SUR LES CONTINUS D'ORDRE BORNÉ.

Par

A. MARCHAUD

à MARSEILLE.

Introduction.

Une courbe algébrique plane est rencontrée en un nombre borné de points réels par une droite quelconque du plan. Cette propriété peut servir de définition à une classe plus étendue de courbes qui ne seront plus nécessairement algébriques ou même analytiques. C'est ce que fait M. C. Juel dans ses remarquables travaux sur la Géométrie finie.[1] Par analogie avec le degré, l'ordre d'une courbe est la limite supérieure du nombre de ses points situés sur une droite quelconque du plan. Ce qui donne beaucoup d'intérêt à cette généralisation, c'est que bien des propriétés des courbes de degré k appartiennent encore aux courbes d'ordre k, surtout pour les petites valeurs de k. Mais les courbes sur lesquelles raisonne M. C. Juel sont encore soumises à des hypothèses assez restrictives: elles sont fermées, au sens projectif, et constituées par un nombre fini d'arcs convexes ayant partout une tangente. On peut se demander ce qui resterait des propriétés des courbes algébriques, si l'on considérait des courbes moins particulières que celles de M. C. Juel, ou même tout simplement des continus, la seule hypothèse conservée étant celle relative à l'ordre. L'objet du présent mémoire est un essai de réponse à cette question.

---

[1] Les recherches de M. C. Juel portent également sur les courbes gauches et sur les surfaces, et c'est peut-être sur ce dernier point qu'on lui doit les plus belles découvertes. On trouvera des renseignements très complets »Sur le Géométrie finie et les travaux de M. C. Juel», dans un très intéressant article de M. P. Montel, paru sous ce titre dans le Bull. des Sc. Math. Mars 1924, p. 109, 128.

Au Chapitre I on trouvera les propriétés générales des *continus d'ordre borné.* Je propose d'appeler ainsi tout continu, situé dans un espace euclidien à n dimensions, ayant un nombre borné de points sur toute multiplicité linéaire à $n-1$ dimensions. La limite supérieure du nombre de ces points est *l'ordre* du continu. On verra que *tout continu d'ordre borné peut être décomposé en une infinité dénombrable d'arcs simples, deux quelconques d'entre eux ayant un nombre borné de points communs, et que, de plus, deux points donnés du continu peuvent être joints, sur lui, par un arc simple. Tous ces arcs sont rectifiables et admettent en chaque point deux demi-tangentes opposées, sauf peut-être en une infinité dénombrable de points.*

Dans certains cas, on obtient des résultats plus précis grâce à la notion de *point de ramification.* On appelle ainsi tout point O du continu, tel qu'on puisse trouver, sur ce dernier, plus de deux arcs simples n'ayant en commun deux-à-deux que le point O.

Lorsqu'un continu d'ordre borné a un nombre fini de points de ramification, il est la somme d'un nombre fini d'arcs simples, n'ayant en commun que des extrémités.[1]

Le nombre des ramifications est nécessairement nul, ou fini, si l'ordre du continu égale, ou dépasse de peu le nombre des dimensions. C'est ce qui a lieu notamment pour les continus plans d'ordre deux ou trois, et les continus gauches d'ordre trois ou quatre, qui sont étudiés respectivement aux Chapitres II et III.

Le Chapitre IV contient une application des propriétés obtenues dans les Chapitres précédents, aux continus *d'ordre cyclique borné,* c'est-à-dire aux continus ayant un nombre borné de points sur un cercle quelconque du plan. La notion de continu d'ordre cyclique borné est d'ailleurs une extension simple de celle de continu plan d'ordre borné.

La plupart des résultats contenus dans le présent mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences (Séance du 1e. Juillet 1929).[2]

---

[1] C'est un *continu simple* de S. Janiszewski. Thèse (Paris, 1911), p. 70.

[2] A. Marchaud »Sur les Continus d'ordre borné« C. R. des séances de l'Ac. des Sc. 1er Juillet 1929, t. 189, p. 16.

CHAPITRE I.

Théorèmes généraux.

1. D'après Cantor, un *continu* est un ensemble, contenant plus d'un point, *borné*, *fermé* et *bien enchaîné*.[1] Deux points A et B d'un ensemble (E) sont dits bien enchaînés entre eux sur (E), si, quel que soit le nombre positif ε, on peut trouver une suite de points de (E), A, A_1, $A_2, \ldots, A_{n-1}$, B, telle que la distance de deux points consécutifs quelconques soit inférieure à ε. Une telle suite est une *chaîne AB relative à ε*. Un ensemble est bien enchaîné, si deux quelconques de ses points sont bien enchaînés entre eux sur l'ensemble.

Ceci posé, un *continu*, situé dans un espace à n dimensions, sera dit *d'ordre borné*, s'il est rencontré en un nombre borné de points par toute multiplicité linéaire à $n-1$ dimensions. La limite supérieure du nombre des points d'inter section est *l'ordre du continu*.

Une ellipse est un continu plan d'ordre deux; une biquadratique sphérique est un continu gauche d'ordre quatre. Une parabole n'est pas un continu du second ordre, mais seulement tout arc à distance finie. On éviterait la restriction relative aux points à l'infini, en considérant ce qu'on pourrait appeler des continus projectifs. Je ne le ferai pas.[2] Il s'agira toujours ici de continus bornés, situés dans un espace *euclidien*.

Le présent Chapitre a pour objet l'étude des propriétés générales des continus d'ordre borné. Les Chapitres suivants seront consacrés plus particulièrement aux continus plans du second et du troisième ordre, aux continus gauches du troisième et du quatrième ordre, et à quelques extensions.

Pour commencer j'établirai deux propositions préliminaires. La première est relative à la théorie des continus, la seconde a trait à certaines suites de contours polygonaux.

2. Soient (E) un continu et (R) un domaine dont la frontière est un parallélogramme, un parallélépipède, etc..., suivant que (E) se trouve dans un espace à deux, trois dimensions, etc..., cette frontière contenant un nombre *fini* de points du continu A_1, $A_2, \ldots, A_p$. Je vais déterminer la structure de *l'ensemble découpé*

[1] On sait que cette définition est équivalente à celle de Jordan. Voir, par. ex., Jordan »Cours d'Analyse» 2e éd. t. I. p. 25, 26.

[2] On trouvera pourtant, au début du Chapitre III, quelques rapides indications sur les continus projectifs plans.

dans le continu par le domaine, c'est-à-dire de l'ensemble $(E)_R$ des points de (E) non extérieurs à (R).

Lorsque (E) ne contient pas de point à l'intérieur ou pas de point à l'extérieur de (R), la réponse est immédiate. Plaçons-nous dans le troisième cas possible, et soient O un point de (E) extérieur à (R), et M un point de $(E)_R$, distinct des A_i. Considérons une chaîne MO relative à $\varepsilon_r = 2^{-r}$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Désignons par μ'_r le dernier des points de cette chaîne intérieur à (R), par μ''_r le premier de ceux extérieurs à (R). L'ensemble des points μ'_r admet au moins un point limite μ, qui est aussi point limite des μ''_r. μ est donc sur (R), c'est un A_i, puisque (E) est fermé. μ est évidemment bien enchaîné avec M sur $(E)_R$.

Désignons par (α_i) l'ensemble formé par A_i et les points de $(E)_R$ bien enchaînés avec lui sur $(E)_R$. Cet ensemble est fermé. Tout point de $(E)_R$ fait partie de l'un au moins des (α_i); si deux (α_i) ont un point commun, ils coïncident. En supprimant de la suite $(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, (\alpha_p)$, tout élément identique au précédent, on aura décomposé $(E)_R$ en un nombre q $(q \leq p)$ d'ensembles fermés n'ayant aucun point commun deux à deux. Il existe donc un nombre δ, tel que la distance de deux points de $(E)_R$ appartenant à deux (α_i) distincts, soit supérieure à δ. Or deux points d'un même (α_i) étant bien enchaînés sur $(E)_R$, le sont alors nécessairement sur cet (α_i). Par suite, les ensembles obtenus sont des continus, sauf ceux ne contenant qu'un seul point. Ces derniers ne peuvent être que des A_i, points isolés de $(E)_R$.

Nous obtenons donc l'énoncé suivant.

Si un continu, placé dans un espace à n dimensions, est rencontré par la frontière d'un parallélépipède à n dimensions en p points, le parallélépipède découpe, dans le continu, un ensemble formé de points isolés — situés sur la frontière, s'ils existent — et de continus séparés, dont le nombre total est au plus égal à p. Chacun de ces continus a au moins un point sur la frontière.

La forme du domaine n'intervenant pas, cette proposition se généralise d'une manière évidente.

3. La seconde proposition préliminaire a trait, comme nous l'avons dit, à certaines suites de contours polygonaux. Un contour polygonal sera défini par la succession de ses sommets, deux sommets consécutifs étant distincts. Il pourra y avoir des points multiples, cela n'empêche que, si l'on prend, sur le contour, le premier sommet comme origine, et comme sens positif, celui qui correspond

à l'ordre des sommets, chaque point du contour aura une abscisse curviligne bien déterminée et inversement.[1]

Ceci posé, *soit* $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ *une suite de contours polygonaux, ayant pour origine un point* A, *pour extrémité un point* B, *et satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° *la longueur* l_n *de* P_n *reste bornée,*

2° *les côtés de* P_n *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{n}$,

3° *on passe de* P_n *à* P_{n+1} *en remplaçant chacun de ses côtés par un contour polygonal, ayant pour origine et pour extrémité, respectivement l'origine et l'extrémité du côté considéré,*

je dis que P_n *a pour limite un arc de Jordan rectifiable.*

En effet, on a évidemment $l_{n+1} > l_n$. Il en résulte que l_n a une limite l, atteinte en croissant. Prenons sur P_n le point A comme origine et le sens de A vers B comme sens positif. Soit M_n le point ayant pour abscisse curviligne un nombre donné s, moindre que l. Si n est essez grand, s pourra être aussi voisin de l qu'on voudra. Désignons par IJ le côté contenant M_n, l'abscisse curviligne de I étant inférieur ou égale à celle de M_n. Si ε_n est la longueur maximum des côtés de P_n, l'abscisse curviligne de I sur ce contour est égale à

$$s - \theta\varepsilon_n, \text{ avec } 0 \leq \theta < 1.$$

Soit maintenant P_{n+p} un contour d'indice supérieur à n, M_{n+p} le point d'abscisse curviligne s sur ce contour. L'abscisse curviligne de I sur P_{n+p} est $s - \theta\varepsilon_n$, augmenté d'une longueur moindre que $l - l_n$; elle est de la forme

$$s - \theta\varepsilon_n + \theta'(l - l_n), \quad 0 \leq \theta' < 1.$$

Il en résulte que la distance IM_{n+p}, au plus égale à l'arc $\widehat{IM}_{n+p}$ de P_{n+p}, est moindre que $\varepsilon_n + (l - l_n)$. Comme d'autre part IM_n est moindre que ε_n, on en déduit

$$M_n M_{n+p} < 2\,\varepsilon_n + (l - l_n) = \varepsilon'_n.$$

Par suite le vecteur $\overrightarrow{AM_n}$ converge uniformément vers une limite $\overrightarrow{AM}$, qui est une fonction $\overrightarrow{m}(s)$, continue dans tout intervalle $(0, l')$, $l' < l$. En posant $\overrightarrow{m}(l) = \overrightarrow{AB}$, la fonction sera continue dans $(0, l)$. Elle définit un arc de Jordan $\widehat{AB}$.

[1] On suppose le contour ouvert.

Soient M' et M'' deux points de cet arc, ayant respectivement pour paramètre s' et s'' $(s'' > s')$. Désignons par M'_n et M''_n les points de P_n ayant ces nombres respectivement pour abscisse curviligne. On a évidemment $M'_n M''_n \leq \leq s'' - s'$, et, d'après ce qui précède

$$\left. \begin{array}{r} M' M'_n \\ M'' M''_n \end{array} \right\} \leq \varepsilon'_n .$$

D'où l'on déduit

$$M' M'' \leq s'' - s' + 2 \varepsilon'_n;$$

et, comme ε'_n peut être choisi aussi petit qu'on veut

$$M' M'' \leq s'' - s'.$$

Il en résulte que le périmètre d'un polygone quelconque inscrit dans $\widehat{AM}$ est au plus égal à s. L'arc est donc rectifiable. s est évidemment la longueur de $\widehat{AM}$.

4. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la nature des continus d'ordre borné, et même de continus un peu plus généraux.

Un ensemble, placé dans un espace à n dimensions, sera dit *d'ordre k par rapport à la direction* (L), où (L) désigne une multiplicité linéaire à $n-1$ dimensions, s'il contient au plus k points sur toute multiplicité parallèle, et k points sur l'une d'elles au moins.

Un continu *d'ordre un par rapport à une certaine direction est évidemment un arc simple, c'est-à-dire un arc de Jordan ouvert sans point multiple.*

Ceci posé, soit, *dans un espace à n dimensions, un continu* (E), *d'ordre k au plus par rapport à n directions distinctes.* Je vais d'abord montrer que *si A et B sont deux points quelconques de* (E), *on peut les joindre par un arc simple rectifiable dont tous les points appartiennent au continu.*

Je ferai la démonstration en supposant $n = 3$. On verra qu'elle est générale.

Soient (L_1), (L_2), (L_3), les directions distinctes. (E) étant borné, on peut l'enfermer dans un parallélépipède (Δ), dont les faces sont parallèles aux directions (L_i). Partageons (Δ) en r^3 parallélépipèdes égaux par des plans parallèles au (L_i), et cherchons une limite supérieure du nombre de ceux d'entre eux, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, qui contiennent des points de (E) (à l'intérieur ou sur le contour). Si le continu (E) n'est pas tout entier intérieur à un parallélépipède partiel, aucun d'eux ne peut contenir de points de (E), sans en avoir au moins un sur son contour [2]. Donc à chaque δ_i correspond au moins l'un des points d'intersection de (E) avec les $3(r+1)$ plans parallèles aux (L_i) dont font partie les faces des parallélépipèdes partiels. Ces points sont en nombre au plus égal à $k \cdot 3(r+1)$. Comme chacun d'eux appartient à 2^3 parallélépipèdes au plus, on a nécessairement

$$p \leq 3 \cdot 2^3 \cdot k(r+1)^{1}.$$

Soient maintenant A et B deux points de (E). Les δ_i découpent dans (E) un nombre fini de continus — et éventuellement de points isolés [2]. A et B étant bien enchaînés sur (E), on peut former une chaîne de ces continus C_1^r, $C_2^r, \ldots, C_h^r$, *tous distincts*, le premier contenant A, le dernier contenant B, telle que deux éléments consécutifs aient au moins un point commun, deux éléments non consécutifs n'en ayant aucun. Si, par exemple, C_λ^r et $C_{\lambda'}^r$ $(\lambda' > \lambda + 1)$ avaient un point commun, ou bien ils seraient dans le même δ_i et ne seraient pas distincts, ou bien appartiendraient à deux δ_i contigus, alors on supprimerait les éléments intermédiaires. Je vais montrer qu'on peut, en modifiant au besoin les C_i^r, faire en sorte que *deux éléments consécutifs aient un seul point commun.*

Supposons que cela ait lieu jusqu'à C_λ^r inclus, C_λ^r ayant avec $C_{\lambda+1}^r$ plusieurs points communs $N_1, N_2, \ldots$; soit $M_{\lambda-1}^r$ le point commun à $C_{\lambda-1}^r$ et C_λ^r. (Si $\lambda = 1$, on prendra pour $M_{\lambda-1}^r$ le point A.) Les points N sont sur une face ou une arête commune à deux des parallélépipèdes δ_j; il sont donc k au plus. Soit $\delta(N_1)$ un parallélépipède homothétique à $\varDelta$, de centre N_1, assez petit pour avoir à son extérieur les autres points N et $M_{\lambda-1}^r$. Retranchons de C_λ^r les points intérieurs à $\delta(N_1)$, nous obtiendrons un nombre fini de continus dont l'un γ contiendra $M_{\lambda-1}^r$ et aura au moins un point sur $\delta(N_1)$. (Il suffit pour le voir de raisonner comme au n° 2.)

Si γ ne contient aucun des points $N_2, N_3, \ldots$, on ajoutera à γ un des continus découpés par $\delta(N_1)$ dans C_λ^r, ayant avec γ un point commun et contenant N_1. Il en existe nécessairement un γ' — sans quoi $M_{\lambda-1}^r$ et N_1 ne pourraient être bien enchaînés sur C_λ^r: $\gamma + \gamma'$ est un continu contenant $M_{\lambda-1}^r$ et n'ayant en commun avec $C_{\lambda+1}^\lambda$ que le point N_1.

Si γ contient des points $N_2, N_3, \ldots$, on remplaçera C_λ^r par γ, et on opérera

[1] Il résulte de cette inégalité, que (E) est un *continu de longueur bornée* (Caratheodory). On peut le recouvrir d'un nombre fini de sphères de rayon aussi petit qu'on veut, la somme de leurs rayons étant bornée.

sur γ comme on vient de le faire sur C^r_λ, et ainsi de suite. Au bout d'un nombre fini d'opérations on obtiendra un continu satisfaisant à la propriété annoncée, puisque le nombre des points communs avec $C^r_{\lambda+1}$ diminue chaque fois d'une unité au moins.

C^r_1 et C^r_2 ont un point commun M^r_1, de même C^r_2 et C^r_3, un point commun M^r_2, etc. ... Nous obtenons ainsi un contour polygonal $A M^r_1 M^r_2 \cdots \cdots M^r_{h-1} B$, soit P_r. Ce contour a une longueur l_r bornée. En effet, si a désigne le diamètre de $(\varDelta)$, chacun des côtés du contour est moindre que $\frac{a}{r}$. D'autre part chaque δ_i découpe dans (E) au plus $6k$ continus [2]. Il en résulte que le nombre h des côtés de P_r est borné par $6k.p \leq 6.3.2^3.k^2(r+1)$. D'où l'on déduit

$$l_r \leq 2^4 . 3^2 . k^2 \frac{r+1}{r} a.$$

Subdivisons chaque δ_i en 2^3 parallélépipèdes égaux par des plans parallèles aux (L_i), et opérons dans chaque continu C^r_i, pour le segment $M^r_i M^r_{i+1}$, comme nous l'avons fait dans (E) pour AB. Nous obtiendrons une nouvelle chaîne de continus $C^{r'}_1, C^{r'}_2, \ldots, C^{r'}_{h'}$, $(r' = 2r)$ et le contour polygonal correspondant $P_{r'} = (A M^{r'}_1 \cdots M^{r'}_{h'} B)$. Ce contour est formé, en remplacant chaque côté de P_r par un contour polygonal ayant les mêmes extrémités. On déduit alors du n° 3, que la suite des contours $P_2, P_{2^2}, \ldots, P_{2^q}, \ldots$ a pour limite un *arc de Jordan rectifiable*, dont tous les points sont évidemment sur le continu.[1]

Reste à établir que cet arc n'a pas de point double. Cela va résulter des restrictions apportées à la chaîne des continus $C^r_1, C^r_2, \ldots, C^r_h$. Il faut d'abord vérifier que les propriétés de la chaîne se conservent à chaque subdivision, ce qui est immédiat. Supposons que l'arc $\widehat{AB}$ ait un point double. Pour deux valeurs distinctes s_1 et s_2 de s (les notations étant les mêmes qu'au n° 3), on obtient le même point D. Il existe alors sur l'arc $s_1 s_2$ un sommet D' d'un des contours, ce sommet étant distinct de D. Si r est assez grand D et D' ne seront ni dans un même parallélépipède, ni dans deux parallélépipèdes contigus, alors deux éléments non consécutifs de la chaîne $C^r_1, C^r_2, \ldots, C^r_h$ auraient un point commun D; ce qui est impossible.

---

[1] Si (E) est un arc simple, il se réduit à $\widehat{AB}$. On obtient alors un cas particulier d'un théorème de M. Banach (Fund. Math. t. VII, 1925, p. 225).

Remarquons enfin que la dernière inégalité montre que l'arc $\widehat{AB}$ a une longueur au plus égale à $2^4 . 3^2 . k^2 a$.

5. L'étude précédente va nous permettre de déterminer facilement la structure de (E). Je supposerai toujours, pour fixer les idées, $n=3$.

Soit z_1 une droite parallèle aux plans (L_2) et (L_3). La projection de (E) sur z_1, parallèlement à (L_1) est un segment $\alpha_1 \beta_1$, dont les extrémités sont chacune la projection au moins d'un point de (E). On peut donc trouver, sur le continu, un arc simple $\widehat{A_1 B_1}$, tel qu'en le retranchant de (E), on obtienne un ensemble (F) d'ordre $k-1$ au plus par rapport à la direction (L_1). Je vais montrer que, si cet ensemble n'est pas nul, on peut le décomposer en une infinité dénombrable de continus.

Partageons $(\varDelta)$ en 2^3 parallélépipèdes égaux, par des plans parallèles aux (L_i), et retenons ceux qui contiennent des points de (E), mais aucun point de $\widehat{A_1 B_1}$. Ces parallélépipèdes découpent, dans (E), chacun un nombre fini de continus, et éventuellement de points isolés que nous négligerons. Partageons chaque parallélépipède restant de la même manière en 2^3 parties égales et recommençons, et ainsi de suite.... Nous obtiendrons ainsi une infinité dénombrable de continus (E_2), (E_3),... qui épuisent nécessairement (F). En effet, soit M un point de cet ensemble, il finira par appartenir à l'un des parallélépipèdes considérés, δ, sans point commun avec $\widehat{A_1 B_1}$. Si M est intérieur à δ, il appartient à l'un des continus (E_i). Si M est sur la frontière de δ, on peut supposer que la subdivision a été poussée assez loin, pour que les parallélépipèdes contigus à δ soient également sans point commun avec $\widehat{A_1 B_1}$; et comme M ne peut être point isolé dans tous les parallélépipèdes qui le contiennent — sans quoi il serait point isolé de (E) — il fait encore partie d'un (E_i).

Ainsi (E) est la somme de l'arc $A_1 B_1$ et d'une infinité dénombrable de continus (E_2), (E_3),..., d'ordre k au plus par rapport à (L_2) et (L_3), mais d'ordre $k-1$ au plus par rapport à (L_1). En opérant sur chacun des (E_i), comme on l'a fait sur (E), on obtiendra une infinité dénombrable d'arcs et une infinité dénombrable de continus, toujours d'ordre k au plus par rapport à (L_2) et (L_3), mais d'ordre $k-2$ au plus par rapport à (L_1). Au plus tard au bout de k opérations on aura décomposé (E) en une infinité dénombrable d'arcs, car un continu d'ordre zéro par rapport à (L_1) ne contient aucun point. On voit immédiatement que deux quelconques des arcs obtenus ont au plus k points communs.

En définitive nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème I. *Si un continu, situé dans un espace à n dimensions est d'ordre borné par rapport à n directions distinctes, on peut le décomposer en une infinité dénombrable d'arcs simples rectifiables, tels que deux quelconques d'entre eux aient un nombre borné de points communs. De plus deux points quelconques du continu peuvent être joints, sur lui, par un arc simple rectifiable.*

La décomposition mise en évidence par ce théorème est possible d'une infinité de manières. On peut se demander s'il n'en existerait pas une pour laquelle le nombre des arcs serait fini. Lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire, la réponse est négative, même pour $k=2$. On le voit immédiatement sur l'exemple suivant.

Par rapport à deux axes A_x et A_y, considérons les points B et C, respectivement de coordonnées $(1, 1)$ et $\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$. Le continu formé par les segments AB, BC et ceux obtenus, à partir de ce dernier, par des homothéties de rapports $2^{-1}, 2^{-2}, \ldots$, ayant pour centre A, est d'ordre deux par rapport à chacun des axes.

6. Pour obtenir, dans certains cas, des résultats plus complets, je ferai intervenir la notion de point de ramification. On dira que O est un *point de ramification de (E), si l'on peut trouver, sur ce continu, au moins trois arcs simples n'ayant en commun deux à deux que le point O.* On voit immédiatement qu'il *y en a au plus $2k$.* En effet, soit (L) une des multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions, pour la direction desquelles (E) est au plus d'ordre k. Menons par O la multiplicité parallèle $(\varDelta)$. Chacun des arcs coupe $(\varDelta)$ en k points au plus; on peut donc, en le réduisant au besoin, supposer qu'il a tous ses points autres que O d'un même côté de $(\varDelta)$. Si le nombre des arcs surpassait $2k$, au moins $k+1$ seraient d'un même côté de $(\varDelta)$, et une multiplicité parallèle assez voisine — située de ce côté — couperait chacun d'eux en un point au moins, c'est-à-dire (E) en plus de k points.

Je vais montrer que *si le nombre des points de ramifications est fini, le continu se compose d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun que des extrémités.*

Enfermons (E) dans un parallélépipède à n dimensions $(\varDelta)$, dont les faces sont parallèles aux multiplicités linéaires par rapport auxquelles (E) est d'ordre k au plus.

Supposons d'abord qu'on ait trouvé sur (E) des arcs simples $\widehat{MA_1}, \widehat{MA_2}, \ldots, \widehat{MA_p}$, sans point commun deux à deux autre que M. Considérons un parallélépipède (δ), homothétique à $(\varDelta)$, de centre M, et choisi assez petit pour que les extrémités A_i soient à son extérieur, ainsi que tous les points de ramification de (E), sauf peut-être M — si ç'en est un. La frontière de (δ) rencontre chacun des arcs $\widehat{MA_i}$ en un nombre fini de points, il existe donc sur chaque $\widehat{MA_i}$ deux points A'_i et A''_i, tels que des deux arcs partiels $\widehat{MA'_i}$ et $\widehat{A'_iA''_i}$, le premier appartienne à (δ), le second ayant tous ses points autres que A'_i en dehors de (δ).

(δ) découpe dans (E) un nombre fini de continus, et l'un d'eux (ω) contient M. Les arcs $\widehat{MA'_i}$ font partie de (ω). Supposons que ce continu contienne d'autres points, soit B l'un d'eux. Il existe sur (ω) un arc simple $\widehat{MB}$. Je dis que cet arc n'a en commun avec chacun des $\widehat{MA'_i}$ que le point M.

En effet, prenons $\widehat{MA'_1}$, par exemple. B étant en dehors de cet arc, il existe sur $\widehat{MB}$ des points β' tels que l'arc $\widehat{\beta' B}$ de $\widehat{MB}$ n'ait aucun point commun avec $\widehat{MA'_1}$. Soit β la borne de ces points du côté de M, elle est sur $\widehat{MA'_1}$ et l'arc $\widehat{\beta B}$ de $\widehat{MB}$ n'a en commun avec $\widehat{MA'_1}$ que β. Si ce point est distinct de M, c'est nécessairement un point de ramification de (E), car de ce point partent trois arcs simples $\widehat{\beta B}$, $\widehat{\beta M}$ et $\widehat{\beta A'_1}$ qui n'ont en commun que β. Lorsque β est en A'_1 la conclusion subsiste, il suffit de remplacer $\widehat{\beta A'_1}$ par $\widehat{A'_1A''_1}$.

L'arc $\widehat{MB}$ n'a donc bien que le point M en commun avec chacun des $\widehat{MA'_i}$.

Ceci posé, soit M un point de (E), et (l_1) un arc simple de (E), ayant pour origine M. Prenons un parallélépipède (δ_1) homothétique à $(\varDelta)$, ayant pour centre M, et assez petit pour que l'extrémité de (l_1), et tous les points de ramification de (E), sauf peut-être M — si ç'en est un — soient à son extérieur. Soit (ω_1) le continu dont fait partie M, parmi ceux découpés dans (E) par (δ_1). (δ_1) découpe dans (l_1) un nombre fini d'arcs, dont l'un (l'_1) fait partie de (ω_1). Si ce continu contient d'autres points, il existe sur (ω_1) un arc (l_2) n'ayant en commun avec (l'_1) que le point M. Prenons un parallélépipède (δ_2), homothétique et concentrique à (δ_1), ayant à son extérieur les extrémités de (l'_1) et de (l_2). Soit (ω_2) le continu dont fait partie M, parmi ceux découpés dans (E) par (δ_2). (δ_2) découpe dans (l'_1) et (l_2) un nombre fini d'arcs, dont deux (l_1^2), (l_2^2) font partie de (ω_2), et ainsi de suite. Au bout d'un nombre fini d'opérations — au plus égal à k — on obtiendra un parallélépipède (δ_h), tel que le continu (ω_h) dont fait partie M, parmi ceux découpés dans (E) par (δ_h), se compose de h arcs simples sans point commun deux à deux autre que M. Car autour de M il peut y avoir au plus k arcs jouissant de cette propriété.

Enfin on pourra choisir un parallélépipède (δ_{h+1}) homothétique et concentrique ayant à son extérieur tous les continus, autres que (ω_h), découpés dans (E) par (δ_h). Autrement dit (δ_{h+1}) ne contiendra, comme points de (E), que des points des h arcs simples. Par suite (δ_{h+1}) découpera dans (E) un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun que des extrémités.

La démonstration s'achèvera facilement. On pourrait se contenter de remarquer que (E) est alors un *continu simple* de S. Janiszewski[1] et utiliser un résultat de cet auteur.[2] Il est facile de s'en passer. Nous venons de voir que M étant un point quelconque de (E), on peut trouver un parallélépipède (δ_M), homothétique à $(\varDelta)$, ayant pour centre M, tel que l'ensemble découpé dans (E) par (δ_M) se compose d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun que des extrémités. Si M est un point de $(\varDelta)$ non situé sur (E), on peut choisir (δ_M) de manière que l'ensemble découpé dans (E) par (δ_M) ne contienne aucun point.

En répétant un raisonnement classique, on voit qu'il est possible de partager $(\varDelta)$ en un nombre fini de parallélépipèdes égaux par des variétés parallèles aux faces de $(\varDelta)$, de manière que chacun d'eux découpe dans (E) un nombre fini, ou peut-être nul, d'arcs simples, n'ayant en commun que des extrémités.

En résumé, nous obtenons la proposition suivante.

Théorème II. *Si un continu, situé dans un espace à n dimensions, et d'ordre borné par rapport à n directions distinctes, possède un nombre fini de points de ramification, il est la somme d'un nombre fini d'arcs simples rectifiables, n'ayant en commun que des extrémités: s'il n'y a aucun point de ramification, le continu se réduit à une ligne de Jordan sans point double, ouverte ou fermée.*

Les Théorèmes I et II s'appliquent à fortiori aux continus d'ordre borné.

7. Il ne s'agira, dans ce travail, que de continus d'ordre borné ayant un nombre fini de points de ramification. Un tel continu sera une *courbe*, au sens ordinaire, s'il est possible d'ordonner les arcs simples qui le constituent de manière que chacun d'eux ait une extrémité commune avec le suivant. On pourra exprimer ce fait en disant que le continu est *unicursif*. Il sera alors constitué

---

[1] S. Janiszewski: Thèse (Paris 1911) »Sur les continus irréductibles entre deux points», p. 63, 64. (Il faut remarquer que ce que nous appelons point de ramification, n'est pas en général un point simple de S. J.).

[2] Id. Théor. IX, p. 74.

par une chaîne d'arcs simples $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}, \ldots,$ $\widehat{A_{p+1}A_p}$, dont l'ensemble formera une ligne de Jordan, ayant un nombre fini de points doubles. Si un continu unicursif a au moins un point de ramification, on peut ordonner les arcs de différentes manières, tout en conservant la propriété précédente. Lorsqu'aucun d'elles ne sera imposée par la nature de la question, on en choisira une arbitrairement.

Les *courbes d'ordre borné* seront ainsi définies d'une manière purement géométrique: *continus d'ordre borné ayant un nombre fini de points de ramification, et unicursifs.* Dans certains cas il pourra être commode de les considérer comme des lignes de Jordan. Il résulte d'ailleurs, de ce qui précède, qu'il y a identité géométrique entre les courbes d'ordre borné, et les lignes de Jordan d'ordre borné ayant un nombre fini de points doubles.

8. Je vais démontrer sur ces courbes un théorème indispensable pour la suite:

Théorème III.

A. *Si une courbe d'ordre k, située dans un espace à n dimensions, a k points sur une multiplicité linéaire (L), à $n-1$ dimensions, ces k points sont simples;*

B. *Si, de plus, la courbe est fermée, ou bien a ses extrémités hors de (L)*[1], *elle la traverse en chacun des k points.*

C. *Sur tout arc ouvert d'ordre k, on peut trouver un arc intérieur de même ordre.*[2]

Soit $\widehat{AB}$ une courbe de Jordan, obtenue en faisant varier le paramètre t de α à β. $\widehat{AB}$ est un continu dont l'ordre est celui de la courbe. Autrement

[1] Si cette condition n'est pas réalisée, la courbe ne traverse pas nécessairement (L) aux points d'intersection, distincts des extrémités; comme on le voit sur la fig. 1, ci-dessous, où l'arc plan d'ordre cinq $\widehat{AB}$ — formé de quatre demi-cercles — ne traverse (L) qu'en deux points.

[2] Il est essentiel de considérer une courbe. La fig. 2, ci-dessous montre un continu plan d'ordre cinq — formé de trois demi-cercles — rencontré en cinq points par une seule droite.

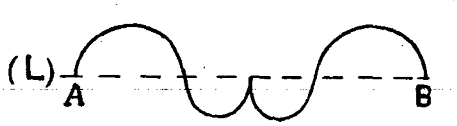


Fig. 1.

Fig. 2.

dit, pour évaluer l'ordre de la courbe, on compte les points géométriquement distincts, et non le nombre des valeurs du paramètre.[1]

Je ferai les démonstrations dans le plan. On verra comment elles se généraliseraient.

Soit d'abord la première partie.

A. 1°. La courbe n'ayant qu'un nombre fini de points doubles, le nombre des valeurs de t, donnant des points sur (L), est nécessairement fini, soit k'. On a évidemment $k' \geq k$. Il s'agit de montrer que $k' = k$.

On peut supposer l'arc ouvert. Dans le cas contraire, il suffirait de supprimer un arc partiel, n'ayant aucun point sur (L). Désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_{k'}$, les valeurs du paramètre correspondant aux points situés sur (L), avec $\alpha \leq t_1 < < t_2 < \cdots < t_{k'} \leq \beta$. Le nombre des points doubles étant fini, on peut trouver, pour chaque valeur t_i $(i = 1, 2, \ldots, k')$, deux valeurs voisines t_i' et t_i'', $(t_i' < t_i < t_i'')$, telles que chacun des arcs $\widehat{t_i' t_i}$, $\widehat{t_i t_i''}$ soit simple, ait tous ses points autres que celui de paramètre t_i d'un même côté de (L), deux quelconques de ces arcs n'ayant de point commun que sur (L). Si $t_1 = \alpha$ ou $t_{k'} = \beta$, l'arc $\widehat{t_1' t_1}$ ou $\widehat{t_{k'} t_{k'}''}$ n'existe pas.

Dans le cas où l'un au moins de ces arcs existe, ce qui aura lieu nécessairement si l'arc donné $\widehat{AB}$ est fermé, le nombre total des arcs $\widehat{t_i' t_i}$, $\widehat{t_i t_i''}$ est au moins égal à $2(k'-1)+1 = 2k'-1$; dont k' au moins sont d'un même côté de (L). Une parallèle, située de ce côté, et suffisamment voisine de (L), coupera chacun d'eux. Ce qui exige $k' \leq k$, et par suite $k' = k$.

A. 2°. Supposons maintenant l'arc ouvert et $t_1 = \alpha$, $t_{k'} = \beta$. Dans ce cas, il y a seulement $2(k'-1)$ arcs. Si k' au moins sont d'un même côté, on a, comme plus haut $k' = k$. S'il y en a exactement $k'-1$ de chaque côté, on peut seulement affirmer que $k'-1$ est au plus égal à k. Ce qui donne $k' = k$, ou bien $k' = k+1$, c'est-à-dire un seul point double. Je vais montrer que cette dernière hypothèse est impossible.

Choisissons un sens sur (L). Soit I un point de cette droite, non situé sur l'arc, désignons par d et g [d' et g'] le nombre des arcs $\widehat{t_i' t_i}$, $\widehat{t_i t_i''}$ situés au dessus [au dessous] de (L), respectivement à droite et à gauche de I. On a

$$d + g = d' + g' = k' - 1.$$

[1] Il résulte d'ailleurs de la première partie de l'énoncé, que pour une courbe ayant un nombre fini de points doubles, le résultat ne serait pas changé.

D'autre part, une droite passant par I, et coupant (L) sous un angle assez petit, coupera, suivant le cas, l'ensemble des arcs $\widehat{t'_i t_i}$, $\widehat{t_i t''_i}$, et par suite $\widehat{AB}$, en $d+g'$ ou $d'+g$ points au moins. Ce qui exige

$$d+g'\leq k, \quad d'+g\leq k.$$

Si les deux nombres $d+g'$, $d'+g$ sont distincts, le premier par exemple supérieur à l'autre, on a

$$d+g'>d'+g.$$

Ce qui donne, en ajoutant membre à membre avec

$$d+g'=d+g',$$

$$2(d+g')>d+g+d'+g'=2(k'-1),$$

ou encore $k'\leq d+g'$, et par suite $k'\leq k$, c'est-à-dire $k'=k$.

Pour achever la démonstration, il suffira de montrer qu'on ne peut avoir, quel que soit I, $d+g'=d'+g$. L'une au moins des extrémités A par exemple est point simple — puisqu'il y a au plus un point double. — Pour fixer les idées, supposons que l'arc $\widehat{t_1 t''_1}$ soit au dessus de (L). Lorsque I traverse le point A de gauche à droite, sans rencontrer $\widehat{AB}$ en un autre point, d diminue et g augmente d'une unité, tandis que d' et g' sont constants. Les sommes $d+g'$ et $d'+g$ ne peuvent donc rester égales.

B. Supposons maintenant $\alpha\neq t_1$, $\beta\neq t_k$ (on a vu que $k'=k$). Considérons les arcs $\widehat{t'_i t_i}$, $\widehat{t_i t''_i}$, s'ils sont de part et d'autre de (L), l'arc $\widehat{AB}$ traverse la droite en t_i; s'ils sont d'un même côté, je dirai que t_i est un retour supérieur ou inférieur, suivant qu'ils sont au dessus ou au dessous de (L).

Désignons par r le nombre des retours supérieurs, par r' celui des retours inférieurs, par θ le nombre des traversées. On a $r+r'+\theta=k$.

En coupant par une parallèle à (L), assez voisine et située au dessus, on obtient l'inégalité $2r+\theta\leq k$. D'où l'on déduit, en comparant à la relation précédente, $r-r'\leq 0$. De la même manière on aurait $r'-r\leq 0$. Ce qui donne

$$r=r', \quad 2r+\theta=k.$$

Il s'agit de montrer que $r=0$. Supposons $r\neq 0$. Comme précédemment prenons sur (L) un point I, non situé sur $\widehat{AB}$, et désignons par D et G [D' et G'], le nombre des retours supérieurs [inférieurs], situés respectivement à droite et à gauche de I. On a

$$D + G = D' + G' = r.$$

D'autre part une droite passant par I, faisant avec (L) un angle assez petit, coupera, suivant le cas, l'ensemble des arcs $\widehat{t_i' t_i}$, $\widehat{t_i t_i''}$, et par suite $\widehat{AB}$, en $2(D + G') + \theta$ ou $2(D' + G) + \theta$ points au moins. Ce qui exige

$$2(D + G') + \theta \leq k, \quad 2(D' + G) + \theta \leq k.$$

Si les deux nombres $D + G'$ et $D' + G$ sont différents, le premier par exemple supérieur à l'autre, on a

$$D + G' > D' + G,$$

ce qui donne, en ajoutant $D + G'$ aux deux membres,

$$2(D + G') > D + G + D' + G' = 2r,$$

et par suite,

$$2r + \theta < 2(D + G') + \theta \leq k.$$

Il y a impossibilité puisque $2r + \theta = k$.

Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que les sommes $D + G'$ et $D' + G$ ne peuvent être constamment égales. Considérons un retour supérieur. Ce point étant un point simple de l'arc, lorsque I le traverse de gauche à droite — sans rencontrer $\widehat{AB}$ — D diminue et G augmente d'une unité, tandis que D' et G' sont invariables. Les sommes $D + G'$ et $D' + G$ ne peuvent donc rester égales.

C. Etablissons maintenant la troisième partie.

Si l'arc $\widehat{AB}$ est d'ordre k, il existe une droite (L), le coupant en k points distincts. Ces points sont simples. Désignons leurs paramètres par $t_1, \ldots, t_k$. On a $\alpha \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq \beta$. Il s'agit de montrer qu'on peut trouver une droite coupant l'arc $\widehat{t_1 t_k}$ en k points géométriquement distincts, dont les paramètres sont tous intérieurs à l'intervalle (t_1, t_k). Or cela résulte immédiatement de l'étude précédente, dans le cas A. 2°, où l'on a trouvé, quelles que soient les circonstances, une droite, distincte de (L), coupant l'arc $\widehat{t_1 t_{k'}}$ en k' points au moins géométriquement distincts. Et l'on sait que $k'=k$.

9. Du théorème qui vient d'être démontré, on déduit facilement les corollaires suivants.

I. *Toute courbe fermée est nécessairement d'ordre pair.*

II. *Soit AB un arc, obtenu en faisant varier le paramètre t de α à β, si tout arc $\widehat{t't''}$, intérieur à $\widehat{AB}$ — c'est-à-dire tel que $\alpha < t' < t'' < \beta$ — est d'ordre k, il en est de même de $\widehat{AB}$.*[1]

10. Je terminerai ce premier Chapitre par l'étude sommaire des tangentes et des plans osculateurs aux arcs simples d'ordre borné — et même à certains arcs un peu plus généraux.

Soit $\widehat{AB}$ un arc simple plan rencontré par une droite quelconque en un nombre fini de points. M. Rosenthal a établi que cet arc admet, en chaque point, une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.[2] Voici une démonstration directe de cette propriété, qui s'étendra facilement au cas d'un nombre quelconque de dimensions.

Soit M un point de $\widehat{AB}$, (Δ) une sécante quelconque passant par ce point. On peut trouver sur $\widehat{AM}$ un point P, tel que l'arc $\widehat{PM}$ ne rencontre pas la droite — en dehors de M — sans quoi la droite couperait l'arc en une infinité de points. Ceci posé, donnons-nous p droites, passant par M, et faisant entre elles des angles égaux à $\frac{\pi}{p}$. Il existe un arc $\widehat{P_p M}$, de $\widehat{AM}$, ne rencontrant aucune de ces droites. Cet arc sera tout entier intérieur à un angle de sommet M, égal à $\frac{\pi}{p}$. Si donc M' et M'' appartiennent à $\widehat{P_p M}$, on a $M'MM'' < \frac{\pi}{p}$; ce qui prouve l'existence d'une demi-tangente du côté de A. L'existence de la demi-tangente du côté de B s'établit de la même manière. Un théorème dû à M. Denjoy[3], permet alors d'affirmer que l'ensemble des points pour lesquels ces deux demi-tangentes ne sont pas opposées est dénombrable[4]. Un tel point est un *sommet*[3] du continu.

[1] Il s'agit toujours de courbes d'ordre borné.

[2] Rosenthal »Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven» Math. Ann. t. 73, 1913, p. 516.

[3] A. Denjoy »Sur les fonctions à nombres dérivés bornées». J. de Math. p. et app. t. I, 1915, p. 147.

[4] On pourrait aussi invoquer un théorème de M. Rosenthal. Mém. cité p. 503. Ce théorème nous sera d'ailleurs utile plus loin.

On dira qu'un *continu*, situé dans un espace à n dimensions, est *d'ordre fini, s'il est rencontré par toute multiplicité linéaire à* $n-1$ *dimensions, en un nombre fini*, mais pas nécessairement borné, *de points.*

La démonstration précédente s'étend sans peine au cas de n dimensions, la notion de sommet aussi. On peut donc affirmer que
tout arc simple d'ordre fini admet, en chacun de ses points, une demi-tangente pour chaque côté; l'ensemble des points pour lesquels ces deux demi-tangentes ne sont pas opposées est au plus dénombrable.

10[bis]. Considérons, dans un espace à trois dimensions, un arc simple d'ordre fini $\widehat{AB}$, possédant une tangente partout[1]. Soit M un point de $\widehat{AB}$, (T) la tangente en ce point. En remplaçant, dans la démonstration précédente, les droites $(\varDelta)$ par des plans passant par (T), on voit que le *plan* $[(T), M']$ *a une limite quand* M' *tend vers* M, *en restant sur* $\widehat{AM}$. Cette limite est le *plan osculateur à gauche en* M. L'existence du plan osculateur à droite s'établit de la même manière. Ainsi

Tout arc simple gauche d'ordre fini, à tangente partout, admet, en chaque point, un plan osculateur à gauche et un plan osculateur à droite.

Si l'on définissait le plan osculateur comme la limite du plan passant par la tangente et parallèle à la tangente en un point voisin, on ne pourrait pas conclure, car on ne sait pas, en général, si la tangente varie continuement.

CHAPITRE II.

Continus plans d'ordre deux et trois.

11. J'étudierai, dans ce Chapitre, les continus plans d'ordre borné, et plus spécialement ceux d'ordre deux ou trois. Ce sont les seuls pour lesquels on peut obtenir des conclusions précises sans hypothèse supplémentaire. Cela tient à ce qu'un continu d'ordre moindre que quatre possède au plus un point de ramification. Au contraire un continu d'ordre quatre peut en avoir une infinité. Il suffit de considérer, par exemple, deux arcs convexes ayant une infinité de points communs.

Continus d'ordre deux.

---

[1] C'est-à-dire tel que les deux demi-tangentes en chaque point aient même support.

12. Occupons nous, pour commencer, des continus d'ordre deux.[1] Soit (E) un tel continu. Il ne peut avoir de point de ramification. En effet, supposons qu'il en ait un, A. Prenons sur (E) un point B et traçons la droite AB. Du point A partent trois arcs simples sans point commun deux à deux autre que A. On peut prendre chacun d'eux assez petit pour qu'il ait tous ses points autres que A d'un même côté de la droite AB — puisqu'ils rencontrent cette droite en deux points au plus. Deux au moins de ces trois arcs sont d'un même côté de AB. On pourra alors trouver une droite, passant par B, coupant chacun de ces deux arcs en dehors de A. Ce qui est impossible.

Par suite

Tout continu d'ordre deux est une courbe de Jordan rectifiable convexe, ouverte ou fermée.

On peut appliquer à ce continu les résultats du n° 10. Mais il y a, dans le cas présent, un fait important bien connu: *si la tangente existe partout*, c'est-à-dire *si les deux demi-tangentes en chaque point ont même support, chacune d'elles varie d'une manière continue avec le point de contact, en tournant toujours dans le même sens quand ce point décrit l'arc.*

13. Je vais établir ce résultat. Chemin faisant, nous trouverons quelques propriétés qui nous seront utiles. Soit $\widehat{AB}$ un arc simple d'ordre deux, M un point de cet arc, distinct des extrémités. Toute droite passant par M et intérieure à l'angle AMB n'a aucun autre point commun avec $\widehat{AB}$. (S'il y en avait un, A et B ne seraient pas d'un même côté de la sécante [8]). De là résulte immédiatement que *les deux demi-tangentes en M ne peuvent être confondues.*

Soit par exemple $\varDelta$ le support de $\overrightarrow{MT_B}$, demi-tangente du côté de B. C'est la limite de la demi-droite $\overrightarrow{MM'}$, quand le point M' de l'arc $\widehat{MB}$ tend vers M. Les arcs $\widehat{AM}$ et $\widehat{M'B}$ ont tous leurs points — sauf M et M' — d'un même côté de la droite MM'. On en déduit que deux points quelconques de $\widehat{AB}$ ne peuvent être de part et d'autre de $\varDelta$. L'arc ne traverse donc pas $\varDelta$ en M. S'il avait un autre point sur $\varDelta$, ce ne pourrait être qu'une extrémité [8]. Or ceci est impossible, car $\widehat{AB}$ a des points de part et d'autre de chacune des droites MA et MB.

---

[1] Il n'y a évidemment pas de continu d'ordre un.

Ainsi *le support d'une demi-tangente en un point, distinct des extrémités, laisse tous les points de l'arc d'un même côté, seul le point de contact est sur la droite.*

Si l'on considère la demi-tangente à l'une des extrémités, on arrive à la même conclusion, sauf que le support de la demi-tangente peut contenir l'autre extrémité. Il peut même arriver que les demi-tangentes aux extrémités aient pour support commun la corde. Je dirai, dans ce cas, que l'arc est *exceptionnel.*[1]

Soient $\overrightarrow{MT_A}$ et $\overrightarrow{MT_B}$ les deux demi-tangentes en M, supposons d'abord leurs supports distincts. Il résulte de ce qui précède, que l'arc $\widehat{AB}$ a tous ses points — sauf M — intérieurs à l'angle $T_A M T_B$. Il existe alors une infinité de sécantes, passant par M, et laissant tous les points de l'arc d'un même côté.

Si les deux demi-tangentes ont même support, elles sont opposées. L'arc admet en M une tangente, qui est la seule droite passant par ce point ne traversant pas l'arc.

Voici encore une propriété relative aux demi-tangentes, dont nous aurons besoin au Chapitre suivant [37]: *Un arc non exceptionnel ne peut admettre plus de deux demi-tangentes dont les supports soient concourrants ou parallèles.*

Supposons, par exemple, que les supports de trois demi-tangentes en trois points M_1, M_2, M_3 soient concourrantes. La démonstration serait la même si on les supposait parallèles.

Désignons par O le point de concours et supposons M_2 entre M_1 et M_3. L'arc $\widehat{AB}$ est tout entier d'un même côté de la droite OM_2 — car M_2 est forcément distinct des extrémités. Par suite OM_1 et OM_3 sont des droites distinctes de OM_2. D'autres part elles ne peuvent être confondues, il faudrait pour cela que M_1 et M_3 soient les extrémités de l'arc; mais celui-ci serait exceptionnel. Les supports des trois demi-tangentes étant distincts, il y a impossibilité, car l'arc a nécessairement des points de part et d'autre de l'une d'elles.

De la propriété précédente on déduit, qu'un arc du second ordre à tangente partout est de seconde classe, sauf s'il est exceptionnel (auquel cas la classe est trois).

L'arc élémentaire de M. C. Juel est un continu du second ordre à tangente partout, de seconde classe.

---

[1] On voit facilement qu'un arc exceptionnel ne peut être prolongé d'une manière quelconque, sans cesser d'être du second ordre, et qu'il est la somme de deux arcs non exceptionnels.

14. Occupons-nous maintenant de la continuité de la tangente. Soit M un point de $\widehat{AB}$, $\overrightarrow{MT_B}$ la demi-tangente du côté de B et $\overrightarrow{MT_1}$ la demi-droite opposée. On peut trouver sur $\widehat{MB}$ un point P tel que l'angle $T_B MP$ ait une valeur aussi petite qu'on veut ε. L'arc $\widehat{MP}$ est tout entier dans cet angle. Désignons par MQ la projection de $\widehat{MP}$ sur $\overrightarrow{MT_B}$, parallèlement à MP. Q est la projection d'un point M' de $\widehat{MP}$, et l'arc $\widehat{MM'}$ est tout entier dans l'angle $T_B MM'$. Il en résulte que la demi-tangente en M' du côté de A, $\overrightarrow{M'T'_A}$ rencontre le segment MQ en un point θ', et fait avec $\overrightarrow{MT_1}$ un angle φ' au plus égal à ε. Soit M'' un point quelconque de $\widehat{MM'}$. Ce point est intérieur au triangle $M'M\theta'$. On en déduit que la demi-tangente $\overrightarrow{M''T''_A}$ coupe $M\theta'$ entre M et θ', et par suite fait avec $\overrightarrow{MT_1}$ un angle φ'' moindre que φ'.

De là résulte la propriété suivante.

Si un point M' tend vers M, en restant du côté de B [du côté de A], la demi-tangente en M' du côté de A [du côté de B], tend vers la direction opposée à la demi-tangente en M du côté de B [du côté de A], en tournant toujours dans le même sens, quand M' se déplace dans le sens $B-A$ [$A-B$].

Si les deux demi-tangentes en chaque point ont même support, elles sont opposées; la demi-tangente pour chaque côté varie alors d'une manière continue avec le point de contact, en tournant toujours dans le même sens, quand celui-ci parcourt l'arc. C'est la proposition énoncée au n° 12, dont j'indiquerai, pour terminer, les conséquences suivantes, relatives aux arcs du second ordre à tangente partout.

Si en deux points M_1 et M_2 les tangentes sont parallèles, il y a entre M_1 et M_2 un point où la tangente a une direction arbitrairement donnée (distincte de la tangente en M_1).

Si l'arc $\widehat{AB}$ est tout entier dans un triangle APB, il ne peut admettre deux tangentes parallèles; autrement il y aurait entre A et B un point où la tangente est parallèle à la médiane issue de P, et cette tangente ne pourrait laisser A et B d'un même côté.

Continus d'ordre trois.

15. L'étude des continus du troisième ordre va nous retenir plus longtemps. Montrons d'abord qu'un tel continu *a au plus un point de ramification.*

En effet, supposons qu'il en ait deux, A et B. Du point A partent trois arcs simples, sans point commun deux à deux autre que A, qu'on peut prendre assez petits pour que chacun d'eux n'ait sur la droite AB que le point A. Deux au moins de ces arcs $\widehat{AA'}$ et $\widehat{AA''}$ sont d'un même côté de AB. De même il existe deux arcs analogues $\widehat{BB'}$ et $\widehat{BB''}$ situés d'un même côté de AB. Quelle que soit la disposition de ces deux couples d'arcs, on pourra trouver une droite distincte de AB, coupant chacun d'eux. Or ceci est impossible, car on peut évidemment prendre les arcs assez petits pour que deux couples différents n'aient pas de point commun.

Un raisonnement analogue montre qu'en un point de ramification aboutissent au plus quatre arcs. Du théorème II on déduit alors *qu'un continu du troisième ordre est formé de un ou deux arcs de Jordan rectifiables, et présente nécessairement l'une des dispositions figurées sur les cinq shémas suivants.*

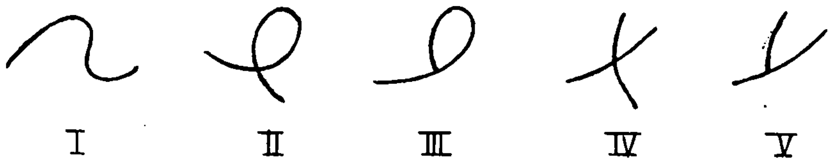


Fig. 1.

Les trois premiers continus seuls sont unicursifs [7], le premier est un arc simple, les deux suivants sont des arcs de Jordan ouverts ayant un point double. Dans les cas II et III la boucle est d'ordre deux [9].

16. Je vais maintenant établir une propriété des arcs du troisième ordre, qui généralisera un théorème dû à M. C. Juel. C'est la suivante.

Théorème IV. *Tout arc d'ordre trois est formé de deux, trois, ou quatre arcs d'ordre deux placés bout-à-bout.*

M. C. Juel a démontré que toute *courbe générale* du troisième ordre a trois inflexions.[1] Mais la courbe qu'il considère est fermée — au sens projectif — et par hypothèse constituée par la réunion d'un nombre fini d'arcs élémentaires (c'est-à-dire d'ordre deux, à tangente partout). Notre résultat s'applique à tout arc du troisième ordre, dont tous les points sont à distance finie. Ceci n'est pas une

[1] C. Juel »Indleding i Læren om de grafiske Kurver» (avec résumé français). Mém. de l'Ac. Roy. des Sc. et des Let. de Danemark. 6e Série. Sect. des Sc. t. X, no 1, 1899, p. 30. (Résumé français p. 81).

restriction, au contraire, car un arc du troisième ordre, au sens adopté dans ce travail, ne fait pas nécessairement partie d'une courbe d'ordre trois de M. C. Juel — même s'il admet une tangente partout. On le voit facilement sur l'exemple suivant.

Soit $\widehat{OCA}$ un arc convexe, tangent en O à la droite OA, et $\widehat{OC'A'}$ son symétrique par rapport à O. L'arc $\widehat{ACOC'A'}$ est du troisième ordre, et il est impossible de le prolonger d'une manière quelconque, sans qu'il devienne d'ordre quatre au moins.

Mais l'intérêt de la proposition annoncée ne se borne pas à la généralisation de celle de M. C. Juel. Il en résultera, en effet, que

Si une courbe d'ordre trois admet une tangente partout, celle-ci varie d'une manière continue avec le point de contact, puisque cette propriété est vraie pour les arcs d'ordre deux. Nous verrons plus loin qu'elle ne peut s'étendre aux courbes d'ordre supérieur [21].

A l'énoncé précédent on peut ajouter que *la demi-tangente pour chaque côté varie d'une manière continue, sauf peut-être en trois points qui sont des points de rebroussement.* Ce nombre peut être réduit à *un* comme on le verra au n° 20.

17. Je ferai la démonstration en deux étapes. La première nous conduira d'ailleurs à un résultat intéressant pour lui-même.

Soit $\widehat{AB}$ un arc du troisième ordre, que nous considérerons comme un arc de Jordan, (L_i) des sécantes le coupant chacune en trois points. Ces points sont simples [théor. III], soient α_i, β_i, γ_i leurs paramètres ($\alpha_i < \beta_i < \gamma_i$). Je vais montrer que si les arcs $\widehat{\alpha_i \gamma_i}$ sont extérieurs les uns aux autres leur nombre ne peut dépasser trois, et pour cela établir qu'entre deux quelconques d'entre eux, il y en a au plus un autre. Les arcs $\widehat{A\alpha_i}$ et $\widehat{\gamma_i B}$ n'ont en commun avec (L_i) que les points α_i et γ_i[1], ils sont de part et d'autre de cette sécante [Théor. III]. D'autre part toute droite rencontrant un segment $\alpha_i \gamma_i$, coupe nécessairement l'arc correspondant $\widehat{\alpha_i \gamma_i}$. Il en résulte que deux droites (L_i) ne peuvent se couper qu'à l'extérieur des deux segmentes $\alpha_i \gamma_i$ — sans quoi l'une d'elles aurait quatre points communs avec l'arc.

---

[1] Nous désignons par la même lettre α_i, β_i, γ_i la valeur du paramètre et le point correspondant. Ce qui est sans inconvénient puisque les points sont simples.

Soient alors $\widehat{\alpha_1\gamma_1}$ et $\widehat{\alpha_3\gamma_3}$ deux arcs, γ_1 précédant α_2.. Je distinguerai deux cas suivant que le contour $\alpha_1\gamma_1\ \alpha_3\gamma_3$ est convexe ou non.

1° *il est convexe.* Nous allons voir qu'il ne peut y avoir d'arc $\widehat{\alpha_i\gamma_i}$ entre $\widehat{\alpha_1\gamma_1}$ et $\widehat{\alpha_3\gamma_3}$. Supposons qu'il y en ait un, et soit (L_2) la sécante correspondante. Les points α_1, γ_1 sont d'un même côté de cette droite, α_3 et γ_3 sont du côté opposé. Par suite (L_2) rencontre chacun des segments $\alpha_1\gamma_3$ et $\gamma_1\alpha_3$ à son intérieur. Désignons respectivement par λ et μ les points d'intersection. L'arc $\widehat{\gamma_1\alpha_3}$ ne peut avoir de point à l'intérieur du quadrilatère $\alpha_1\gamma_1\ \alpha_3\gamma_3$, sans quoi une droite passant par un de ces points et rencontrant les segments $\alpha_1\gamma_1$ et $\alpha_3\gamma_3$ couperait l'arc $\widehat{\alpha_1\gamma_3}$ en trois points, en laissant α_1 et γ_3 d'un même côté, ce qui est impossible [Théor. III]. Le segment $\alpha_2\gamma_2$ est donc par rapport à μ du côté opposé à λ; il sera de même sens que $\lambda\mu$ ou de sens opposé. Dans le premier cas, considérons la droite joignant les milieux de $\alpha_1\gamma_1$ et $\alpha_2\gamma_2$, elle laisse α_1 et α_3 d'un même côté, et comme elle coupe nécessairement les arcs $\widehat{\alpha_1\gamma_1}$, $\widehat{\gamma_1\alpha_2}$ et $\widehat{\alpha_2\alpha_2}$, il y a impossibilité. Si $\alpha_2\gamma_2$ était de même sens que $\mu\lambda$, on joindrait les milieux de $\alpha_2\gamma_2$ et $\alpha_3\gamma_3$.

2° Supposons le quadrilatère $\alpha_1\gamma_1\ \alpha_3\gamma_3$ *non convexe.* $\alpha_1\gamma_1\ \gamma_3\alpha_3$ est alors convexe. Comme plus haut on verrait qu'une sécante (L_2), telle que $\widehat{\alpha_2\gamma_2}$ soit entre $\widehat{\alpha_1\gamma_1}$ et $\widehat{\alpha_3\gamma_3}$, rencontre chacun des segments $\alpha_1\alpha_3$ et $\gamma_1\gamma_3$ à son intérieur. Désignons par λ' et μ' respectivement les points d'intersection. Si le segment $\alpha_2\gamma_2$ est de même sens que $\mu'\lambda'$, les quadrilatères $\alpha_1\gamma_1\ \alpha_2\gamma_2$ et $\alpha_2\gamma_2\ \alpha_3\gamma_3$ sont convexes. En effet $\alpha_1\gamma_1\mu'\lambda'$ et $\mu'\lambda'\alpha_3\gamma_3$ le sont, or les quatre points $\gamma_2\alpha_2\mu'\lambda'$ sont d'un même côté de (L_1) et aussi de (L_3). Il résulte alors de l'étude du cas précédent qu'il n'y a pas d'autre $\widehat{\alpha_i\gamma_i}$ que $\widehat{\alpha_2\gamma_2}$ entre $\widehat{\alpha_1\gamma_1}$ et $\widehat{\alpha_3\gamma_3}$. Je vais montrer que si $\alpha_2\gamma_2$ est de même sens que $\lambda'\mu'$, il y a impossibilité. Examinons successivement les circonstances qui peuvent se produire.

a) γ_2 est extérieur au segment $\lambda'\mu'$. On pourrait alors trouver une sécante coupant les segments $\alpha_1\gamma_1$ et $\alpha_2\gamma_2$, laissant α_1 et α_3 d'un même côté. Ceci est impossible car cette sécante couperait aussi $\widehat{\gamma_1\alpha_2}$.

b) γ_2 appartient au segment $\lambda'\mu'$, mais α_2 est extérieur. On couperait dans ce cas par une sécante rencontrant les segments $\alpha_2\gamma_2$ et $\alpha_3\gamma_3$, laissant α_1 et γ_3 d'un même côté. Il y a encore contradiction, car l'arc $\widehat{\alpha_1\gamma_3}$ serait rencontré en trois points.

c) α_2 et γ_2 appartiennent tous les deux au segment $\lambda' \mu'$. On pourrait alors trouver une sécante rencontrant les segments $\alpha_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \gamma_2$, $\alpha_3 \gamma_3$, et les arcs $\widehat{\gamma_1 \alpha_2}$ et $\gamma_2 \alpha_3$. Ce qui est encore impossible.

La démonstration est donc achevée.

Le résultat obtenu dans ce numéro peut encore s'énoncer ainsi:

Si l'on partage un arc du troisième ordre en quatre arcs partiels, l'un au moins est convexe.

18. Il est facile maintenant d'établir le théorème du n° 15. Tout d'abord, on peut trouver sur $\widehat{AB}$ un point C, tel que $\widehat{AC}$ soit du second ordre.[1] En effet, supposons qu'il en soit autrement. $\widehat{AB}$ étant d'ordre trois, il existe une sécante (L_1), le coupant en trois points α_1, β_1, γ_1, de manière que l'arc $\widehat{\alpha_1 \gamma_1}$ soit intérieur à $\widehat{AB}$ — sans quoi cet arc serait d'ordre deux [9]. De même, $\widehat{A\alpha_1}$ étant du troisième ordre, il existe une sécante (L_2), le coupant en trois points α_2, β_2, γ_2, de manière que $\widehat{\alpha_2 \gamma_2}$ soit intérieur à $\widehat{A\alpha_1}$, et ainsi de suite. On voit qu'on pourra former une suite infinie de sécantes (L_i), telles que les arcs $\widehat{\alpha_i \gamma_i}$ soient extérieurs les une aux autres. Or ceci est impossible.

Soit donc C_1 la borne, du côté de B des arcs $\widehat{AC}$ du second ordre. $\widehat{AC_1}$ est du second ordre [9]; et de plus, quel que soit M entre C_1 et B, l'arc $\widehat{AM}$ est du troisième ordre. *On pourra donc former sur $\widehat{AB}$ une suite d'arcs convexes bout à bout, $\widehat{AC_1}$, $\widehat{C_1 C_2}$, $\widehat{C_2 C_3}, \ldots$, tels que chacun d'eux devienne d'ordre trois aussi peu qu'on le prolonge du côté de B.* Je vais montrer que C_4, au plus tard, sera confondu avec B.

Supposons C_4 distinct de B. Prenons entre C_4 et B un point C'_4. L'arc $\widehat{C_3 C'_4}$ est d'ordre trois. On peut trouver entre C_3 et C_4 un point C'_3, tel que l'arc $\widehat{C'_3 C'_4}$ soit d'ordre trois — sans quoi $\widehat{C_3 C'_4}$ serait convexe. De la même manière on pourra prendre successivement entre C_2 et C_3, entre C_1 et C_2, des points C'_2 et C'_1, tels que les arcs $\widehat{C'_2 C'_3}$ et $\widehat{C'_1 C_2}$ soient d'ordre trois. On aurait alors, sur $\widehat{AB}$, quatre arcs consécutifs $\widehat{AC'_1}$, $\widehat{C'_1 C'_2}$, $\widehat{C'_2 C'_3}$, $\widehat{C'_3 C'_4}$, du troisième ordre, ce qui ne peut être.

En définitive nous avons bien obtenu la proposition énoncée au n° 16:

[1] Les notations sont les mêmes qu'au n° précédent.

Tout arc du troisième ordre est la somme de deux, trois, ou quatre arcs convexes placés bout-à-bout.[1]

19. Le théorème précédent permet d'opérer facilement la classification des continus d'ordre trois suivant le nombre et la disposition des arcs convexes qui les composent, et de déterminer, dans chaque cas, les singularités et la classe — en supposant que les arcs convexes ont une tangente partout. Je m'en abstiendrai, pour ne pas allonger la rédaction de ce travail, dont l'objet est surtout l'étude des propriétés différentielles.

Il sera pourtant indispensable, pour la suite, de considérer un cas particulier.

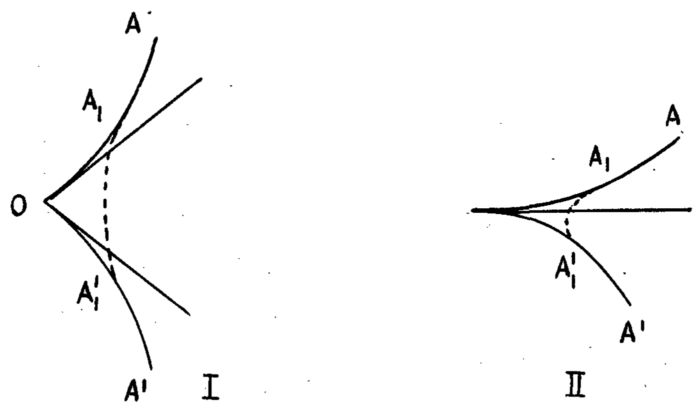
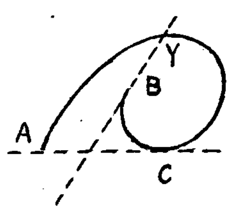


Fig. 2.

Soient d'abord $\widehat{OA}$ et $\widehat{OA'}$ deux arcs convexes à tangente partout, assemblés de manière à former ce que M. C. Juel appelle une *épine*, c'est-à-dire comme il est indiqué sur la figure ci-dessus.

Le n° I est un *point anguleux de première espèce*, le n° II un *point de rebroussement de première espèce.* Dans les deux cas on peut faire disparaître la discontinuité dans la variation de la demi-tangente, par un *raccordement.* Cette opération consiste à prendre deux points A_1 et A'_1 voisins de O, respectivement

[1] Il faut remarquer que la décomposition en arcs convexes, mise en évidence par l'étude précédente, peut varier si l'on change le sens de parcours sur l'arc. Comme on le voit sur la fig. ci-contre.



Dans le sens $\widehat{AB}$, on a les arcs $\widehat{AC}$ et $\widehat{CB}$, dans le sens BA, les arcs $\widehat{B\gamma}$ et $\widehat{\gamma A}$.

On voit de plus qu'un point C peut être intérieur à un arc convexe. (On pourrait montrer que ceci a lieu pour *un* des points C au plus).

sur $\widehat{OA}$ et $\widehat{OA'}$, et à remplacer l'arc $\widehat{A_1OA'_1}$ par un arc convexe $\widehat{A_1A'_1}$, tangent en ses extrémités à $\widehat{OA}$ et $\widehat{OA'}$.

Ce raccordement fait apparaître deux inflexions, on voit facilement qu'il ne peut augmenter l'ordre d'une courbe dont ferait partie $\widehat{AOA'}$. (On peut d'ailleurs choisir A_1 et A'_1 assez voisins de O, pour que l'ordre reste le même).[1]

20. Ceci posé, considérons un *arc* $\widehat{AB}$ *du troisième ordre, à tangente partout, sauf peut-être au point* O, *qui est une épine* (S'il y a une tangente en O, l'épine est un rebroussement). *Je dis qu'on peut mener à cet arc au plus trois tangentes parallèles à une même direction.*[2]

Je ferai la démonstration dans le cas d'un point anguleux. On verra facilement quelles modifications de langage il faudrait y apporter dans le cas d'un rebroussement. Remarquons que *l'arc ne peut avoir de rebroussement en dehors de* O. Ce rebroussement serait nécessairement de première espèce [Th. III. B], au moyen de deux raccordements on ferait apparaître quatre inflexions; ce qui est impossible.

Soient Ox et Oy les demi-tangentes en O à $\widehat{OA}$ et $\widehat{OB}$, Ox' et Oy' respectivement les demi-droites opposées. Prenons sur $\widehat{OA}$ une point M, distinct des extrémités, et intérieur à l'angle xOy'. Une droite passant par M et un point de Ox, voisin de O, coupe l'arc $\widehat{AB}$ en trois points distincts des extrémités. Par suite la droite traverse l'arc en chacun de ces points [Théor. III]. Il en résulte que les arcs $\widehat{OM}$ et $\widehat{OB}$ sont du côté de Ox et Oy par rapport à la droite OM, et que l'arc $\widehat{AM}$ est de l'autre. De la même manière prenons un point P sur $\widehat{OB}$, distinct des extrémités et intérieur à yOx'. Les arcs $\widehat{AO}$ et $\widehat{OP}$ sont du côté de Ox et Oy par rapport à la droite OP, et $\widehat{PB}$ est de l'autre. En faisant tendre M vers O, on voit que l'arc $\widehat{AO}$ est tout entier intérieur à l'angle xOy'. Pour la même raison $\widehat{OB}$ est intérieur à yOx'.

Je vais établir maintenant que l'arc $\widehat{AB}$ se compose de trois arcs convexes au plus. Supposons que l'un des arcs $\widehat{OA}$ et $\widehat{OB}$, le second, pour fixer les idées,

---

[1] Cf. C. Juel, mém. cité, p. 36 et suiv. — D'ailleurs la possibilité et les propriétés du raccordement résultent immédiatement de la proposition énoncée à la fin du n° 12.

[2] On peut même affirmer que l'arc $\widehat{AB}$ est de troisième classe, sauf le cas exceptionnel où la corde AB est tangente aux extrémités de l'arc.

ne soit pas convexe. Il existe alors, sur cet arc, un point C, tel que $\widehat{OC}$ soit convexe et devienne du troisième ordre aussi peu qu'on le prolonge du côté de B. Je dis que *C est un point d'inflexion.* C'est évident si la tangente en C est confondue avec OC (il suffit de prendre P en C). Plaçons-nous dans l'hypothèse contraire et soit TT' la tangente en C. Si ce point n'est pas d'inflexion, on peut trouver sur $\widehat{CB}$ un point C', tel que $\widehat{CC'}$ soit convexe, et, par rapport à TT', du même côté que $\widehat{OC}$. La droite OC' rencontre TT' en un point D, tel que C' soit entre O et D. L'arc $\widehat{OC'}$ étant par rapport à la droite OC' du même côté que Ox et Oy, $\widehat{CC'}$ est intérieur au triangle $CC'D$. Si $\widehat{OC'}$ était d'ordre trois, il y aurait une sécante le rencontrant en trois points, distincts des extrémités. Cette droite couperait le segment OC' à son intérieur, car elle traverserait $\widehat{OC'}$ en trois points. Or on voit immédiatement qu'une droite, menée par un point intérieur au segment OC', rencontre chacun des arcs $\widehat{OC}$ et $\widehat{CC'}$ en un point au plus. Il y a donc impossibilité.

Si donc l'un des arcs, $\widehat{OB}$ par exemple, est du troisième ordre, il y a sur cet arc un point C tel que $\widehat{OC}$ soit convexe, C étant un point d'inflexion. Je dis qu'alors les arcs $\widehat{OA}$ et $\widehat{CB}$ sont convexes, ce dernier admettant au plus une tangente parallèle à une direction donnée.

Faisons disparaître la discontinuité dans la variation de la demi-tangente en O, par un raccordement $\widehat{A'B'}$, B' étant choisi entre O et C. Nous obtiendrons ainsi, sur $\widehat{AB}$, trois inflexions A', B' et C. Or un arc convexe de $\widehat{AB}$ ayant pour extrémité droite une inflexion devient du troisième ordre aussi peu qu'on le prolonge vers la droite. Il en résulte que les quatre arcs $\widehat{AA'}$, $\widehat{A'B'}$, $\widehat{B'C}$, $\widehat{CB}$ sont convexes [18], et ceci quels que soient A' et B', $\widehat{AO}$ et $\widehat{OC}$ le sont donc aussi [9].

Comme C est un point d'inflexion, $\widehat{CB}$ est par rapport à TT' du côté opposé à $\widehat{OC}$. On en déduit que $\widehat{CB}$ est intérieur au triangle COB. Par suite il admet au plus une tangente parallèle à une direction donnée [14].

Il suffit donc, pour achever la démonstration, d'établir que si $\widehat{AO}$ et $\widehat{OB}$ sont convexes, on peut mener à $\widehat{AB}$ deux tangentes parallèles au plus. C'est ce que nous allons faire maintenant.

On a vu que $\widehat{AO}$ et $\widehat{OB}$ sont respectivement intérieurs à xOy' et yOx', par suite aucun d'eux n'est exceptionnel. D'autre part on voit immédiatement que $\widehat{OB}$ n'a aucun point commun avec la droite OA, et se trouve, par rapport à cette droite, du même côté que $\widehat{OA}$. Il en résulte que le segment AB rencontre les demi-droites Ox et Oy en deux points que je désignerai par α et β, α est entre A et β. Si $\widehat{OA}$ et $\widehat{OB}$ sont respectivement intérieurs aux triangles $A\alpha O$ et $B\beta O$, la propriété est vérifiée [14]. Dans le cas contraire l'un au plus des arcs $\widehat{OA}$ et $\widehat{OB}$ le second, par exemple, a des points extérieurs au triangle correspondant, sans quoi la corde AB couperait l'arc en quatre points. Supposons qu'on puisse mener trois tangentes parallèles à une direction (L). Comme $\widehat{OA}$ ne peut admettre deux tangentes parallèles, $\widehat{OB}$ en possède nécessairement deux — puisque $\widehat{OB}$ n'est pas exceptionnel — et $\widehat{OA}$ la troisième. Soit B' le point de $\widehat{OB}$ où la tangente est parallèle à la corde OB. B' est compris entre les points de $\widehat{OB}$ où la tangente est parallèle à (L) [14]. Par suite la parallèle à cette direction, menée par O, appartient à l'angle yOB.[1] Il en résulte que si, par un point M de $\widehat{AO}$, distinct des extrémités, et par conséquent intérieur au triangle $AO\alpha$, on mène la parallèle à (L), cette droite rencontre le segment OA entre O et A. Elle ne peut donc être tangente.

C. q. f. d.

21. Je terminerai ce Chapitre par l'exemple d'une *courbe du quatrième ordre, sans rebroussement, dont la tangente, existant partout, ne varie pas d'une manière continue.*

Considérons un segment LB_1 et son milieu A_1. Traçons les deux demi-cercles (α) et (β) ayant respectivement pour diamètre LA_1 et LB_1, et situés d'un même côté par rapport à LB_1. Soit O le centre de (α). De B_1 menons la tangente à (α), soit A_2 le point de contact. Le rayon OA_2 coupe (β) en B_2. De B_2 me-

---

[1] En effet, soit P un point de $\widehat{OB'}$, Ot la demi-droite parallèle et de même sens à la demi-tangente en P, du côté de B. Lorsque P décrit $\widehat{OB'}$, Ot tourne dans le même sens en partant de Oy pour arriver sur OB, et non sur la direction opposée, car $\widehat{OB'}$ est tout entier dans le triangle formé par la tangente en B', Oy et OB'. Il en résulte que Ot reste bien dans l'angle moindre que π, formé par Oy et OB, sans quoi Ot passerait par deux positions opposées, et $\widehat{OB'}$ admettrait deux tangentes parallèles, ce qui est impossible.

nons la tangente à l'arc $\widehat{A_2 L}$ de (α), soit A_3 le point de contact. Le rayon OA_3 coupe (β) en B_3, et ainsi de suite. Nous formons de cette manière un contour polygonal $A_1 B_1 A_2 B_2 \cdots A_n B_n \cdots$, ayant pour point limite L. On voit sans peine qu'une sécante coupe ce contour en quatre points au plus, à moins qu'elle ne soit confondue avec le support d'un des côtés, auquel cas elle coupe le contour en moins de deux points en dehors de ce côté. — Il suffit, par exemple, de considérer les sécantes issues d'un point I de la droite LB_1, en examinant tous les cas possibles: I extérieur à LB_1, I entre L et O, I entre O et B_1, et les ces intermédiaires. Pour les sécantes parallèles à LB_1, il n'y a pas de difficulté.

Soit maintenant (λ_i) l'arc de parabole bitangent aux droites $A_i B_i$ et $A_{i+1} B_i$, en A_i et A_{i+1}. Considérons l'arc (λ), formé par la réunion de (λ_1), $(\lambda_2), \ldots$ $(\lambda_n), \ldots$, auxquels on ajoute le point (L). Cet arc est d'ordre quatre, car une sécante ne peut rencontrer un (λ_i) sans couper la ligne brisée $A_i B_i A_{i+1}$ en un nombre égal de points. Il y a exception pour les droites portant un côté du contour; mais de ce qui précède il résulte que ces droites coupent (λ) en trois points au plus.

L'arc (λ) possède une infinité de points anguleux de première espèce A_2, $A_3, \ldots, A_n, \ldots$, qu'on peut faire disparaître par des raccordements. On obtient, en définitive, un arc (λ') du quatrième ordre à tangente partout. Au point L la tangente est perpendiculaire à LA_1, or il y a des tangentes parallèles à cette droite, dont les points de contact sont aussi voisins de L que l'on veut.

22. Nous avons donc établi que, contrairement à ce qui a lieu pour les courbes d'ordre moindre, un arc simple du quatrième ordre peut avoir une tangente partout, sans que celle-ci varie d'une manière continue avec le point de contact.

Dans l'exemple précédent, la tangente est discontinue au seul point L. Il serait intéressant de déterminer, dans le cas général, la nature de l'ensemble des points où la tangente est discontinue. Pour un arc simple du quatrième ordre (à tangente partout) cet ensemble n'est dense sur aucun arc partiel.[1] Il est probable que la propriété se conserve pour les arcs d'ordre supérieur.

---

[1] Sur tout arc simple d'ordre quatre, il y a un arc partiel d'ordre deux.

CHAPITRE III.

Continus gauches d'ordre trois et quatre.

23. L'étude complète des continus gauches d'ordre assez petit pour que leurs ramifications soient nécessairement en nombre fini, paraît plus difficile que celle des continus plans d'ordre deux et trois, et demanderait de nouvelles recherches. On peut cependant, par des projections convenables, déduire des résultats obtenus plus haut, des propriétés importantes pour les continus des troisième et quatrième ordre — il n'y a évidemment pas de continu gauche d'ordre deux — ces propriétés, qui porteront sur la tangente et sur le plan osculateur, font l'objet du présent Chapitre. On y trouvera, en particulier, l'énoncé des conditions strictement nécessaires pour qu'un continu d'ordre trois soit un *arc élémentaire gauche*[2] de M. C. Juel, c'est-à-dire possède une tangente et un plan osculateur variant d'une manière continue avec le point de contact.

24. Il sera commode pour la suite, d'étudier d'abord les propriétés des plans tangents à un cône d'ordre trois au plus.

Considérons un arc simple (l) et un point S extérieur à l'arc. Le cône $[(l), S]$ est l'ensemble des droites joignant les points de (l) au sommet S. Le cône sera dit simple, si aucune corde de (l) ne passe par S. L'ordre d'un cône sera, par définition, la limite supérieure du nombre de ses génératrices contenues dans un plan quelconque passant par son sommet.

Ceci posé, on voit immédiatement que:

1°. Si (l) — plan ou gauche — est d'ordre k, le cône $[(l), S]$ est d'ordre k au plus; si (l) et S appartiennent à un même arc d'ordre k, le cône est d'ordre $k-1$ au plus,

2°. la section d'une cône d'ordre k, par un plan ne contenant pas le sommet, qui n'est parallèle à aucune génératrice, est un arc d'ordre k, sans point à l'infini; si de plus le cône est simple, l'arc est simple.

En partageant au besoin (l) en arcs partiels, et en coupant les cônes obtenus par des plans convenables, on sera, pour chacun d'eux, dans le cas précédent, ce qui permet de déduire des n^{os} 10 et 16, les propositions suivantes.

Un cône simple d'ordre borné admet un plan tangent, sauf peut-être le long d'une infinité dénombrable de génératrices au plus.

---

[2] C. Juel »Die gewundenen Kurven vom maximal Index auf e. Regel fl. zw. Ordnung». Mém. de l'Ac. Roy. de Danemark. Sect. des Sc. 8e. S. t. II, no. 5, p. 280.

Si un cône simple, d'ordre deux ou trois, possède un plan tangent partout, celui-ci varie d'une manière continue avec la génératrice.

25. Il résulte de la proposition précédente, que la continuité de la tangente à un arc du troisième ordre au plus, ayant une tangente partout, subsiste si la courbe a des points à l'infini.

Avant d'aborder l'étude des continus gauches du troisième ordre, je voudrais indiquer rapidement de quelle manière on peut, plus généralement, étendre aux *continus projectifs plans* d'ordre borné — auxquels il a été fait allusion au début de ce travail — les résultats obtenus pour les continus bornés. On passera par l'intermédiaire des *faisceaux continus de droites concourrantes.* La définition de tel faisceaux est calquée sur celle des continus plans, en remplaçant les notions de point et de distance, respectivement par celle de droite passant par un point fixe — le sommet — et d'angle. L'ordre d'une faisceau est la limite supérieure du nombre de ses droites, situées dans un plan quelconque, contenant le sommet. Un continu projectif plan d'ordre k sera par définition la section plane d'un faisceau continu de même ordre.

Ceci posé, voici comment se fera l'extension. En raisonnant comme au n° 2, on montre facilement qu'un trièdre découpe dans un faisceau continu de même sommet, et d'ordre k, un nombre limité — inférieur à $3k$ — de faisceaux continus, et exceptionnellement de droites isolées. La trace de chacun de ces faisceaux sur un plan coupant les trois arètes du trièdre — et non leurs prolongements — en dehors du sommet, sera un continu plan auquel s'appliqueront les résultats des Chapitres précédents.

Je n'insiste pas, et je passe à l'étude des continus gauches du troisième ordre.

Continus gauches d'ordre trois.

26. Soit (E) un tel continu. Je dis qu'il n'a pas de ramification. En effet, supposons qu'il en ait une, en A. Prenons sur (E) deux points B et C; ils déterminent avec A un plan (P) — car (E) ne peut évidemment avoir trois points alignés. En A aboutissent au moins trois arcs simples, sans point commun deux à deux autre que A, et qu'on peut choisir assez petits pour que chacun d'eux ait tous ses points, distincts de A, d'un même côté du plan — puisque ces arcs ont avec le plan trois points communs au plus. Deux au moins sont d'un même côté de (P), on pourra donc trouver un plan, passant par BC, et coupant chacun de ces arcs en dehors de A, c'est-à-dire (E) en quatre points, ce qui est impossible. On déduit alors du Théorème II et des n^os^ 9 et 10, que

Tout continu gauche du troisième ordre est un arc simple rectifiable ouvert, ayant une tangente sauf aux points d'un ensemble au plus dénombrable.

On peut même affirmer que *si la tangente existe partout, elle varie d'une manière continue.*

27. Pour le démontrer, je vais commencer par établir deux propriétés des tangentes à un arc gauche d'ordre trois. Ces propriétés nous servirons aussi dans l'étude du plan osculateur, les voici:

Soit $\widehat{AB}$ *un arc du troisième ordre à tangente partout. — C'est-à-dire tel qu'en chacun de ses points les deux demi-tangentes aient même support*[1] —

1° *la tangente en un point compris entre* A *et* B *ne peut rencontrer l'arc en dehors des extrémités,*

2° *l'arc ne peut avoir deux tangentes dans un même plan, dont les points de contact soient compris entre* A *et* B.

Nous utiliserons une remarque évidente:

Si un plan variable (Q) a pour limite un plan (Q_0), deux points fixes situés, quel que soit (Q) assez voisin de (Q_0), d'un même côté [de part et d'autre] de (Q), ne peuvent être de part et d'autre [d'un même côté] de (Q_0).

1°. Considérons d'abord la première partie. Supposons que la tangente en un point P, distinct des extrémités, rencontre l'arc en un point P', situé, par exemple, entre P et B. Prenons sur l'arc $\widehat{PP'}$ un point P'', entre P et P', il détermine avec eux un plan (Q_0). Ce plan traverse l'arc en P, P'' et P' [Théor. III]. Par suite deux points M_1 et M_2 respectivement intérieurs aux arcs $\widehat{AP}$ et $\widehat{PP''}$ sont de part et d'autre de (Q_0). Je dis que ceci est impossible. En effet, soit M un point de l'arc voisin de P. Lorsque M tend vers P, le plan (Q), passant par M, P et P'' a pour limite (Q_0). Or (Q) traverse $\widehat{AB}$ en chacun des points M, P et P''. Par suite, si M est assez voisin de P, les points M_1 et M_2 sont d'un même côté de (Q), ils ne peuvent donc être de part et d'autre de (Q_0).

2°. Passons maintenant à la seconde partie. Supposons que les tangentes en deux points P et P', distincts des extrémités, soient dans le même plan, P' étant, par exemple, entre P et B. D'après ce qui précède, les tangentes en P et P' ne peuvent être ni confondues, ni l'une contenir le point de contact de l'autre. Elles déterminent un plan (R_0). Soient M_1, M_2, M_3, trois points de $\widehat{AB}$ res-

[1] L'existence de points de rebroussement n'est pas écartée à priori. Nous verrons au n° 29 qu'il ne peut y en avoir.

pectivement intérieurs aux arcs $\widehat{AP}$, $\widehat{PP'}$, $\widehat{P'B}$, et situés en dehors de (R_0). Prenons sur $\widehat{AB}$ un point M voisin de P. Quand M tend vers P, le plan (R), défini par les points M, P, P' a pour limite (R_0) — car la tangente en P ne passe pas par P'. — Or $\widehat{AB}$ traverse (R) en chacun des points M, P, P'. Par suite, si M est assez voisin de P, M_1 et M_2 sont d'un même côté de (R) et M_3 de l'autre. Les points M_1 et M_2 sont donc d'un même côté de (R_0) et M_3 de l'autre, puisqu'aucun d'eux n'est sur le plan. En intervertissant le rôle de P et P' on trouverait que M_1 et M_2 sont de part et d'autre de (R_0). Il y a donc contradiction.

Il résulte de la proposition qui vient d'être établie, que, à l'intérieur de $\widehat{AB}$, il ne peut y avoir deux points à tangentes parallèles. Il y a donc au plus un point A' [un point B'], où la tangente est parallèle à la tangente en A [en B]. On voit alors *qu'il est possible de partager* $\widehat{AB}$ *en quatre arcs partiels, de manière que chacun d'eux ne puisse avoir deux tangentes parallèles, les tangentes aux extrémités comprises.*

28. La continuité de la tangente s'établira aisément. Soit encore $\widehat{AB}$ un arc du troisième ordre à tangente partout, et P un point de cet arc. Prenons sur $\widehat{AB}$ deux points S et S' distincts de P, et situés en dehors de la tangente en ce point. D'après la première propriété établie au n° précédent, on peut trouver un arc partiel (l), de $\widehat{AB}$, ayant le point P *à son intérieur* — ou bien, si P est confondu avec A ou B, comprenant le point P — et tel que la tangente en un point quelconque de (l), ne passe ni par S ni par S'. Le plan tangent au cône $[(l), S]$, en chaque point M de (l), est donc bien déterminé par la tangente à (l) en ce point et la génératrice SM. Or $[(l), S]$ est un cône simple du second ordre; par suite ce plan tangent varie d'une manière continue avec SM et par conséquent avec M. Il en est de même du plan tangent au cône $[(l), S']$. Si l'on a pris S' en dehors du plan tangent à $[(l), S]$ en P, les plans tangents en ce point aux deux cônes sont distincts, et l'on peut choisir (l) assez petit, pour qu'il en soit de même en un point quelconque de (l). En définitive, lorsque M parcourt (l), les plans tangents en ce point aux deux cônes sont distincts et varient d'une manière continue, par suite leur intersection, la tangente à (l).

29. Prenons (l) assez petit pour que la trace (λ) du cône $[(l), S]$ sur un plan (Π), perpendiculaire à SP, et ne passant pas par S, n'ait pas de point à l'infini. (λ) sera un arc convexe à tangente partout. En chaque point M de (l),

menons la demi-tangente MT, dans le sens de A vers B, par exemple. Sa perspective, du point S, sur (Π), est la demi-tangente à (λ) pour un côté déterminé. Celle-ci variant d'une manière continue [14], il en est nécessairement de même de MT, car le support de cette demi-droite varie continuement et ne passe jamais par S.

En résumé

Si un arc gauche du troisième ordre possède une tangente partout, la demi-tangente pour chaque côté varie d'une manière continue avec le point de contact.

Il en résulte qu'un tel arc ne peut avoir de rebroussement, ce qui est vrai d'ailleurs pour tout arc du troisième ordre. On le voit immédiatement en faisant une perspective d'un point de l'arc.

30. Occupons-nous du plan osculateur. Je supposerai dorénavant que *l'arc* $\widehat{AB}$ *possède une tangente partout.* On sait [10^{bis}] *qu'il existe en tout point de l'arc un plan osculateur pour chaque côté. Ces plans traversent la courbe au point de contact.* Démontrons-le pour le plan osculateur à droite, par exemple. Soit M un point de $\widehat{AB}$, MT la tangente en M, et M' un point de $\widehat{MB}$. Le plan osculateur à droite est la limite du plan $[MT, M']$, quand M' tend vers M. Prenons un point M'' entre M et M'. L'arc traverse le plan $(MM''M')$ aux trois points M, M', M''[1] [Théor. III]. Si l'on fait tendre M'' vers M, M' restant fixe, on obtient le plan $[MT, M']$, par rapport auquel les arcs $\widehat{AM}$ et $\widehat{MM'}$ sont d'un même côté, $\widehat{M'B}$ étant du côté opposé. Il suffit ensuite de faire tendre M' vers M.

31. On définit encore le plan osculateur à droite [à gauche] en un point M, comme la limite du plan mené par la tangente MT, parallèlement à la tangente en un point voisin, pris à droite [à gauche]. Je vais montrer que, pour un arc du troisième ordre à tangente partout, cette définition est équivalente à celle adoptée plus haut [10^{bis}].

Projetons orthogonalement $\widehat{AB}$ sur un plan (Π), perpendiculaire à MT, et désignons la projection d'un point par la minuscule correspondante. La trace du plan osculateur à droite en M — considéré comme limite d'un plan $[MT, M']$ — sur le plan (Π), est le support de la demi-tangente $m\theta$ en m, l'arc $\widehat{mb}$. On peut choisir sur $\widehat{MB}$ un point M_1, tel que l'arc $\widehat{MM_1}$ n'ait, en dehors de M, aucune tangente parallèle à MT. Il en résulte que l'arc $\widehat{mm_1}$ est un arc du

[1] M est distinct de A, sans quoi la question ne se poserait pas.

troisième ordre à tangente partout, celle-ci varie donc d'une manière continue. Par suite $m't'$ tend vers $m\theta$ quand M' tend vers M. Or le plan mené par MT parallèlement à $M'T'$ a pour trace sur (Π) la parallèle à $m't'$ menée par M. Cette trace a donc pour limite $m\theta$.

32. Cette seconde définition du plan osculateur, par la considération de l'indicatrice des tangentes, va nous conduire à des résultats importants. Je supposerai que *l'arc* $\widehat{AB}$ *admet au plus une tangente parallèle à une droite donnée* — s'il en était autrement, ou a vu au n° 27, qu'on pourrait le partager en quatre arcs partiels jouissant de cette propriété.

Ceci posé, menons par un point fixe O, le vecteur $\overrightarrow{O\mu}$ égal au vecteur unitaire de la demi-tangente à droite en M — pour le point B, on prendra le vecteur opposé au vecteur unitaire de la demi-tangente à gauche. — Cette demi-tangente variant d'une manière continue avec M, le point μ décrit un arc $\widehat{\alpha\beta}$: l'indicatrice des tangentes. Comme $\widehat{AB}$ n'admet pas deux tangentes parallèles $\widehat{\alpha\beta}$ est un arc simple, et le cône $[\widehat{\alpha\beta}, O]$ un cône simple. De plus la correspondance M et μ étant biunivoque et continue dans le sens $M-\mu$, est bicontinue. Cette remarque nous servira au n° suivant.

Le plan osculateur à droite [à gauche] en M est parallèle au plan tangent à droite [à gauche] au cône $[\widehat{\alpha\beta}, O]$, le long de la génératrice du point μ. Je dis que ce cône est au plus du quatrième ordre, c'est-à-dire *que l'arc* $\widehat{AB}$ *admet au plus quatre tangentes parallèles à un même plan.* Il résultera alors du n° 24, que *l'ensemble des points pour lesquels les deux plans osculateurs sont distincts est au plus dénombrable*, et cette propriété sera vraie pour un arc quelconque du troisième ordre à tangente partout.

Supposons que l'arc $\widehat{AB}$ admette cinq tangentes parallèles à un même plan. Soit M le point de contact de l'une d'elles, distinct des extrémités. Comme au n° précédent, projetons orthogonalement l'arc $\widehat{AB}$ sur un plan (Π) perpendiculaire à MT, et conservons les mêmes notations. $\widehat{AB}$ n'ayant qu'une seule tangente perpendiculaire à (Π), sa projection $\widehat{ab}$ possède en tout point autre que m deux demi-tangentes opposées. Soient $m\theta$ et $m\theta'$ les demi-tangentes en m, ce sont les traces des plans osculateurs; par suite elles sont traversées par $\widehat{ab}$. D'autre part elles ne peuvent être opposées, car au voisinage de M les points de $\widehat{AB}$ sont d'un même côté du plan tangent en M, passant par un autre point de l'arc, distinct des extrémités [27.1°]. Le point m est donc une *épine* pour $\widehat{ab}$. Cette projection se trouve alors dans les conditions du n° 20. Par suite on peut lui mener au plus trois tangentes parallèles, et par conséquent $\widehat{AB}$ ne peut admettre plus de trois tangentes parallèles à un plan perpendiculaire à (Π), en dehors de MT. Il y a donc contradiction.

On déduit encore de cette étude la proposition suivante

S'il existe en un point M, un seul plan tangent traversé par la courbe, c'est le plan osculateur unique en ce point, et réciproquement.

En effet, dans ce cas, l'épine en m est nécessairement un rebroussement.

33. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où *les deux plans osculateurs en chaque point sont confondus.* Si le cône $[\widehat{\alpha\beta}, O]$ est du troisième ordre, son plan tangent en μ varie d'une manière continue avec ce point [24], et par suite avec M. Il en résulte que *le plan osculateur en M à $\widehat{AB}$ varie d'une manière continue avec le point de contact.*

Je vais montrer qu'on peut partager l'arc $\widehat{AB}$ en un nombre fini d'arcs partiels $\widehat{AL_1}$, $\widehat{L_1 L_2}, \ldots$, tels que les cônes correspondants $[\widehat{\alpha\lambda_1}, O]$, $[\widehat{\lambda_1\lambda_2}, O], \ldots$ soient au plus du troisième ordre. La continuité du plan osculateur sera alors établie pour un arc quelconque du troisième ordre, car l'hypothèse relative à $\widehat{AB}$, formulée au début du n° précédent — à savoir que cet arc admet au plus une tangente parallèle à une droite donnée — n'apporte aucune restriction [27].

Il faudra démontrer une proposition préliminaire, intéressante d'ailleurs par elle même:

Si $\widehat{AB}$ admet quatre tangentes parallèles à un plan (P), aux points M_1, M_2, M_3, M_4, et quatre tangentes parallèles à un plan (P'), aux points M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, les M et les M' étant sur $\widehat{AB}$ dans l'ordre des indices, les arcs $\widehat{M_1 M_4}$ et $\widehat{M'_1 M'_4}$ ne peuvent être sans point commun.

Supposons qu'il en soit autrement, et que les points soient, par exemple, dans l'ordre M_1, M_2, M_3, M_4; M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, de A vers B. Je vais montrer que c'est impossible.

Remarquons d'abord que les directions des plans (P) et (P') sont distinctes, car l'arc ne peut avoir huit tangentes parallèles à un même plan [32]; soit (Δ) leur intersection.

L'arc $\widehat{AB}$ n'a aucune tangente parallèle à (Δ); en effet, s'il y en avait une, son point de contact ne pouvant être à la fois un M_i et un M'_j, $\widehat{AB}$ aurait cinq tangentes parallèles à (P) ou à (P') [32].

Projetons orthogonalement $\widehat{AB}$ sur un plan (Π) perpendiculaire à (Δ). Nous obtiendrons un arc du troisième ordre $\widehat{ab}$, que nous considérerons comme l'arc de Jordan décrit par la projection m d'un point M parcourant $\widehat{AB}$. Cet arc $\widehat{ab}$ est formé au plus de quatre arcs convexes à tangente partout (l_1), (l_2), ...; il admet de plus quatre tangentes parallèles à la trace (p), de (P) sur (Π), aux points m_i, et quatre tangentes parallèles à la trace (p'), de (P') sur (Π), aux points m'_j.

Ceci posé, je dis que deux points m_i — ou m'_j — ne peuvent être sur un même arc (l). En effet, si m_i et m_{i+1}, par exemple, appartenaient à un même arc, il y aurait entre eux un point à tangente parallèle à (p') [14], et par suite sur $\widehat{AB}$ un point, entre M_i et M_{i+1}, par conséquent distinct des M'_j où la tangente serait parallèle à (P').

Chaque groupe de points m_i, m'_j demande donc au moins quatre arcs (l), c'est-à-dire sept en tout — car un même arc peut contenir m_4 et m'_1. — Il y a donc impossibilité.

34. La démonstration s'achèvera facilement. Pour simplifier, je supposerai qu'il existe un plan passant par O, et ne contenant aucune des génératrices du cône $[\widehat{\alpha\beta}, O]$, de sorte que sa trace sur un plan parallèle (ϖ') sera un arc simple $\widehat{\alpha'\beta'}$ du quatrième ordre au plus. S'il en était autrement, on partagerait $\widehat{AB}$ en un nombre fini d'arcs partiels satisfaisant à la condition précédente. Ce qui est évidemment possible à cause de la continuité de la tangente.

Il s'agit de montrer que $\widehat{\alpha'\beta'}$ se compose d'un nombre fini d'arcs du troisième ordre au plus. La correspondance entre le point M de $\widehat{AB}$ et le point μ' de $\widehat{\alpha'\beta'}$, où la génératrice $O\mu$ perce le plan (ϖ'), étant biunivoque et bicontinue [32], la proposition établie au n° précédent peut s'énoncer ainsi:

Soit λ' un point de $\widehat{\alpha'\beta'}$, distinct des extrémités, l'un des arcs $\widehat{\alpha'\lambda'}$, $\widehat{\lambda'\beta'}$ est au plus du troisième ordre [Th. III. c].

Donnons à λ' une position particulière, et pour fixer les idées, supposons que l'arc d'ordre trois au plus soit $\widehat{\alpha'\lambda'}$. Désignons par λ'_0 la borne du côté de β' des points λ' pour lesquels $\widehat{\alpha'\lambda'}$ est d'ordre moindre que quatre. L'arc $\widehat{\alpha'\lambda'_0}$ est au plus du troisième ordre [9]. D'autre part, si γ' est un point quelconque de $\widehat{\lambda'_0 \beta'}$, l'arc $\widehat{\alpha' \gamma'}$ est au moins du quatrième ordre. Par suite $\widehat{\gamma' \beta'}$ est nécessairement d'ordre inférieur à quatre. Il en résulte que l'arc $\widehat{\lambda'_0 \beta'}$ est au plus du troisième ordre. La démonstration est achevée.

35. Si nous résumons les propriétés différentielles obtenues, jusqu'à présent, sur les continus gauches du troisième ordre, nous obtenons l'énoncé suivant.

Théorème V. *Tout continu gauche du troisième ordre est un arc simple rectifiable ouvert, possédant en chacun de ses points une demi-tangente pour chaque côté, l'ensemble des points pour lesquels ces deux demi-tangentes ne sont pas opposées est au plus dénombrable; si elles ont partout même support, chacune d'elles varie d'une manière continue avec le point de contact, l'arc admet alors en tout point un plan osculateur pour chaque côté et l'ensemble des points pour lesquels ces deux plans sont distincts est au plus dénombrable.*

Si enfin ce dernier ensemble ne contient aucun point le plan osculateur unique varie d'une manière continue avec le point de contact: le continu est un arc élémentaire. Le plan osculateur pour un côté est la limite commune du plan tangent passant par un point voisin, ou parallèle à la tangente en un point voisin, ce point étant pris du côté considéré.

On peut ajouter que

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu du troisième ordre soit un arc élémentaire, est qu'il admette en tout point une tangente unique et un seul plan tangent qui le traverse.

Continus gauche d'ordre quatre.

36. La méthode des projections, qui nous a permis une étude approfondie des continus du troisième ordre, nous conduira pour ceux du quatrième, à des résultats moins complets, que je vais exposer rapidement.

Tout d'abord: *un continu gauche d'ordre quatre a au plus un point de ramification.*

Soit, en effet, (E) un continu d'ordre quatre ayant deux points de ramification A et B. Prenons sur (E) un point C, déterminant avec A et B un plan (Q). Il existe sur (E) trois arcs simples (α_1), (α_2), (α_3), n'ayant en commun deux à deux que le point A, chacun d'eux ayant tous ses points autres que A d'un même côté de (Q), et de même trois arcs (β_1), (β_2), (β_3) aboutissant en B, et possédant les mêmes propriétés. On peut supposer de plus, que le groupe des (α) n'a aucun point commun avec celui des (β).

Je distinguerai deux cas, suivant qu'il y a au moins quatre des six arcs (α) et (β), situés d'un même côté de (Q), ou non.

Dans la première hypothèse, menons par C une droite (Δ), rencontrant la droite AB en dehors du segment AB. On pourra mener par (Δ) un plan coupant les quatre arcs, et par suite (E) en cinq points au moins.

Dans la seconde hypothèse, il y a au moins deux (α) d'un même côté, et deux (β) du côté opposé. On choisira alors (Δ) rencontrant la droite AB à l'intérieur du segment AB, et l'on aboutira à la même conclusion.

Un continu gauche du quatrième ordre possède donc zéro ou une seule ramification. Un raisonnement analogue à celui qui précède, montre que, dans ce dernier cas, quatre arcs au plus aboutissent au point de ramification. On déduit alors du Théorème II que

Tout continu gauche du quatrième ordre est, ou bien une courbe de Jordan rectifiable, ayant au plus un point double, ou bien la somme de deux arcs simples rectifiables, ayant un seul point commun.

Les différents continus gauches du quatrième ordre peuvent être représentés schématiquement par la fig. 1 [15], avec cette différence que, dans les cas I et II la courbe peut être fermée.

37. Un arc simple du quatrième ordre possède, en chaque point deux demi-tangentes qui sont opposées, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable [10]. Si ces deux demi-tangentes ont partout même support, c'est-à-dire *si l'arc admet une tangente en chaque point, celle-ci varie d'une manière continue avec le point de contact.*

Pour justifier cette dernière affirmation, on procèdera comme au n° 28. Les cônes $[(l), S]$ et $[(l), S']$ seront au plus du troisième ordre, et simples si (l) est assez petit.[1] Les conclusions subsisteront, pourvu que (l) ait été choisi de manière à n'avoir aucune tangente passant par S ou par S'. La possibilité d'un tel choix résultera de la proposition suivante:

Le nombre des tangentes que l'on peut mener par un point à distance finie ou infinie, à un arc simple du quatrième ordre à tangente partout, est fini.

P étant donné [28], on prendra S et S' en dehors de la tangente en P, et (l) assez petit pour ne contenir aucun des points de contact des tangentes issues

[1] En effet, la perspective d'un arc partiel de $\widehat{AB}$, comprenant le point P, et assez petit, faite du point S, par exemple, sur un plan perpendiculaire à PS, sera un arc de Jordan ayant au plus un point double.

de S et de S'. Bien entendu S' aura encore été choisi en dehors du plan tangent en P au cône $[(l), S]$.

La proposition à démontrer va l'être immédiatement. Soit Σ un point à distance finie ou infinie. Si par ce point on peut mener à l'arc une infinité de tangentes, les points de contact ont au moins un point limite M. Prenons sur l'arc un point S_1 et, autour de M, un arc partiel (l_1) de l'arc donné, assez petit pour que sa perspective (λ_1), faite de S_1 sur un plan (Π_1) perpendiculaire à $S_1 M$ n'ait pas de point à l'infini. λ_1 est un arc du troisième ordre au plus. (l_1) admet une infinité de tangentes passant par Σ, parmi lesquelles un nombre fini passent par S — car la droite $S_1 \Sigma$ a au plus trois points communs avec l'arc. Par suite (λ_1) possède une infinité de tangentes passant par la perspective de Σ. Ceci est impossible, car (λ_1) est formé au plus de huit arcs convexes non exceptionnels, et un arc convexe non exceptionnel — même ne possédant pas une tangente partout — ne peut avoir plus de deux tangentes concourrantes ou parallèles [13].

38. Un raisonnement analogue à celui qu'on vient de faire, montre qu'un arc du quatrième ordre a un nombre fini de rebroussements. Il en résulte que *sur tout arc simple gauche du quatrième ordre à tangente partout, la demi-tangente pour chaque côté varie d'une manière continue, sauf peut-être en un nombre fini de points*[1], *qui sont des points de rebroussement.*

On le verra en se reportant au n° 29. On peut supposer l'arc donné sans rebroussement. (λ) est alors, non pas un arc convexe, mais un arc du troisième ordre à tangente partout, sans rebroussement, dont par suite chaque demi-tangente varie continuement [16].

39. Occupons-nous maintenant du plan osculateur. Soient $\widehat{AB}$ *un arc simple du quatrième ordre à tangente partout,* O un point de cet arc, Ox la demi-tangente à droite en ce point. On peut prendre sur $\widehat{OB}$ un point B_1, assez près de O, pour que l'arc $\widehat{OB_1}$ soit sans rebroussement, n'admette aucune tangente passant par O, autre que Ox [37], et enfin pour que l'angle MOx soit moindre que $\frac{\pi}{2}$, quel que soit M sur $\widehat{OB_1}$ — distinct de O.

Prenons un plan (Π), perpendiculaire à Ox, rencontrant cette demi-droite en un point ω, assez loin pour que l'arc $\widehat{OB_1}$ soit tout entier d'un même côté de

[1] On peut démontrer qu'il y en a un au plus.

(Π). La perspective de l'arc $\widehat{MB_1}$, faite de O, sur (Π), est un arc $\widehat{mb_1}$ sans point à l'infini du troisième ordre au plus. Lorsque M tend vers O, cet arc a pour limite un arc $\widehat{\omega b_1}$, car OM tend vers Ox. $\widehat{\omega b_1}$ est d'ordre quatre au plus[1]; d'autre part il ne peut avoir une infinité de points doubles, puisque, quel que soit M, $\widehat{mb_1}$ en a au plus un. Il résulte alors du n° 9 que $\widehat{\omega b_1}$ est au plus du troisième ordre. On pourra donc prendre B_1 assez voisin de O, pour que cet arc $\widehat{\omega b_1}$ soit convexe. Il admettra une tangente partout puisque $\widehat{OB_1}$ n'a aucune tangente passant par O, sa demi-tangente à droite — du côté de b_1 — varie donc d'une manière continue.

Soient maintenant MT la demi-tangente à droite en M, OT_1 la demi-droite parallèle d'origine O. On peut choisir B_1 assez près de O pour que les angles xOM et xOT_1 soient, quel que soit M, aussi petits qu'on veut — puisque la demi-tangente à droite à $\widehat{OB_1}$ varie d'une manière continue. — Dans ces conditions les demi-droites MT et OT_1 perceront (Π) en des points que je désignerai respectivement par T et T_1. Ces points sont alignés avec m, mT est la demi-tangente à droite en m à $\widehat{\omega b_1}$. De plus M étant entre m et O, T se trouvera entre m et T_1.

Soit enfin $\omega\theta$ la demi-tangente à $\widehat{\omega b_1}$ en ω. Si M est assez près de O, la droite mTT_1 rencontrera la demi-droite $\omega\theta$ en un point n, tel que m soit entre n et T, car mn sera la demi-tangente en m du côté de ω.

En définitive l'angle $\theta\omega T_1$ est moindre que l'angle $\theta n T_1$. Or cet angle tend vers zéro. Par suite le plan $O\omega T_1$ mené par Ox parallèlement à MT a pour limite le plan $O\omega\theta$, qui n'est autre que celle du plan OxM.

Nous pouvons donc affirmer que *l'arc $\widehat{AB}$ possède en tout point un plan osculateur pour chaque côté qui est le même quelle que soit la définition adoptée.*

40. L'analogie avec les courbes du troisième ordre va se poursuivre encore: *l'ensemble des points où les deux plans osculateurs sont distincts est au plus dénombrable.*

Pour le démontrer, il faudra procéder autrement qu'au n° 32, car on ne sait pas si le nombre des tangentes à un arc du quatrième ordre, parallèles à un plan quelconque, est borné, ou même fini.

---

[1] Si une sécante passe par ω, le nombre de ses points situés sur $\widehat{\omega b_1}$, en dehors de ω, est au plus égal à trois.

Par un point fixe O, menons la parallèle $O\mu'$ à la tangente au M. Considérons celle $O\mu'_1$ relative à une position donnée M_1, et soit (Π) un plan perpendiculaire à $O\mu'_1$, ne passant pas par O. En vertu de la continuité de la tangente, on peut prendre autour de M_1 un arc $\widehat{A_1 B_1}$ de $\widehat{AB}$, de manière que $O\mu'$ fasse avec $O\mu'_1$ un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$ quand M parcourt $\widehat{A_1 B_1}$. Dans ces conditions la trace μ de $O\mu'$ sur (Π) décrira une courbe de Jordan $\widehat{\alpha_1 \beta_1}$. Les plans osculateurs à gauche et à droite en M, sont définis, en direction, par $O\mu$ et les demi-tangentes à gauche et à droite, en μ, à $\widehat{\alpha_1 \beta_1}$.

D'autre part $\widehat{\alpha_1 \beta_1}$ est ce que M. Rosenthal appelle une courbe »von endlichen Vielfachheitsgrad«.[1] En effet, l'arc $\widehat{AB}$ ayant un nombre fini de tangentes parallèles à une droite donnée, il y a seulement un nombre fini de points M, donnant la même position pour μ. Or M. Rosenthal a démontré que, pour de telles courbes, les valeurs du paramètre pour lesquelles les deux demi-tangentes sont distinctes, forment un ensemble au plus dénombrable.[2]

41. La méthode employée ici ne permet pas de décider si l'analogie avec les courbes gauches du troisième ordre se poursuit plus loin. Plusieurs questions restent posées, notamment celles-ci:

Un arc du quatrième ordre peut-il avoir un plan osculateur unique partout, sans que celui-ci varie d'une manière continue?

Un arc du quatrième ordre est-il la somme d'un nombre fini d'arcs du troisième?

En vertu du Théorème V ces deux questions ne sont pas indépendantes.

Ajoutons, pour terminer, que les continus gauches d'ordre trois ou quatre ne sont pas les seuls pour lesquels le nombre des points de ramification est nécessairement fini. Un continu du cinquième ordre en a au plus deux; il se compose donc d'un nombre fini d'arcs simples. Mais la méthode, utilisée dans ce Chapitre, ne permet d'affirmer sur ces arcs, rien de plus que les résultats généraux du n° 10.

---

[1] A. Rosenthal. Mém. cité. § 1.

[2] Mém. cité. p. 503.

CHAPITRE IV.

Continus plans d'ordre cyclique borné.

42. La plupart des résultats, obtenus aux Chapitres précédents, subsistent si l'on remplace les droites, plans, etc..., par des familles de courbes, surfaces, etc..., convenablement choisies. Considérons, par exemple, les Théorèmes I et II dans le cas du plan. On peut évidemment substituer aux deux familles de droites parallèles, deux faisceaux de cercles — pourvu qu'aucun des points de base ne fasse partie du continu. On pourra même, sous certaines condition, prendre deux faisceaux linéaires de courbes algébriques.

Dans le même ordre d'idées, les continus plans d'ordre borné seront remplacés par des continus rencontrés en un nombre borné de points par les courbes d'un réseau linéaire. Mais rien n'empèche de considérer des familles de courbes à trois paramètres, et plus. On pourra ainsi obtenir des propriétés différentielles du second ordre, comme il arrive dans le cas des continus d'ordre borné de l'espace à trois dimensions. (Ce qui tient au fond à ce qu'un plan dépend de trois paramètres, ce qui permet deux limites successives. Avec p paramètres on aurait des propriétés différentielles d'ordre $p-1$.)

Comme on le voit, la notion de continu d'ordre borné se prête à de nombreuses extensions intéressantes. Je n'en considérerai ici qu'une seule relative aux continus plans, dont l'étude sera une application du Chap. III.

43. La famille la plus simple de courbes à trois paramètres dans le plan est évidemment celle des cercles. On est ainsi conduit à étudier les continus plans rencontrés en un nombre borné de points par un cercle quelconque, et que j'appellerai: *d'ordre cyclique borné.* Pour éviter les segments de droite, on ne prendra que ceux contenant un nombre fini de points sur une droite quelconque. *L'ordre cyclique* est la borne supérieure du nombre des points du continu, situés sur un même cercle. Il est au moins égal à trois.

On pourrait faire une étude directe des continus plans d'ordre cyclique borné. Mais cela n'est pas nécessaire, car on peut les considérer comme la projection orthogonale de continus d'ordre borné situés sur un paraboloïde de révolution, dont l'axe est perpendiculaire au plan; ce qui permet de déduire leurs propriétés de celles des continus gauches d'ordre borné.

44. Pour commencer, je vais montrer *qu'un continu d'ordre cyclique k, est au plus d'ordre $2k-3$.*

Soit (e) un continu d'ordre cyclique k. Une sécante quelconque (δ) le rencontre en un nombre fini de points: $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Il s'agit de trouver une limite supérieure de p.

Traçons p cercles, tous extérieurs les uns aux autres, ayant pour centres les a_i. Chacun de ces cercles découpe dans (e) un nombre fini de continus distincts, dont l'un contient le centre [2]. Nous désignerons ce continu par la même lettre que le centre du cercle correspondant, mise entre parenthèses.

Répartissons les points a_i en trois classes:

La droite (δ) partage le plan en deux régions (I) et (II). Dans la classe (1) nous mettrons les points a_i, tels que le continu (a_i) n'ait pas de point dans la région (II), dans la classe (2), les points a_j, tels que le continu a_j n'ait pas de point dans la région (I). La classe (3) contiendra les autres.

Soient p_1, p_2, p_3 les nombres respectifs des points contenus dans chacune des classes. On a

$$p = p_1 + p_2 + p_3,$$

et l'on peut supposer $p_1 \geq p_2$.

Si p_2 est nul, on peut trouver un cercle rencontrant les p continus, puisque tous ont des points dans la région (I).[1] On a alors $p \leq k$, et à fortiori $p \leq 2k-3$, puisque k est au moins égal à 3.

Supposons $p_2 \neq 0$. On a alors $p_2 \geq 1$. D'autre part p_3 ne peut être nul, sans quoi deux points de (e), situés de part et d'autre de (δ), ne pourraient être bien enchaînés. (Il suffit pour le voir de raisonner comme au n° 2). Enfin on peut trouver un cercle coupant (e) en $p_1 + p_3 + 1$ points: un cercle tangent à (δ) en un point de classe (2), et rencontrant tous les continus (a_i) relatifs aux points de classe (1) et (3) — qui ont des points d'un même côté de (δ).

On a donc les relations

$$p = p_1 + p_2 + p_3, \quad p_1 \geq p_2 \geq 1, \quad p_3 \geq 1,$$
$$p_1 + p_3 + 1 \leq k.$$

On peut écrire

$$p = p_1 + p_3 + 1 + (p_2 - 1),$$

d'où l'on tire

[1] Nous admettons ici que, si un continu a des points à l'intérieur et d'autres à l'exterieur d'un cercle, il en a au moins un sur le cercle. Il suffit de se reporter au n° 2, en remplaçant (R) par un cercle.

$$p \leq k + p_2 - 1 \leq k + p_1 - 1 .$$

Mais de la relation $1 \leq p_3$, on déduit

$$p_1 + 1 \leq p_1 + p_3 \leq k - 1 ,$$

c'est-à-dire $p_1 \leq k - 2$; ce qui donne encore

$$p \leq 2 k - 3 .$$

C. q. f. d.

45. *Lorsque le continu* (*e*) *est un arc de Jordan ayant un nombre fini de points doubles, on peut affirmer que son ordre est au plus égal à* k.

En effet, supposons que l'ordre soit p. On pourra trouver une sécante (δ), traversant l'arc en p points distincts [Théor. III]. Dans ce cas, on a $p_1 = p_2 = 0$. D'où $p \leq k$.

Lorsque $k = 3$, l'ordre du continu est de toutes manières égal à k au plus.

46. Ainsi, *les continus d'ordre cyclique borné sont d'ordre borné*. On peut donc leur appliquer les Théorèmes I et II, en ajoutant que les arcs simples, qui les constituent, sont d'ordre au plus égal à l'ordre cyclique.

D'autre part, on démontre facilement que, si cet ordre cyclique n'atteint pas six, il y a au plus deux ramifications.

47. Nous obtiendrons d'autres propriétés, en considérant, comme on l'a dit plus haut, les continus d'ordre cyclique borné comme projections de continus gauches.

Soit (p) un plan fixe. Prenons un paraboloïde de révolution (P), dont l'axe est perpendiculaire à (p). Tout point m de (p) est la projection orthogonale d'un point M de (P). La correspondance entre m et M est biunivoque et bicontinue. Rappelons-en les propriétés élémentaires.

Un plan quelconque (R) coupe (P) suivant une ellipse, ou une parabole, qui se projette suivant un cercle, ou une droite (r).

Réciproquement, tout cercle ou droite (r) de (p) est la projection de la section de (P) par un plan bien déterminé (R).

De même que dans la théorie de l'inversion, on considérera toute droite de (p) comme un cercle dont le centre est à l'infini dans la direction perpendiculaire. Avec cette convention:

à deux plans parallèles (R) et (R') correspondent deux cercles concentriques (r) et (r');

Si (R) tend vers une limite (R_0), (r) a pour limite (r_0).

48. Ceci posé, on peut énoncer les propositions suivantes.

A tout continu (e) d'ordre cyclique k, situé dans (p), correspond sur (P) un continu (E), d'ordre $2k-3$ au plus.

A un arc simple $\widehat{ab}$ correspond un arc $\widehat{AB}$, dont l'ordre est égal à l'ordre cyclique de $\widehat{ab}$.

Si l'arc $\widehat{ab}$ possède en m une tangente mt, il en est de même de $\widehat{AB}$ en M. La tangente en ce point est l'intersection du plan perpendiculaire à (p), passant par mt, avec le plan tangent au paraboloïde en M.

A un cercle (r), tangent à $\widehat{ab}$ en m, correspond un plan (R), tangent à $\widehat{AB}$ en M.

Les cercles osculateurs à $\widehat{ab}$ correspondront aux plans osculateurs à $\widehat{AB}$. Précisons ce point, en considérant successivement les deux définitions du plan osculateur; d'abord la première.

Soient M un point de $\widehat{AB}$, MT la tangente en ce point, M' un point de MA. Au plan tangent $(R)=[MT, M']$ correspond le cercle (r) tangent en m à $\widehat{ab}$ et passant par m'. Si (R) a une limite, il en est de même de (r). On déduit alors du n° 10^{bis} que

Tout arc simple d'ordre cyclique borné, à tangente partout, admet en chaque point un cercle osculateur à gauche et un cercle osculateur à droite. Le cercle osculateur pour un côté étant la limite du cercle tangent, passant par un point voisin, pris du côté considéré — il peut dans certains cas se réduire à la tangente.

Cette dernière proposition s'étend aux continus rencontrés en un nombre fini de points par un cercle quelconque.

Considérons maintenant la seconde définition. Conservant les notations précédentes, désignons par $M'T'$ la tangente en M'. Soient (S) et (S') les plans menés respectivement par MT et $M'T'$ parallèlement à l'autre tangente. Il leur correspond deux cercles concentriques (s) et (s'), tangents respectivements en m et m' à $\widehat{ab}$, leur centre commun est l'intersection des normales en ces points. Si (S) a une limite quand M' tend vers M, il en est de même de (s), et par suite de son centre. Cette limite est le point caractéristique de la normale.

En se reportant aux n$^{\text{os}}$ 39 et 40, on peut donc affirmer que

Tout arc simple à tangente partout, d'ordre cyclique quatre au plus, admet en chacun de ses points un centre de courbure à droite et un centre de courbure à gauche; le centre de courbure pour un côté en un point m étant la limite commune du point *d'intersection des normales en m et m', et du centre du cercle tangent en m, passant par m', quand ce point tend vers m en restant du côté considéré. De plus, l'ensemble des points pour lesquels les deux centres de courbures sont distincts est au plus dénombrable.*

Continus d'ordre cyclique trois.

49. Les considérations précédentes conduisent à des résultats particulièrement complets, au point de vue différentiel, quand l'ordre cyclique est trois.

Dans ce cas (E)[1] est du troisième ordre, c'est donc un arc simple ouvert sans rebroussement [29]. Par suite (e) est aussi un arc simple ouvert sans rebroussement. Je dis qu'il n'a pas non plus de point anguleux.

Soit m un point de $\widehat{ab}$, distinct des extrémités. Supposons que les demi-tangentes en ce point mt et mt' ne soient pas opposées — mt désignant celle du côté de b. — Donnons-nous un angle ε, assez petit pour que $tmt' + 2\varepsilon$ soit moindre que π, 2ε étant lui-même inférieur à tmt'. Traçons deux demi-droites $m\theta$ et $m\theta_1$, faisant avec mt un angle égal à ε, la première extérieure à l'angle tmt', la seconde intérieure, et de même deux demi-droites $m\theta'$ et $m\theta'_1$. Les demi-droites mt, $m\theta_1$, $m\theta'_1$, mt' sont intérieures à l'angle $\theta m \theta'$, et de plus, les angles $\theta m \theta_1$ et $\theta' m \theta'_1$ n'ont aucune partie commune.

Ceci posé, puisque mt est la demi-tangente du côté de b, on pourra trouver sur l'arc $\widehat{mb}$ un point b_1, tel que mb_1 ait tout ses points intérieurs à l'angle $\theta m \theta_1$. De même on pourra trouver sur $\widehat{am}$ un point a_1, tel que $\widehat{a_1 m}$ ait tous ses points intérieurs à l'angle $\theta' m \theta'_1$. Traçons maintenant un cercle (C), tangent aux deux demi-droites $m\theta$ et $m\theta'$, et assez petit pour que les points a_1 et b_1 soient à son extérieur. L'arc $\widehat{a_1 m}$, tout entier intérieur à $\theta' m \theta'_1$, a nécessairement des points à l'intérieur du cercle; il le rencontre donc en deux points au moins. Il en est de même de $\widehat{mb_1}$, ce qui conduit à une impossibilité, puisque $\widehat{ma_1}$ et $\widehat{mb_1}$ n'ont en commun que m.

L'arc $\widehat{ab}$ ayant une tangente partout, il en est de même de $\widehat{AB}$. En se reportant alors aux n^{os} 16 et 35, on énoncera les propositions suivantes.

I. *Tout continu plan d'ordre cyclique trois est un arc simple ouvert rectifiable, ayant en chaque point deux demi-tangentes opposées lesquelles varient d'une manière continue avec le point de contact. L'arc est sans rebroussement et possède au plus*

[1] Les notations sont les mêmes qu'au n° 48.

trois inflexions; il admet en chaque point un centre de courbure à droite et un centre de courbure à gauche[1] — *le centre de courbure pour un côté, en un point* m, *étant la limite commune du point d'intersection des normales en* m *et* m', *et du centre du cercle tangent en* m *passant par* m', *quand ce point tend vers* m, *du côté considéré. — L'ensemble des points pour lesquels les deux centres de courbure ne sont pas confondus est au plus dénombrable; s'ils sont confondus partout, le centre de courbure unique varie d'une manière continue — autrement dit l'arc admet une développée continue.*

II. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu d'ordre cyclique trois ait partout un cercle osculateur unique, variant d'une manière continue, est qu'il existe en chacun de ses points un seul cercle ou droite tangent le traversant.*

En effet, si un plan (R) traverse $\widehat{AB}$, le cercle correspondant (r) traverse $\widehat{ab}$.

On peut ajouter que le cercle osculateur ne se réduit à une droite qu'aux seuls points d'inflexion.

---

[1] Ces deux points sont d'un même côté de la tangente, sauf aux points d'inflexion.