie ist dann die Bestimmung eines vollen Systems $J_1, J_2, \ldots, J_m$ von $\mathfrak{G}_r$-Invarianten der Grundformen $F_1, F_2, \ldots$

Man kann nun ebenso wie bei projektiven Invarianten in dieser allgemeinen Aufgabe die Grundformen F durch eine Reihe von *Linearformen* in Punktkoordinaten x_i und in Raumkoordinaten u_i' ersetzen: das ist der Grundgedanke der symbolischen Darstellung jeder Grundform F. Dass dieses Zurückgehen auf Linearformen auch bei $\mathfrak{G}_r$-Invarianten möglich ist, beruht erstens darauf, dass — vgl. die beiden vorhergehenden Abschnitte — jede solche Invariante J homogen in jeder in ihr enthaltenen Grössenreihe (Koeffizienten- oder Koordinatenreihe) vorausgesetzt werden darf; zweitens aber auf der Vertauschbarkeit von Polarenprozess und linearer Transformation. Gebraucht man statt der letzteren die infinitesimale Transformation, so besagt dies: Ist die Form $\Phi(\xi)$ der Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ eine X-Invariante, also

$$X(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} a_i^k \xi_k = \alpha \cdot \Phi$$

identisch in den ξ_i und ist η_i eine zu ξ_i kogrediente Reihe, so ist auch

$$(1) \qquad D_{\xi\eta}(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \eta_i$$

eine X-Invariante mit demselben Multiplikator α.

Wir haben nämlich

$$(2) \qquad X D_{\xi\eta}(\Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \eta_k} \eta_i a_k^r \xi_r + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} a_i^r \eta_r = D_{\xi\eta} X(\Phi) = \alpha \cdot D_{\xi\eta}(\Phi).$$

Daraus folgt weiter, dass auch das symbolische Zerlegen von Formenkoeffizienten in Koeffizientenreihen von (symbolischen) Linearformen gegenüber $\mathfrak{G}_r$ invariant ist.

Ist also $J(A_{ikl\ldots}, \ldots)$ eine $\mathfrak{G}_r$-Invariante, die die Koeffizienten $A_{ikl\ldots}$ einer Grundform F im Grade p enthält, so polarisieren wir J mit $p-1$ äquivalenten Reihen $B_{ikl\ldots}$, $C_{ikl\ldots}, \ldots$ $(p-1)$-mal(Evektantenprozess), bis aus J eine $\mathfrak{G}_r$-Invariante

$$J_1(A_{ikl\ldots}, B_{ikl\ldots}, \ldots)$$

entsteht, die *linear* ist in den $A_{ikl\ldots}$, in den $B_{ikl\ldots}, \ldots$. Stellt man dann J_1 in der üblichen Weise symbolisch dar[1], so geht aus J_1 eine $\mathfrak{G}_r$-Invariante

$$J_2(a', b', \ldots; \alpha, \beta, \ldots)$$

von *Linearformen*

$$(a' x) = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \cdots + a'_n x_n, \quad (b' x), \ldots$$

in Punktkoordinaten x_i und von ebensolchen

$$(\alpha u') = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \cdots + \alpha_n u'_n, \quad (\beta u'), \ldots$$

in Raumkoordinaten u'_k hervor: J ist symbolisch dargestellt. Das Zurückgehen von J_2 zu J ist durch Zusammenziehen der Symbole zu Koeffizienten $A_{ikl\ldots}$, $B_{ikl\ldots}, \ldots$ und nachheriges Gleichsetzen

$$A_{ikl\ldots} = B_{ikl\ldots} = \cdots$$

eindeutig möglich.

Man kennt also die Struktur der $\mathfrak{G}_r$-Invarianten beliebiger Grundformen, wenn man die $\mathfrak{G}_r$-Invarianten von beliebig vielen Linearformen mit Koeffizientenreihen $a', b', \ldots$ und $\alpha, \beta, \ldots$ angeben kann.

§ 21. Invariantentypen.

Die $\mathfrak{G}_r$-Invarianten beliebig vieler Linearformen mit Koeffizientenreihen $a', b', \ldots$ und $\alpha, \beta, \ldots$, oder, wie wir kürzer sagen wollen, die $\mathfrak{G}_r$-Invarianten »von

[1] Vgl. meine »Invariantentheorie«, Groningen (1923), S. 91.

Reihen» $a', b', \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ bilden die zur Gruppe $\mathfrak{G}_r$ gehörigen »*Invariantentypen*«: zum gleichen Typus rechnet man zwei Invarianten dieser Reihen, wenn die eine aus der anderen durch Buchstabenvertauschung hervorgeht.[1] Ist z. B. $\mathfrak{G}_r$ die allgemeine projektive Gruppe, so haben wir drei Invariantentypen: die beiden Klammerfaktoren

$$(a' b' \ldots g') = \Sigma \pm a'_1 b'_2 \ldots g'_n, \quad (\alpha \beta \ldots \gamma) = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \gamma_n$$

und den Linearfaktor $(a' \alpha) = a'_1 \alpha_1 + a'_2 \alpha_2 + \cdots + a'_n \alpha_n$; $(b' \alpha)$ oder $(b' \beta)$ sind von gleichem Typus wie $(a' \alpha)$.

Der Satz, welcher für $\mathfrak{G}_r$ alle Invariantentypen angibt, wird »*erster Fundamentalsatz* (der symbolischen Methode) *für $\mathfrak{G}_r$-Invarianten*« genannt. Der sogenannte »*zweite Fundamentalsatz*« zählt dann die Typen von irreduziblen Syzygien erster Art der $\mathfrak{G}_r$-Invariantentypen auf.

Durch die symbolische Methode ist die Frage nach den $\mathfrak{G}_r$-Invarianten beliebiger Grundformen zurückgebracht auf die nach den Invariantentypen bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}_r$. Hier kann man nun noch einen Schritt weiter gehen und alles auf *Invariantentypen mit nur einer Art von Reihen*, z. B. $\alpha, \beta, \ldots$ (kogredient zu x_i) reduzieren. Dies geschieht mit Hilfe von $(n-1)$-fältigen Komplex-Symbolen.[2]

Ist

$$J = J(a', b', \ldots; \alpha, \beta, \ldots) \tag{3}$$

ein Invariantentypus bezüglich $\mathfrak{G}_r$ und kommt in J die Reihe a' im Grade $q > 1$ vor, so gehen wir vorerst wieder durch $(q-1)$-maliges Polarisieren mit neuen Reihen $b', c', \ldots$ zu einem

$$J_1 = J_1(a', b', c', \ldots; \alpha, \beta, \ldots)$$

über, das *linear* in allen Reihen mit Strich $a', b', c', \ldots$ ist. Jetzt zerlegen wir

$$a'_1 = (-1)^{n-1} a_2 a_3 \ldots a_n, \quad a'_2 = -(-1)^{n-1} a_1 a_3 \ldots a_n, \ldots \tag{4}$$

und ebenso bei $b', c', \ldots$. J_1 geht hierdurch über in ein Aggregat von $\mathfrak{G}_r$-Invarianten

$$J_2 = J_2(a, b, c, \ldots; \alpha, \beta, \ldots) \tag{5}$$

---

[1] H. WEYL, Mathem. Zeitschr. 20 (1924), S. 134 sagt »Grundinvarianten«; E. WANNER, Dissert. Zürich (1926) sagt »Grundinvariantentypen« (für Vektorinvarianten).

[2] Vgl. Invariantentheorie, Groningen (1923), S. 88.

die nur mehr Reihen ohne Strich enthalten, wobei unter diesen jetzt auch $(n-1)$-fältige Komplex-Symbole auftreten können.

Kennt man umgekehrt alle $\mathfrak{G}_r$-Invariantentypen (5) mit untereinander kogredienten Reihen $a, b, c, \ldots$, so kann man eindeutig zu den Typen (3) zurückkehren. Man hat die Annahme zu machen, dass eine oder mehrere der Reihen $a, b, \ldots$, z. B. die Reihe a, $(n-1)$-fältige Komplexsymbole sind. Je $n-1$ Reihen a hat man dann zu einer Reihe a' nach (4) zusammen zu ziehen (»Übergang $a \rightarrow a'$«), wodurch im allgemeinen neue Invariantentypen entstehen werden. In den so entstehenden Typen hat man neuerdings die Annahme zu machen, dass eine Reihe, z. B. b, $(n-1)$-fältige Komplexsymbole sind und diese Reihen b hat man dann wieder zur einen Reihe b' zu vereinigen. Diese Übergänge $b \rightarrow b'$, $c \rightarrow c', \ldots$ sind so lange zu wiederholen bis keine neuen Typen (3) mehr auftreten.

Wir können uns also weiterhin auf $\mathfrak{G}_r$-Invariantentypen beschränken, die nur eine Art von Reihen, z. B. $a, b, c, \ldots$ ohne Strich enthalten: geometrish gesprochen, $\mathfrak{G}_r$-Invarianten von Punkten (= Vektoren) $x, y, z, \ldots$.

§ 22. Reduktion auf $n-1$ Punkte.

Sei

(6) $$J = J(x, y, \ldots, z, t, \ldots)$$

ein $\mathfrak{G}_r$-Invariante der Punkte $x, y, \ldots$. Treten in J mehr als n Reihen auf, so kann man nach einem bekannten Satze[1] J als Summe von Polaren von Formen J' mit höchstens n Reihen darstellen. Sind die J' bekannt, so auch die J, denn durch Polarisieren können keine neuen Invariantentypen entstehen. Wir können uns also uuf diese $\mathfrak{G}_r$-Invarianten J' beschränken. Enthält J' gerade n Reihen $x, y, \ldots, z, t$, so entwickeln wir J' in eine Gordan-Capelli*sche Reihe*[2] nach Potenzen des Klammerfaktors $(xy \ldots zt)$:

(7) $$J' = \Sigma \Delta^{(0)} J_0 + (xy \ldots zt) \cdot \Sigma \Delta^{(1)} J_1 + \cdots + (xy \ldots zt)^h \cdot \Delta^{(h)} J_h.$$

Hier bedeuten $\Delta^{(0)}, \Delta^{(1)}, \ldots$ zusammengesetzte Polaroperationen, d. h. Polynome der Argumente

$$D_{\xi\eta} = \Sigma \frac{\partial}{\partial \xi_i} \eta_i \qquad (\xi, \eta = x, y, \ldots, z, t).$$

[1] Vgl. z. B. meine »Invariantentheorie«, Groningen (1923), S. 137.
[2] ebenda.

Die Formen $J_0, J_1, \ldots, J_h$ enthalten *höchstens* $n - 1$ Reihen $x, y, \ldots$ und gehen aus J' durch Polarisieren und mehrmalige Anwendung des Ω-Prozesses von CAYLEY

$$\Sigma \pm \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial y_2 \ldots \partial z_{n-1} \partial t_n}$$

hervor. Alle diese Prozesse sind bei $\mathfrak{G}_r$ invariant, d. h. $J_0, J_1, \ldots, J_h$ sind selbst $\mathfrak{G}_r$-Invarianten mit höchstens $n - 1$ Reihen.

Die Frage nach allen Invariantentypen (6) ist also, wenn man den Klammerfaktor $(xy \ldots, zt)$ mit n Punkten als besonderen Typus aufzählt (er ist selbst bei allen linearen Gruppen eine Invariante, da er projektiv-invariant ist), zurückgebracht auf die einfachere: *Ermittlung aller $\mathfrak{G}_r$-Invariantentypen von höchstens $n - 1$ Reihen $x, y, \ldots, z$.*[1]

Wenn $\mathfrak{G}_r$ durch ihre infinitesimale Transformationen gegeben ist, deren allgemeinste

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k$$

sei, so haben wir bei $n - 1$ Reihen $x, y, \ldots, z$ als allgemeine infinitesimale Transformation

$$X(I) = \frac{\partial I}{\partial x_i} a_i^k x_k + \frac{\partial I}{\partial y_i} a_i^k y_k + \cdots + \frac{\partial I}{\partial z_i} a_i^k z_k \tag{8}$$

und die Bestimmung einer Integritätsbasis für alle $\mathfrak{G}_r$-Invarianten $J(x, y, \ldots, z)$ wird nach den beiden vorhergehenden Abschnitten eine in endlich-vielen Schritten lösbare Aufgabe.

Wir sahen, dass bei einer einzelnen Reihe x für eine einzelne infinitesimale Transformation X die Ermittlung der X-Invarianten $f(x)$ auf ein binäres Formenproblem reduzierbar ist: Ermittlung der Semi-Invarianten von binären Formen $\varphi_\mu(x), \varphi_\nu(x), \ldots$ der Grade $\mu, \nu, \ldots$. Die Hinzunahme weiterer Reihen $y, z, \ldots$ ändert hieran nichts; es wird nur die Zahl der binären Grundformen grösser. Neben $\varphi_\mu(x), \varphi_\nu(x), \ldots$ treten dann die gleichartigen Formen

$$\varphi_\mu(y),\ \varphi_\nu(y), \ldots;\ \varphi_\mu(z),\ \varphi_\nu(z), \ldots.$$

Zusammenfassend können wir also sagen: *Die Ermittlung der $\mathfrak{G}_r$-Invarianten gegebener n-ärer Grundformen kann zurückgeführt werden auf die Aufstellung aller*

[1] Hierzu H. WEYL, l. c.

Invariantentypen bezüglich $\mathfrak{G}_r$ *von höchstens* $n-1$ *Punkten* $x, y, \ldots, z$ *und diese Aufgabe ist letzten Endes ein Problem der projektiven Invariantentheorie binärer Formen.*

§ 23. Der Adjunktionssatz.

Es seien

$$J_0 = (xy, \ldots, zt),\ J_1(x, y, \ldots), \ldots,\ J_\varrho(x, y, \ldots) \tag{9}$$

alle Invariantentypen einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Punkten $x, y, \ldots$ bezgl. der Gruppe $\mathfrak{G}_r$. Es sind dies n-äre Formen mit Koeffizienten, die als gegebene Zahlen zu betrachten sind,

Sind $\{F\} = F_1, F_2, \ldots$ gegebene n-äre Grundformen der Reihen $x, y, \ldots$, die mit den Symbolreihen $a, b, c, \ldots$ symbolisch dargestellt werden und deren Koeffizienten wir uns als frei-veränderlich denken, so erhalten wir nach den Ausführungen der letzten drei §§ alle Bausteine für die $\mathfrak{G}_r$-Invarianten dieser Grundformen $\{F\}$, wenn wir statt der Reihen $x, y, \ldots$ in (9) die Reihen $a, b, \ldots$ nehmen. Jede $\mathfrak{G}_r$-Invariante der $\{F\}$ kann dann als Summe von Produkten von Typen $J_\nu(a, b, \ldots)$ dargestellt werden, wobei diese Produkte selbst auch $\mathfrak{G}_r$-Invarianten sind. Wir wollen uns fernerhin auf diese Produkte allein beschränken. Werden nicht alle Reihen $x, y, \ldots$, sondern nur einige davon in den J_ν durch Reihen $a, b, \ldots$ ersetzt, so erhält man alle $\mathfrak{G}_r$-Kovarianten der Grundformen $\{F\}$ als Produkte von Typen $J_\nu(a, b, \ldots, x, y, \ldots)$. Unter diesen $\mathfrak{G}_r$-Kovarianten der $\{F\}$ sind als extreme Fälle die $\mathfrak{G}_r$-Invarianten der Formen $\{F\}$ (alle Reihen $x, y, \ldots$ ersetzt durch $a, b, \ldots$) und die »*identischen*« $\mathfrak{G}_r$-Kovarianten (9) (keine Reihe $x, y, \ldots$ ersetzt durch $a, b, \ldots$) mit enthalten.

Das Ersetzen von Reihen $x, y, \ldots$ in $J_\nu(x, y, \ldots)$ durch Reihen $a, b, \ldots$ ist durch Polarenprozesse D_{xa}, $D_{yb}, \ldots$ ausführbar, d. h. durch projektiv-invariante Prozesse. Anders ausgedrückt: Die $\mathfrak{G}_r$-In- und Kovarianten der Grundformen $\{F\}$ sind *simultane projektive Invarianten der n-ären Formen* (9) *und der Grundformen* $\{F\}$.

Dass umgekehrt auch jede projektive Invariante des Systems $\{F\} + \{J_\nu\}$, die von den Koefficienten der $\{F\}$ nicht unabhängig ist, eine $\mathfrak{G}_r$-Invariante der $\{F\}$ ist, ist beinahe selbstverständlich. Deuten wir nämlich eine projektive Transformation durch Überstreichen an, so gilt für eine projektive Invariante $P(F, J)$ des Systems $\{F\} + \{J_\nu\}$:

$$P(\overline{F}, \overline{J}) = \Delta^n \cdot P(F, J). \tag{10}$$

Die Transformationen von $\mathfrak{G}_r$ sind spezielle lineare Transformationen der allgemeinen projektiven Gruppe; deuten wir das Transformieren mit Transformationen aus $\mathfrak{G}_r$ durch $\sim$ an, so gibt (10):

$$P(\tilde{F}, \tilde{J}) = \alpha \cdot P(F, J),$$

d. h. es wird, da $\tilde{J} = \alpha' \cdot J$ und $P(F, J)$ homogen in den Koeffizienten jedes J_ν ist, wenn wir

$$P(F, J) = Q(F)$$

setzen:

$$Q(\tilde{F}) = P(\tilde{F}, J) = \alpha'' \cdot P(\tilde{F}, \tilde{J}) = \alpha''' \cdot Q(F),$$

oder: $Q(F)$ ist eine $\mathfrak{G}_r$-Invariante.

Die Gesamtheit der $\mathfrak{G}_r$-Komitanten (In- und Kovarianten) des Grundformensystems $\{F\}$ deckt sich also mit den projektiven Komitanten des erweiterten Grundformensystems $\{F\} + \{J_\nu\}$.

Nehmen wir nun als besonderen Fall den, dass die Grundformen $\{F\}$ mit einer oder mehrerer der Formen (9) identisch sind. Dann erhalten wir das Resultat, dass die n-ären Formen (9) keine anderen projektiven Kovarianten haben als sich selbst, oder: die *projektiven Ko*varianten einer oder mehrerer der Formen (9) sind durch diese Formen (9) selbst gegeben. Die *projektiven In*varianten der Formen J_ν sind natürlich Zahlen und zwar algebraische Zahlen bezüglich des Körpers, dem die Elemente der Matrices $\|a_i^k\|$ in den infinitesimalen Transformationen (8) angehören.

Wenn wir die Gruppe $\mathfrak{G}_r$ nicht durch ihre infinitesimalen Transformationen $X(f)$, sondern durch n-äre Formen $\{G\}$ festlegen, die bei den linearen Transformationen von $\mathfrak{G}_r$ und nur bei diesen invariant bleiben:

$$(11) \qquad X(G) \equiv \xi \cdot G \quad \{x, y, \ldots\},$$

so sagen wir auch: die Formen $G(x, y, \ldots)$ »*gestatten und bestimmen*» die Gruppe $\mathfrak{G}_r$. Diese Formen $\{G\}$ sind dann $\mathfrak{G}_r$-Invarianten und also durch die Formen J_ν von (9) ganz und rational ausdrückbar. Andererseits ist es geometrisch evident, dass die J_ν von (9) auch durch die Formen $\{G\}$ bestimmt werden. Dies legt die Vermutung nahe, dass zwischen den $\{G\}$ und den $\{J_\nu\}$ ein projektiv-invarianter Zusammenhang besteht: mit anderen Worten: dass die Formen $\{J_\nu\}$ von (9) projektive Kovarianten der Formen $\{G\}$ sind.

Dass dies nun in der Tat der Fall ist wollen wir der Einfachheit halber zuerst für Gruppen $\mathfrak{G}_r$ beweisen, die nur absolute Invarianten besitzen. Es sei also $\mathfrak{G}_r$ völlig bestimmt durch Formen $\{G\}$ mit

$$(12) \qquad X(G) = \frac{\partial G}{\partial x_i} a_i^k x_k + \frac{\partial G}{\partial y_i} a_i^k y_k + \cdots \equiv 0 \qquad \{x, y, \ldots\},$$

wobei $X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k$ die allgemeinste infinitesimale Transformation aus $\mathfrak{G}_r$ sei, sodass wir unter den n^2 Grössen a_i^k genau r unabhängige auswählen können.

Aus (12) ergeben sich dann eine Reihe von Gleichungen

$$(13) \qquad L_\varrho(G^{ikl\cdots}, a_i^k) = L_{k,\varrho}^i a_i^k = 0,$$

die linear-homogen in den Koeffizienten $G^{ikl\cdots}$ der Formen $\{G\}$ und linear-homogen in den a_i^k sind. Die Matrix der Koeffizienten $L_{k,\varrho}^i$ muss dann, da die Formen $\{G\}$ die Gruppe $\mathfrak{G}_r$ bestimmen, genau von Range $n^2 - r$ sein, d. h. aus (13) lassen sich $n^2 - r$ der a_i^k linear und homogen durch die übrigen r ausdrücken.

Sei nun für unser $\mathfrak{G}_r$ J_ν eine der Formen (9). Wir können voraussetzen, dass J_ν als Polynom der $x_i, y_k, \ldots$ unzerlegbar und in reduzierter Gestalt geschrieben ist (alle gleichen Potenzprodukte zusammengefasst) und dass weiters J_ν nicht als Summe $\alpha J_\nu' + \beta J_\nu''$ geschrieben werden kann, wo J_ν' und J_ν'' ebenfalls $\mathfrak{G}_r$-Invarianten sind.

Sind dann $J^{\varrho\sigma\tau\cdots}$ die Koeffizienten von J_ν, so haben wir analog zu (13) ein System von Gleichungen

$$(14) \qquad M_i(J^{\varrho\sigma\tau\cdots}, a_i^k) = 0$$

und zwar wenigstens so viele Gleichungen als J_ν Koeffizienten enthält. Wenn wir dann aus $n^2 - r$ unabhängigen der Gleichungen (13) und aus einer der Gleichungen (14) $n^2 - r$ der a_i^k eliminieren, so bleibt:

$$(15) \qquad N_i(G^{ikl\cdots}, J^{\varrho\sigma\tau\cdots}, a_r^s) \equiv 0$$

und zwar identisch bezüglich der r unabhängigen a_r^s. Hieraus ergeben sich Beziehungen

$$(16) \qquad P_k(G^{ikl\cdots}, J^{\varrho\sigma\tau\cdots}) = 0$$

und das System dieser Gleichungen ist *projektiv-invariant*, d. h. mit (16) gilt auch

$$P_k(\bar{G}^{ikl\cdots}, \bar{J}^{\varrho\sigma\tau\cdots}) = 0,$$

wenn der Querstrich eine projektive Transformation T andeutet. Dies folgt aus der Ableitung von (15); man hat nur G durch $\bar{G}$, J durch $\bar{J}$ und die durch a_i^k dargestellten linearen Transformationen A durch TAT^{-1} zu ersetzen (was dieselben a_i^k liefert).

Aus allen so erhaltenen Gleichungen (16), die linear in den $J^{\varrho\sigma\tau\cdots}$ sind, können wir die $J^{\varrho\sigma\tau\cdots}$ berechnen und *rational* durch die $G^{ikl\cdots}$ ausdrücken. Wäre das nämlich nicht so und würden also einige der $J^{\varrho\sigma\tau\cdots}$ frei-veränderlich bleiben, so hätten wir

$$J_\nu = J_\nu' + J_\nu'', \tag{17}$$

wo die Koeffizienten in J_ν' rationale Funktionen der $G^{ikl\cdots}$ wären, die von J_ν'' dagegen willkürlich blieben. Daraus würde aber folgen (wenn wir alle Koeffizienten von J_ν'' gleich Null nehmen), dass schon J_ν' und jedes Potenzprodukt $x_i^\alpha y_k^\beta \ldots$ von J_ν'' eine $\mathfrak{G}_r$-Invariante (9) darstellt, was einen Widerspruch mit unserer Voraussetzung betreffs der J_ν ergibt. Also sind in der Tat die Koeffizienten jedes J_ν rationale Funktionen der Koeffizienten $G^{ikl\cdots}$ der Formen $\{G\}$.

Bei relativen Invarianten führt eine analoge Überlegung zum Resultat, dass die Koeffizienten der J_ν von (9) *algebraisch* von den $G^{ikl\cdots}$ abhängen.

Somit haben wir, wenn wir mit E. Study[1] eine projektive Kovariante der Grundformen $\{G\}$, die in den Veränderlichenreihe $x, y, \ldots$ ganz-rational, in den Koeffizienten dieser $\{G\}$ hingegen algebraisch ist, eine ganze, algebraische, projektive Kovariante der $\{G\}$ nennen: Die $\mathfrak{G}_r$-Invariantentypen (9) sind, wenn die Gruppe $\mathfrak{G}_r$ durch die Formen $\{G\}$ bestimmt wird, ganze algebraische projektive Kovarianten der Formen $\{G\}$. Hieraus ergibt sich schliesslich der *Adjunktionssatz:*

Ist eine lineare homogene Gruppe $\mathfrak{G}_r$ im n-ären Gebiete dadurch gegeben, dass die gegebenen Formen $\{G\}$ die Transformationen von $\mathfrak{G}_r$ gestatten und bestimmen, so erhält man die $\mathfrak{G}_r$-Invarianten von Grundformen $\{F\}$, indem man vom erweiterten Grundformensystem $\{F\} + \{G\}$ die projektiven Komitanten aufsucht, die von den Koeffizienten der $\{F\}$ und eventueller Koordinatenreihen ganz-rational, von den Koeffizienten der $\{G\}$ hingegen algebraisch abhängen.

---

[1] E. Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig (1889), S. 11.

§ 24. Bemerkungen zum Adjunktionssatz.

Der Inhalt des Adjunktionssatzes wurde zum erstenmale in seiner vollen Bedeutung wohl zuerst von F. KLEIN in seinem »Erlanger Programm»[1] aufgedeckt. Doch ist er dort nicht bewiesen, sondern nur als heuristisches Prinzip formuliert für das Studium der Eigenschaften von Figuren bei Transformationsgruppen, die durch gegebene invariante Figuren aus umfassenderen Gruppen ausgeschieden werden. Das klassische Beispiel hierfür ist die Elementargeometrie des dreidimensionalen Raumes: die ihr zu Grunde liegende »Hauptgruppe» (Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen) wird durch den invarianten »Kugelkreis» in der allgemeinen projektiven Gruppe ausgezeichnet[2]; *metrische* Eigenschaften von Figuren, die durch Grundformen $\{F\}$ gegeben sind, werden zu *projektiven* Eigenschaften, wenn ihnen der durch

$$\Phi = (u' \mid u') = (u'_1)^2 + (u'_2)^2 + (u'_3)^2 = 0 \tag{18}$$

dargestellte Kugelkreis adjungiert wird.

Dass es im Adjunktionssatze nicht genügt, simultane projektive Invarianten von $\{F\}$ und $\{G\}$ zu betrachten, die auch in den Koeffizienten der Formen $\{G\}$ ganz und rational sind, hat zuerst E. STUDY[3] bemerkt und auch ich habe in früheren Arbeiten darauf hingewiesen.[4] Sei nämlich für $n = 4$

$$\Phi = (\alpha u')^2 = \Sigma\, \alpha_{ik} u'_i u'_k = 0 \tag{19}$$

eine einfach-singuläre Fläche zweiter Klasse, die einen irreduziblen Kegelschnitt K des R_3 darstellt und eine »Hauptgruppe» $\mathfrak{G}_7$ gestattet und bestimmt. K liege in der Ebene mit der Gleichung

$$(a' x) = \Sigma\, a'_i x_i = 0.$$

Ein einzelner Punkt y mit der Gleichung

$$F = (u' y) = \Sigma\, u'_i y_i = 0$$

---

[1] F. KLEIN, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen (1872); wieder abgedruckt in Mathem. Ann. 43 (1893), S. 63—100.

[2] Historisches hierzu bei G. FANO, Mathem. Enzykl. III AB 4 b, Nr. 31.

[3] E. STUDY, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie I, Leipziger Ber. 48 (1896), S. 649—664; ferner: Geometrie der Dynamen, Leipzig (1903), S. 123.

[4] Denkschriften der Wiener Akad. d. Wiss. 89 (1913), S. 711; Mathem. Ann. 75 (1914), S. 577; Mathem. Enzykl. III E_1, Nr. 15.

hat bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$ des R_3 keine Invariante. Wohl aber bei der Gruppe $\mathfrak{G}_7$, nämlich die Linearform

$$J = (a' y) = \Sigma a'_i y_i,$$

die eine *ganze rationale* $\mathfrak{G}_7$-Invariante des Punktes y darstellt.

Gehen wir andererseits aus vom erweiterten Formensystem

$$(20) \qquad F = (u' y), \quad \Phi = (\alpha u')^2$$

und dessen projektiven Invarianten. Unter diesen ist keine Invariante zu finden, die *linear* in der Reihe y wäre; wohl $(\alpha \beta \gamma y)^2$, das bei einfach-singulärem Φ ein Quadrat einer nicht-symbolischen Linearform $(a' y)$ wird. Darum ist, solange diese α_{ik} als unabhängige Variable betrachtet werden, $(a' y)$ wohl ganz-rational in den Koeffizienten von F, aber nicht auch in den Formenkoeffizienten α_{ik} von Φ; erst $(a' y)^2$ wird dann eine ganze rationale simultane Invariante der Formen (20).

Ein weiteres einfaches Beispiel haben wir für $n = 2$, wenn die eingliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_1$ im binären Gebiete dadurch gegeben ist, dass ihre linearen Transformationen eine binäre quadratische Form $G = a_x^2 = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ invariant lassen. Hier zerfällt G selbst in zwei lineare irrationale Kovarianten

$$G = a_x^2 = \alpha_x \cdot \beta_x = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

und ein Punkt y hat bei $\mathfrak{G}_1$ die beiden linearen Invarianten α_y und β_y. Diese Verhältnisse finden wir z. B. bei den relativen Drehungs- (und Bewegungs)-Invarianten in der Euklidischen Ebene vor.[1]

Im allgemeinen Falle können wir sagen, dass uns die Theorie der projektiven Invarianten von Formen mit unabhängigen Koeffizienten und ihr natürliches Werkzeug — die symbolische Methode — die algebraischen Kovarianten nicht liefert. Stellt man nämlich auch die, die Gruppe $\mathfrak{G}_r$ festlegenden Formen $\{G\}$, mit Hilfe von Symbolreihen $A, B, \ldots$ symbolisch dar, was für das Ermitteln der projektiven Invarianten von $\{F\} + \{G\}$ oft auf bekannte und gelöste Aufgaben führen kann, so wird man bei speziellen Formen $\{G\}$ und ihren projek-

[1] Ein weiteres einfaches Beispiel entnehme ich einer brieflichen Mitteilung von H. Weyl: $\mathfrak{G}_r$ = Drehungsgruppe in n Veränderlichen = Gruppe aller reellen Transformationen, die $G(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2$ invariant lassen. Ein Punkt y hat Σy_i^2 als $\mathfrak{G}_r$-Invariante und dies ist nicht ganz und rational durch $G(y)$ ausdrückbar.

tiven Komitanten nicht immer mit den Reihen $A, B, \ldots$ allein auslangen. Es kann nämlich eine projektive Komitante der $\{G\}$ in Faktoren G' zerfallen, die ganz in den Variablenreihen $x, y, \ldots$ sind.[1] Die Koeffizienten dieser Formen G' müssen aber nicht wieder mit den Reihen $A, B, \ldots$ darstellbar sein, sondern können die Einführung neuer Symbolreihen oder Grössenreihen $L, M, \ldots$ notwendig machen.

Ein einfaches Beispiel für diese Verhältnisse haben wir wieder bei der Hauptgruppe der Elementargeometrie. Die Adjungierte von Φ in (19) ist x_4^2; dies ist eine projektive Kovariante von Φ, die in zwei Linearfaktoren zerfällt. Die Linearform $G' = x_4$ ist nicht mit Hilfe der Symbolreihen α von (20) darstellbar. Setzt man

$$G' = x_4 = (l' x) = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4,$$

so führt man neben den Reihen $\alpha, \beta, \ldots$ die neue Reihe $l' = 0:0:0:1$ ein und *jetzt* kann man die $\mathfrak{G}_7$-Invarianten von quaternären Grundformen $\{F\}$ als projektive Invarianten von $\{F\} + \{\Phi\} + \{G'\}$ betrachten, die nun auch ganz und rational von den Koeffizienten a_{ik} und l' der Formen Φ bzw. G' abhängen und neben $\alpha, \beta, \ldots, l'$ keine weiteren Symbolreihen mehr erfordern.

Hat man sich bei gegebenen $\{F\}$ und $\{G\}$ alle nötigen Symbol- und Grössenreihen $A, B, \ldots, M, N, \ldots$ verschafft, die zum Aufbau der $\mathfrak{G}_r$-Komitanten von $\{F\}$ als projektiver Komitanten genügen, so hat man damit einen Ausgangspunkt gewonnnen, der auch zum *zweiten Fundamentalsatz der $\mathfrak{G}_r$-Invarianten* führt. Man geht dann aus von den fünf Typen Π_i von Identitäten bei projektiven Invarianten[2] und untersucht die verschiedenen Typen von Identitäten, die sich ergeben, wenn eine oder mehrere der in den Π_i stehenden Reihen durch Symbol- und Grössenreihen $A, B, \ldots, M, N, \ldots$ ersetzt werden. Hier wird insbesondere dann ein neuer Typus einer Identität vor den Tag kommen, wenn sich die projektiven Invariantentypen von Π_i in neue $\mathfrak{G}_r$-Invariantentypen verwandeln.

§ 25. Beispiele zum Adjunktionssatz.

Wir behandeln schliesslich noch einige Beispiele, die die Bedeutung des Adjunktionssatzes illustrieren.

---

[1] Hierauf hat schon H. Burkhart hingewiesen gelegentlich einer Kritik der Kleinschen Formulierung des Adjunktionssatzes: Mathem. Ann. 43 (1893), S. 206.

[2] Vgl. etwa meine »Invariantentheorie«, Groningen (1923), S. 95.

Der einfachste Fall liegt vor, wenn das System der n-ären Formen $\{F\}$, das die Gruppe $\mathfrak{G}_r$ festlegt, aus einer einzigen Linearform

$$L = (l' x) = \Sigma l'_i x_i \tag{21}$$

besteht. $\mathfrak{G}_r$ ist dann die *affine Gruppe* des G_n; ihre Invariantentypen sind[1]:

$$(a b \ldots g m),\ (a' b' \ldots g' m'),\ (a' b' \ldots g' l'),\ (l' a),\ (a' b); \tag{22}$$

sie entstehen also aus den projektiven Invariantentypen durch Hinzunahme der Reihe l'.

Dasselbe haben wir, wenn das System $\{G\}$ aus mehreren Linearformen

$$(l'_1 x),\ (l'_2 x), \ldots, (l'_\varrho x) \text{ und } (p_1 u'),\ (p_2 u'), \ldots, (p_\sigma u'), \tag{23}$$

also aus ϱ Linearformen $(l'_i x)$ in Punktkoordinaten x_i und aus σ Linearformen $(p_k u')$ in Raumkoordinaten u'_i besteht. Die zu dieser Gruppe gehörigen Invariantentypen ergeben sich aus

$$(a b \ldots g m),\ (a' b' \ldots g' m'),\ (a' b) \tag{24}$$

wenn eine oder mehrere der Reihen $a, b, \ldots; a' b', \ldots$ durch $p_1, p_2, \ldots$ resp. durch $l'_1, l'_2, \ldots$ ersetzt werden. Es ist dabei gleichgültig ob die Formen $(l'_i x)$ von den Formen $(p_k u')$ unabhängig sind oder nicht; eine Abhängigkeit hätte nur zur Folge, dass von den Zahlen $(l'_i p_k)$ einige verschwinden.

Bei $\varrho = 1$, $\sigma = 1$ wird $\mathfrak{G}_r$ die sogenannte »*affine Gruppe mit festem Punkt*». Bei $\varrho = 0$, $\sigma = n - 1$ ist $\mathfrak{G}_r$ die Gruppe $\mathfrak{G}_n$ der *Schiebungen und Streckungen* (Translationen und perspektive Ähnlichkeitstransformationen), die $\mathfrak{G}_n$-Invarianten sind die Schiebungs- und Streckungsinvarianten, die absoluten $\mathfrak{G}_n$-Invarianten sind die Schiebungs- oder Translationsinvarianten.[2]

Neue Invariantentypen erhält man, wenn die Formen $\{G\}$ auch G_d-Koordinaten enthalten. Der einfachste Fall ist der, dass

$$G = (a' \pi)^2 = 2\, \Sigma a'_{ik}\, \pi_{ik} \tag{25}$$

eine Linearform in Linienkoordinaten π_{ik} ist. $\mathfrak{G}_r$ ist dann die sogen. »*Komplexgruppe*», deren Invariantentypen von H. WEYL und (für ausgeartete Komplexe) von E. WANNER bestimmt wurden.[3] Man erhält diese Typen aus (17),

[1] Vgl. Jahresber. d. Deutsch. Mathem. Ver. 22 (1913), S. 192—209

[2] Vgl. Proceed. Akad. van Wetensch. Amsterdam 34 (1931), S. 214.

[3] H. WEYL, Mathem. Zeitschr. 20 (1924), S. 131 und E. WANNER, Dissertation Zürich (1926).

indem man die Reihen a' (2 Reihen) bzw. a ($n-2$ Reihen) von (25) adjungiert.

Bei den n-ären *Semi-Invarianten*, denen die Transformationen der Gestalt

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n \\ \bar{x}_2 = \qquad\quad a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_n = \qquad\qquad\qquad\quad + a_n^n x_n \end{cases}$$

zu Grunde liegen (sie bilden eine $\mathfrak{G}_r$ mit $r = \frac{1}{2}(n^2+n-2)$) ist das System der Formen $\{G\}$ bestimmt durch: einen festen R_{n-2} ($x_n = 0$), in diesem ein fester R_{n-3} ($x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$), ..., in diesem eine feste Gerade ($x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$, ..., $x_3 = 0$) und auf dieser ein fester Punkt $1:0:\cdots:0$. Wir haben somit

$$\{G\} = x_n,\ \pi_{n-1,n},\ \pi_{n-2,n-1,n},\ \ldots,\ \pi_{34\,.\,.\,n},\ u'_1, \tag{26}$$

d. h. $\{G\}$ enhält die Linearform x_n in Punktkoordinaten, die Linearform $\pi_{n-1,n}$ in Linienkoordinaten, ..., die Linearform u'_1 in Raumkoordinaten.

Die Invariantentypen sind hier

$$\begin{cases} a_n,\ (ab)_{n-1,n},\ (abc)_{n-2,n-1,n},\ \ldots,(ab\ldots gm) \\ a'_1,\ (a'b')_{12},\quad (a'b'c')_{123},\qquad \ldots,(a'b'\ldots g'm') \end{cases} \qquad (a'b) \tag{27}$$

Ein weiteres hierher gehöriges Beispiel haben wir bei den Invarianten der »*gestuften Transformationen*«.[1] Man teile die n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in k Abschnitte

$$X_1 = (x_1 x_2 \ldots x_p),\ X_2 = (x_{p+1} x_{p+2} \ldots x_q), \ldots, X_{k-1} = (x_{r+1} x_{r+2} \ldots x_s),$$
$$X_k = (x_{s+1}, \ldots, x_n).$$

Dann kann man die gestuften Transformatiouen in der Gestalt darstellen

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \cdots + A_{1k} X_k \\ \bar{X}_2 = \qquad\qquad A_{22} X_2 + \cdots + A_{2k} X_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{X}_k = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad A_{kk} X_k. \end{cases} \tag{28}$$

[1] H. WEYL und E. WANNER, l. c.

Hier bedeuten die A_{ik} Matrices, A_{12} z. B. mit p Zeilen und $q-p$ Kolonnen u. s. f. Die Determinanten der A_{ii} sind $\neq 0$.

Diese Gruppe der gestuften Transformationen kann man festlegen durch die invarianten n-ären Formen

$$(29) \qquad \{G\} = \pi_{s+1,\, s+2,\, \ldots\, n},\; \pi_{r+1,\, r+2,\, \ldots\, n},\; \ldots,\; \pi_{p+1,\, p+2,\, \ldots\, n},$$

die, gleich Null gesetzt, lineare, ineinander geschachtelte Räume von $n-s-1$, $n-r-1, \ldots, n-p-1$ Dimensionen darstellen. Der Adjunktionssatz gibt die Invariantentypen[1]:

$$(30) \qquad \begin{cases} (ab\ldots gm),\; (c\ldots gm)_{p+1,\ldots n},\; \ldots,\; (e\ldots gm)_{s+1,\ldots n} \\ (a'b'\ldots g'm'),\; (a'b'\ldots d')_{12\ldots p},\; \ldots,\; (a'b'\ldots h')_{12\ldots s} \end{cases} \qquad (a'b).$$

Für $p=1$, $q=2, \ldots, s=n-1$ kommen wir wieder auf die Semi-Invarianten zurück.

Bei den *orthogonalen* Invarianten haben wir zuerst allgemein die Gruppe $\mathfrak{G}_r$ einer nicht-ausgearteten quadratischen Mannigfaltigkeit

$$(31) \qquad G = \Sigma a'_{ik} x_i x_k = (a'x)^2 = 0,$$

die für den speziellen Fall

$$(32) \qquad G = (xx) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

die Typen

$$(33) \qquad (ab\ldots gm),\; (ab)$$

der orthogonalen Invarianten erzeugt, wobei $a, b, \ldots$ jetzt Reihen mit oder Reihen ohne Strich sein können. Auch bei einer μ-fach ausgearteten Form (31) mit der Normalform

$$G_{(\mu)} = x_{\mu+1}^2 + x_{\mu+2}^2 + \cdots + x_n^2$$

sind die Invariantentypen mit Hilfe des Adjunktionssatzes leicht anzugeben.[2] Für $\mu = 1$ erhält man die Bewegungsinvarianten bzw. die der Hauptgruppe.

Nehmen wir bei den gestuften Transformationen (28) $2n$ Veränderliche

$$(34) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n;\; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$$

---

[1] Hierzu E. Wanner, l. c., S. 14.

[2] ebenda, S. 16.

mit $k = 2$, $p = n$ und überdies A_{12} gleich der Nullmatrix, so haben wir die Transformationen

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{ll} x_1^* = \alpha_1^1 x_1 + \cdots + \alpha_1^n x_n & \\ x_2^* = \alpha_2^1 x_1 + \cdots + \alpha_2^n x_n & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_n^* = \alpha_n^1 x_1 + \cdots + \alpha_n^n x_n & \\ \bar{x}_1^* = & \bar{\alpha}_1^1 \bar{x}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_1^n \bar{x}_n \\ \bar{x}_2^* = & \bar{\alpha}_2^1 \bar{x}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_2^n \bar{x}_n \\ & \cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_n^* = & \bar{\alpha}_n^1 \bar{x}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_n^n \bar{x}_n \end{array}\right.$$

$$\text{mit } |\alpha_i^k| \neq 0, \; |\bar{\alpha}_i^k| \neq 0.$$

Man kann diese Transformationen charakterisieren durch die beiden invarianten Formen

$$(36)\qquad G_1 = \pi_{12\ldots n}, \quad G_2 = \bar{G}_1 = \bar{\pi}_{12\ldots n}.$$

Nehmen wir als drittes G_3 die quadratische Form

$$(37)\qquad G_3 = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_n \bar{x}_n = (x \bar{x})$$

hinzu, so ergeben sich für Reihen $a, \bar{a}$; $b, \bar{b}$; ... (vgl. (34)) ohne Strich die Invariantentypen

$$(38)\qquad f_1 = (a b \ldots g m), \; f_2 = (\bar{a} \bar{b} \ldots \bar{g} \bar{m}), \; f_3 = (a \bar{b}) + (\bar{a} b),$$

wovon die ersten beiden n-reihige Determinanten sind und analog zu (37) gesetzt ist:

$$(39)\qquad f_3' = (a \bar{b}) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \cdots + a_n \bar{b}_n.$$

Beschränkt man sich auf Punkte

$$a_1 : a_2 : \cdots : a_n : 0 : 0 : \cdots : 0$$

des Gebietes G_n der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und ebenso auf Punkte

$$0 : 0 : \cdots : 0 : \bar{b}_1 : \bar{b}_2 : \cdots : \bar{b}_n$$

des Gebietes $\bar{G}_n$ des zweiten Satzes $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ der Variablen, so vereinfacht sich f_3 von (38) noch und kann durch f_3' von (39) ersetzt werden, sodass hier

$$f_1 = (ab \dots gm),\ f_2 = (\bar{a}\bar{b} \dots \bar{g}\bar{m}),\ f_3' = (a\bar{b}) \tag{40}$$

die Invariantentypen für Punkte aus G_n und $\overline{G}_n$ sind. Deuten wir in (35) die überstrichenen Grössen $\bar{x}_i$ und $\bar{\alpha}_i^k$ als komplex-konjugiert zu x_i bzw. α_i^k, so gehen (40) in die Typen der n-ären *unitären Invarianten* über.[1]

[1] Vgl. W. H. TURNBULL, Proceed. Akad. van Wetensch. Amsterdam 34 (1931), S. 413—419.