MÉMOIRE SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES FORMÉES AVEC LES ITÉRÉES SUCCESSIVES D'UNE FRACTION RATIONNELLE.

PAR

GASTON JULIA

à PARIS.

Le présent mémoire est le début d'une étude des séries formées avec les itérées successives d'une fraction rationnelle $R(z)$. On sait qu'il faut entendre par là les fractions rationnelles $R(z)$, $R_2(z)=R[R(z)]$, $R_3(z)=R[R_2(z)]=R_2[R(z)],\ldots$, $R_n(z)=R[R_{n-1}(z)]=R_{n-1}[R(z)],\ldots$ qu'on appelle itérées d'ordre 1, 2, 3, ... n, de $R(z)$. Nous posons $R_0(z)=z$. Les séries que nous considérons sont de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \,.\, R_n(z)$, les a_n étant des constantes complexes quelconques. — Nous étudions ici leur convergence dans le domaine d'un point double attractif ou indifférent pour la substitution $z_1=R(z)$. Dans le chapitre I, nous rappelons les résultats de la théorie de l'itération qui sont indispensables pour cette étude, laquelle est développée dans le chapitre II. Les résultats obtenus, d'une grande simplicité et d'une grande précision, sont résumés dans un tableau qui forme la conclusion du chapitre II. Le présent mémoire servira d'introduction à l'étude des fonctions analytiques représentées par les séries que nous considérons, étude que nous poursuivrons dans des mémoires ultérieurs, où nous étudierons aussi d'autres types de séries ou de produits infinis qui font intervenir les itérées R_n et possèdent des propriétés analytiques remarquables: — C'est *en vue de l'étude des fonctions* représentées par nos séries ou produits infinis que nous avons dû entreprendre l'étude de leur convergence. Pour ne pas donner trop d'ampleur à cette introduction nous avons étudié la convergence uniquement dans les domaines des points doubles attractifs ou indifférents les plus simples. — Nous montrerons dans les développements ultérieurs tout l'intérêt que présentent nos séries au point de vue du prolongement analytique de Weierstrass ou de M. Borel; en particulier, nous rencontrerons avec elles des exemples naturels et remarquables de ces fonctions monogènes quasi-analytiques introduites par M. Borel, exemples ayant en outre des propriétés fonctionnelles remarquables.

Les résultats que nous développerons ont été partiellement publiés dans quelques notes des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (23 Février, 9 Mars, 14 Avril, 27 Avril, 28 Décembre 1925). En particulier le présent mémoire développe et complète une partie des résultats contenus dans les notes du 23 février et du 28 décembre 1925.

CHAPITRE I.

Préliminaires.

Nous rappelons ici quelques résultats indispensables pris dans la théorie de l'itération des fractions rationnelles. — Pour leur démonstration on se reportera à l'un ou l'autre des mémoires suivants.

»Sur les équations fonctionnelles» par P. Fatou. Bull. Soc. Math. de France. T. 47 et 48 — 1919 et 1920.

»Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles» par G. Julia. Journal de Mathématiques pures et appliquées. 7^e^ série. T. 4, 1918.

1. *Points doubles. — Multiplicateurs.* Un point double α de la transformation rationnelle $[z/R(z)]$ ou $[z_1=R(z)]$ est une racine α de l'équation $z=R(z)$, pour laquelle la quantité $s=R'(\alpha)$, s'appelle *multiplicateur*. Cette définition est valable pour α à distance finie. — Lorsque $z=\infty$ est un pôle de $R(z)$, c'est-à-dire $R(\infty)=\infty$, (le degré du numérateur de $R >$ degré du dénominateur), l'∞ est point double de $[z/R(z)]$, on posera

$$z_1=\frac{1}{\zeta_1}, \quad z=\frac{1}{\zeta} \quad \text{d'où} \quad \zeta_1=\frac{1}{z_1}=\frac{1}{R(z)}=\frac{1}{R\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\varrho(\zeta).$$

L'origine est alors point double de la transformation rationnelle $\zeta_1=\varrho(\zeta)$ et *le multiplicateur $\varrho'(0)$ de cette transformation sera le multiplicateur du point double à l'infini de la transformation $z_1=R(z)$*; on peut encore dire que

$$s=\lim_{z=\alpha}\frac{R(z)-\alpha}{z-\alpha}$$

pour α point double à distance finie, et

$$s=\lim_{z=\infty}\frac{z}{R(z)}=\frac{1}{R'(\infty)}$$

pour α point double à l'infini, car, dans ce qui précède, on a

$$s=\varrho'(0)=\lim_{\zeta=0}\frac{\varrho(\zeta)}{\zeta}=\lim_{z=\infty}\frac{z}{R(z)}=\frac{1}{R'(\infty)}\cdot$$

Dans tous les cas $|s|<1$ caractérise les points doubles *attractifs*

$|s|=1$ » » » » *indifférents*

$|s|>1$ » » » » *répulsifs.*

2. *Cycles.* On considère aussi les *cycles* limites. Un *cycle d'ordre n*, composé de points distincts $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$, est tel que $\alpha_1=R(\alpha)$, $\alpha_2=R(\alpha_1), \ldots$ $\alpha_i=R(\alpha_{i-1}), \ldots \alpha=R(\alpha_{n-1})$. Les conséquents d'ordre $1, 2, \ldots n, \ldots$ d'un point arbitraire z, étant les points $z_1=R(z)$, $z_2=R(z_1)=R[R(z)]=R_2(z) \ldots$, $z_n=R(z_{n-1})=$ $=R[R_{n-1}(z)]=R_n(z), \ldots$ où $R_n(z)$, suivant la notation habituelle, désigne l'itérée d'ordre n de $R(z)$, on voit que les conséquents d'un point quelconque α_i du cycle $[\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]$ forment une suite périodique à n termes confondus avec les points du cycle. — Les n points du cycle vérifient l'équation $R_n(z)=z$ et on appelle multiplicateur s du cycle la quantité $s=R'_n(\alpha)$ ou $\lim\limits_{z=\infty}\frac{z}{R_n(z)}$ selon que α est à distance finie ou infinie. On voit d'ailleurs que $s=R'(\alpha).R'(\alpha_1)\ldots R'(\alpha_{n-1})$ où, bien entendu, on remplacera $R'(\alpha)$ par $\lim\limits_{z=\infty} z[R(z)-R(\infty)]$ lorsque $\alpha=\infty$ puisque $R(\alpha)$ étant égal à α_1 est alors fini. Les n points du cycle sont des points doubles de $[z/R_n(z)]$ à même multiplicateur s. Ils sont tous *attractifs* si $|s|<1$ et le *cycle est dit attractif;* si $|s|>1$ le cycle est dit répulsif — si $|s|=1$ le cycle est dit *indifférent.*

3. *Domaine de convergence vers un point double attractif ou indifférent.* On démontre dans la théorie de l'itération qu'un point double attractif α est *intérieur* à un domaine δ_α appelé *domaine immédiat de convergence vers* α parce que 1° dans tout domaine δ intérieur à δ_α la suite des $R_n(z)$ converge uniformément vers α pour $n=\infty$, 2° δ_α est d'un seul tenant avec α. Il est clair que δ_α coïncide avec tous ses conséquents.

Le domaine total de convergence vers α, soit Δ_α, se compose de δ_α et de tous les *domaines antécédents de* δ_α. On sait que les domaines *antécédents d'ordre* I de δ_α sont ceux que décrit z_{-1}, lorsque $z=R(z_{-1})$ décrit δ_α: les domaines *antécédents d'ordre n* sont ceux que décrit z_{-n} lorsque $z=R_n(z_{-n})$ décrit δ; on rappelle ici que z_{-n} est antécédent d'ordre n de z si $z=R_n(z_{-n})$, c'est-à-dire si z est conséquent d'ordre n de z_{-n}.

On démontre que δ_α contient toujours *au moins un point critique* de la fonction algébrique inverse de $z_1=R(z)$, que nous désignons par $z_{-1}=R_{-1}(z)$.

La frontière du domaine Δ_α est constituée par un *ensemble parfait* E'_R défini comme il suit: Considérons l'ensemble des points doubles des cycles *répulsifs* de la substitution $z_1=R(z)$, c'est un ensemble infini dénombrable E_R *dont le dérivé n'est autre que* E'_R; les points de E_R appartiennent à E'_R et ils sont partout denses sur E'_R.

Les points de E'_R possèdent la propriété caractèristique suivante; ce sont des points limites pour l'ensemble des antécédents successifs d'un point quelconque du plan (deux points au plus du plan faisant exception, lorsqu'ils coïncident respectivement avec tous leurs antécédents), E'_R reste invariant par la transformation $z_1=R(z)$ et son inverse. — Dans le cas qui nous occupera ici, où il existe un point double attractif ou indifférent, E'_R n'est nulle part superficiel: Il peut contenir des continus linéaires assez compliqués ou des ensembles parfaits discontinus. C'est le même E'_R qui sert de frontière aux domaines de convergence vers les divers points attractifs ou indifférents de $[z/R(z)]$.

En particulier les pôles des diverses itérées $R_n(z)$ sont les antécédents successifs du point à l'infini. — Le point à l'infini n'est exceptionnel que si $R(z)$ est un polynome. Donc si $R(z)$ n'est pas polynome, tout point de E'_R est *point-limite pour l'ensemble des pôles des* $R_n(z)$.

Si l'on considère seulement le domaine immédiat δ_α et les antécédents intérieurs à δ_α d'un point intérieur à δ_α et distinct de α, ces points forment un ensemble infini dénombrable dont le dérivé est la *frontière de* δ_α, qui est une partie ou la totalité de l'ensemble E'_R suivant les cas. (Lorsque le point choisi est α lui-même, il y a une infinité d'antécédents confondus avec α, et il peut même arriver que tous les antécédents intérieurs à δ_α soient confondus avec α: par exemple $\alpha=0$ pour $z_1=z^2$.) Nous n'insistons pas ici sur l'extension aux cycles attractifs.

Toutes les circonstances de ce paragraphe sont vraies pour un point double α *indifférent* à multiplicateur $s=1$, les seuls que nous considérerons ici, à cela près que le domaine immédiat δ_α de convergence vers α *ne contient pas* α *à son intérieur mais seulement sur sa frontière,* α, point de E'_R, étant alors un *point accessible* de la frontière de δ_α, et tous les antécédents de α (et tous ses conséquants) appartenant alors à E'_R.

4. *Fonction de Koenigs pour un point double attractif à multiplicateur* $\neq 0$. Soit α un point double attractif de multiplicateur $s \neq 0$, pour la substitution rationnelle $z_1 = R(z)$, on démontre que dans tout domaine δ intérieur à δ_α, les $R_n(z)$ convergent uniformément vers α de manière que $\lim\limits_{n=\infty} \frac{R_n(z)-\alpha}{s^n}$ ait pour limite, uniformément dans δ, une fonction $F(z)$, appelée fonction de Koenigs ayant les propriétés suivantes:

$F(z)$ est holomorphe dans tout le domaine δ_α; on a $F(\alpha)=0$, $F'(\alpha)=1$ et, en tout point de δ_α, on a l'équation fonctionnelle

$$F[R(z)] = s \,.\, F(z). \tag{1}$$

Il en résulte qu'elle admet pour *zéros* tous les *antécédents de l'origine*, et ces points-là seulement, qui forment en ensemble de points intérieurs à δ_α ayant pour dérivé toute la frontière de δ_α. Les points-frontière de δ_α sont donc points singuliers essentiels de $F(z)$ et δ_α est le domaine d'existence de $F(z)$. A l'aide de l'équation fonctionnelle $F(z) = \frac{1}{s} \cdot F[R(z)]$, on peut définir, de proche en proche, $F(z)$ dans tous les domaines antécédents de δ_α, dont l'ensemble constitue Δ_α; bien que ces différents domaines puissent être séparés par des frontières infranchissables au prolongement analytique de $F(z)$ nous conservons la même lettre $F(z)$ pour désigner la fonction obtenue à l'aide de l'équation fonctionnelle dans 2 parties distinctes du domaine de convergence Δ_α: cette convention naturelle ne peut conduire à contradiction. Grâce à cette définition étendue de $F(z)$ on aura toujours $\lim\limits_{n=\infty} \frac{R_n(z)-\alpha}{s^n} = F(z)$ uniformément dans tout domaine intérieur à Δ_α.

Connaissant $F(z)$ on peut donner une expression utile de $R_n(z)$. $F(z)$ étant holomorphe autour de $z=\alpha$ et $F'(\alpha)=1$, on peut faire l'inversion de la relation $\mathfrak{z}=F(z)$ autour de $z=\alpha$ auquel correspond $\mathfrak{z}=0$. La branche de fonction inverse de $F(z)$, que nous appelons $z=\varphi(\mathfrak{z})$ et qui est égale à α pour $\mathfrak{z}=0$ sera holomorphe dans un certain cercle $|\mathfrak{z}|=r$ autour de l'origine $\mathfrak{z}=0$ et on aura dans ce cercle

$$z=\varphi(\mathfrak{z})=\alpha+\mathfrak{z}+a_2\mathfrak{z}^2+\cdots+a_k\mathfrak{z}^k+\cdots \qquad \text{avec, alors, } |z-\alpha|<\varrho. \tag{2}$$

Comme

$$F[R(z)] = s \,.\, F(z)$$

on aura

$$R(z) = \varphi\,[s\,F(z)] = \varphi\,(s\mathfrak{z})$$

c'est-à-dire,

$$\varphi\,(s\,\mathfrak{z}) = R\,[\varphi\,(\mathfrak{z})].$$

Par conséquent, si $|s\,F(z)| \leq r$ et $|R-\alpha| < \varrho$ dans une certaine région de δ_α entourant le point α on aura dans cette région:

$$R(z) = \varphi\,[s\,F(z)] = \alpha + s\,F + a_2\,s^2 F^2 + \cdots + a_k\,s^k F^k + \cdots$$

développement de $R(z)$ par rapport aux puissances de $F(z)$. Il est clair que, si ϱ est assez petit, $|R-\alpha| < \varrho$ entraîne $|s\,F(z)| \leq r$ et le développement précédent est valable.

Plus généralement, de $F\,[R_n(z)] = s^n .\, F(z)$ et $|R_n - \alpha| < \varrho$ il résulte que, dans une région de δ_α entourant le point α et dans laquelle $|s^n F| < r$, on aura

(3) $$R_n(z) = \varphi\,[s^n F] = \alpha + s^n .\, F(z) + a_2\,s^{2n} .\, [F(z)]^2 + \cdots + a_k\,s^{kn} .\, [F(z)]^k + \cdots$$

développement que nous utiliserons dans la suite. Il faut remarquer que, $\varDelta$ étant une région quelconque intérieure à $\varDelta_\alpha$, les conséquentes $\varDelta_n$ successives de $\varDelta$ tendent vers α, donc pour $n \geq N$, $\varDelta_n$ sera intérieure à la région $|z-\alpha| < \varrho$ c'est-à-dire que, z étant dans $\varDelta$, on aura, pour $n \geq N$, $|R_n(z) - \alpha| < \varrho$ ce qui entraîne, comme on l'a vu, pour ϱ assez petit, $|s^n F| < r$ et par conséquent *la validité du développement précédent dans tout $\varDelta$, pourvu que n soit pris $\geq N$, N dépendant évidemment de $\varDelta$.*

5. *Fonction de Böttcher pour un point attractif à multiplicateur nul.* Soit α un point attractif de $[z/R(z)]$ à multiplicateur nul. On a, au voisinage de α, pour $|z-\alpha| < \varrho$

$$R(z) = \alpha + A_p\,(z-\alpha)^p + A_{p+1}(z-\alpha)^{p+1} + \cdots \qquad \text{avec } p \geq 2 \text{ et } A_p \neq 0$$

et si ϱ est assez petit toutes les $R_n(z)$ sont holomorphe dans le même cercle et on a

$$R_n(z) = \alpha + A_p^{\frac{p^n-1}{p-1}}\,(z-\alpha)^{p^n} + \cdots.$$

Lorsque ϱ est assez petit les $R_n-\alpha$ n'ont pas, dans $|z-\alpha|<\varrho$ d'autre zéro que l'origine, les $[R_n(z)-\alpha]^{\frac{1}{p^n}}$ sont alors des fonctions de z holomorphes dans $|z-\alpha|<\varrho$ dont le développement est

$$(4) \qquad [R_n(z)-\alpha]^{\frac{1}{p^n}} = A_p^{\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)}.(z-\alpha)+\cdots$$

A_p étant $\neq 0$ on choisira dans la formule précédente une détermination bien fixée de $A_p^{\frac{1}{p-1}}$, puis, à cause de $\lim\limits_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)=1$ on choisira une détermination de $A_p^{\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)}$ qui tende vers la précédente lorsque n devient infini en prenant par exemple dans $A_p^{\frac{1}{p-1}} = e^{\frac{1}{p-1}\cdot\log A_p}$ et $A_p^{\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)} = e^{\left(1-\frac{1}{p^n}\right)\frac{1}{p-1}\log A_p}$ *la même détermination de* $\log A_p$.

Dans ces conditions, on démontre aisément que les déterminations ainsi choisies pour les $[R_n-\alpha]^{\frac{1}{p^n}}$ convergent pour $n=\infty$, uniformément dans $|z-\alpha|<\varrho$ vers une fonction $F_1(z)$ holomorphe dans $|z-\alpha|<\varrho$ développable par la formule

$$F_1(z)=A_p^{\frac{1}{p-1}}(z-\alpha)+\cdots$$

où $A_p^{\frac{1}{p-1}}$ a la valeur choisie ci-dessus. La fonction $F_1(z)$, dite fonction de Böttcher relative à $z=\alpha$, vérifie dans $|z-\alpha|<\varrho$ l'équation fonctionnelle

$$(5) \qquad F_1[R(z)] = [F_1(z)]^p$$

avec

$$F_1(\alpha)=0, \qquad F'_1(\alpha)=A_p^{\frac{1}{p-1}} \neq 0.$$

Grâce à l'équation précédente (5) la fonction $F_1(z)$ définie au voisinage de $z=\alpha$ peut être définie dans tout le domaine $\varDelta_\alpha$ de convergence vers α. On remarque qu'elle est analytique en tout point de $\varDelta_\alpha$; les points antécédents de α sont, comme α, des zéros de $F_1(z)$ et par conséquent, en général, à cause de $F_1(z)= =[F_1[R(z)]]^{\frac{1}{p}}$, *des points critiques algébriques de* $F_1(z)$, en sorte que $F_1(z)$ n'est pas uniforme en général dans tout $\varDelta_\alpha$. Elle l'est certainement dans δ_α, domaine immédiat de α, *si ce domaine ne contient pas d'autre antécédent de* α *que* α *lui-même.*

(Par exemple cas des polynomes avec $\alpha=\infty$); on reconnait alors que $F_1(z)$ qui est toujours <1 en module à cause de l'équation (5), donne la représentation conforme de δ_α sur le cercle $|\zeta|<1$ lorsque $\bar{\delta}_\alpha$ est simplement connexe, par la formule $\zeta=F_1(z)$.

Revenant au cas général, et considérant la branche de fonction inverse de $\zeta=F_1(z)$ qui prend en $\zeta=0$ la valeur α et la désignant par $\varphi_1(\zeta)$ on aura

$$z=\varphi_1(\zeta)=\alpha+\alpha_1\zeta+\alpha_2\zeta^2+\cdots \tag{6}$$

avec

$$\alpha_1=\overline{A_p}^{\,\frac{1}{p-1}}\neq 0$$

développement valable pour

$$|\zeta|<r \quad \text{et} \quad |z-\alpha|<\varrho.$$

Si alors on envisage $F_1[R(z)]=[F_1(z)]^p$ on voit que, si $|F_1(z)|^p<r$ et $|R-\alpha|<\varrho$ on a

$$R=\alpha+\alpha_1F_1^p+\alpha_2F_1^{2p}+\cdots \tag{7}$$

et, d'une manière générale, à cause de

$$F_1[R_n(z)]=[F_1(z)]^{p^n}$$

on aura, pour

$$|F_1(z)|^{p^n}<r \quad \text{et} \quad |R_n(z)-\alpha|<\varrho$$

$$R_n(z)=\varphi_1\left\{[F_1(z)]^{p^n}\right\}=\alpha+\alpha_1F_1^{p^n}+\alpha_2F_1^{2p^n}+\cdots. \tag{8}$$

Soit alors Δ un domaine quelconque intérieur à Δ_α. Dès que $n>N$ le conséquent Δ_n de Δ sera intérieur au cercle $|z-\alpha|<\varrho$ par conséquent on aura $|R_n(z)-\alpha|<\varrho$ pour $n>N$ lorsque z décrit Δ. ϱ étant assez petit on aura aussi $|F_1[R_n(z)]|=$ $=|F_1(z)|^{p^n}<r$; par conséquent le développement (8) de $R_n(z)$ sera valable dans tout Δ dès que $n>N$ et nous l'emploierons souvent dans la suite. Remarquons encore que, dans tout domaine Δ, intérieur à Δ_α, on a $|F_1(z)|\leq M(\Delta)<1$.

6. *Fonction d'Abel pour un point double indifférent à multiplicateur* $s=+1$. Si α est ce point, il appartient à la frontière du domaine immédiat δ_α de convergence vers α. Nous utiliserons ici une expression asymptotique de $R_n(z)$, valable dans tout domaine Δ intérieur à Δ_α et qui a été donnée par P. Fatou dans son mémoire cité plus haut (chap. II, n[os] 8 et 9); nous préciserons cette ex-

pression un peu plus qu'il ne l'a fait, en vue des applications que nous en ferons plus loin.

Supposons d'abord que α soit à l'infini et que

$$R(z) = z + a + \frac{b}{z} + \varrho(z), \tag{9}$$

en nous bornant au cas le plus simple $a \neq 0$ et même a réel et positif, ce qu'on peut toujours obtenir par une rotation convenable des axes. Alors, dans un certain secteur S ayant son sommet sur l'axe réel positif, symétrique par rapport à cet axe et d'ouverture $2\pi - \eta$ ($\eta > 0$ arbitrairement petit), on a

$$|\varrho(z)| < \frac{P}{|z|^2},$$

ce secteur contient tous ses conséquents, et, z étant pris quelconque dans ce secteur, z_n tend vers l'infini de manière que $|z_n| = |R_n(z)| > Kn$ (K indépendant de z dans le secteur). Cela étant, considérons l'expression

$$u_n = z_n - n \,.\, a - \frac{b}{a} Ln$$

de P. Fatou. Elle converge uniformément, *dans tout domaine borné intérieur à S* vers une fonction $A(z)$ (appelée fonction d'Abel du point indifférent $\alpha = \infty$), holomorphe dans tout le domaine de convergence $\varDelta_\alpha$ vers $\alpha = \infty$ et telle que, dans ce domaine, $A[R(z)] = A(z) + a$. Nous voulons évaluer

$$u_n - A(z) = \varepsilon_n(z) = z_n - n \,.\, a - \frac{b}{a} Ln - A(z).$$

On a

$$\varepsilon_n = u_n - A = -\sum_{p=n}^{+\infty} (u_{p+1} - u_p).$$

Or, avec

$$z_{n+1} = z_n + a + \frac{b}{z_n} + \varrho(z_n)$$

on a

$$u_{p+1} - u_p = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{p} - L\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right] + b\left[\frac{1}{z_p} - \frac{1}{ap}\right] + \varrho(z_p).$$

Donc

$$\varepsilon_n = -\sum_{p=n}^{\infty} \varrho(z_p) - b\sum_{p=n}^{\infty}\left(\frac{1}{z_p}-\frac{1}{ap}\right) - \frac{b}{a}\sum_{p=n}^{\infty}\left[\frac{1}{p} - L\left(1+\frac{1}{p}\right)\right].$$

Nous voulons évaluer *l'ordre de* ε_n *en* $\frac{1}{n}$ lorsque z reste dans un domaine borné $\varDelta$ intérieur à S.

On a d'abord

$$\sum_{p=n}^{\infty}\left[\frac{1}{p}-L\left(1+\frac{1}{p}\right)\right] < \int_{n-1}^{\infty}\left[\frac{1}{x}-L\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]dx = -1 - nL\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{A}{n}$$

(A constante >0).

Ensuite

$$\sum_{p=n}^{\infty}\left[\frac{1}{z_p}-\frac{1}{ap}\right] = \sum_{p=n}^{\infty}\frac{pa-z_p}{ap\,.\,z_p}$$

or dans S,

$$|z_p| > Kp$$

et on démontre aussi que

$$|z_p - pa| < K' Lp$$

uniformément dans $\varDelta$ (K et K' constants >0).

Donc

$$\sum_{p=n}^{\infty}\left|\frac{1}{z_p}-\frac{1}{ap}\right| < K''\sum_{p=n}^{\infty}\frac{Lp}{p^2} < K''\int_{n-1}^{\infty}\frac{Lx}{x^2}\,dx < \frac{K''}{n-1}[1+L(n-1)]$$

(K'' constante >0).

Enfin on a, puisque les z_p sont tous dans S

$$\varrho(z_p) < \frac{P}{|z_p|^2} < \frac{P}{K^2p^2},$$

donc

$$\sum_{p=n}^{\infty}|\varrho(z_p)| < P_1\sum_{p=n}^{\infty}\frac{1}{p^2} < P_1\int_{n-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} < \frac{P_2}{n}$$

(P_2 constante positive).

En définitive

$$|\varepsilon_n| < \frac{A}{n} + \frac{K''}{n-1}[1 + L(n-1)] + \frac{P_2}{n} < \frac{A'}{n^{1-\eta}}$$

(A' constante positive)
et η arbitrairement petit positif

quelque soit z dans Δ intérieur à S.

Nous retiendrons ce résultat pour la suite sous la forme

$$z_n = R_n(z) = na + \frac{b}{a} Ln + A(z) + \varepsilon_n(z) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_n(z)| < \frac{A'}{n^{1-\eta}} \quad \text{dans } \Delta.$$

Si maintenant Δ est un domaine borné quelconque intérieur à Δ_α, il est clair que Δ_p pour p assez grand sera borné et intérieur à S. Alors, $R_p(z)$ étant dans Δ_p intérieur à S

$$z_{n+p} = R_n(R_p) = na + \frac{b}{a} Ln + A[R_p(z)] + \varepsilon_n(R_p)$$

et comme

$$z_{n+p} = (n+p)a + \frac{b}{a} L(n+p) + A(z) + \varepsilon_n(R_p) + \frac{b}{a} L \frac{n}{n+p}$$

on a alors quelque soit $n > 0$

$$|\varepsilon_n(R_p)| < \frac{A'}{n^{1-\eta}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{b}{a} L \frac{n}{n+p}\right| = \left|\frac{b}{a} L\left(1 + \frac{p}{n}\right)\right| < \frac{A''}{n}.$$

Donc

$$z_{n+p} = (n+p)a + \frac{b}{a} L(n+p) + A(z) + \varepsilon'_{n+p}(z) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon'_{n+p}(z)| < \frac{B}{(n+p)^{1-\eta}}$$

c'est-à-dire que la formule asymptotique

(10) $$z_n = na + \frac{b}{a} Ln + A(z) + \varepsilon_n(z) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_n(z)| < \frac{A}{n^{1-\eta}}$$

est valable *dans un domaine borné quelconque intérieur à Δ_α pourvu que A soit convenablement choisi.*

Lorsque le point double indifférent α est à distance finie, nous aurons (en faisant le changement de variable $t = \frac{1}{z-\alpha}$, $t_1 = \frac{1}{R(z)-\alpha} = R_1(t)$)

l'expression asymptotique

$$(11) \quad R_n(z)=\alpha+\frac{1}{n a+\beta \,.\, Ln+A(z)+\varepsilon_n(z)} \quad \text{avec} \quad \beta=\frac{a^2-b}{a} \quad \text{et} \quad |\varepsilon_n|<\frac{A}{n^{1-\eta}}$$

dans *tout Δ interieur a Δ_α* lorsque, autour de $z=\alpha$, on a

$$R(z)=(z-\alpha)-a(z-\alpha)^2+b(z-\alpha)^3+\cdots \qquad (a \neq 0)$$

7. *Substitutions rationnelles à cercle fondamental.* — Parmi les substitutions rationnelles $z_1=R(z)$, celles qui *conservent l'intérieur d'un cercle* sont particulièrement intéressantes. Nous supposons que ce cercle est le cercle de centre 0 de rayon 1 et que l'on a $|R(z)|<1$ lorsque $|z|<1$, $|R(z)|>1$ pour $|z|>1$ enfin $|R(z)|=1$ pour $|z|=1$. On voit facilement qu'alors l'équation $R(z)=a$ admet d solutions distinctes ou non, toutes dans $|z|<1$ si $|a|<1$, toutes dans $|z|>1$ si $|a|>1$, toutes sur $|z|=1$ si $|a|=1$. On peut diviser les substitutions conservant le cercle $|z|<1$ en 4 classes.

1°. *Substitutions régulières de $1^{ère}$ espèce:* Caractérisées par le fait que, $R(z)$ *étant de degré d*, il y a $d-1$ *points doubles répulsifs* distincts sur $|z|=1$ et 2 *points doubles attractifs* α et α' symétriques par rapport à $|z|=1$. — Les points répulsifs sont à *multiplicateur réel.* Les 2 points attractifs sont à multiplicateur complexe quelconque de module <1. Tout point intérieur $|z|<1$ a des conséquents qui tendent vers α (Δ_α identique à $|z|<1$). Tout point extérieur $|z|>1$ a des conséquents qui tendent vers α' ($\Delta_{\alpha'}$ identique à $|z|>1$). Sur $|z|=1$ les *cycles répulsifs* racines des $z=R_n(z)$ forment un ensemble partout dense. — Les points de $|z|=1$ n'appartiennent ni à Δ_α ni à $\Delta_{\alpha'}$, les conséquents d'un point $|z|=1$ forment un ensemble dont le dérivé peut être très compliqué (problème de nature arithmétique). Tout point de Δ_α ou $\Delta_{\alpha'}$ ou même de $|z|=1$ a une infinité *d'antécédents successifs*[1] dont l'ensemble dérivé coïncide avec toute la circonférence $|z|=1$. Remarquons pour terminer que, sur $|z|=1$ on a ici $|R'(z)|>K>1$.

2°. *Substitutions régulières de 2^e espèce.* Caractérisées par ce fait qu'elles possèdent *d points doubles répulsifs* sur $|z|=1$ et *un point double attractif α aussi* sur $|z|=1$; tous ces points ont des multiplicateurs réels. — Il existe alors, sur $|z|=1$, un ensemble parfait E'_R *partout discontinu* (invariant par $[z/R(z)]$), ne

[1] Il y a exception seulement pour le cas où α *coïncide avec tous ses antécédents* (aussi pour α'). En envoyant α à l'origine et α' à l'infini par une homographie convenable la substitution se ramène alors à $t_1=t^d$. α et α' sont alors les seuls points exceptionnels.

contenant pas α, mais contenant tous les points doubles des cycles répulsifs et tel que:

a) Tout point du plan n'appartenant pas à E'_R a des conséquents successifs qui admettent α pour seul point limite, *le domaine* Δ_α *se composant de tout le plan sauf* E'_R.

b) Tout point du plan admet pour ensemble *dérivé de ses antécédents successifs l'ensemble* E'_R et lui seul.

3°. *Substitutions singulières de* $1^{ère}$ *espèce.* Caractérisées par ce fait qu'elles possèdent $(d-2)$ *points doubles répulsifs* sur $|z|=1$ et un *point double* α *indifférent tel que* $R'(\alpha)=1$, $R''(\alpha)=0$, $R'''(\alpha)\neq 0$, comptant par conséquent pour 3 points doubles, c'est-à-dire trois racines de $R(z)-z=0$. On démontre alors que:

a) Tout point intérieur $|z|<1$ a des conséquents tendant vers α.

b) Tout point extérieur $|z|>1$ a des conséquents tendant vers α.

c) *Aucun point de* $|z|=1$ *n'admet* α *pour seul point limite de ses conséquents.*

Les points de $|z|=1$ possèdent ici les mêmes propriétés que les substitutions *régulières de* $1^{ère}$ *espèce.* L'ensemble E'_R, dérivé des antécédents d'un point quelconque du plan, se confond avec la circonférence $|z|=1$ toute entière.

Le domaine Δ_α se compose ici de *2 parties distinctes* à savoir $|z|<1$ et $|z|>1$, ayant pour *frontière commune la circomférence* $|z|=1$. Cette 3^e classe est un cas limite de la $1^{ère}$ (où les 2 points attractifs viennent se confondre en α sur $|z|=1$ avec un point répulsif).

4°. *Substitutions singulières de* $2^{ème}$ *espèce.* Caractérisées par ce fait qu'elles possèdent, sur $|z|=1$, $(d-1)$ points doubles répulsifs à multiplicateurs réels, et un point double indifférent α pour lequel $R'(\alpha)=1$, $R''(\alpha)\neq 0$, comptant par conséquent pour 2 points doubles dans le nombre $(d+1)$ des racines de $R(z)-z=0$. Il existe encore sur $|z|=1$ un ensemble parfait E'_R (composé des racines des $z=R_n(z)$ et de leurs points limites), partout discontinu, invariant par $[z/R(z)]$, contenant α, et tel que:

a) Tout point du plan n'appartenant pas à E'_R admet α pour seule limite de ses conséquents. Δ_α *comprend ainsi tout le plan sauf* E'_R *qui est sa frontière.*

b) Tout point du plan admet E'_R (et E'_R seulement) pour ensemble dérivé de ses antécédents successifs. Cette 4^e classe est un cas limite de la 2^e (où 1 point répulsif vient se confondre sur $|z|=1$ avec le point attractif).

CHAPITRE II.

Convergence des séries $\Sigma a_n R_n(z)$ à l'intérieur du domaine $\varDelta_\alpha$ d'un point double α, attractif ou indifférent.

§ I.

α est un point attractif à multiplicateur $s \neq 0$.

1. Nous envisageons le domaine de convergence $\varDelta_\alpha$ des $R_n(z)$ vers le point *double attractif* α et nous supposons d'abord $\alpha \neq 0$ et fini $[R(\alpha)=\alpha,\ R'(\alpha)=s\neq 0,\ |s|<1]$. Soit z_0 un point quelconque *intérieur* au domaine $\varDelta_\alpha$: ses conséquents $R_n(z_0)$ tendent vers α pour $n=\infty$. Supposons que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(z) \tag{1}$$

converge au point z_0. Il faut alors que a_n tende vers zéro, puisque $R_n(z_0)$ a pour limite $\alpha \neq 0$. Or $R_n(z_0)=\alpha+s^n[F(z_0)+\varepsilon_n(z_0)]$, $F(z)$ étant la fonction de Koenigs relative à $R(z)$ et au point α, et $\varepsilon_n(z_0)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}\cdot$ Si $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$, il suit que $\sum\limits_0^\infty |a_n s^n|$ converge, puisque $|s|<1$; à fortiori la série $\sum\limits_0^\infty |a_n s^n \varepsilon_n(z_0)|$ convergera-t-elle, puisque $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n(z_0)=0$. La série $\sum\limits_0^\infty a_n R_n(z_0)$ étant convergente, et la série $\sum\limits_0^\infty a_n s^n[F(z_0)+\varepsilon_n(z_0)]$ étant par conséquent convergente, leur différence $\sum\limits_0^\infty a_n \alpha$ sera convergente, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum\limits_0^\infty a_n$. La convergence de (1) en un point intérieur au domain $\varDelta_\alpha$ *nécessite la convergence de* $\sum\limits_0^\infty a_n$ dans l'hypothèse $\alpha\neq 0$, $\alpha \neq \infty$, $s\neq 0$.

Soit alors $\varDelta$ un domaine fermé complètement intérieur à $\varDelta_\alpha$. Dans ce domaine $\varDelta$, on aura, uniformément, $\lim\limits_{n=\infty} R_n(z)=\alpha$, $F(z)$ sera holomorphe dans $\varDelta$ et on aura

$$R_n(z)=\alpha+s^n[F(z)+\varepsilon_n(z)],$$

$\varepsilon_n(z)$ étant, dès que n est assez grand, holomorphe dans $\varDelta$ et uniformément inférieur à ε arbitrairement petit.

La série (1) $\Sigma a_n R_n(z)$ pourra, Σa_n étant convergente, s'écrire

$$\sum_0^\infty a_n R_n(z) = \alpha \sum_0^\infty a_n + \sum_0^\infty a_n s^n [F(z) + \varepsilon_n(z)].$$

Or, Σa_n étant convergente, $\Sigma a_n s^n$ sera absolument convergente et, a fortiori, $\Sigma a_n s^n \varepsilon_n(z)$ sera absolument et uniformément convergente dans $\varDelta$. On aura donc

$$\sum_0^\infty a_n R_n(z) = \alpha \sum_0^\infty a_n + F(z) \sum_0^\infty a_n s^n + \sum_0^\infty a_n s^n \varepsilon_n(z).$$

La série (1) est donc *uniformément convergente dans* $\varDelta$. En tout point z de $\varDelta$ qui n'est pole d'aucune $R_n(z)$ il est visible que toutes les $R_n(z)$ étant holomorphes, ainsi que $F(z)$, les $\varepsilon_n(z)$ seront holomorphes; en un tel point la somme de la série (1) sera une fonction holomorphe de z.

En supposant donc $\alpha \neq 0$ et $s \neq 0$, la convergence de la série (1) en un point z_0 du domaine $\varDelta_\alpha$ entraîne la convergence de Σa_n et par suite *la convergence uniforme de la série* (1) dans tout domaine $\varDelta$ intérieur à $\varDelta_\alpha$. La somme de la série (1) est alors *holomorphe en tout point intérieur à $\varDelta_\alpha$ qui n'est pôle d'aucune R_n, c'est-à-dire qui n'est pas antécédent du point à l'infini.* Si donc le point à l'infini n'est pas intérieur à $\varDelta_\alpha$, (1) représentera une fonction holomorphe dans tout $\varDelta_\alpha$. Si l'∞ est intérieur à $\varDelta_\alpha$, ses antécédents seront intérieurs à $\varDelta_\alpha$ et ils sont tous distincts et ils admettent E'_R pour ensemble dérivé. Un antécédent d'ordre p sera un point ζ tel que $R_p(\zeta) = \infty$. En ce point ζ toutes les $R_n(z)$ pour $n \neq p$ sont holomorphes. Ce point ζ est donc un *pôle* de la fonction représentée par (1), le seul terme de la série, non holomorphe en ζ, étant $a_p R_p(z)$. La série (1) représente alors une fonction *méromorphe dans $\varDelta_\alpha$*, dont les pôles sont les antécédents du point à l'infini. *La convergence de $\sum_0^\infty a_n$ est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de (1) dans tout domaine $\varDelta_\alpha$* ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \infty$, $s \neq 0$).

2. Supposons maintenant $\alpha = 0$. Il est clair que si nous choisissons un point z_0 de $\varDelta_\alpha$ qui soit antécédent d'ordre p de l'origine on aura $R_p(z_0) = 0$ et par suite $R_{p+k}(z_0) = 0$ quelque soit l'entier positif k. Tous les termes de (1) sont

nuls à partir du $p^{ième}$. La série converge banalement. Soit alors z_0 *un point non antécédent de l'origine*, c'est-à-dire où $R_n(z_0) \neq 0$ quelque soit n et supposons qu'en z_0 la série (1) converge. — Il est clair que $\lim_{n=\infty} a_n R_n(z_0) = 0$. Or on sait (Préliminaires n° 4) qu'au point z_0 envisagé la fonction de Koenigs est holomorphe et $\neq 0$ $[F(z_0) \neq 0]$. On sait aussi que, dès que n est assez grand, on peut écrire

$$(2) \qquad R_n(z) = s^n F(z) + \alpha_2 s^{2n} F^2(z) + \alpha_3 s^{3n} F^3(z) + \cdots$$

les coefficients $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ provenant du développement en série entière

$$(3) \qquad \varphi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + \alpha_2 \mathfrak{z}^2 + \alpha_3 \mathfrak{z}^3 + \cdots$$

de la branche nulle en $\mathfrak{z} = 0$ de fonction $\varphi(\mathfrak{z})$, inverse de $F(z)$.

(On se souvient que $F[R(z)] = sF(z)$ et si on pose $\mathfrak{z} = F(z)$ on en tire $z = \varphi(\mathfrak{z})$ avec $\varphi(s\mathfrak{z}) = R[\varphi(\mathfrak{z})]$).

Le développement (2) est valable dès que $|s^n F(z)| < r$, r étant le rayon de convergence de la série (3) et $|R_n| < \varrho$, ϱ pouvant d'ailleurs être choisi assez petit pourque $|R_n| < \varrho$ entraîne $|s^n F| < r$.

Ici $F(z_0) \neq 0$, donc, pour $n > n_0$ on aura $|s^n F(z_0)| < r$. A partir de l'indice n_0 on aura $R_n(z_0) = s^n [F(z_0) + \varepsilon_n(z_0)]$ le crochet ayant pour limite $F(z_0) \neq 0$ lorsque n devient infini. Puisque $\lim_{n=\infty} a_n R_n(z_0) = 0$, il faudra donc $\lim_{n=\infty} a_n s^n = 0$.

Envisageons la série entière

$$(4) \qquad \lambda(\mathfrak{z}) = \sum_0^\infty a_n \mathfrak{z}^n$$

dont la valeur pour $\mathfrak{z} = s$ s'est déjà présentée à nous au n° 1 et que nous retrouverons constamment dans la suite. On peut l'appeler la *série image* de la série (1)

$$\sum_0^\infty a_n R_n(z).$$

La conclusion $\lim_{n=\infty} a_n s^n = 0$ entraîne que le rayon de convergence de (4) est $\geq |s|$. Reprenant alors le développement (2) on peut l'écrire, pour $n > n_0$ et pour z_0

$$R_n(z_0) = s^n F(z_0) + s^{2n} F_{2n}(z_0)$$

avec

$$F_{2n}(z_0) = \alpha_2 F^2(z_0) + \alpha_3 F^3(z_0) + \cdots.$$

Si n devient infini, $F_{2n}(z_0)$ a pour limite $\alpha_2 F^2(z_0)$ *qui est fini*.

Puisque le rayon de convergence de (4) est $\geq |s|$, la série $\sum_0^\infty a_n s^{2n}$ est absolument convergente, car $|s^2|<|s|$, $|s|$ étant <1. Il en est de même de la série $\sum_0^\infty a_n s^{2n} F_{2n}(z_0)$. La série $\sum_0^\infty a_n s^n F(z_0)$ est la différence de 2 séries convergentes $\sum_0^\infty a_n R_n(z_0)$ et $\sum_0^\infty a_n s^{2n} F_{2n}(z_0)$. Elle est donc convergente. — La convergence de (1) en un point z_0 non antécédent de l'origine exige par conséquent la convergence de la série $\sum_0^\infty a_n s^n$.

Le raisonnement se poursuit comme au n° 1, à cela près que la série $\sum_0^\infty a_n s^n$ joue ici le rôle que jouait au n° 1 la série $\sum_0^\infty a_n$. Si Δ est un domaine fermé intérieur à Δ_0 (Δ_0 domaine de convergence vers l'origine) on a $|F(z)|<M$ dans Δ. On choisira le plus petit entier n_0 tel que $|s^n M|<r$ et l'on pourra, dans tout Δ, obtenir, pour $n>n_0$, le développement (2) qu'on pourra écrire

$$R_n(z)=s^n F(z)+s^{2n} F_{2n}(z) \tag{5}$$

avec

$$F_{2n}(z)=\alpha_2 F^2(z)+\alpha_3 . s^n F^3(z)+\cdots.$$

Toutes les $F_{2n}(z)$, $n>n_0$ sont holomorphes dans Δ comme $F(z)$, il est visible aussi que quel que soit n on aura

$$|F_{2n}(z)|<M_1 \qquad \text{dans tout } \Delta.$$

Il en résulte que

$$\sum_0^\infty a_n R_n(z)=F(z)\sum_0^\infty a_n s^n + \sum_0^\infty a_n s^{2n} F_{2n}(z).$$

La série $\sum_0^\infty a_n s^{2n}$ étant absolument convergente et $|F_{2n}(z)|<M_1$ dans Δ, le 2e membre de l'égalité précédente est *uniformément convergent dans* Δ et y représente une fonction holomorphe de z en tout point où aucune des $R_n(z)$ n'est infinie.

La conclusion du n° 1 subsiste donc. *La convergence de (1) en un point de Δ_α qui n'est pas antécédent de l'origine (point tel que les termes de (1) sont tous $\neq 0$), exige la convergence de* $\sum_0^\infty a_n s^n$ *et entraîne la convergence uniforme de (1) dans tout domaine intérieur à Δ_0; (1) représente alors dans Δ_0 une fonction de z, holomorphe en tout point de Δ_0 non antécédent de l'infini, méromorphe en tout point de Δ_0 qui est antécédent de l'infini.*

La convergence de $\sum_0^\infty a_n s^n$ *est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de* $\sum_0^\infty a_n R_n$ *dans le domaine de convergence des R_n vers un point double attractif $\alpha=0$ de multiplicateur $s\neq 0$.*

3. Examinons maintenant le cas $\alpha=\infty$, $s\neq 0$. Cela veut dire que si l'on pose $z=\frac{1}{\zeta}$, $z_1=\frac{1}{\zeta_1}$ la relation $z_1=R(z)$ devient une relation rationnelle $\zeta_1=\varrho(\zeta)$ pour laquelle on aura $\varrho(0)=0$, $\varrho'(0)=s$ avec $|s|<1$. Par cette transformation étendue à tous les z_n c'est-à-dire en posant $z_n=\frac{1}{\zeta_n}$, la relation $z_n=R_n(z)$ équivaudra à $\zeta_n=\varrho_n(\zeta)$. Soit $F(\zeta)$ la fonction de Koenigs relative à $\varrho(\zeta)$, à l'origine $\zeta=0$, et au multiplicateur s

$$F[\varrho(\zeta)]=s\,.\,F(\zeta).$$

On aura, sous la condition $|s^n F(\zeta)|<r$, r rayon de convergence de la série entière $\varphi(\mathfrak{z})$, branche nulle en 0 de la fonction inverse de $F(\zeta)$, tirée de $\mathfrak{z}=F(\zeta)$ par $\zeta=\varphi(\mathfrak{z})$,

$$\varphi(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}+\alpha_2\mathfrak{z}^2+\cdots$$

en remarquant que

$$\varrho(\zeta)=\varphi[sF] \quad \text{et en général} \quad \varrho_n(\zeta)=\varphi[s^n F]$$

$$\varrho_n(\zeta)=s^n F(\zeta)+\alpha_2 s^{2n} F^2+\alpha_3 s^{3n} F^3+\cdots.$$

Par conséquent $R_n(z)=\dfrac{1}{s^n F+\alpha_2 s^{2n} F^2+\alpha_3 s^{3n} F^3+\cdots}$ où au 2e membre ζ serait remplacé par $\frac{1}{z}$. On peut encore écrire, comme on l'a fait au n° 2

$$\varrho_n(\zeta)=s^n F(\zeta)+s^{2n} F_{2n}(\zeta)$$

où

$$F_{2n}(\zeta)=\alpha_2 F^2+\alpha_3 s^n F^3+\cdots.$$

Lorsque n devient infini $F_{2n}(\zeta)$ tend vers $\alpha_2 F^2$ car on peut écrire $F_{2n}=F^2[\alpha_2+ +\alpha_3 s^n F+\cdots]=F^2.\Phi[s^n F]$, Φ étant holomorphe pour $|s^n F|<r$ et tendant vers α_2 lorsque n devient infini.

Par suite

$$R_n(z)=\frac{1}{s^n F+s^{2n}F_{2n}}. \tag{6}$$

Soit z_0 un point du domaine Δ_∞ où les R_n convergent vers l'∞. Si ce point est antécédent d'ordre p de l'∞, toutes les R_n pour $n\geq p$ seront ∞ au point z_0. La série n'a pas de sens en z_0. Écartons d'abord ce cas et supposons z_0 non antécédent de l'∞. Alors $\zeta_0=\frac{1}{z_0}$ n'est pas antécédent de l'origine dans l'itération $[\zeta/\varrho(\zeta)]$, ce n'est pas un zéro de $F(\zeta)$. Donc $F(\zeta_0)\neq 0$. Si la série (1) converge en z_0, on aura $\lim\limits_{n=\infty} a_n R_n(z_0)=0$.

Donc

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{s^n}\,\frac{1}{F(\zeta_0)+s^n F_{2n}(\zeta_0)}=0.$$

Le terme $s^n F_{2n}(\zeta_0)$ a pour limite zéro. On a donc $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_n}{s^n}\,\frac{1}{F(\zeta_0)}=0$ et puisque $\frac{1}{F(\zeta_0)}$ est fini et $\neq 0$ on aura $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_n}{s^n}=0$. Une condition nécessaire pour la convergence de (1) en z_0 est donc que $\lim\frac{a_n}{s^n}=0$. La *série image* $\lambda(\mathfrak{z})=\sum\limits_0^\infty a_n \mathfrak{z}^n$ doit donc avoir un *rayon de convergence* $\varrho\geq\frac{1}{|s|}$. En raisonnant comme plus haut on pourra écrire

$$\frac{1}{F+s^n F_{2n}}=\frac{1}{F(\zeta)}-\frac{s^n F_{2n}}{F(F+s^n F_{2n})}$$

ce qui équivaut à developper le 1[er] membre en puissance de s^n et à grouper tous les termes à partir du 2[e].

Alors

$$a_n R_n=\frac{a_n}{s^n}\cdot\frac{1}{F+s^n F_{2n}}=\frac{a}{s^n}\cdot\frac{1}{F}-\frac{a_n}{F}\,\frac{F_{2n}}{F+s^n F_{2n}}.$$

Le rayon de convergence ϱ de $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ étant $\geq\frac{1}{|s|}$ la série $\Sigma\,|a_n|$ sera convergente. Lorsque n devient infini $\frac{F_{2n}}{F(F+s^n F_{2n})}$ tend vers $\frac{\alpha_2 F^2}{F^2}=\alpha_2$ qui est fini.

La série $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n F_{2n}}{F(F+s^n F_{2n})}$ est donc absolument convergente, comme $\Sigma|a_n|$. La série $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{s^n} \cdot \frac{1}{F(\zeta_0)}$ somme des 2 séries convergentes $\sum\limits_0^\infty a_n R_n(z_0)$ et

$$\sum_0^\infty \frac{a_n F_{2n}(\zeta_0)}{F(\zeta_0)\,[F(\zeta_0)+s^n F_{2n}(\zeta_0)]}$$

sera elle même convergente, et il en sera de même de $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{s^n}$.

La convergence de $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{s^n}$ *est une condition nécessaire pour que la série (1) converge en un point de* $\varDelta_\infty$ *non antécédent de l'*∞.

C'est aussi une condition *suffisante* et elle entraîne la *convergence uniforme de (1) dans tout domaine fermé* $\varDelta$ *intérieur à* $\varDelta_\infty$ *ne contenant aucun antécédent de l'*∞.

En effet, à $\varDelta$ correspond dans le plan ζ un domaine $\varDelta'$ intérieur au domaine de l'origine et ne contenant aucun antécédent de l'origine. Dans un tel domaine $m<|F(\zeta)|<M$, m et M étant 2 constantes positives non nulles. Dès que n sera tel que $|s^n M|<r$ on pourra utiliser la représentation de R_n ci-dessus et on pourra écrire (sauf pour un nombre fini n_0 d'indices, ce qui ne change rien au raisonnement)

$$(7) \qquad \sum_0^\infty a_n R_n(z) = \left[\sum_0^\infty \frac{a_n}{s^n}\right] \cdot \frac{1}{F} - \sum_0^\infty \frac{a_n F_{2n}}{F(F+s^n F_{2n})}$$

(au 2^e^ membre on imaginera ζ remplacé par $\frac{1}{z}$ dans F et F_{2n}). En vertu de l'expression $F_{2n}=F^2.\Phi(s^n F)$, Φ étant holomorphe pour $|s^n F|<r$ chaque terme de la 2^e^ série du 2° membre est holomorphe en z dans le domaine $\varDelta$ puisqu'il est holomorphe en ζ dans le domaine $\varDelta'$. Pour ζ parcourant $\varDelta'$ et par suite, pour z dans $\varDelta$, $\frac{F_{2n}}{F[F+s^n F_{2n}]}$ est borné supérieurement. En effet, pour n tel que $|s^n M|<r$ on aura $|\Phi(s^n F)|<M_1$, M_1 maximum de $|\Phi(\mathfrak{z})|$ pour $|\mathfrak{z}|\le r$; donc

$$\left|\frac{F_{2n}}{F(F+s^n F_{2n})}\right| < \frac{M^2.M_1}{m\,[m-|s|^n.M^2.M_1]},$$

Soit z_0 un point qui soit *antécédent d'ordre p de l'∞* et qui ne soit pas antécédent d'ordre $(p-1)$ c'est-à-dire que $R(z_0)$, $R_2(z_0)$, ... $R_{p-1}(z_0)$ sont finis tandis que $R_p(z_0)$ est infini. — Soit ζ_0 le correspondant de z_0, $\left(\zeta_0 = \frac{1}{z_0}\right)$; il est clair que $\varrho(\zeta_0)$, $\varrho_2(\zeta_0)$, ... $\varrho_{p-1}(\zeta_0)$ sont finis et $\neq 0$ tandis $\varrho_p(\zeta_0) = 0$ et par suite $\varrho_{p+k}(\zeta_0) = 0$ pour tout entier positif k.

Si l'on développe $\varrho(\zeta)$ autour de $\zeta = 0$ en série de Taylor convergente dans $|\zeta| \leq r_1$, r_1 assez petit, on aura $\varrho(\zeta) = s\zeta[1 + h(\zeta)]$ $h(\zeta)$ étant holomorphe en ζ dans $|\zeta| \leq r_1$ et s'annulant pour $\zeta = 0$. Si r est assez petit, $|\zeta| < r$ entraînera $|\varrho(\zeta)| < r_1$ et par suite on aura de proche en proche $\varrho_n(\zeta) = s^n\zeta[1 + h_n(\zeta)]$ h_n étant holomorphe dans $|\zeta| \leq r_1$ et s'annulant pour $\zeta = 0$.

Dans ces conditions on écrira

$$\sum_0^\infty a_n R_n(z) = \sum_0^{p-1} a_n R_n(z) + \sum_{k=0}^\infty a_{p+k} R_{p+k}(z)$$

$$= \sum_0^{p-1} a_n R_n(z) + \sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{\varrho_{p+k}(\zeta)}$$

où, dans la dernière Σ, on doit imaginer que $\zeta = \frac{1}{z}\cdot$

D'autre part $\varrho_{p+k}(\zeta) = \varrho_k[\varrho_p(\zeta)] = s^k \varrho_p(\zeta)[1 + h_k(\varrho_p(\zeta))]$ en se bornant au voisinage de ζ_0 pour lequel $|\varrho_p(\zeta)| < r_1$. On aura donc, au voisinage de z_0, ou de ζ_0

$$\sum_0^\infty a_n R_n(z) = \sum_0^{p-1} a_n R_n(z) + \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\varrho_p(\zeta)} \cdot \frac{a_{p+k}}{s^k[1 + h_k(\varrho_p(\zeta))]}\cdot$$

Mais en observant que $\frac{1}{1 + h_k} = 1 - \frac{h_k}{1 + h_k}$ il viendra

$$\sum_0^\infty a_n R_n(z) = \sum_0^{p-1} a_n R_n(z) + \frac{1}{\varrho_p(\zeta)} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^k}\left[1 - \frac{h_k[\varrho_p(\zeta)]}{1 + h_k[\varrho_p(\zeta)]}\right]\cdot$$

La série $\sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^k}$ est convergente au même titre que la série $\sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^{p+k}}$, qui est une partie de la série $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{s^n}$, laquelle est convergente par hypothèse.

en supposant, bien entendu, n assez grand pour que $|s|^n . M^2 M_1$ soit $< m$ et par exemple

$$|s|^n . M^2 . M_1 < \frac{1}{2} m,$$

on aura:

$$\left| \frac{F_{2n}}{F(F + s^n F_{2n})} \right| < \frac{M^2 M_1}{\frac{1}{2} m^2}.$$

La série $\sum_0^\infty |a_n|$ étant convergente, la série $\sum_0^\infty \frac{a_n F_{2n}}{F(F + s^n F_{2n})}$ sera absolument et uniformément convergente pour ζ dans Δ' et pour z dans Δ. La série $\sum_0^\infty \frac{a_n}{s^n}$ étant convergente par hypothèse, la serie $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ sera, en vertu de l'égalité (7), *uniformément convergente dans* Δ et représentera dans Δ une fonction holomorphe de z.

La condition nécessaire et suffisante pour la convergence de (1) en un point non antécédent de l'∞ de domaine Δ_∞ d'un point double attractif à l'infini, est que la série $\sum_0^\infty \frac{a_n}{s^n}$ converge. Si elle est satisfaite, la série (1) converge uniformément dans tout domaine fermé Δ intérieur à Δ_∞ et ne contenant aucun antécédent de l'∞. La somme de (1) est une fonction de z holomorphe en tout point de Δ_∞ qui n'est pas antécédent de l'∞.

Les antécédents de l'∞ sont des points *isolés à l'intérieur de Δ_∞*. Hors le cas où $R(z)$ est un polynome, ils constituent un ensemble infini dénombrable dont le dérivé est l'ensemble parfait E'_R qui forme la frontière totale de Δ_∞. Dans le cas où $R(z)$ est un polynome, tous les antécédents de l'∞ sont à l'∞, les termes de (1) sont des polynomes et la somme de (1) est holomorphe en tout point intérieur à Δ_∞. Ce cas excepté, la question se pose de savoir *quelle est, en un point antécédent de l'∞, la nature de la singularité que présente la somme de la série (1).*

Il est facile de voir qu'un *tel point est un pôle pour la somme de la série (1).*

Reprenant en effet la correspondance entre z et ζ dont nous avons fait usage plus haut, on aura $R_n(z) = \frac{1}{\varrho_n(\zeta)}$ si on imagine au 2[e] membre ζ remplacé par $\frac{1}{z}$.

On peut, finalement, écrire

$$(8)\qquad \sum_0^\infty a_n R_n(z) = \sum_0^{p-1} a_n R_n(z) + \frac{1}{\varrho_p(\zeta)} \sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^k} - \sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^k} \cdot \frac{h_k[\varrho_p(\zeta)]}{\varrho_p(\zeta)} \cdot \frac{1}{1 + h_k[\varrho_p(\zeta)]}.$$

Au voisinage de z_0 et en z_0 la première somme $\sum_0^{p-1} a_n R_n(z)$ est *holomorphe.*

Au voisinage de z_0, auquel correspond celui de ζ_0, le 2^e^ terme

$$\frac{1}{\varrho_p(\zeta)} \sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^k}$$

peut s'écrire $R_p(z) . \sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^k}$; *ce terme admet z_0 comme pôle au même ordre que $R_p(z)$* et *la partie infinie de ce terme est égale à celle de $R_p(z)$ multipliée par le nombre* $\sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^k}$. Enfin envisageant la 3^e^ Σ du 2^e^ membre, on voit de suite que $h_k[\varrho_p(\zeta)]$ est holomorphe en $\varrho_p(\zeta)$ lorsque $|\varrho_p(\zeta)| < r_1$, ce qui est le cas en ζ_0 et au voisinage de ζ_0; de plus $h_k[\varrho_p(\zeta)]$ renferme $\varrho_p(\zeta)$ en facteur à une certaine puissance entière, puisque $h_k(0) = 0$. Donc $\frac{h_k[\varrho_p(\zeta)]}{\varrho_p(\zeta)}$ est holomorphe en ζ_0 et au voisinage de ζ_0. Il en est de même pour le terme général de la 3^e^ Σ, à savoir

$$\frac{a_{p+k}}{s^k} \cdot \frac{h_k[\varrho_p(\zeta)]}{\varrho_p(\zeta)} \cdot \frac{1}{1 + h_k[\varrho_p(\zeta)]}.$$

La 3^e^ Σ représente donc une série de termes holomorphes en ζ_0, uniformément convergente dans un certain cercle de centre ζ_0; sa somme est holomorphe en ζ dans ce cercle; elle est donc holomorphe en z dans un certain cercle de centre z_0.

Dans la formule (8) le 2^e^ membre comporte donc 2 termes (le 1^er^ et le 3^e^) holomorphes en z_0, et un terme (le 2^e^) admettant z_0 pour pôle.

La somme de (1), holomorphe autour de z_0, *admet donc z_0 pour pôle et sa partie infinie en z_0 est égale à celle de $R_p(z)$ multipliée par* $\sum_{k=0}^\infty \frac{a_{p+k}}{s^k}$.

Il est donc bien vrai qu'en z_0 tous les termes de (1) à partir de R_p sont infinis, mais, par une mise en facteur convenable, on peut mettre la somme de tous ces termes sous la forme d'un produit de 2 facteurs dont l'un reste holomorphe en z_0, et dont l'autre *emporte la singularité polaire commune à tous les termes* R_{p+k}. C'est ce qu'exprime la mise en facteur de $\frac{1}{\varrho_p(\zeta)}$ dans

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varrho_p(\zeta)} \frac{a_{p+k}}{s^k[1+h_k[\varrho_p(\zeta)]]} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p+k} R_{p+k}(z).$$

§ II.

α est un point attractif à multiplicateur $s=0$.

Nous avons 3 discussions à faire selon que α est fini et $\neq 0$, égal à zéro, ou infini.

4. $\alpha \neq 0$ et $\neq \infty$. Nous nous adresserons cette fois, pour avoir une expression de $R_n(z)$, non plus à la fonction de Koenigs qui n'existe pas ici, mais à la fonction de Böttcher (Préliminaires, n° 5). En supposant que l'on ait au voisinage de α

$$R(z)-\alpha = A_p(z-\alpha)^p + \cdots \qquad A_p \neq 0, \quad p \geq 2,$$

la fonction de Böttcher $F_1(z)$ sera holomorphe au voisinage de α et son développement sera de la forme

$$\mathfrak{z} = F_1(z) = A_p^{\frac{1}{p-1}}(z-\alpha) + \cdots$$

et la branche égale à α pour $\mathfrak{z}=0$ de fonction inverse de $F_1(z)$ sera de la forme

$$z = \varphi_1(\mathfrak{z}) = \alpha + \alpha_1 \mathfrak{z} + \alpha_2 \mathfrak{z}^2 + \cdots \qquad \text{où} \qquad \alpha_1 = A_p^{-\frac{1}{p-1}} \neq 0,$$

et ce développement sera valable pour $|\mathfrak{z}| < r$ et $|z-\alpha| < \varrho$, r et ϱ étant assez petits.

On aura

$$F_1[R(z)] = [F_1(z)]^p \quad \text{et, en général} \quad F_1[R_n(z)] = [F_1(z)]^{p^n} \quad \text{d'où il suit}$$

$$R_n(z) = \varphi_1\{[F_1(z)]^{p^n}\} = \alpha + \alpha_1 F_1^{p^n} + \alpha_2 F_1^{2p^n} + \cdots \tag{9}$$

pourvu que $|R_n - \alpha| < \varrho$ et $|F_1^{p^n}| < r$.

Remarquons qu'on peut simplifier (9) en l'écrivant

$$R_n(z) = \alpha + F_1^{p^n} \cdot h_1[F_1^{p^n}] \tag{10}$$

où $h_1(u)$ *est une fonction holomorphe de* u *pour* $u=0$

$$h_1(u) = \alpha_1 + \alpha_2 u + \cdots \qquad (\alpha_1 \neq 0)$$

Cela étant, si la série (1) $\sum_n^\infty a_n R_n(z)$ converge en z_0 intérieur à Δ_α, on a

$$\lim_{n=\infty} a_n R_n(z_0) = 0, \quad \text{donc} \quad \lim a_n \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim a_n = 0.$$

Delà il suit que $\sum_0^\infty a_n F_1^{p^n}$ converge absolument en z_0 puisque $|F_1| < 1$ et par suite $|F_1^{p^n}| < |F_1|^n$. De même $\sum_0^\infty a_n F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]$ converge absolument puisque $h_1[F_1^{p^n}]$ ayant pour limite α_1 reste borné quelque soit n. Il résulte alors de (10) que $\sum_0^\infty a_n \alpha$, différence des séries $\Sigma a_n R_n$ et $\Sigma a_n F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]$, convergentes en z_0, est convergente.

La convergence de Σa_n *nécessaire pour la convergence de* $\Sigma a_n R_n$ *en un point de* Δ_α *est suffisante pour entraîner la convergence uniforme de* $\Sigma a_n R_n$ *dans tout domaine* Δ *fermé, intérieur à* Δ_α. En effet, dans ce domaine, $|F_1| < M < 1$. Donc, dès que n est assez grand $|h_1[F_1^{p^n}]| < M_1$ quelque soit z dans Δ. La convergence de Σa_n entraîne la convergence absolue et uniforme de $\Sigma a_n F_1^{p^n}$ dans Δ, puisque $|F_1| < M < 1$ et $p \geqq 2$ entraîne $|F_1^{p^n}| < M^n$ et permet de majorer $\Sigma a_n F_1^{p^n}$ par $\Sigma |a_n| M^n$ qui converge et pareillement, de majorer $\Sigma a_n F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]$ par $\Sigma |a_n| . M^n . M_1$ qui converge.

La série $\sum_0^\infty a_n R_n(z) = \alpha \sum_0^\infty a_n + \sum_0^\infty a_n F_1^{p^n} . h_1[F_1^{p^n}]$ converge uniformément dans Δ et *définit dans* Δ_α *une fonction de* z, *holomorphe en tout point non antécédent de* $l'\infty$.

Il en est ici comme dans le cas du multiplicateur non nul. *Si* $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \infty$, *la convergence en un point du domaine* Δ_α *entraîne la convergence uniforme dans tout le domaine* Δ_α *et la condition nécessaire et suffisante est que* $\sum_0^\infty a_n$ *soit convergente.*

5. Il en est autrement si $\alpha = 0$. Un exemple simple le montre à priori. Prenons $R(z) = z^2$. Alors $\alpha = 0$ et $R_n(z) = z^{2^n}$. Ici Δ_0 se confond avec le cercle $|z| < 1$ tandis que le domaine de convergence de la série entière $\sum_0^\infty a_n z^{2^n}$ est un cercle $|z| < \varrho$ *qui peut n'être qu'une partie du cercle* $|z| < 1$, *lorsque* $\varrho < 1$. Si l'on prend, par exemple, $a_n = 2^{2^n}$ on aura $\varrho = \frac{1}{2}$ et la série $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ ne convergera que dans une partie $|z| < \frac{1}{2}$ du domaine Δ_0. Cet exemple sert d'ailleurs de guide pour le cas général où $\alpha = 0$. Alors

$$R(z) = A_p z^p + \cdots \qquad A_p \neq 0 \qquad p \geq 2.$$

F_1 étant la fonction de Böttcher, et φ_1 son inverse, on aura comme au n° 4

$$(11) \qquad R_n(z) = \alpha_1 F_1^{p^n} + \alpha_2 F_1^{2p^n} + \cdots = \varphi_1[F_1^{p^n}] = F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]$$

$$h_1(u) = \alpha_1 + \alpha_2 u + \cdots \qquad \alpha_1 \neq 0, \qquad h_1 \text{ holomorphe dans } |u| < r.$$

A cause de $F_1[R_n(z)] = [F_1(z)]^{p^n}$, les zéros de F_1 sont les antécédents de l'origine.

En un point antécédent de l'origine, tous les R_n sont nuls à partir d'un certain rang, la série $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ se réduit à un nombre limité de termes.

Soit z_0 un point, non antécédent de 0, où la série (1) converge. En ce point $F_1 \neq 0$ et $|F_1| < 1$. On a $\sum_0^\infty a_n R_n(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]$ où, au 2^e^ membre la valeur de F_1 est prise en z_0.

Si n devient infini $F_1^{p^n}$ tend vers zéro et $h_1[F_1^{p^n}]$ *tend vers* $\alpha_1 \neq 0$. La convergence en z_0 de la série (1) entraîne donc $\lim\limits_{n=\infty} a_n F_1^{p^n} = 0$. La *série-image*, que nous prendrons ici égale à

$$\lambda_1(\mathfrak{z}) = \sum_0^\infty a_n \mathfrak{z}^{p^n},$$

a donc un rayon de convergence $\varrho_1 \geq |F_1(z_0)|$. Cela étant, reprenons la relation

$$(12) \qquad \sum_0^\infty a_n R_n(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]$$

(F_1 étant mis pour abréger au lieu de $F_1(z)$).

La série du 2^e membre converge uniformément et absolument dans tout domaine $\varDelta$ *intérieur* à l'ensemble défini dans $\varDelta_0$ par l'inégalité $|F_1(z)| \leq |F_1(z_0)|$, puisque, dans ce domaine $\varDelta$, $h_1[F_1^{p^n}]$ tend uniformément vers α_1, et puisque, dans ce domaine $\varDelta$, $\sum\limits_0^\infty a_n F_1^{p^n}$ converge uniformément et absolument. Il en est donc de même de la série (1) $\sum\limits_0^\infty a_n R_n(z)$. *La convergence de cette série (1) en z_0, non antécédent de 0, entraîne la convergence absolue et uniforme à l'intérieur de l'ensemble défini dans $\varDelta_0$ par $|F_1(z)| \leq |F_1(z_0)|$.* C'est une propriété qui rapproche (1) des séries entières, les domaines $|F_1(z)| < \varrho_1$ remplacant les domaines circulaires $|z| < \varrho$ des séries entières.

De ce qui précède, résulte très aisément que le *domaine de convergence de la série (1) à l'intérieur de $\varDelta_0$ sera défini par une inégalité de la forme $|F_1(z)| < \varrho_1$, ϱ_1 étant le rayon de convergence de la série image $\sum\limits_0^\infty a_n z^{p^n}$, lorsque ce rayon ϱ_1 sera* < 1. Si le rayon ϱ_1 est ≥ 1, il est clair que $|F_1|$ étant < 1 en tout point intérieur à $\varDelta_0$, la série $\sum\limits_0^\infty a_n F_1^{p^n}$ converge absolument en tout point intérieur à $\varDelta_\alpha$, et il en sera de même de $\Sigma a_n F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]$ et de $\Sigma a_n R_n(z)$, la convergence étant alors uniforme dans tout domaine fermé intérieur à $\varDelta_0$. (Si $\varrho_1 = 0$ la série (1) ne converge qu'aux points antécédents de 0.) Dans tous les cas, la convergence de (1) $\Sigma a_n R_n(z)$ sera *uniforme* dans tout domaine intérieur au domaine de convergence de cette série (1). La somme de la série est donc *holomorphe en tout point intérieur au domaine $|F_1(z)| < \varrho_1$ ou 1 selon que ϱ_1 est $<$ ou ≥ 1*, exception faite pour les points qui sont des antécédents du point à l'∞, dans le cas où ces points appartiennent au domaine de convergence de la série (1) dans $\varDelta_0$. Ces points sont alors des *pôles* pour la somme de la série. A ce sujet on peut distinguer 2 cas 1°) si $F_1(\infty) \neq 0$ il est clair que les valeurs de F_1 aux points antécédents successifs de l'∞ vont en tendant vers *un* quand l'ordre d'antécédence s'élève. A partir d'un certain ordre ils sortiront du domaine $|F_1| < \varrho_1$ *si* $\varrho_1 < 1$ et il n'y en aura qu'un nombre fini dans ce domaine. 2°) Si $F_1(\infty) = 0$ tous les antécédents de l'∞ sont des zéros de F_1 (alors l'∞ est antécédent de 0) et par suite ils sont tous intérieurs au domaine $|F_1| < \varrho_1$. Il y a alors une infinité de pôles, pour la somme de (1), dans le domaine de convergence. La même conclusion s'applique lorsque $\varrho_1 \geq 1$ car il y a une infinité d'antécédents de l'∞ dans

$\varDelta_0$ (sauf le cas où R est un polynome) et tous ces points sont pôles de (1). Nous reviendrons plus loin sur la forme du domaine $|F_1(z)| < \varrho_1$ lorsque $\varrho_1 < 1$.

6. Il n'y a pas lieu de s'étonner de la différence qui se manifeste pour $\alpha = 0$ entre le cas où le multiplicateur est nul et celui où il ne l'est pas. Si le multiplicateur n'est pas nul, l'expression asymptotique de $R_n(z)$ prouve que le rapport $\frac{R_n(z_1)}{R_n(z_2)}$, z_1 et z_2 étant 2 points de $\varDelta_0$ non antécédents de l'origine, aura pour limite $\frac{F(z_1)}{F(z_2)}$ *nombre fini et* $\neq 0$ et par suite le terme général de la série $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ *a même ordre de grandeur en* z_1 *et en* z_2, c'est-à-dire *en tous les points de* $\varDelta_0$ (antécédents de l'origine mis à part).

Si le multiplicateur est nul, l'expression asymptotique (11) prouve qu'en 2 points z_1 et z_2, non antécédents de l'origine, le rapport $\frac{R_n(z_1)}{R_n(z_2)}$ a même limite que $\left[\frac{F_1(z_1)}{F_2(z_2)}\right]^{p^n}$, *cette limite étant* 0 ou ∞ *selon que* $|F_1(z_1)| < |F_1(z_2)|$ *ou* $|F_1(z_1)| > |F_1(z_2)|$. La série (1) peut alors être divergente en z_2 et convergente en z_1, si $|F_1(z_1)| < |F_1(z_2)|$, la limite précédente déterminant le caractère du domaine de convergence de la série (1) comme pour les séries entières.

7. Lorsque $\alpha = \infty$ on usera de la transformation déjà employée au nº 3. On posera $z = \frac{1}{\zeta}$, $z_1 = \frac{1}{\zeta_1}$, $z_n = \frac{1}{\zeta_n}$ et la relation $z_1 = R(z)$ deviendra $\zeta_1 = \varrho(\zeta)$ avec $\varrho(0) = 0$, $\varrho'(0) = 0$. On aura $\zeta_n = \varrho_n(\zeta)$. *Soit* $F_1(\zeta)$ *la fonction de Böttcher relative à* $\varrho(\zeta)$ et au point 0.

Si

$$\varrho(\zeta) = A_p \zeta^p + \cdots \qquad A_p \neq 0 \qquad\qquad F_1(\zeta) = \lambda_1 \zeta + \cdots \qquad \lambda_1 \neq 0$$

$$F_1[\varrho(\zeta)] = [F_1(\zeta)]^p$$

et on aura, comme au nº 5

$$\varrho_n(\zeta) = F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}] \qquad \text{avec} \qquad h_1(u) = \alpha_1 + \alpha_2 u + \cdots \qquad (\alpha_1 \neq 0),$$

$h_1(u)$ étant holomorphe dans

$$|u| \leq r_1$$

On aura ici (13) $R_n(z) = \frac{1}{\varrho_n(\zeta)} = \frac{1}{F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]} = \frac{h_2[F_1^{p^n}]}{F_1^{p^n}}$ où $h_2(u)$ est une fonction holomorphe de u, $\left[h_2 = \frac{1}{h_1}\right]$ holomorphe dans $|u| \leq r_2$ $(h_2(0) \neq 0)$.

La série (1) à étudier s'écrit ici

$$(13) \qquad \sum_0^\infty a_n R_n(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{F_1^{p^n}} h_2[F_1^{p^n}],$$

où, au 2e membre, la fonction F_1 dépend de l'argument $\zeta = \frac{1}{z}$.

Les domaines Δ_∞ et Δ'_∞ où $R_n(z)$ et $\varrho_n(\zeta)$ convergent respectivement vers ∞ et vers 0 se correspondent par $\zeta = \frac{1}{z}$. En tout point intérieur à Δ'_∞, $|F_1| < 1$ entraîne que $h_2[F_1^{p^n}]$ a une limite finie et $\neq 0$ (qui est $h_2(0)$), lorsque n devient infini. La convergence de (13) est déterminée par celle de $\sum_0^\infty \frac{a_n}{F_1^{p^n}}$. Si donc ϱ_2 est le rayon de convergence de la série-image $\lambda_2(\mathfrak{z}) = \Sigma a_n \mathfrak{z}^{-p^n}$, *le domaine de convergence de (13) sera défini par* $|F_1| > \varrho_2$.

Donc *si* $\varrho_2 \geq 1$ *la série (13) ne convergera en aucun point de* Δ'_∞ *ou de* Δ_∞ puisque $|F_1|$ étant < 1 dans Δ'_∞ ne saurait être en aucun point $> \varrho_2$ qui serait ≥ 1.

Si $\varrho_2 < 1$ *la série (13) convergera dans un domaine appartenant à* Δ'_∞ *et défini par* $|F_1| > \varrho_2$.

Désignons par $F_2(u)$ la fonction que définit l'égalité

$$F_2(u) = F_1\left(\frac{1}{u}\right).$$

Des relations

$$R(z) = \frac{1}{\varrho\left(\frac{1}{z}\right)} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{1}{z}$$

et de la relation de Böttcher

$$F_1[\varrho(\zeta)] = [F_1(\zeta)]^p$$

résulte

$$F_1\left[\varrho\left(\frac{1}{z}\right)\right] = \left[F_1\left(\frac{1}{z}\right)\right]^p$$

ou

$$F_1\left[\frac{1}{R(z)}\right] = \left[F_1\left(\frac{1}{z}\right)\right]^p,$$

donc, en définitive

$$F_2[R(z)] = [F_2(z)]^p.$$

F_2 est holomorphe au voisinage de $z=\infty$, comme F_1 l'était au voisinage de $\zeta=0$. F_2 s'annule à l'infini, mais non sa dérivée, car $F_1(0)=0$. $F'_1(0)\neq 0$. F_2 se développe autour de $z=\infty$ par

$$F_2 = \frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \cdots \qquad \lambda_1 \neq 0.$$

F_2 sera *la fonction de Böttcher relative à $R(z)$ et au point $z=\infty$. La série (1) ne convergera en certains points de Δ_∞ que si le rayon de convergence* ϱ_2 de

$$\lambda_2(\mathfrak{z}) = \sum_0^\infty a_n \cdot \mathfrak{z}^{-p^n} \quad \textit{série-image de} \quad \sum_0^\infty a_n R_n(z) \qquad \textit{est} < 1,$$

et, dans ce cas le domaine de convergence sera défini par $|F_2(z)| > \varrho_2$. Dans le cas particulier où $R(z)=z^p$ on a $R_n = z^{p^n}$, la série $\Sigma a_n R_n(z)$ se réduit à la série $\Sigma a_n z^{p^n}$, la fonction de Böttcher $F_2(z)$ est identique à $\frac{1}{z}$, la série image est $\Sigma a_n \mathfrak{z}^{-p^n}$ et le domaine de convergence de (1) dans Δ_∞ (Δ_∞ est défini par $|z|<1$) est défini par $1 > \left|\frac{1}{z}\right| > \varrho_2$ c'est-à-dire $1 < |z| < \frac{1}{\varrho_2}$.

Il va de soi que ce qui précède ne s'applique pas aux points de Δ_∞ qui sont antécédents de l'∞, car, en un tel point z_0, *tous les R_n à partir d'un certain rang sont infinis.* Les antécédents de l'∞ ne sont tous confondus à l'∞ que si $R(z)$ est un polynome et dans ce cas (1) $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ est évidemment holomorphe en tout point du domaine de convergence de la série dans Δ_∞. Hors ce cas, les antécédents de l'∞ forment un ensemble dénombrable de points isolés dont le dérivé est la frontière totale de Δ_∞.

Mais, puisque à l'infini $F_2(z)=0$, à cause de

$$F_2[R(z)] = [F_2(z)]^p,$$

F_2 sera nul aux antécédents (de tout ordre) de l'infini et seulement en ces points. Tous ces points sont donc certainement *extérieurs* à la région $1 > |F_2(z)| > \varrho_2$ où la série (1) converge et le problème examiné à la fin de n° 4 (singularité de la somme de la série (1) en un point antécédent de l'∞) ne se pose plus ici puisque la série (1) cesse en général de converger dans toute une région entourant chaque antécédent de l'∞. Dans le seul cas où $\varrho_2 = 0$, c'est-à-dire dans le cas où la série-image $\Sigma a_n z^{p^n}$ *représente une fonction entière*, la série (1) convergera en tout point de Δ_∞ sauf aux antécédents de l'∞. En chacun des points de son domaine de convergence sa somme est *holomorphe*. *Quelle est alors la singularité de cette somme en un point z_0 antécédent de l'∞?*

On peut le voir aisément par les considérations suivantes.

Reprenons, pour faciliter l'exposé, la transformation

$$\zeta = \frac{1}{z}, \quad \zeta_1 = \frac{1}{z_1}, \quad \text{si} \quad z_1 = R(z), \quad \zeta_1 = \varrho(\zeta) \quad \text{et} \quad \varrho(\zeta) = \frac{1}{R\left(\frac{1}{\zeta}\right)}.$$

Si z_0 est antécédent d'ordre k de l'∞, son correspondant ζ_0 sera antécédent d'ordre k de 0

$$[\varrho_k(\zeta_0) = 0, \qquad \varrho_{k-1}(\zeta_0) \neq 0].$$

On aura, en vertu de

$$R_n(z) = \frac{1}{\varrho_n(\zeta)}$$

$$\sum_0^\infty a_n R_n(z) = \sum_0^{k-1} a_n R_n + \sum_{l=0}^\infty \frac{a_{k+l}}{\varrho_{k+l}(\zeta)}.$$

La 1$^{\text{ère}}$ somme du 2$^{\text{e}}$ membre est holomorphe en z_0, occupons-nous de la 2$^{\text{e}}$.

On a

$$\varrho_{k+l}(\zeta) = \varrho_l[\varrho_k(\zeta)].$$

Lorsque ζ décrit un certain voisinage de ζ_0, $\varrho_k(\zeta)$ décrit dans son plan le voisinage de 0. Or on sait que

$$\varrho_n(\zeta) = F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}] \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varrho_n(\zeta)} = \frac{h_2[F_1^{p^n}]}{F_1^{p^n}} \qquad \text{(formule (13) du n}^\circ\text{ 7)}$$

à condition que $F_1^{p^n}$ soit assez petit, et alors h_2 est holomorphe $(h_2(0) \neq 0)$. Ici, puisque $\varrho_k(\zeta)$ est voisin de 0, $F_1(\varrho_k)$ l'est aussi et on a

$$\frac{1}{\varrho_{k+l}(\zeta)} = \frac{1}{\varrho_l(\varrho_k(\zeta))} = \frac{h_2\{[F_1(\varrho_k(\zeta))]^{p^l}\}}{[F_1(\varrho_k(\zeta))]^{p^l}}.$$

Pour abréger nous écrirons ϱ_k au lieu de $\varrho_k(\zeta)$. Or, on a vu que $h_2(u) = \beta_1 + u h_3(u)$, $[\beta_1 \neq 0]$, h_3 étant holomorphe pour $u = 0$. Il vient alors

$$\frac{1}{\varrho_{k+l}(\zeta)} = \frac{\beta_1 + [F_1(\varrho_k)]^{\nu^l} h_3 \{[F_1(\varrho_k)]^{\nu^l}\}}{[F_1(\varrho_k)]^{\nu^l}}.$$

La série $\sum_0^\infty \frac{a_{k+l}}{\varrho_{k+l}(\zeta)}$ se décompose en deux:

1°. La série $\sum_{l=0}^\infty a_{k+l} h_3\{[F_1(\varrho_k)]^{\nu^l}\}$ qui est absolument et uniformément convergente au voisinage de ζ_0 et par conséquent définit une fonction holomorphe en ζ_0.

En effet, au voisinage de ζ_0, ϱ_k et $F_1(\varrho_k)$ sont bornés supérieurement par un nombre ε (indépendant de l) qui tend vers zéro quand le voisinage de ζ_0 envisagé tend vers ζ_0. $h_3\{[F_1(\varrho_k)]^{\nu^l}\}$ est, dans ce voisinage de ζ_0, borné supérieurement par un nombre indépendant de l et la série précédente converge absolument et uniformément puisque $\sum_{l=0}^\infty a_{k+l}$ qui est la valeur de $\sum_{n=k}^\infty a_n z^{\nu^n}$ pour $z = 1$ converge absolument par hypothèse ($\varrho_1 = \infty$).

2°. La série $\beta_1 \sum_{l=0}^\infty \frac{a_{k+l}}{[F_1(\varrho_k)]^{\nu^l}}$. (Elle converge absolument puisque $\Sigma a_{k+l} z^{\nu^{k+l}}$ et $\Sigma a_{k+l} z^{\nu^l}$ sont des fonctions entières.) Les a_{k+l} n'étant pas tous nuls à partir d'un certain rang, cette série, envisagée comme fonction de $u = F_1(\varrho_k)$ *admet un point singulier essentiel en* $u = 0$. Or $\varrho_k(\zeta)$ est holomorphe en ζ_0 et il en est de même de $F_1[\varrho_k]$ au point $\varrho_k = 0$. Donc $F_1[\varrho_k]$ est holomorphe en ζ_0 et s'y annule. Donc enfin la série précédente admet ζ_0 *pour point singulier essentiel*. Car si ζ_0 était point ordinaire ou pôle pour cette série envisagée comme fonction de ζ, la relation $u = F_1[\varrho_k(\zeta)]$ définissant ζ comme fonction holomorphe ou algebroïde de u autour de $u = 0$, la série en question admettrait $u = 0$ pour point ordinaire, pôle, ou point critique algébrique; ce qui n'est pas.

La conclusion est donc qu'un point z_0, antécédent de l'∞ est un *point singulier essentiel* de la fonction représentée par la série $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ et la *partie singulière* de cette fonction a pour développement, autour de $z = z_0$, la série

$$\beta_1 \sum_{l=0}^\infty \frac{a_{k+l}}{[F_1(\varrho_k)]^{\nu^l}}.$$

On peut dire encore, puisque

$$F_1\left[\varrho_k\left(\frac{1}{z}\right)\right] = F_1\left[\frac{1}{R_k(z)}\right] = F_2[R_k(z)],$$

que la partie singulière est

$$\beta_1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{k+l}}{[F_2[R_k(z)]]^{p^l}} \quad F_2 \text{ étant la fonction de Böttcher du point à l'infini.}$$

Ici encore apparait une différence avec le cas du point attractif à l'infini, de multiplicateur $\neq 0$. On avait trouvé dans ce cas au n° 3, que les antécédents de l'∞ étaient simplement des pôles pour la somme de la série (1).

7 *bis*. Un raisonnement analogue au précédent nous permet d'étudier les *singularités de la somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(z)$, *sur la frontière de convergence* $|F_1| = \varrho_1$ *pour* $\alpha = 0$ *et* $\varrho_1 < 1$.

Reprenons alors le développement (11) du n° 5

$$R_n(z) = \alpha_1 F_1^{p^n} + \alpha_2 F_1^{2p^n} + \cdots = F_1^{p^n} h_1[F_1^{p^n}]$$

où

$$h_1(u) = \alpha_1 + \alpha_2 u + \cdots, \quad (\alpha_1 \neq 0), \text{ est holomorphe pour } |u| < r.$$

Ce développement est valable dans tout domaine Δ intérieur à Δ_α dès que n est assez grand.

On peut écrire

$$R_n(z) = \alpha_1 F_1^{p^n} + F_1^{2p^n}[\alpha_2 + \varepsilon_n],$$

ε_n (holomorphe en F_1) tendant vers zéro uniformément dans Δ lorsque n devient infini. Par hypothèse, la série associée $\lambda_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{p^n}$ admet $\varrho_1 < 1$ pour rayon de convergence, et d'autre part, c'est un résultat classique depuis Weierstrass que la fonction $\lambda_1(\zeta)$ admet le cercle $|\zeta| = \varrho_1$ pour *ligne de points singuliers essentiels* ou *coupure de Weierstrass*. Écrivant la série

$$\sum_0^{\infty} a_n R_n(z) = \alpha_1 \sum_0^{\infty} a_n F_1^{p^n} + \sum_0^{\infty} a_n F_1^{2p^n} \quad [\alpha_2 + \varepsilon_n]$$

nous observons d'abord que la série $\Sigma a_n F_1^{2p^n}$ converge absolument dans le domaine $|F_1|^2 < \varrho_1$ c'est-à-dire $|F_1| < \sqrt{\varrho_1}$ et puisque $\varrho_1 < 1$ on a $\sqrt{\varrho_1} > \varrho_1$. Donc la fonction de F_1 $\sum_0^{\infty} a_n F_1^{2p^n}$ est holomorphe dans le domaine $|F_1| < \sqrt{\varrho_1}$ qui contient le domaine de convergence de $\Sigma a_n F_1^{p^n}$. Il en est de même (ε_n tendant uniformément vers zéro dans tout Δ) pour la série $\Sigma a_n F_1^{2p^n} \varepsilon_n$, elle converge absolument dans $|F_1| < \sqrt{\varrho_1}$ et uniformément dans $|F_1| < \sqrt{\varrho_1} - \varepsilon$; sa somme est donc holomorphe en F_1 dans $|F_1| < \sqrt{\varrho_1}$.

Ceci posé considérons un point quelconque z_0 d'une courbe $|F_1| = \varrho_1$ qui délimite la région de convergence de $\Sigma a_n R_n(z)$. En ce point ($F_1(z_0)$ étant $\neq 0$) $F_1(z)$ est holomorphe en z, par suite la somme de la série $\sum_0^\infty a_n F_1^{2p^n} (\alpha_2 + \varepsilon_n)$ est une fonction holomorphe de z puisqu'elle converge absolument et uniformément au voisinage de z_0. Au contraire, la somme de la série $\alpha_1 \sum_0^\infty a_n F_1^{p^n}$ envisagée comme fonction de F_1 présente un point singulier essentiel en $\mathfrak{z}_0 = F_1(z_0)$ (comme en tout point où $|F_1(z)| = \varrho_1$); par suite elle présente aussi un point singulier essentiel en z_0 *lorsqu'on l'envisage comme fonction de z;* tout point z_0 de $|F_1(z)| = \varrho_1$ est donc point singulier essentiel pour la somme de la série $\alpha_1 \sum_0^\infty a_n F_1^{p^n}$. Il en résulte, que *tout point z_0 de $|F_1(z)| = \varrho_1$ est point singulier essentiel pour la somme de la série $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$, la partie singulière de cette somme étant précisément la somme de la série $\alpha_1 \sum_0^\infty a_n F_1^{p^n}$.* Toute ligne $|F_1| = \varrho_1$ limitant ici le domaine de convergence de (1) $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ est donc une coupure de Weierstrass pour la somme de la série (1).

Un raisonnement analogue conduit au même résultat *lorsque $\alpha = \infty$, toute ligne $|F_2| = \varrho_2 < 1$ délimitant le domaine de convergence de (1) $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ est une coupure de Weierstrass pour la somme de cette série.*

8. Il n'est pas sans intéret d'examiner, dans les cas $\alpha = 0$ ou ∞, le multiplicateur étant nul, de quelle nature géométrique est le domaine de convergence de la série (1) dans $\varDelta_\alpha$, lorsque ce domaine de convergence n'est pas $\varDelta_\alpha$ tout entier. Cela revient, comme on l'a vu précédemment à l'étude du domaine $|F_1(z)| < \varrho_1$ lorsque $\varrho_1 < 1$, dans le cas où $\alpha = 0$, F_1 étant la fonction de Böttcher relative à $\alpha = 0$, et à celle du domaine $|F_2(z)| > \varrho_2$ lorsque $\varrho_2 < 1$ dans le cas où $\alpha = \infty$, ϱ_1 ou ϱ_2 étant dans l'un ou l'autre cas le rayon de convergence de la

série image $\sum_{0}^{\infty} a_n \mathfrak{z}^{p^n}$ ou $\sum_{0}^{\infty} a_n \mathfrak{z}^{-p^n}$, et $F_2(z)$ désignant la fonction de Böttcher pour $\alpha = \infty$.

Envisageons d'abord le cas $\alpha = 0$.

La fonction $F_1(z)$ étant définie *au voisinage de* o par son développement de Taylor que l'on détermine par la méthode des coefficients indéterminés de manière à vérifier l'équation $F_1[R(z)] = [F_1(z)]^p$, et ce développement convergeant dans un certain cercle $|z| < r$, on pourra toujours, connaissant $\varrho_1 < 1$, déterminer un entier q tel que $\varrho_1^{p^q}$ soit assez petit, pour être $< r$ d'une part, et d'autre part pour que le domaine $|F_1(z)| < \varrho_1^{p^q}$ *soit une aire simple à un seul contour analytique entourant l'origine:* cela résulte aisément du fait que $F_1(z) = \lambda_1 z + \cdots$ avec $\lambda_1 \neq 0$. Nous appellons C_q la courbe limitant cette aire et (C_q) l'aire elle-même. A partir de cette aire (C_q) nous allons, d'une part engendrer le domaine $\varDelta_0$ où les R_n convergent vers $\alpha = 0$ et d'autre part engendrer le domaine $|F_1| \leq \varrho_1$ cherché.

Pour engendrer, à partir de (C_q), le domaine *immédiat* δ_0 de l'origine, c'est-à-dire l'aire contenant o, *d'un seul tenant avec* o, dont tous les points intérieurs z ont des conséquents $R_n(z)$ qui tendent vers o, on emploie le procédé exposé au n° 32 de mon »Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles» (Journal de Mathématiques, 1918). z décrivant (C_q) la branche de $R_{-1}(z)$ nulle en o décrira une aire (C_{q-1}) contenant (C_q) à son intérieur. [On peut en effet supposer C_q intérieure à un cercle de centre o assez petit pour que les courbes $|F_1| = \lambda$ intérieures à ce cercle soient des courbes analytiques simples entourant l'origine, s'enveloppant mutuellement et tendant vers o quand λ tend vers zéro. Il est clair alors que la conséquente C_{q+1} de C_q est intérieure à C_q puisqu'elle correspond à la valeur $\varrho_1^{p^{q+1}} < \varrho_1^{p^q}$ du paramètre λ. Donc (C_q) contient (C_{q+1}) et par suite (C_{q-1}) contiendra (C_q).] z décrivant (C_{q-1}) la branche de $R_{-1}(z)$ nulle en o décrira une aire (C_{q-2}), à un ou plusieurs contours, contenant (C_{q-1}), on continuera de proche en proche. A la $q^{\text{ième}}$ opération on obtiendra une aire (C_0) limitée par un ou plusieurs contours analytiques, contenant $(C_1), (C_2), \ldots (C_q)$. Il est évident, que dans le domaine (C_q) on a $|F_1| < \varrho_1^{p^q}$, qu'on aura dans (C_{q-1}) $|F_1| < \varrho_1^{p^{q-1}} \ldots$ et dans (C_0) $|F_1| < \varrho_1$, les contours de (C_0) étant tels que, sur eux, $|F_1|$ soit $= \varrho_1$. Si on continue à prendre les antécédents successifs $(C_{-1}), (C_{-2}), \ldots$ de (C_0) par la branche de $R_{-1}(z)$ nulle en o on aura une aire (C_{-n}) qui tend vers δ_0 quand n devient infini. *Dans δ_0 nous avons donc déjà trouvé une aire (C_0) dans laquelle $|F_1| < \varrho_1$, l'inégalité devenant égalité sur les* *contours de l'aire.* Pour déterminer, à partir de (C_0), le domaine $|F_1| < \varrho_1$ en totalité, servons nous de la remarque suivante.

Soient z_1 et z_2 2 points de $\varDelta_0$ où F_1 ait la même valeur < 1. Les conséquents de z_1 et de z_2 tendant vers zéro il existera certainement un entier positif n tel que $R_n(z_1)$ *et* $R_n(z_2)$ *soient tous deux intérieurs à* (C_q) *ou sur sa frontière.* Or, dans (C_q) les courbes $|F| = \mu$ sont analytiques, fermées, s'enveloppent mutuellement et enveloppent l'origine. F_1 aura même valeur en $R_n(z_1)$ et $R_n(z_2)$ puisqu'elle a même valeur en z_1 et z_2. Or, dans (C_q) F_1 ne peut prendre chaque valeur qu'en un seul point. Donc $R_n(z_1) = R_n(z_2)$. Il résulte de là que, si l'on connait une aire définie par $|F_1| < \varrho_1$ on pourra en déduire toutes les autres par le procédé suivant. Imaginons que z décrive (C_0) et considérons toutes les fonctions algébriques z' de z définies par les équations

$$R_n(z) = R_n(z') \qquad n = 1, 2, \ldots \infty,$$

quand, dans chaque équation on écarte la solution $z' = z$; chacune de ces équations définit une fonction $z'_n(z)$ et le point z'_n décrit une ou plusieurs aires (C'_n) quand z décrit (C_0). (Il peut arriver que certaines de ces aires (C'_n) coïncident avec (C_0), il peut arriver qu'elles coïncident toutes avec (C_0).) Chacune des aires (C'_n) sera, comme (C_0), limitée par un nombre fini de contours analytiques. *Le domaine* $|F_1| < \varrho_1$ *sera composé de l'ensemble des aires* (C_0), (C_1'), ... (C'_n), ... Lorsque z est en o z'_n vient en $z'_n(0)$ qui satisfait à $R_n(z'_n(0)) = 0$, $z'_n(0)$ est un antécédent de o. *Chacune des aires* (C'_n) *entoure un antécédent d'ordre* n *de l'origine.* En tous ces antécédents F_1 est nulle.

Ces préliminaires étant posés on va pouvoir se rendre compte des complications qui peuvent surgir dans la constitution du domaine $|F_1| < \varrho_1$. Distinguons plusieurs cas.

1°. Le point o a tous ses antécédents confondus avec lui-même.

2°. Le point o ne coïncide pas avec tous ses antécédents: ce cas se subdivise en 2 autres

- a) Dans le domaine *immédiat* δ_0 du point o, o n'a d'autres antécédents que lui-même,
- b) Dans le domaine *immédiat* δ_0, o a d'autres antécédents que lui-même.

1°. *Si tous les antécédents de* o *sont confondus en* o, il est clair que, par

$$\zeta = \frac{1}{z}, \ \zeta_1 = \frac{1}{z_1},$$

la relation $z_1 = R(z)$ deviendra une relation $\zeta_1 = \varrho(\zeta)$, ϱ étant un *polynome*. On devra donc avoir

$$R(z) = \frac{1}{\varrho\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^p}{\mu_0 + \mu_1 z + \cdots + \mu_k z^k} \qquad \mu_0 \neq 0 \qquad k \leq p$$

$R(z)$ sera du degré p. On construira d'abord, dans le domaine $\varDelta_0$ qui est ici confondu avec le domaine immédiat δ_0 où les R_n convergent vers 0, le domaine (C_0), entourant 0, où $|F_1| \leq \varrho_1$. Si δ_0 ne contient pas de point critique de $R_{-1}(z)$ autre que $z = 0$ (C_0) sera simplement connexe. Si l'une des aires $(C_1), (C_2), \ldots (C_{q-1})$ contient un point critique de $R_{-1}(z)$ distinct de 0, alors (C_0) aura plusieurs contours analytiques. En considérant l'équation $R_n(z) = R_n(z')$, débarrassée de $z = z'$, on voit que, lorsque z décrit (C_0), $R_n(z)$ décrit (C_n) intérieure à (C_0) et z' décrit une antécédente de (C_n) d'ordre n. Or, *toutes les antécédentes d'ordre n de (C_n) sont confondues avec C_0;* puisque toutes les racines z' de l'équation $R_n(z) = R_n(z')$, distinctes de z, se permutent autour de 0. Ici donc, toutes les aires (C'_n) sont identiques à (C_0). *Le domaine total $|F_1| \leq \varrho$ est ici identique à (C_0), il se limite par une ou plusieurs courbes analytiques en nombre fini.*

L'exemple le plus simple de ce fait est fourni par $R(z) = z^p$; le domaine $|F_1| < \varrho_1 < 1$ est alors l'intérieur du cercle $|z| \leq \varrho_1$.

2°. *Il y a des antécédents de* 0 *distincts de* 0. L'ensemble des antécédents successifs a pour dérivé la frontière totale du domaine $\varDelta_0$. Dans ce cas le domaine $\varDelta_0$ peut n'être pas confondu avec le domaine immédiat δ_0. Outre δ_0, $\varDelta_0$ peut comprendre une infinité d'aires qui sont les antécédentes successives, distinctes de δ_0, de l'aire δ_0.

Nous partons toujours de l'aire (C_0), dans δ_0, où $|F_1| < \varrho_1$. Il y a 2 cas:

a) Dans δ_0, 0 *n'a pas d'autre antécédent que lui-même.* Ici $\varDelta_0$ est distinct de δ_0. On trouvera un exemple de cette circonstance dans mon »*Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles*», n° 66 et 67, 68. Il est visible que ce qu'on a dit au 1° s'applique sans changement lorsqu'on se borne à la partie du domaine $|F_1| < \varrho_1$ *qui est intérieure à δ_0*. Les équations $R_n(z) = R_n(z')$ pour $n = 1, 2, \ldots \infty$ ne définiront que des aires intérieures à δ_0 *confondues avec* (C_0). La partie de $|F_1| < \varrho_1$ intérieure à δ_0 se confond donc avec (C_0). C'est une aire limitée par une ou plusieures courbes analytiques. Envisageons successivement les divers domaines antécédents de $\delta_0, \delta_0^{-1}, \delta_0^{-2}, \ldots \delta_0^{-n}, \ldots$. Dans chacun des domaines δ_0^{-n}, l'équation $R_n(z) = R_n(z')$ définira, lorsque z décrira (C_0), une aire décrite par le point z' et dans laquelle on aura $|F_1| < \varrho_1$; chacune de ces aires entoure un antécédent d'ordre n de o, et est limitée par un nombre fini de courbes analytiques. L'ensemble de ces aires constitue le domaine (C'_n). Le nombre des domaines δ_0^{-n} *devient infini avec* n, le nombre des aires précédentes, dont l'ensemble forme (C'_n) devient donc infini avec n. *Le domaine total* $|F_1| < \varrho_1$ *se compose donc ici d'une infinité d'aires dont chacune est limitée par un nombre fini de contours analytiques. Dans* δ_0 *ce domaine* $|F_1| < \varrho_1$ *ne comprend qu'une de ces aires* (C_0).

b) Dans δ_0, o *a d'autres antécédents que lui-même.* C'est le cas qu'on peut appeler général. Il peut arriver ici que $\varDelta_0$ soit ou ne soit pas confondu avec δ_0. Examinons d'abord δ_0.

L'ensemble A des antécédents de o *situés dans* δ_0 est alors un ensemble infini dénombrable dont le dérivé est la frontière de δ_0.

Nous partirons toujours de (C_0), aire intérieure à δ_0, contenant o, limitée par un nombre fini de contours analytiques sur lesquels $|F_1| = \varrho_1$.

(C_0) ne contient qu'un nombre limité de points de l'ensemble A, et ces points sont *intérieurs* à (C_0). Considérons l'ensemble des points de A situés hors de (C_0) ce sont des antécédents de o, considérons celui dont l'ordre d'antécédence est minimum; soit k son ordre et désignons par o_{-k} ce point. L'équation $R_k(z) = R_k(z')$ définira, lorsque z décrira (C_0), une aire qui sera décrite par la détermination z' qui vient en o_{-k} quand z vient en o; cette aire entourera o_{-k} et sera limitée par un nombre fini de contours analytiques. Appelons la (Γ_1). Dans l'aire (Γ_1) on aura $|F_1| < \varrho_1$ et sur ses contours $|F_1| = \varrho_1$. (C_0) et (Γ_1) étant intérieures à δ_0 ne contiennent qu'un nombre fini de points de A. On choisira parmi les points de A extérieurs à (C_0) et (Γ_1) celui dont l'ordre d'antécédence k' est le plus petit $(k' \geq k)$ soit $o_{-k'}$. Autour de $o_{-k'}$ on définira, grâce à l'équation $R_{k'}(z) = R_{k'}(z')$ une aire (Γ_2) qui sera décrite par z' lorsque z décrira (C_0); (Γ_2) entourera $o_{-k'}$, en ses points intérieurs $|F_1| < \varrho_1$ et sur ses contours $|F_1| = \varrho_1$. (Γ_2) n'a qu'un nombre fini de contours analytiques. On continuera de proche en proche. Les aires (C_0), (Γ_1), ... (Γ_n) intérieures à δ_0, définies successivement, ne contenant qu'un nombre limité de points de A, on choisira parmi les points de A extérieurs à toutes ces aires celui dont l'ordre d'antécédence λ est minimum. Soit $o_{-\lambda}$ ce point. L'équation $R_\lambda(z) = R_\lambda(z')$ définira un point $z'(z)$ venant en $o_{-\lambda}$ quand z est en o. Lorsque z décrira (C_0), le point z' décrira une aire (Γ_{n+1}), intérieure à δ_0, extérieure à (C_0), (Γ_1), ... (Γ_n), dans laquelle $|F_1| < \varrho_1$; cette aire est limitée par un nombre fini de contours sur lesquels $|F_1| = \varrho_1$. Les aires (Γ_n) successives vont en s'accumulant sur la frontière de δ_0. On trouvera ainsi que *le domaine* $|F_1| < \varrho_1$ *comprend dans* δ_0 *une infinité d'aires qui sont les aires* (C_0), (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_n), ... *L'ensemble de ces aires s'appellera* (γ_0).

Considérons maintenant un des domaines δ_0^{-n}, *dans le cas où* δ_0 *ne coïncide pas avec* Δ_0, et prenons l'équation $R_n(z) = R_n(z')$. Lorsque z décrit l'une des aires intérieures à δ_0 dont est formé (γ_0), le point z', intérieur au domaine δ_0^{-n} considéré, que définit l'équation précédente, décrit une aire intérieure à δ_0^{-n}, limitée par un nombre fini de courbes analytiques. A l'ensemble (γ_0) correspondra ainsi, dans le domaine δ_0^{-n} considéré, un ensemble d'une infinité d'aires à l'intérieur desquelles $|F_1| < \varrho_1$ et sur les contours desquelles $|F_1| = \varrho_1$. On appellera (γ_n) l'ensemble formé par toutes ces aires dans la totalité des domaines δ_0^{-n}; (γ_n) sera décrit par z' lorsque z décrit (γ_0), z' étant lié à z par $R_n(z) = R_n(z')$; (γ_n) *se compose comme* (γ_0) *d'une infinité d'aires dont chacune est limitée par un nombre fini de courbes analytiques.* Les aires de (γ_n) vont en s'accumulant sur la frontière de δ_0^{-n}.

Le domaine $|F_1| < \varrho_1$ *se compose ici d'une infinité d'aires, à savoir les* (γ_0), *les* (γ_1), ... *les* (γ_n), ... *Les* (γ_n) *comprenant la partie intérieure à* δ_0^{-n} *du domaine* $|F_1| < \varrho_1$. *Dans chacune des régions dont se compose* δ_0^{-n}, (γ_n) *comprend une infinité d'aires qui vont en s'accumulant vers la frontière de la région; chacune de ces aires est limitée par un nombre fini de courbes analytiques sur chacune desquelles* $|F_1| = \varrho_1$, *dans chacune de ces aires se trouve un nombre fini d'antécédents distincts de l'origine.*

9. On voit par l'analyse précédente, combien peut être compliquée la structure du domaine de convergence de la série $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$, dans la région Δ_0 où les $R_n(z)$ convergent vers o, point double attractif à multiplicateur nul. Rappelons ici que ce domaine est défini par $|F_1| < \varrho_1$, ϱ_1 étant le rayon de convergence de la série $\sum_0^\infty a_n z^{p^n}$ et F_1 la fonction de Böttcher du point o.

10. En ce qui concerne le domaine de convergence de $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ dans Δ_∞, lorsque ∞ est un point double attractif à multiplicateur nul, nous n'aurons maintenant qu'un mot à dire. F_2 étant la fonction de Böttcher de l'∞

$$F_2 = \frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \cdots \qquad \lambda_1 \neq 0$$

telle que

$$F_2[R(z)] = [F_2(z)]^p,$$

et ϱ_2 étant le rayon de convergence < 1 de la série $\sum_0^\infty a_n z^{-p^n}$, le domaine cherché est défini par $1 > |F_2| > \varrho_2$. *On l'obtiendra donc en retranchant du domaine* Δ_∞ *l'ensemble des aires qui constituent le domaine* $|F_2| \leq \varrho_2$. L'ensemble de ces aires a été longuement étudié au n° 8, *toutes les conclusions s'appliquant ici en remplaçant partout l'origine par l'*∞ *et* F_1 *par* F_2.

§ III.

α est un point double indifférent à multiplicateur $s = R'(\alpha) = \pm 1$ $[R''(\alpha) \neq 0]$.

11. Supposons d'abord *α à distance finie* et utilisons l'expression asymptotique

$$R_n(z) = \alpha + \frac{1}{na + \beta Ln + A(z) + \varepsilon_n(z)} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_n| < \frac{B}{n^{1-\eta}}$$

valable dans tout Δ intérieur à Δ_α.

1°. $\alpha \neq 0$. Supposons que $\Sigma a_n R_n(z_0)$ converge au point z_0 intérieur à Δ_α. Alors $a_n \to 0$ puisque $R_n(z_0) \to \alpha$. On a, visiblement,

$$R_n(z_0) = \alpha + \frac{1}{na} + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)$$

$$o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right) \text{ exprime que pour } n \text{ assez grand on a } o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right) < \frac{\varepsilon'}{n^{2-\varepsilon}},$$

ε' arbitrairement petit dépendant de ε qui est lui-même arbitrairement petit. Il est clair que $\Sigma a_n o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)$ converge absolument, donc la convergence de $\Sigma a_n R_n(z_0)$ entraîne celle de

$$\Sigma a_n \left(\alpha + \frac{1}{na}\right).$$

Posant $a_n\left(\alpha + \frac{1}{na}\right) = b_n$ on aura $a_n = \dfrac{b_n}{\alpha + \frac{1}{na}} = b_n\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{na\alpha^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

La série Σb_n convergeant, cela entraîne la convergence de $\sum \frac{b_n}{\alpha}$ et aussi celle de $\Sigma b_n . O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Je dis que $\sum \frac{b_n}{n}$ converge aussi. En effet, en posant $\sum_1^n b_n = B_n$ on aura $b_n = B_n - B_{n-1}$ et $B_n \to B$ fini donc

$$\sum \frac{b_n}{n} = \sum \frac{1}{n}(B_n - B_{n-1}) = \Sigma B_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum \frac{B_n}{n(n+1)}$$

qui converge absolument puisque $B_n \rightarrow B$.

Il résulte donc de ce qui précède que Σa_n *converge.*

La convergence de $\Sigma a_n R_n(z)$ *en un point* z_0 *du domaine* Δ_α *de convergence vers* $\alpha \neq 0$ *exige la convergence de* Σa_n.

Réciproquement. Si Σa_n converge, on aura, *uniformément dans tout* Δ *intérieur à* Δ_α

$$R_n(z) = \alpha + \frac{1}{n a} + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)$$

$\Sigma a_n \alpha$ et $\sum \frac{a_n}{n a}$ convergent. Si Σa_n converge, $\Sigma a_n o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)$ converge absolument et uniformément dans Δ. Donc $\Sigma a_n R_n(z)$ *converge uniformément dans tout* Δ et définit dans Δ_α une fonction holomorphe, à condition que Δ_α ne contienne aucun antécédent ζ du point ∞, car en un tel point on aurait $R_n(\zeta) = \infty$ et ζ serait un pôle pour R_n; $\Sigma a_n R_n$ sera donc holomorphe dans Δ_α si l'∞ *n'est pas intérieur à* Δ_α. Si l'∞ est intérieur à Δ_α comme ce n'est pas alors un point invariant, tout point ζ antécédent d'ordre k de l'∞ sera pôle pour $R_k(z)$ seulement, et la somme $\Sigma a_n R_n(z)$ sera méromorphe au point ζ qu'elle admettra comme pôle de la même manière que $R_k(z)$.

Conclusion. — *La convergence de* Σa_n *est, pour* $\alpha \neq 0$, *la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de* $\Sigma a_n R_n$ *dans tout domaine* Δ *intérieur à* Δ_α.

12. 2°. Soit $\alpha = 0$. Supposons encore $\Sigma a_n R_n$ convergente au point z_0 intérieur à Δ_α. On a ici

$$R_n = \frac{1}{n a + \beta L n + A(z) + \varepsilon_n(z)} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_n(z)| < \frac{B}{n^{1-\eta}} \quad \text{valable en particulier pour } z_0.$$

Nous développerons R_n par rapport à $\frac{1}{n}$ comme suit

$$R_n = \frac{1}{n a} - \beta_1 \frac{L n}{n^2} - \frac{A + \varepsilon_n}{n^2 a^2} + o\left(\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\right) \quad \left(\varepsilon \text{ arbitrairement petit; } o\left(\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\right) = \text{infiniment petit en } \frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\right).$$

On a donc par hypothèse

$$a_n \left[\frac{1}{n a} - \beta_1 \frac{L n}{n^2} - \frac{A + \varepsilon_n}{n^2 a^2} + o\left(\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\right)\right] = b_n,$$

la série Σb_n étant convergente pour $z = z_0$. On tire de là

$$\frac{a_n}{na} = b_n\left[1 + \beta_2 \frac{Ln}{n} + \frac{A_0 + \varepsilon_n^0}{n} + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)\right] \qquad \begin{bmatrix} A_0 = A(z_0) \\ \varepsilon_n^0 = \varepsilon_n(z_0) \end{bmatrix}$$

Σb_n étant convergente, $\sum \frac{A_0 b_n}{n}$ l'est aussi; $\sum \frac{b_n \varepsilon_n^0}{n}$ est absolument convergente car $|\varepsilon_n^0| < \frac{B}{n^{1-\eta}}$, il en est de même de $\Sigma b_n o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)$ Quant à $\Sigma b_n \frac{Ln}{n}$, en posant $\sum_1^n b_n = B_n$, $B_n \to B$ fini, on l'écrit $\sum \frac{Ln}{n}(B_n - B_{n-1})$ ou encore

$$\Sigma B_n \left[\frac{Ln}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1}\right].$$

Or

$$\frac{Ln}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1} = Ln\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{L\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{Ln}{n(n+1)} - \frac{L\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1}$$

ce qui montre que $\frac{Ln}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1}$ est d'ordre supérieur à $\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}$, aussi petit que soit ε. Donc $\Sigma B_n \left[\frac{Ln}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1}\right]$ converge absolument, donc $\Sigma b_n \frac{Ln}{n}$ est convergente et l'on voit que *la convergence de $\Sigma a_n R_n$ en un point z_0 intérieur à Δ_a exige la convergence de $\sum \frac{a_n}{n}$.*

Réciproquement. Lorsque $\sum \frac{a_n}{n}$ converge, on a, uniformément dans tout Δ intérieur à Δ_a $(\alpha = 0)$

$$R_n = \frac{1}{na} - \beta_1 \frac{Ln}{n^2} - \frac{A(z) + \varepsilon_n(z)}{n^2 a^2} + o\left(\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\right) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_n(z)| < \frac{B}{n^{1-\eta}}$$

dans Δ et $o\left(\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\right)$ infiniment petit d'ordre supérieur à $\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}$ uniformément dans tout Δ. On déduit de là en formant $a_n R_n$ que les séries:

$$\sum \frac{a_n}{na} \quad \text{et} \quad \sum \frac{a_n}{n}\frac{Ln}{n} \qquad \text{convergent (voir raisonnement antérieur);}$$

les séries

$$\sum \frac{a_n A(z)}{n^2 a^2}, \quad \sum \frac{a_n \varepsilon_n(z)}{n^2 a^2}, \quad \Sigma a_n o\left(\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\right)$$

convergent uniformément dans Δ, la 2e et la 3e absolument.

Donc $\Sigma a_n R_n(z)$ converge uniformément dans Δ et représente ici une fonction holomorphe dans Δ_α en tout point non antécédent de l'∞, admettant un pôle comme $R_k(z)$ en tout z antécédent d'ordre k de l'∞.

Conclusion. *La convergence de* $\sum \frac{a_n}{n}$ *est ici la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de* $\Sigma a_n R_n$ *dans* Δ_0, *laquelle est alors uniforme dans tout* Δ *intérieur à* Δ_0.

13. 3°. *Soit* $\alpha = \infty$. On a ici $R_n = na + \beta Ln + A(z) + \varepsilon_n(z)$. Supposons $\Sigma a_n R_n$ convergente en z_0 appartenant à Δ_∞. Alors

$$b_n = a_n[na + \beta Ln + A(z_0) + \varepsilon_n(z_0)]$$

est une série convergente. On tire de là

$$na a_n = \frac{b_n}{1 + \beta_1 \frac{Ln}{n} + \frac{A_0}{na} + \frac{\varepsilon_n^0}{na}} = b_n\left[1 - \beta_1 \frac{Ln}{n} - \frac{A_0}{na} - \frac{\varepsilon_n^0}{na} + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)\right].$$

Par les raisonnements précédents on sait que, Σb_n convergeant, il en est de même de

$$\Sigma b_n \frac{Ln}{n}, \quad \sum \frac{b_n A_0}{na}, \quad \sum \frac{b_n \varepsilon_n^0}{na}, \quad \Sigma b_n . o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right).$$

Donc $\Sigma n a_n$ *convergente* est condition nécessaire pour la convergence de $\Sigma a_n R_n$ en un point z_0 du domaine Δ_∞ de convergence vers $\alpha = \infty$ supposé point double indifférent à $s = +1$.

Réciproquement. — Si $\Sigma n a_n$ est supposé convergente, en formant

$$a_n R_n = n a_n\left[a + \beta \frac{Ln}{n} + \frac{A(z)}{n} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n}\right]$$

on remarque que les séries $\Sigma n a_n a$, $\Sigma n a_n \beta \frac{Ln}{n}$ convergent. $\Sigma n a_n \frac{A(z)}{n}$ converge uniformément dans tout Δ intérieur à Δ_∞ et $\Sigma n a_n \frac{\varepsilon_n(z)}{n}$ converge absolument et uniformément dans Δ. Donc $\Sigma a_n R_n$, convergente dans tout Δ_∞ converge uniformément dans tout Δ.

Conclusion. *La convergence de* $\Sigma n a_n$ est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\Sigma a_n R_n(z)$ dans le domaine Δ_∞ d'un point double indifférent $\alpha = \infty$, et la convergence est alors uniforme dans tout Δ intérieur à Δ_∞, la somme $\Sigma a_n R_n$ étant alors *holomorphe dans* Δ_∞, puisque les seuls pôles des $R_n(z)$ étant les antécédents de l'∞ *n'appartiennent pas alors à l'intérieur de* Δ_∞ *mais à sa frontière.*

§ IV.

Récapitulation de l'étude de la convergence de $\Sigma a_n R_n(z)$.

14. Dans ce qui précède, nous avons pu conclure sur la convergence de $\Sigma a_n R_n(z)$ toutes les fois qu'était connue la convergence des séries suivantes

$$\Sigma a_n z^{p^n}, \quad \Sigma a_n z^n, \quad \sum \frac{a_n}{n}, \quad \Sigma a_n, \quad \Sigma n a_n$$

où p est un entier positif > 1. Nous avons appelé ϱ_1 et ϱ les rayons de convergence des 2 premières à savoir

$$\lambda_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{p^n} \quad \text{et} \quad \lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{(séries-images).}$$

On a

$$\frac{1}{\varrho_1} = \overline{\lim} \, |a_n|^{\frac{1}{p^n}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varrho} = \overline{\lim} \, |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

1°. Montrons que $\varrho_1 < 1$ *entraîne* $\varrho = 0$.

On a alors en effet une suite infinie d'entiers croissants n_i tels que

$$|a_{n_i}|^{\frac{1}{p^{n_i}}} \to \frac{1}{\varrho_1}.$$

Alors

$$|a_{n_i}|^{\frac{1}{n_i}} = \left\{ |a_{n_i}|^{\frac{1}{p^{n_i}}} \right\}^{\frac{p^{n_i}}{n_i}} \quad \text{et puisque} \quad \frac{p^{n_i}}{n_i} \to \infty \quad \text{et} \quad \varrho_1 < 1$$

on a

$$\lim_{n_i = \infty} |a_{n_i}|^{\frac{1}{n_i}} = +\infty. \quad \text{Donc} \quad \overline{\lim} \, |a_{n_i}|^{\frac{1}{n_i}} = +\infty.$$

Donc $\varrho = 0$.

2°. Montrons que $\varrho_1 > 1$ *entraîne* $\varrho = +\infty$. Par le raisonnement précédent, on voit que pour la suite n_i on a

$$\lim_{i=\infty} |a_{n_i}|^{\frac{1}{p^{n_i}}} = \frac{1}{\varrho_1} < 1, \quad \text{donc} \quad \lim_{n_i=\infty} |a_{n_i}|^{\frac{1}{n_i}} = 0, \quad \text{car} \quad \frac{p^{n_i}}{n_i} \to \infty.$$

Donc $\varrho = +\infty$.

3°. Il en résulte que *si* ϱ *est fini et* $\neq 0$ *on a* $\varrho_1 = +1$.

4°. Lorsque $\varrho < 1$ on ne peut avoir Σa_n convergente, ni même $\sum \frac{a_n}{n}$, ni à fortiori $\Sigma n a_n$.

Car, si $\sum \frac{a_n}{n}$ convergeait, on aurait $\frac{|a_n|}{n} = \varepsilon_n \to 0$. Donc

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log n} \cdot e^{\frac{1}{n}\log \varepsilon_n}.$$

On voit que $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ et, à cause de $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n^{\frac{1}{n}} < 1$.

Donc

$$\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

c'est-à-dire $\frac{1}{\varrho} \leq 1$ donc $\varrho \geq 1$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Donc *si* $\varrho < 1$, $\sum \frac{a_n}{n}$ *et, à fortiori* Σa_n *et* $\Sigma n a_n$ *divergent.*

5°. *Si* $\varrho > 1$ Σa_n, $\sum \frac{a_n}{n}$ *et* $\Sigma n a_n$ *sont convergentes.*

Car si $\varrho > 1$ on a

$$|a_n| < \frac{M}{(\varrho - \varepsilon)^n}$$

avec M fini et ε assez petit pour que $\varrho - 2\varepsilon > 1$.

Donc $|n a_n| < \frac{Mn}{(\varrho - \varepsilon)^n}$ et, à partir d'un certain rang

$$n < \left(\frac{\varrho - \varepsilon}{\varrho - 2\varepsilon}\right)^n$$

donc $|n a_n| < \frac{M}{(\varrho - 2\varepsilon)^n}$ et $\Sigma n a_n$ converge absolument, ainsi que Σa_n et $\sum \frac{a_n}{n}$.

15. On peut alors résumer dans le tableau suivant les résultats acquis dans le chapitre précédent, en convenant, pour les points indifférents, de ne considérer que ceux α pour lesquels $R' = s = +1$ et $R''(\alpha) \neq 0$.

A. $\varrho_1 = 0$, $\varrho = 0$. La série (1) $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ ne converge dans le domaine d'aucun point attractif ou indifférent.

B. $\varrho_1 \leq 1$, $\varrho = 0$. La série (1) converge (et là seulement) dans le domaine $\varDelta_0$ où les R_n tendent vers l'origine, lorsque l'origine est un point *attractif à multiplicateur nul* $\left(\text{avec des dérivées } \frac{d^k R}{dz^k} \text{ nulles en } 0 \text{ pour } k = 1, 2, \ldots (p-1)\right.$ $\left.\text{mais} \neq 0 \text{ pour } k = p\right)$. Elle converge dans la partie de $\varDelta_0$ définie par $|F_1| < \varrho_1$ F_1 fonction de Böttcher relative à 0. Elle diverge dans le domaine des autres points attractifs ou indifférents.

C. $\varrho_1 = 1$, $0 < \varrho < 1$. La série (1) *converge dans le domaine* $\varDelta_0$ de l'origine (et seulement dans $\varDelta_0$) lorsque cette *origine est un point attractif à multiplicateur* s_0 *nul ou inférieur ou égal en module à* ϱ de manière que $\Sigma a_n s_0^n$ soit convergente. Elle diverge dans le domaine des autres points attractifs ou indifférents.

D. $\varrho_1 = \varrho = 1$. Ce cas se subdivise

a) $\sum \frac{a_n}{n}$ *converge;* Σa_n *(et par suite* $\Sigma n a_n$*) divergent.* La série (1) converge dans le domaine $\varDelta_0$ de *l'origine lorsque l'origine est un point attractif ou indifférent.* Elle diverge dans le domaine des autres points attractifs ou indifférents.

b) Σa_n $\left(\textit{et par suite } \sum \frac{a_n}{n}\right)$ *convergent;* $\Sigma n a_n$ *diverge.* La série (1) converge *dans le domaine de tout point attractif ou indifférent à distance finie.* Elle diverge dans le domaine du point ∞, que ce point soit attractif ou indifférent.

c) $\Sigma n a_n$ $\left(\text{et par suite } \Sigma a_n \text{ et } \sum \frac{a_n}{n}\right)$ convergent. La série (1) converge dans le domaine de *tout point attractif ou indifférent à distance finie,* et dans le domaine du point ∞, si ce point est indifférent (mais diverge dans le domaine de l'∞ si ce point est attractif).

E. $\varrho_1 = +1$, $1 < \varrho < +\infty$. La série (1) converge dans le domaine de tout point *attractif ou indifférent à distance finie.* — Elle converge dans le domaine Δ_∞ de l'∞ *si ce point est indifférent ou attractif avec un multiplicateur* s_∞ supérieur ou égal en module à $\frac{1}{\varrho}$ de manière que $\sum \frac{a_n}{s_\infty^n}$ soit convergente. $\left(|s_\infty| \geq \frac{1}{\varrho}\right)$. Elle diverge dans Δ_∞ si l'∞ est à multiplicateur nul ou $< \frac{1}{\varrho}$ en module.

F. $\varrho_1 > 1$ (par suite $\varrho = +\infty$). La série (1) converge dans le domaine de tout point *attractif ou indifférent à distance finie.* — Elle converge dans tout le domaine Δ_∞ *si l'∞ est indifférent ou attractif avec un multiplicateur* $s_\infty \neq 0$. Elle converge dans une *partie de* Δ_∞ *définie par* $|F_2| > \frac{1}{\varrho_1}$, si l'$\infty$ est *attractif à multiplicateur nul,* F_2 étant la fonction de Böttcher pour ce point ∞ (au voisinage duquel on suppose que R est de la forme $R = z^p\left[A_p + \frac{A_{p+1}}{z} + \cdots\right]$ le crochet étant holomorphe autour de $z = \infty$ et $\neq 0$ pour $z = \infty$).

G. $\varrho = \varrho_1 = \infty$. La série (1) est *convergente dans le domaine de tout point attractif ou indifférent.* (Toutes les séries-images sont ici des fonctions entières.)

Remarque. La convergence de $\Sigma a_n R_n(z)$, lorsqu'on la reconnaît en *un point* intérieur au domaine d'un point attractif ou indifférent, entraîne, comme on l'a vu, des conséquences très précises sur ϱ et ϱ_1 et permet de distinguer dans lequel des cas précédents on se trouve.