SUR LES FONCTIONS SUBHARMONIQUES ET LEUR RAPPORT À LA THÉORIE DU POTENTIEL.

Par

FRÉDÉRIC RIESZ

à SZEGED.

(Seconde Partie.)[1]

On a posé à la tête de la théorie des équations intégrales le problème de mettre les fonctions harmoniques sous la forme d'un potentiel. Le problème principal dont nous allons nous occuper dans ce mémoire, présente avec le problème indiqué, d'une part une analogie formelle et d'autre part une différence essentielle. L'analogie sera immédiate, parlons plutôt de la différence. Tandis que, en cherchant à préciser le problème indiqué, il fallait de prime abord renoncer à des masses intérieures au domaine, c'est justement par le potentiel de telles masses que nous nous proposons de représenter les fonctions dont nous nous occupons; bien entendu, ces fonctions ne seront plus supposées d'être harmoniques. On sait que pour des fonctions suffisamment régulières, continues par exemple et admettant des dérivées continues des deux premiers ordres, l'équation de Poisson

$$\Delta f = -2\pi\varrho(x, y)$$

fournit la solution de ce problème, la couche à densité ϱ qu'elle définit donnant lieu à un potentiel logarithmique qui ne diffère de la fonction que par une fonction harmonique; on pourrait dire, et cette expression est facile à préciser,

[1] *Voir* pour la première partie *ces Acta,* t. 48 (1926), p. 329—343. *Cf.* aussi, pour un exposé sommaire des idées développées dans le présent mémoire, ma conférence imprimée dans les *Acta Univ. Franc.-Jos., Szeged,* t. 2 (1925), p. 87—100. *Cf.* encore N. WIENER, Laplacians and continuous linear functionals, *même journal,* t. 3 (1927), p. 7—16, dont l'ordre d'idées est en relation très intime quoique nullement évidente avee le sujet développé.

qu'elle en diffère par un autre potentiel provenant de masses extérieures. C'est en partant d'hypothèses plus larges que nous allons attaquer le même problème, en admettant des distributions de masse qui ne peuvent être caractérisées par leur densité, ainsi entre autres des distributions ponctuelles ou réparties sur des lignes, en nombre fini ou infini dénombrable.[1] Le potentiel logarithmique d'une couche de masses négatives de ce type général est une fonction subharmonique pas nécessairement continue et il pourra même admettre des infinis. Le but principal du présent mémoire est de faire voir que toute fonction subharmonique dans un domaine D peut être représentée, en substance, par le potentiel d'une couche de masses négatives, réparties sur le domaine D.

Il convient d'observer que c'est seulement pour fixer les idées que nous parlons de fonctions de deux variables; en effet, les résultats et tous les détails du présent mémoire s'étendent immédiatement au cas d'un nombre quelconque de variables, en particulier au cas de l'espace et du potentiel de Newton.

1. La répartition des masses.

Les résultats que je vais développer dans ce paragraphe et dans le suivant, seront d'une évidence immédiate pour tous ceux qui connaissent l'idée de fonction additive d'ensemble et la théorie de l'intégration par rapport à de telles fonctions. Il aurait donc suffi de résumer sommairement ces résultats; cependant je préfère les présenter sous une forme indépendante et conforme à la nature des applications que nous en allons faire, en me bornant aux *fonctions d'ensemble ouvert.*

Soit E un ensemble plan ouvert et supposons que l'on fasse correspondre à chaque sous-ensemble ouvert e de E, y compris E lui-même, une quantité $\mu(e)$ et que cette fonction d'ensemble jouisse des propriétés suivantes:

1) $\mu(e) \geqq 0$;

2) lorsque e_1 est contenu dans e_2, on a $\mu(e_1) \leqq \mu(e_2)$;

3) elle est continue inférieurement; cela veut dire que lorsque les ensembles e_n vont en croissant vers l'ensemble e, on a $\mu(e_n) \rightarrow \mu(e)$;

4) elle est additive, c'est-à-dire que l'on a $\mu(e_1 + e_2) = \mu(e_1) + \mu(e_2)$ pour e_1, e_2 sans point commun, tandis que, en général, $\mu(e_1) + \mu(e_2) = \mu(e_1 + e_2) + \mu(e_1 e_2)$.[2]

---

[1] Cf. pour l'étude du potentiel logarithmique à ce point de vue général: G. C. EVANS, Fundamental points of potential theory, *The Rice Institute Pamphlet,* t. 7 (1920), p. 252—329.

[2] Nous désignons par $e_1 + e_2$ (somme des ensembles e_1, e_2) la réunion des éléments appartenant au moins à l'un de ces ensembles, par $e_1 e_2$ (produit des ensembles e_1, e_2) la réunion des éléments compris dans chacun des deux ensembles.

Ces hypothèses étant remplies, nous convenons de dire que $\mu(e)$ définit une *répartition de masses positives* sur l'ensemble E; $\mu(E)$ en est la masse totale. Plus brièvement, nous dirons que $\mu(e)$ est une *couche positive*. Les couches négatives se définissent d'une manière analogue et lorsque $\mu(e)$ est une couche positive, la fonction d'ensemble $-\mu(e)$ définira une couche négative et inversement. Nous pourrons nous borner à considérer les couches positives, les résultats concernant les couches négatives étant alors immédiates.

Soit donc $\mu(e)$ une couche positive répartie sur E. Envisageons un des ensembles e et son complémentaire ouvert par rapport à E, c'est-à-dire l'ensemble ouvert formé par les points intérieurs de l'ensemble $E-e$ et que nous désignerons par $\underline{E-e}$. Comme e et $\underline{E-e}$ sont sans point commun, on aura, par les hypothèses 2) et 3),

$$\mu(e)+\mu(\underline{E-e}) \leqq \mu(E).$$

Dans cette formule, le signe d'égalité pourra tenir ou ne tenir pas. Par exemple, si l'on pose, par définition, $\mu(e)$ égale à la mesure ou ce qui revient au même, égale à l'aire intérieure de l'ensemble e, on aura le signe d'égalité ou on ne l'aura pas suivant que la partie de la frontière de e contenue en E est de mesure nulle ou non.

Dans tous les cas où c'est le signe d'égalité qui tient, convenons de dire que l'ensemble e est *régulier*[1] (par rapport à la couche $\mu(e)$). Pour légitimer cette dénomination, nous montrerons tout à l'heure qu'à un certain point de vue, malgré les apparences, *ce sont les ensembles réguliers qui font la règle* et que les autres ne font qu'une exception rare. Mettons d'abord notre définition sous une nouvelle forme. Envisageons l'ensemble e_0 et tous les ensembles e contenant e_0 et ses points frontières appartenant à E, c'est-à-dire tous les ensembles ouverts e tels que

$$e+(\underline{E-e_0})=E. \tag{1}$$

Soit $\overline{\mu}(e_0)$ la borne inférieure des masses $\mu(e)$ des ensembles e envisagés; comme e_0 fait partie de tous les e, on a $\mu(e_0) \leqq \overline{\mu}(e_0)$; d'ailleurs, si l'on voulait donner quelque nom à la quantité $\overline{\mu}(e_0)$, on pourrait l'appeller la *masse extérieure* de e_0.

De la relation (1) on conclut que l'on a

---

[1] Ces ensembles correspondent en substance à ce que l'on appelle ensemble normal dans la théorie générale des fonctions d'ensemble; *cf.* C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Intégrales de Lebesgue etc. (*Collection Borel*), Paris, Gauthier-Villars, 1916, p. 86.

$$\mu(e) + \mu(\underline{E-e_0}) \geqq \mu(E)$$

pour tous les ensembles e que nous venons d'envisager et que, par conséquent,

$$\bar{\mu}(e_0) + \mu(E-e_0) \geqq \mu(E). \tag{2}$$

D'autre part, considérons les ensembles e_n formés par les points de E dont la distance de l'ensemble e_0 est $< 1/n$. Ils appartiennent à la classe envisagée d'ensembles e en sorte qu'on a

$$\bar{\mu}(e_0) \leqq \mu(e_n). \tag{3}$$

De plus, comme les ensembles e_n et $\underline{E-e_n}$ sont sans point commun, on a

$$\mu(e_n) + \mu(E-e_n) \leqq \mu(E)$$

ce qui, avec (3), donne que

$$\bar{\mu}(e_0) + \mu(\underline{E-e_n}) \leqq \mu(E); \tag{4}$$

enfin, comme les ensembles ouverts $\underline{E-e_n}$ vont en croissant vers $\underline{E-e_0}$, on aura encore

$$\mu(E-e_n) \to \mu(\underline{E-e_0}). \tag{5}$$

De (4) et (5) il vient que

$$\bar{\mu}(e_0) + \mu(\underline{E-e_0}) \leqq \mu(E)$$

et comparée avec (2), cette formule nous dit que l'on a précisément

$$\bar{\mu}(e_0) + \mu(\underline{E-e_0}) = \mu(E). \tag{6}$$

Il s'ensuit immédiatement que *la condition nécessaire et suffisante pour que* e_0 *soit régulier c'est que l'on ait*

$$\mu(e_0) = \bar{\mu}(e_0).$$

Cela étant, considérons une variété d'ensembles e_t dépendant d'un paramètre continu t; nous supposons que l'ensemble e_t croisse avec t d'une manière monotone et plus précisément que, pour $t_1 < t_2$, e_{t_2} contienne e_{t_1} ainsi que ses points frontière appartenant à E. Dans cette hypothèse, la fonction $g(t) = \mu(e_t)$ sera une fonction croissante de t et admettra au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité. Mais toujors que $g(t)$ est continue (ou seulement continue à droite) pour $t=t_0$, l'ensemble e_{t_0} sera régulier. En effet, on a, par l'hypothèse faite sur les ensembles e_t, $g(t)=\mu(e_t)\leqq\overline{\mu}(e_t)\leqq g(t+0)$ de sorte que l'hypothèse $g(t_0)=g(t_0+0)$ entraîne $\mu(e_{t_0})=\overline{\mu}(e_{t_0})$, c'est-à-dire que e_{t_0} est régulier. Donc les ensembles e_t sont réguliers, exception faite au plus d'une infinité dénombrable d'entre eux. Un raisonnement analogue tient dans le cas où l'ensemble e_t décroît pour t croissant.

Voilà quelques exemples de telles variétés.

1) Les ensembles formés par les points de E dont la distance de l'ensemble e_0 est $< t$ et que nous venons de considérer pour les valeurs particulières $t = 1/n$.

2) Les ensembles formés par les points de e_0 dont la distance de l'ensemble $E-e_0$ est $> t$. Il s'ensuit qu'il y a, pour chaque e_0, régulier ou non, des parties régulières épuisant la masse $\mu(e_0)$ avec une approximation aussi précise qu'on voudra.

3) Les parties $E(x<t)$ de E caractérisées par la relation en parenthèse. De même les ensembles $E(x>t)$ et les ensembles analogues par rapport à y.

Tous ces exemples sont des cas particuliers du suivant: H étant un ensemble quelconque, ouvert ou non, appartenant à E ou n'y appartenant pas, on définira E_t et E_{-t} comme l'ensemble des points de E dont la distance de H est respectivement plus petit ou plus grand que t. On aura d'autres exemples en se servant d'autres systèmes de coordonnées.

Démontrons encore le fait suivant dont nous aurons besoin dans la suite. *Lorsque les ensembles e_1, e_2 sont réguliers, les ensembles e_1+e_2 et $e_1 e_2$ le seront également.*

Posons, pour simplifier l'écriture, $\underline{E-e_1}=e_3$, $\underline{E-e_2}=e_4$, alors on aura, par hypothèse,

$$\mu(e_1)+\mu(e_3)=\mu(E),$$

$$\mu(e_2)+\mu(e_4)=\mu(E)$$

et d'autre part,

$$\mu(e_1)+\mu(e_2)=\mu(e_1+e_2)+\mu(e_1 e_2),$$

$$\mu(e_3)+\mu(e_4)=\mu(e_3+e_4)+\mu(e_3 e_4).$$

En ajoutant les deux premières équations et en retranchant les deux autres, il vient que

$$[\mu(e_1+e_2)+\mu(e_3 e_4)]+[\mu(e_1 e_2)+\mu(e_3+e_4)]=2\mu(E).$$

Comme les ensembles e_1+e_2 et $e_3 e_4$, de même que les ensembles $e_1 e_2$ et e_3+e_4 sont sans point commun, la valeur d'aucune des deux expressions entre crochets ne pourra surpasser la quantité $\mu(E)$; par conséquent, ces expressions donnent précisément $\mu(E)$. Mais les ensembles $e_3 e_4$ et e_3+e_4 sont respectivement identiques à $\underline{E-(e_1+e_2)}$ et $\underline{E-e_1 e_2}$ ou en font partie; donc on a, à plus forte raison,

$$\mu(e_1+e_2)+\mu(\underline{E-(e_1+e_2)})=\mu(E),\quad \mu(e_1 e_2)+\mu(\underline{E-e_1 e_2})=\mu(E)$$

c'est-à-dire que les ensembles e_1+e_2 et $e_1 e_2$ sont réguliers, c. q. f. d.

2. L'intégrale de Stieltjes et le potentiel logarithmique.

Soit $f(P)$ une fonction uniformément continue des points de E et formons l'expression

$$\sum_{k=1}^{m} f(P_k)\,\mu(e_k), \tag{1}$$

où les ensembles ouverts $e_1, e_2, \ldots, e_m$ constituent ce que nous appellerons une *décomposition permise* de l'ensemble E, c'est-à-dire qu'ils sont sans point commun deux à deux et

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(e_k)=\mu(E); \tag{2}$$

de plus, le point P_k est supposé d'appartenir à e_k.

Envisageons une suite infinie de telles décompositions que nous désignerons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ et soit δ_n le plus grand des diamètres des ensembles e_k figurant dans la décomposition Δ_n. Supposons que $\delta_n \to 0$ avec $1/n$; il s'ensuit, par un raisonnement classique, que (1) tend vers une limite déterminée indépendante du choix des points P_k et la même pour toutes les suites du type considéré. Cette limite, l'intégrale au sens de Stieltjes de la fonction $f(P)$ par rapport à la couche $\mu(e)$, sera désignée par

$$\int_E f(P)\,d\mu.$$

Pour compléter cette définition, il nous reste encore à montrer qu'il y a en effet des décompositions permises de sorte que le diamètre maximum δ soit aussi petit que l'on voudra. Or, une telle décomposition pourra être faite par exemple en se servant des ensembles $E(x<t)$, $E(x>t)$, $E(y<t)$, $E(y>t)$ dont nous avons parlé à titre d'exemple et en choisissant une suite de valeurs t de sorte que les droites $x=t$ et $y=t$ partagent E en des morceaux suffisamment petits et que, d'autre part, les dits ensembles soient réguliers. Alors, en faisant abstraction des points appartenant aux droites de décomposition, les dits morceaux seront des ensembles ouverts, produits d'ensembles réguliers et par suite, réguliers eux-mêmes. Il en résulte immédiatement, que ces ensembles e_k, sans point commun deux à deux, satisfont à l'hypothèse (2), c'est-à-dire qu'ils donnent une décomposition permise.

Le *potentiel logarithmique*

$$u(x, y) = u(Q) = \int_E \log 1/r \, d\mu \qquad (r = PQ) \tag{3}$$

où $Q=(x, y)$ désigne le point attiré par nos masses, n'entre pas en général dans la définition de l'intégrale que nous venons d'envisager, la fonction à intégrer $f(P) = -\log PQ$ devenant infinie pour $P=Q$. C'est par un procédé bien connu que nous passerons du cas des fonctions continues au cas de ce logarithme. Nous nous servirons des fonctions $f_n(P; Q)$ égales à la plus petite des quantités $-\log PQ$ et n. Ces fonctions étant continues par rapport à P et Q, l'intégrale par rapport à P

$$\int_E f_n(P; Q) \, d\mu$$

aura un sens et définira une fonction $u_n(Q)$. Observons tout de suite que cette fonction est continue et superharmonique; en effet, la fonction $f_n(P; Q)$ l'est par rapport à Q variable, pour P arbitrairement fixé; il en sera de même pour les fonctions définies par les expressions

$$\sum f_n(P_k; Q) \mu(e_k), \tag{4}$$

correspondant à l'expression (1); enfin, le passage à la limite étant uniforme, la limite $u_n(Q) = u_n(x, y)$ sera-elle-même continue et superharmonique.

Faisons croître n indéfiniment; alors les fonctions $f_n(P; Q)$ et $u_n(Q)$ iront en croissant, les premières vers $-\log PQ$; quant aux dernières, je dis que leur limite $u(Q)$ est finie presque partout, c'est-à-dire sauf peut-être pour certains points Q

formant un ensemble de mesure nulle. Pour le voir, on n'aura qu'à montrer que l'intégrale de $u_n(Q)$ ou, ce qui revient au même, que celle de l'expression (4) par rapport à Q, étendue à un domaine borné quelconque, ne dépasse pas une certaine borne indépendante de n. Notre assertion en découle par un théorème bien connu. Or, l'intégrale de $f_n(P_k; Q)$, étendue à un domaine borné quelconque reste toujours inférieure à celle de la fonction $-\log P_k Q$, étendue au plus grand domaine dans lequel elle est positive, c'est-à-dire au cercle de rayon 1 autour de P_k comme centre; cette dernière intégrale ayant la valeur $\pi/2$, l'intégrale de l'expression (4) ne surpassera pas la borne $(\pi/2)\mu(E)$. Par conséquent, comme nous venons de le dire, la fonction limite $u(Q)$ sera finie presque partout; elle deviendra infinie positive pour l'ensemble de mesure nulle qui reste. Ainsi nous avons donné un sens précis à l'intégrale (3); enfin, le potentiel $u(Q)$ définie par cette intégrale venant d'être construite comme la limite d'une suite croissante de fonctions superharmoniques, *sera elle-même superharmonique.*

D'une manière analogue, *le potentiel logarithmique d'une couche négative* $-\mu(e)$ *est subharmonique;* en effet, pour y arriver, on n'aura qu'à changer le signe de la fonction $u(Q)$.

Enfin il nous faudra dire quelques mots relativement au cas particulier où la couche $\mu(e)$ admet une fonction de densité $\varrho(P) = \varrho(\xi, \eta)$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varrho(\xi, \eta)$, intégrable p. ex. au sens de LEBESGUE, de sorte que l'on ait, pour tout ensemble e,

$$\mu(e) = \iint_e \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Dans ce cas, on voit immédiatement que la différence entre la somme (1) et l'intégrale

$$\iint_E f(\xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ne pourra pas surpasser, en module, la somme

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k |\mu(e_k)|$$

où l'on a désigné par ω_k l'oscillation de la fonction continue $f(P)$ sur l'ensemble e_k, de sorte que, quand on passe de la somme (1) à l'intégrale de Stieltjes, la différence en question tend vers zéro. Par conséquent on a précisément

$$\int_E f(P)\, d\mu = \iint_E f(\xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

En appliquant cette équation aux fonctions $f_n(P; Q)$ que nous venons de considérer et qui vont en croissant vers $\log 1/r$, on aura, par un second passage à la limite,

$$u(x, y) = u(Q) = \int_E \log 1/r\, d\mu = \iint_E \log 1/r\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

3. La recherche des masses.

Nous allons étudier de plus près la relation entre une couche de masses négatives $-\mu(e)$ et son potentiel logarithmique $u(Q)$. Nous ferons cette étude de sorte que nous finirons par résoudre le problème de l'inversion du potentiel: *connaissant le potentiel d'une certaine couche de masses négatives, déterminer la couche que l'on suppose inconnue.*

Commençons par ajouter aux développements du paragraphe précédent quelques remarques complémentaires concernant les parties du plan pour lesquelles le potentiel $u(Q)$, subharmonique en général, devient précisément harmonique. Tout d'abord, il en sera ainsi pour tous les points extérieurs à E c'est-à-dire n'appartenant ni à E ni à sa frontière. En effet, lorsque P appartient à E et Q varie à l'extérieur de E, la fonction $\log PQ$ est continue ainsi que toutes ses dérivées; de plus, si l'on fait varier P dans E et Q dans un ensemble fermé, composé de points extérieurs, tous les passages à la limite qui interviennent au calcul de $u(Q)$ et de ses dérivées, seront uniformes en P et Q de sorte que l'intégrale (3) du paragraphe précédent pourra s'interpréter immédiatement comme intégrale de fonction continue et que de plus, les dérivées de $u(Q)$ ainsi que les intégrales dépendant des dérivées dont il sera question, pourront êtres calculées en effectuant les mêmes opérations sur la fonction $\log PQ$ sous le signe d'intégrale. Il en vient en premier lieu que la fonction $u(Q)$ satisfait, pour Q extérieur à E, à l'équation de Laplace, c'est-à-dire qu'elle est harmonique. En voici une autre conséquence qui nous sera d'importance. Soit Γ une courbe fermée dont les points sont extérieurs à E, d'ailleurs suffisamment régulière (composée par exemple d'un nombre fini d'arcs dont la tangente varie d'une façon continue) et envisageons l'intégrale

(1) $$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{du}{dn_e} ds,$$

formée avec la dérivée de $u(Q)$ par rapport à la normale extérieure et en parcourant Γ au sens positif. Alors deux cas extrèmes seront à distinguer: 1) *lorsque Γ entoure l'ensemble E, on aura $I = \mu(E)$;* 2) *lorsque E est complètement extérieur à Γ, on aura $\mu(E) = 0$.* D'ailleurs, ce second fait n'est qu'une autre expression de ce que $u(Q)$ est harmonique sur Γ et à l'intérieur de cette courbe.

Ces résultats subsistent, avec des modifications évidentes, quand on remplace Γ par *plusieurs courbes fermées* limitant un domaine auquel l'ensemble E est complètement intérieur ou complètement extérieur.

Jusqu'ici tout ce que nous disions concernait l'ensemble des points extérieurs à E, on pourrait dire l'ensemble *a priori* vide de masses. Cependant il pourra y avoir d'autres parties vides, sans rôle effectif dans le calcul du potentiel et se comportant, par conséquent, tout comme l'ensemble que nous venons de considérer. Tout ce qu'on peut dire sur ce sujet est compris en substance dans l'observation suivante.

Soit e un ensemble tel que $\mu(e) = 0$ et soit e_0 un ensemble régulier, faisant partie de e, d'ailleurs quelconque. Soit $e_1, e_2, \ldots, e_m$ une décomposition permise de l'ensemble E, au sens du paragraphe précédent, intervenant dans le calcul de nos intégrales. Remplaçons chaque e_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ par deux autres ensembles savoir par $e_0 e_k$ et $(\underline{E - e_0}) e_k$; il en résultera une nouvelle décomposition permise, tous les ensembles qui interviennent étant réguliers. En opérant ainsi avec toutes les décompositions intervenant dans le calcul on pourra supprimer tous les termes correspondant aux ensembles $e_0 e_k$; en effet, les ensembles $e_0 e_k$ faisant partie d'un ensemble e avec $\mu(e) = 0$, on aura aussi $\mu(e_0 e_k) = 0$. Mais cela dit précisément que dans le calcul de nos intégrales, on pourra remplacer l'ensemble E par l'ensemble $\underline{E - e_0}$. Par conséquent, en ce qui concerne l'allure de la fonction $u(Q)$ et en particulier le calcul de l'intégrale (1), les points de e_0 se comportent entièrement comme s'il s'agissait des points extérieurs à E.

Cela étant, passons au cas plus délicat quand *la courbe Γ traverse des masses effectives.* Dans ce cas, comme nous ne savons pas si la dérivée normale figurant dans l'intégrale (1) a un sens ou n'en a pas, nous aurons à recourir à une notion auxiliaire introduite dans notre premier mémoire. Là nous avons considéré des anneaux 12, formés par deux courbes simples fermées C_1 et C_2 dont la première était intérieure à la seconde; de plus, en désignant par U_{12} la meilleure majorante harmonique de la fonction subharmonique $u(Q)$ dans l'anneau 12, nous avons envisagé l'intégrale

$$I_{12} = \int \frac{d\,U_{12}}{d\,n_e}\,d\,s$$

où l'intégration se faisait le long d'une courbe fermée suffisamment régulière, parcourant l'anneau 12 au sens positif, la valeur de l'intégrale ne dépendant pas d'ailleurs du choix particulier de cette courbe. Soit, en particulier, $u(Q)$ notre potentiel logarithmique et soient e_1 et e_2 les parties de E comprises respectivement à l'intérieur de C_1 et de C_2; cela posé, je dis que l'on a

$$(2) \qquad 2\,\pi\,\mu\,(e_1) \leqq I_{12} \leqq 2\,\pi\,\overline{\mu}\,(e_2).$$

Pour démontrer la première de ces inégalités, rappelons qu'il existe des ensembles ouverts réguliers e, parties de e_1, intérieurs avec leur frontière à la courbe C_1 et tels que $\mu(e)$ soit aussi proche de $\mu(e_1)$ que l'on voudra. L'inégalité à démontrer est évidemment équivalente à ce que l'on ait

$$2\,\pi\,\mu\,(e) \leqq I_{12}$$

pour tous ces ensembles e. Envisageons donc un de ces ensembles, soit e_0, et les deux répartitions de masses

$$\mu_0(e) = \mu\,(e_0\,e), \qquad \mu_1(e) = \mu\,((\underline{E-e_0})\,e),$$

définies par ces formules pour tous les e compris en E; alors, e_0 étant régulier, on aura

$$\mu\,(e) = \mu_0\,(e) + \mu_1\,(e)$$

et

$$u\,(Q) = u_0\,(Q) + u_1\,(Q),$$

u_0 et u_1 désignant les potentiels logarithmiques des couches $-\mu_0$ et $-\mu_1$. Enfin, désignons par $I_{12}^{(0)}$ et $I_{12}^{(1)}$ les analogues de I_{12}, correspondant respectivement à u_0 et à u_1. Comme la fonction $u_0(Q)$ est harmonique sur C_1 et à l'extérieur de cette courbe, elle sera sa propre meilleure majorante harmonique dans l'anneau 12, de sorte que

$$I_{12}^{(0)} = \int_{\Gamma} \frac{d\,u_0}{d\,n_e}\,d\,s,$$

l'intégration se faisant le long d'une courbe fermée Γ entourant C_1. Il s'ensuit que l'on a précisément

$$2\pi\mu(e_0) = I_{12}^{(0)}.$$

D'autre part, la fonction $u_1(Q)$, potentiel d'une couche négative, étant sub-harmonique dans tout le plan, on aura, d'après une règle générale établie vers la fin de notre premier mémoire,

$$I_{12}^{(1)} \geqq 0.$$

Comme on a encore évidemment

$$I_{12} = I_{12}^{(0)} + I_{12}^{(1)},$$

il vient que

$$2\pi\mu(e_1) \leqq I_{12},$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On procédera d'une manière analogue pour démontrer la seconde des inégalités (2), mais en choisissant maintenant un ensemble ouvert régulier compris dans l'ensemble $\underline{E-e_2}$ et à distance positive de la courbe C_2. Tels seront par exemple, sauf peut-être pour une infinité dénombrable de valeurs du paramètre t, les ensembles formés par les points de E extérieurs à C_2 et dont la distance de C_2 est $> t$. De plus, comme pour $t \to 0$, ces ensembles tendent en croissant vers l'ensemble $\underline{E-e_2}$, il en sera de même des masses μ qui y correspondent, c'est-à-dire que l'on pourra choisir l'ensemble e_3 du type considéré de sorte que $\mu(e_3)$ soit aussi proche de $\mu(\underline{E-e_2}) = \mu(E) - \mu(e_2)$ que l'on voudra. La seconde des inégalités (2) sera donc démontrée quand on aura prouvé que l'on a

$$I_{12} \leqq 2\pi(\mu(E) - \mu(e_3)). \tag{3}$$

A ce but, faisons la décomposition $\mu(e) = \mu_3(e) + \mu_4(e)$ en posant

$$\mu_3(e) = \mu(e_3 e), \qquad \mu_4(e) = \mu(\underline{E-e_3}\, e);$$

soient u_3 et u_4 les potentiels correspondant à $-\mu_3$ et $-\mu_4$ et soient $I_{12}^{(3)}$ et $I_{12}^{(4)}$ les analogues de I_{12}. Le potentiel u_3 étant harmonique sur C_2 et à son intérieur, on aura

$$I_{12}^{(3)} = 0. \tag{4}$$

D'autre part, la fonction u_4 étant subharmonique, il vient des résultats développés vers la fin de notre premier mémoire que la quantité $I_{12}^{(4)}$ ne surpassera pas la quantité analogue $I_{34}^{(4)}$, correspondant à la fonction u_4 et à un anneau 34 entourant l'anneau 12. Or, l'anneau 34 pourra être choisi de sorte qu'il entoure tout l'ensemble $E-e_3$ et que, par conséquent, le potentiel u_4 soit harmonique dans l'anneau, y compris son contour; donc

$$I_{34}^{(4)} = \int\limits_{\Gamma} \frac{d u_4}{d n_e} d s,$$

où Γ est une courbe fermée entourant l'ensemble $E-e_3$, c'est-à-dire entourant toutes les masses qui donnaient lieu au potentiel u_4. Par suite, $2\pi I_{34}^{(4)}$ est égale à la masse complète

$$\mu_4(\underline{E-e_3}) = \mu(E) - \mu(e_3)$$

et, en résumé,

$$2\pi I_{12}^{(4)} \leqq 2\pi I_{34}^{(4)} = \mu(E) - \mu(e_3). \tag{5}$$

Comme on a encore évidemment $I_{12} = I_{12}^{(3)} + I_{12}^{(4)}$, les formules (4) et (5) entraînent l'inégalité (3) qu'il fallait démontrer.

Notre raisonnement s'étend presque immédiatement au cas d'une figure composée de plusieurs anneaux que nous avons considérée à la fin de notre premier mémoire. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des anneaux extérieurs[1] l'un à l'autre, entourés[1] tous par l'anneau A_0 et soient $I_1, I_2, \ldots, I_m$; I_0 les quantités analogues à I_{12} calculées pour ces anneaux. Pour avoir une notation analogue à ce qui précède, désignons par C_1 l'ensemble des contours extérieurs des n premiers anneaux et du contour intérieur de A_0 et par C_2 l'ensemble des contours qui restent, et posons

$$I_{12} = I_0 - (I_1 + I_2 + \cdots + I_m). \tag{6}$$

Rappelons le théorème énoncé à la fin de notre premier mémoire; ce théorème nous disait que *lorsque une fonction $u(x, y)$ est subharmonique dans un domaine comprenant nos anneaux ainsi que l'aire limitée par les contours C_1* (ou ce qui

[1] Nous entendons ces expressions au sens strict, en supposant que les courbes limitant les divers anneaux n'aient aucun point en commun.

revient au même, comprenant les contours C_2 ainsi que l'aire limitée par ces derniers), *on a*

$$I_0 \geqq I_1 + I_2 + \cdots + I_m.^1 \tag{7}$$

Cela nous dit, dans la notation que nous venons d'adopter que l'on a, dans l'hypothèse faite,

$$I_{12} \geqq 0.$$

Mais on a plus. Envisageons une seconde figure du même type, composée des anneaux $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$; A'_0, *choisie de sorte que l'aire limitée par le système de contours* C'_1 *qui y correspond comprenne celle limitée par* C_2. *Supposons que la fonction en question* $u(x, y)$ *soit subharmonique dans un domaine comprenant les contours* C'_2 *ainsi que l'aire limitée par ces contours et soient* $I'_1, I'_2, \ldots, I'_n$; I'_0 *et* $I'_{12} = I'_0 - (I'_1 + I'_1 + \cdots + I'_n)$ *les quantités qui correspondent aux quantités* I_k, I_{12}. *Alors je dis que l'on a*

$$I_{12} \leqq I'_{12}.^2 \tag{8}$$

Pour vérifier cette inégalité, on n'aura qu'à grouper les anneaux considérés de la manière suivante. On considère d'abord les anneaux A_0 et A'_0; comme la figure formée par ces deux anneaux satisfait aux hypothèses du théorème que nous venons de rappeler, il vient que

$$I_0 \leqq I'_0.$$

Notre théorème s'applique de même aux m figures formées chacune par un des anneaux A_k et par tous les A'_l qu'il entoure[3]; en ajoutant les m inégalités que l'on obtient, il vient que

---

[1] Voici en quelques mots la démonstration de l'inégalité (7) que je n'ai pas développé dans mon premier mémoire. Soit U la meilleure majorante harmonique de la fonction u, formée pour l'aire limitée par les contours C_2 et remplaçons u par la fonction $u - U$; alors on aura à modifier les quantités I_k en retranchant les quantités analogues $\bar{I}_k$ correspondant à U, et comme cette fonction est harmonique et comme par conséquent $\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \cdots + \bar{I}_m$, la quantité I_{12} de la formule (6) ne subira aucune modification. D'autre part, on a pour les I_k modifiées, grâce au lemme du premier mémoire,

$$I_0 \geqq 0; \qquad I_k \leqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

c'est-à-dire que $I_0 \geqq I_1 + I_2 + \cdots + I_m$.

[2] Ce fait subsiste sous l'hypothèse plus générale que les domaines limités par C_1 et C_2 fassent partie respectivement de ceux limités par C'_1 et C'_2.

[3] Il pourra se passer que A_k ne renferme aucun des A'_l, mais ce cas ne pourra se présenter que si $u(Q)$ est subharmonique dans toute l'aire entourée par A_k; or dans ce cas on a $I_k \geqq 0$.

$$\sum_{k=1}^{m} I_k \leqq \sum_{l=1}^{n} I'_l.$$

En retranchant cette inégalité de la précédente, on aura l'inégalité (8) qu'il fallait démontrer.

Cela étant, revenons à la couche $-\mu(e)$ et au potentiel $u(x, y) = u(Q)$ qui y correspond. Soient e_1 et e_2 les parties de E renfermées respectivement par les systèmes C_1 et C_2. Nous avons à prouver que l'inégalité (2) reste valable dans le cas envisagé. Or, pour ce but, nous n'avons qu'à répéter les considérations faites au cas d'un seul anneau, en conservant même les notations dont le sens dans le cas actuel est évident. Il n'y aura, dans tout le raisonnement, que deux sortes de modifications; 1° quelques fois, comme par exemple dans le calcul de $I_{12}^{(0)}$, on aura à choisir pour chemin d'intégration plusieurs courbes fermées au lieu d'une seule courbe Γ, avec des conventions évidentes concernant leur situation et le sens de parcours; 2° au lieu de comparer deux quantités du type I_{12} calculées pour deux anneaux entourant l'un l'autre, on aura à donner le rôle de ces anneaux aux deux figures formées de plusieurs anneaux que nous venons de considérer; ainsi par exemple, pour établir l'inégalité

$$2\pi I_{12}^{(4)} \leqq \mu(E) - \mu(e_3)$$

qui correspond à la formule (5), on aura à remplacer les anneaux 12 et 34 par les deux figures considérées, en choisissant la seconde de ces figures de sorte que les contours C'_1 renferment l'ensemble $E - e_3$; enfin, il faudra appliquer l'inégalité (8) à la fonction subharmonique $u_4(Q)$.

Les inégalités (2) *étant ainsi établies dans toute leur généralité*, nous sommes à même de résoudre le problème posé: connaissant le potentiel d'une certaine couche négative $-\mu(e)$, déterminer cette couche que l'on suppose inconnue.

Observons tout d'abord que l'ensemble E n'est pas uniquement déterminé par le potentiel $u(Q)$; en effet, nous avons vu que l'on peut ajouter à cet ensemble et aussi en retrancher, avec quelque précaution, des ensembles ne contenant pas de masse effective sans que le potentiel en soit irrité. Pour nous débarrasser de l'inconvénient de cette indétermination, convenons de regarder comme identiques deux couches $\mu(e)$ et $\mu'(e)$ réparties sur les ensembles E, E' toujours que l'on a, pour tout ensemble ouvert e, $\mu(eE) = \mu'(eE')$. Il s'ensuit immédiatement de ce que nous avons dit sur les ensembles vides que les potentiels de ces deux couches sont identiques. Grâce à la convention faite, on pourra fixer les idées en supposant par exemple que E soit l'intérieur d'un cercle tracé autour de l'origine comme centre et de rayon suffisamment grand.

Cela étant, soit e un ensemble ouvert compris dans E et supposons pour l'instant que e soit une aire simplement connexe. Soit 12 un anneau formé par les courbes C_1 et C_2, comprises en e et dont la première est intérieure à la seconde. Faisons varier cet anneau de sorte que l'ensemble e_1 limité par C_1 tende vers l'ensemble e; alors *les inégalités* (2) *nous assurent que, avec la notation adoptée,*

$$I_{12} \to 2\pi\mu(e).$$

Ainsi notre problème est résolu pour les ensembles simplement connexes.

Lorsque e est d'un seul tenant, mais qu'il est multiplement connexe, on aboutira au même résultat en se servant, au lieu d'un seul anneau, de la figure déja indiquée, composée de plusieurs anneaux et située de sorte que les contours C_2 et l'aire limitée par ces contours soient compris dans e, et en faisant varier cette figure de sorte que l'ensemble e_1 renfermé par les contours C_1 tende vers l'ensemble e.

Mais cette règle pour calculer $\mu(e)$ s'étend aussi au cas général où l'on ne suppose plus que l'ensemble e soit d'un seul tenant; bien entendu, on aura à introduire d'abord des notations convenables. Dans ce cas général, on placera dans l'ensemble e, au lieu d'une seule figure composée d'anneaux, un nombre fini de telles figures $G_1, G_2, \ldots, G_n$, extérieures l'une à l'autre; c'est-à-dire telles que les domaines fermés limités par les divers systèmes de contours $C_2^{(k)}$, analogues à C_2, soient sans point commun deux à deux. Soient $I_{12}^{(k)}$ les quantités analogues à I_{12}, $e_1^{(k)}$ et $e_2^{(k)}$ les domaines ouverts limités par les systèmes de contours $C_1^{(k)}$ et $C_2^{(k)}$, analogues à C_1, C_2. Alors on aura, d'après (2),

$$2\pi\mu(e_1^{(k)}) \leqq I_{12}^{(k)} \leqq 2\pi\bar{\mu}(e_2^{(k)})$$

et, par conséquent, en désignant par e_1 l'ensemble somme des $e_1^{(k)}$ et en écrivant $\sum_{k=1}^{n} I_{12}^{(k)} = I_{12}$, il vient que

$$2\pi\mu(e_1) \leqq I_{12} \leqq 2\pi\sum_{k=1}^{n}\bar{\mu}(e_2^{(k)}) \leqq 2\pi\mu(e).$$

Or ces inégalités montrent nettement que *si l'on fait varier les figures $G_1, G_2, \ldots, G_n$ en changeant même leur nombre lorsqu'il le faudra et cela de sorte que l'ensemble e_1 tende vers l'ensemble e, on aura*

$$I_{12} \to 2\pi\mu(e),$$

tout comme dans les cas que nous venons de considérer.

Ajoutons à ces résultats d'ordre général quelques mots concernant un cas particulier important, celui où l'on a à calculer $\mu(e)$ pour l'intérieur d'un cercle C, de rayon r. Dans ce cas, on pourra évidemment supposer que l'anneau 12 soit limité par deux cercles C_1 et C_2 de rayons r_1 et r_2 et concentriques à C. Mais dans ce cas, comme nous l'avons déjà observé dans notre premier mémoire, on aura

$$I_{12} = 2\pi \frac{I(r_1) - I(r_2)}{\log r_1 - \log r_2},$$

où nous avons désigné par $I(\varrho)$ la valeur moyenne de la fonction $u(x, y)$ sur le cercle de rayon ϱ et concentrique à C. En rappelant encore que $I(\varrho)$ est une fonction convexe de $\log\varrho$ et que par consequent elle est continue, il vient que *$\mu(e)$ est précisement égale à la dérivée à gauche, pour $\varrho = r$, de la fonction $I(\varrho)$ par rapport à $\log\varrho$*, c'est-à-dire que l'on a

$$\mu(e) = r\, I'_{-}(r).$$

4. Le théorème principal.

Nous allons attaquer notre problème principal: *Étant donnée, dans un domaine ouvert D, la fonction subharmonique $u(Q) = u(x, y)$, continue ou non, existe-t-il une couche de masses négatives $-\mu(e)$ réparties sur D dont $u(Q)$ est, en substance, le potentiel logarithmique?*

Si, pour l'instant, je formule le problème de cette façon vague en me réservant de le préciser plus loin, c'est pour des raisons assez graves. Tout d'abord, lorsque $u(Q)$ est précisement harmonique et l'on cherche à déterminer une couche $-\mu(e)$ dont elle est le potentiel, les masses $\mu(e)$ devront être fournies par la voie indiquée au paragraphe précédent. Or, dans ce cas, toutes les quantités I_k s'annulent, c'est-à-dire que l'on aura $\mu(e) = 0$ pour chaque ensemble ouvert faisant partie de D et comme le potentiel de cette couche s'annule partout, il faudrait avoir $u(Q) \equiv 0$. D'une façon plus générale, lorsque $u(Q)$ est le potentiel logarithmique correspondant à une certaine couche $-\mu(e)$ répartie sur D et $h(Q)$ désigne une fonction harmonique dans D, d'ailleurs arbitraire, notre méthode appliquée à $u(Q) + h(Q)$ fournira les mêmes masses $\mu(e)$ que pour $u(Q)$ elle-même.

C'est-à-dire que, en général, le plus que l'on pourra exiger c'est que le potentiel en question représente la fonction donnée $u(Q)$ *à une fonction harmonique additive près.*

Mais il y a encore une seconde difficulté. Considérons la fonction définie par la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{P_k Q}{P_{-k} Q}$$

où les P_k et P_{-k} sont des points de l'axe des x aux abscisses $1/k$, $-1/k$. Cette série converge absolument dans tout le plan sauf si Q coïncide avec l'un des points P_k, P_{-k} pour lesquels le terme correspondant devient respectivement infini négatif ou positif. La fonction $u(Q)$ définie par la série, harmonique sauf aux points P_k et P_{-k}, peut être considérée comme fonction subharmonique dans tout le plan, après en avoir exclu les points P_{-k}. Elle sera donc subharmonique dans tout domaine ne contenant aucun point P_{-k}, par exemple dans le carré D limité par les droites $x=0, x=2, y=-1, y=1$. On voit aussi immédiatement que si $u(Q)$ était un potentiel logarithmique ou la somme d'un tel potentiel et d'une fonction harmonique, la couche correspondante, déterminée par la méthode indiquée, se composerait de masses égales à l'unité négative, placées aux points P_k, c'est-à-dire que, avec la notation adoptée, $\mu(e)$ devrait être égale au nombre des points P_k appartenant à l'ensemble e. En particulier, $\mu(D)$ serait infinie. Toutefois, on pourrait encore essayer de sauver la situation en étendant la définition du potentiel au cas où la masse totale est infinie, par exemple en le calculant d'abord pour des ensembles E intérieurs avec leur frontière à D et en faisant tendre E vers D. Cependant, de cette sorte, on serait amené à former la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log P_k Q$$

et cette série est absolument divergente. C'est-à-dire que *notre potentiel deviendrait partout infini.*

Ces remarques nous suggèrent de formuler le problème comme il suit. Étant donnée, dans un domaine ouvert D, la fonction subharmonique $u(Q)=u(x,y)$, existe-t-il une fonction d'ensemble $\mu(e)$, finie et déterminée pour chaque ensemble ouvert e intérieur à D ainsi que sa frontière, de sorte que, considérée pour un tel ensemble ouvert E, d'ailleurs quelconque, et pour ses parties e, $-\mu(e)$ soit une couche négative dont le potentiel logarithmique ne diffère de la fonction donnée $u(Q)$ que par une fonction harmonique sur l'ensemble E?

Énoncé sous cette forme, notre problème est bien posé; en effet, nous allons y répondre par l'affirmatif.

Considérons d'abord le cas où $u(x, y)$ est continue et admet des dérivées continues des deux premiers ordres. Ce cas rentre dans l'Analyse classique d'après laquelle la couche de densité $\varDelta u/2\pi = (u''_{xx} + u''_{yy})/2\pi$ répond à notre problème. Il s'ensuit immédiatement que dans ce cas les quantités

$$\mu(e) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_e \varDelta u\, dx\, dy$$

et les quantités I_{12} qui correspondent à des anneaux ou à des figures plus complexes inscrits dans l'ensemble e, seront liées par les relations établies au paragraphe précédent.

Pour étudier le cas général, définissons la fonction d'ensemble $\mu(e)$, pour tout ensemble ouvert e intérieur avec sa frontière au domaine D, par le même procédé par lequel nous avons reconstruit la couche correspondant à un potentiel donné, c'est-à-dire comme la limite des quantités I_{12} correspondant à $u(Q)$ et calculées par la voie indiquée au paragraphe précédent. Cependant dans le cas actuel nous savons seulement que la fonction $u(Q)$ est subharmonique sans connaître son rapport aux potentiels logarithmiques et par conséquent nous ne pourrons pas nous reporter aux résultats concernant ces potentiels. Nous aurons à prouver indépendamment que les limites en question existent, c'est-à-dire que lorsque, avec les notations adoptées, on fait varier les figures $G_1, G_2, \ldots, G_m$ de sorte que l'ensemble e_1 enfermé par les systèmes de contours $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \ldots, C_1^{(m)}$ tende vers l'ensemble e, la quantité correspondante

$$I_{12} = \sum_{k=1}^{m} I_{12}^{(k)} \tag{1}$$

tend vers une limite finie et déterminée. Pour ce but, nous aurons à généraliser une fois de plus les théorèmes finals de notre premier mémoire.

Pour simplifier l'expression, nous dirons que la figure G est comprise dans le domaine D ou qu'elle l'est dans l'ensemble ouvert e s'il en est ainsi pour le domaine fermé limité par les contours C_2 correspondants; tel sera le cas, à plus forte raison, pour le domaine fermé limité par les contours C_1. Nous dirons que les figures G_1, G_2 sont extérieures l'une à l'autre si les domaines fermés limités par les deux systèmes de contours $C_2^{(1)}$, $C_2^{(2)}$ qui y correspondent n'ont aucun point commun. Enfin, nous dirons que G est intérieure à $\overline{G}$ si le domaine ouvert limité par les courbes C_2 est compris dans le domaine ouvert limité par le système de courbes $\overline{C}_1$ correspondant à $\overline{G}$.

Cela posé, soient $G_1, G_2, \ldots, G_m$; $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \ldots, \overline{G}_n$ deux systèmes de figures du type considéré, comprises dans le domaine D; supposons que toutes les G soient extérieures l'une à l'autre et qu'il soit de même quant aux figures $\overline{G}$. Supposons de plus que chacune des figures G soit intérieure à l'une des figures $\overline{G}$, tout en permettant d'ailleurs qu'il y ait plusieurs G intérieures à la même $\overline{G}$ et que d'autre part, pour l'une ou l'autre des figures $\overline{G}$, il n'y ait aucune G qui y est intérieure. Dans ces hypothèses, nous dirons brièvement que le système $\{G_k\}$ est intérieur au système $\{\overline{G}_l\}$.

Désignons par $I_{12}^{(k)}$, $\overline{I}_{12}^{(l)}$ les quantités I_{12} qui correspondent aux figures G_k et $\overline{G}_l$. Je dis que, dans les hypothèses faites, on a

$$\sum_{k=1}^{m} I_{12}^{(k)} \leqq \sum_{l=1}^{n} \overline{I}_{12}^{(l)}. \tag{2}$$

Cette inégalité, généralisation immédiate de l'inégalité (8) du paragraphe précédent, se vérifiera comme celle-là en groupant d'une manière convenable les anneaux dont se composent les figures considérées. D'ailleurs, sans restreindre la généralité, on pourra supposer que $n = 1$; en effet, dans le cas général, on obtiendra (2) en ajoutant les inégalités qui correspondent aux figures $\overline{G}_l$ une à une et aux G_k qui y sont intérieures, en rappelant encore que l'on a toujours $\overline{I}_{12}^{(l)} \geqq 0$. Pour $n = 1$, considérons la figure formée par l'anneau $\overline{A}_0^{(1)}$, appartenant à la figure $\overline{G}_1$ (et entourant les autres anneaux $\overline{A}_1^{(1)}$, $\overline{A}_2^{(1)}, \ldots$ dont est composée cette figure) et par les anneaux analogues $A_0^{(k)}$ appartenant respectivement aux figures G_k. Ces anneaux satisfaisant aux hypothèses de l'inégalité (7) du paragraphe précédent, on aura, avec des notations évidentes,

$$\overline{I}_0^{(1)} \geqq I_0^{(1)} + I_0^{(2)} + \cdots + I_0^{(m)}. \tag{3}$$

Mais on aura aussi l'inégalité analogue pour chaque système d'anneaux formé par un des anneaux $A_i^{(k)}$ et par tous les anneaux $\overline{A}_j^{(1)}$ qu'il entoure. Enfin, on aura $I_i^{(k)} \geqq 0$ quand l'anneau $A_i^{(k)}$ n'entoure aucun des anneaux $\overline{A}_j^{(1)}$. En ajoutant toutes ces inégalités, il vient que

$$\sum I_i^{(k)} \geqq \sum \bar{I}_i^{(l)}$$

où la sommation s'étend à tous les i, k qui interviennent, sauf à $i=0$. Enfin, en retranchant cette inégalité de l'inégalité (3), on aura l'inégalité (2) qu'il s'agissait à démontrer.

Or, en possession de cette inégalité, nous sommes à même de prouver que *lorsque le système composé des figures $G_1, G_2, \ldots, G_m$, extérieures l'une à l'autre et intérieures à l'ensemble ouvert e, varie de sorte que l'ensemble e_1 enfermé par les systèmes de contours $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \ldots, C_1^{(m)}$ tend vers l'ensemble e, la quantité I_{12} définie par la formule* (1) *qui y correspond tend vers une limite finie et déterminée.* Tout d'abord je dis que la quantité I_{12} reste inférieure à une certaine borne finie. Pour le voir, construisons un système analogue $\{\bar{G}_l\}$, compris dans le domaine D et tel que les figures G_k soient comprises dans l'ensemble $\bar{e}_1$ qui correspond au système $\{\bar{G}_l\}$, c'est-à-dire qu'il se compose des domaines ouverts limités par les divers systèmes de contours $\bar{C}_1^{(l)}$. En désignant par $\bar{I}_{12}$ la quantité analogue à I_{12} qui correspond au système $\{\bar{G}_l\}$, on aura, d'après (2),

$$I_{12} \leqq \bar{I}_{12},$$

c'est-à-dire que I_{12} ne pourra jamais dépasser le quantité $\bar{I}_{12}$. Comme d'autre part, on a toujours $I_{12} \leqq 0$, la quantité I_{12} admettera, pour $e_1 \rightarrow e$, des limites inférieure et supérieure, finies toutes les deux et nous n'avons à démontrer que ce que ces deux limites coïncident. En tout cas, il y aura deux suites de systèmes $S_1, S_2, \ldots$ et $S'_1, S'_2, \ldots$, du type $\{G_k\}$, compris dans e et tels que les ensembles du type e_1 qui y sont attachés tendent vers e et cela de sorte que les quantités $I_{12}^{(1)}, I_{12}^{(2)}, \ldots$ et $I_{12}^{(1)\prime}, I_{12}^{(2)\prime}, \ldots$ qui y correspondent par une notation évidente, tendent respectivement vers les dites limites inférieure et supérieure. Considérons un des systèmes S_k soit S_{k_0} et parcourons la suite $S'_1, S'_2, \ldots$; comme les ensembles du type e_1 qui correspondent à ces systèmes, tendent vers l'ensemble e, le système S_{k_0} sera compris dans ces ensembles à partir d'un rang suffisamment élevé; le fait analogue subsiste lorsqu'on compare un système S'_{l_0} à la suite $\{S_k\}$. Il s'ensuit que l'on peut former une suite $S''_1, S''_2, \ldots$ de sorte que S''_n soit intérieur à S''_{n+1}, que de plus les S'' appartiennent alternativement aux suites $\{S_k\}$ et $\{S'_l\}$. Mais pour une telle suite, les quantités correspondantes $I_{12}^{(1)\prime\prime}, I_{12}^{(2)\prime\prime}, \ldots$ forment une suite croissante et bornée, allant par conséquent vers une limite déterminée, et comme celle-ci devra coïncider à la fois avec les limites inférieure et supérieure en question, ces deux limites coïncident elles-mêmes, ce qu'il fallait démontrer.

Pour étudier la fonction d'ensemble

$$\mu(e) = \lim_{e_1 \to e} I_{12} \tag{4}$$

que nous venons de définir, observons d'abord que l'on voit immédiatement par ce qui précède que cette fonction satisfait aux hypothèses 1)—3) posées au commencement du paragraphe 1° et que de plus elle est additive en ce qu'il s'agit de deux ensembles sans point commun. Ce qui est plus difficile à prouver c'est que l'additivité subsiste pour deux ensembles ouverts quelconques au sens précisé dans l'hypothèse 4), c'est-à-dire que l'on a

$$\mu(e_1) + \mu(e_2) = \mu(e_1 + e_2) + \mu(e_1 e_2).$$

Pour vérifier cette équation, nous aurons à envisager certaines fonctions auxiliaires que nous allons introduire.

En partant de la fonction $u(Q) = u(x, y)$, passons à une autre fonction en y appliquant l'opération que nous désignerons par $\mathfrak{A}_r$ et qui consiste à remplacer la fonction u par sa moyenne arithmétique calculée pour l'aire d'un cercle de centre (x, y) et de rayon r, c'est-à-dire par l'intégrale de u étendue à cette aire de cercle, divisée par $r^2\pi$. En faisant varier le centre du cercle et en conservant le rayon r, nous aurons défini une nouvelle fonction $\mathfrak{A}_r u$. On pourra répéter ce procédé en se servant à chaque occasion de valeurs différentes ou de la même valeur de r; on parviendra de cette sorte à des fonctions que l'on désignera par $\mathfrak{A}_{r_2}\mathfrak{A}_{r_1}u$, $\mathfrak{A}_{r_3}\mathfrak{A}_{r_2}\mathfrak{A}_{r_1}u$, $\mathfrak{A}_r^3 u$, etc., la seconde notation indiquant par exemple que l'on a appliqué successivement les opérations $\mathfrak{A}_{r_1}$, $\mathfrak{A}_{r_2}$, $\mathfrak{A}_{r_3}$. Bien entendu, si la fonction $u(Q)$ n'était donnée que dans le domaine D, les nouvelles fonctions ne le seront que dans une partie de ce domaine; ainsi par exemple $\mathfrak{A}_r^3 u$ le sera en tout point Q de D dont la distance de la frontière est supérieure à $3r$. Mais je me hâte d'ajouter que, dans les applications, nous disposerons des quantités r de sorte qu'elles deviennent infiniment petites, ce qui permettra de remonter au domaine entier.

Les opérations $\mathfrak{A}_r$ s'appliquent à toute fonction $f(x, y)$ intégrable au sens de Lebesgue et ont l'effet de rendre continue la fonction $\mathfrak{A}_r f$. C'est-là une conséquence bien connue du théorème de M. Lebesgue d'après lequel l'intégrale étendue à un ensemble infiniment petit est infiniment petite elle-même. De plus, on montre par un raisonnement appartenant à l'Analyse classique que l'opération $\mathfrak{A}_r$ a l'effet de transformer les fonctions continues en des fonctions admettant des dérivées premières continues, et d'une façon générale, qu'elle transforme les fonctions admettant des dérivées continues des n premiers ordres en des fonctions qui en admettent jusqu'à l'ordre $n+1$. En effet, l'intégrale double donnant le rapport des accroissements

$$\frac{\mathfrak{A}_r f(x_0+h,y)-\mathfrak{A}_r f(x_0,y)}{h}$$

peut être calculée par deux intégrations successives; en faisant abstraction pour un instant du dénominateur $hr^2\pi$, on aura d'abord à calculer l'intégrale de la différentielle $f\,dy$ le long du cercle de rayon r tracé autour du point (x_0, y_0) comme centre et puis intégrer par rapport à x de x_0 jusqu'à x_0+h. Il vient de là que la limite, pour $h\to 0$, c'est-à-dire la dérivée de $\mathfrak{A}_r f(x,y)$ par rapport à x au point (x_0, y_0) existe et qu'elle sera fournie par l'intégrale de la différentielle $f\,dy$, prise le long du cercle de rayon r autour de (x_0, y_0) comme centre, divisée par $r^2\pi$. De même quant à la dérivation par rapport à y. Lorsque la fonction $f(x,y)$ admet des dérivées continues d'ordre n, les dérivées de même ordre de $\mathfrak{A}_r f$ se calculent en interchangeant l'ordre de l'intégration et des différentiations, c'est-à-dire en appliquant l'opération $\mathfrak{A}_r$ aux dites dérivées de $f(x,y)$; par conséquent, d'après ce que nous venons de voir, les dérivées d'ordre n de $\mathfrak{A}_r f$ admettront des dérivées premières continues.[1]

Pour appliquer ces résultats généraux aux fonctions subharmoniques $u(x,y)$ et pour voir l'effet particulier que produit l'opération $\mathfrak{A}_r$ lorsqu'on la fait agir sur de telles fonctions, il faut montrer tout d'abord que ces fonctions sont intégrables à l'intérieur de D, ou ce qui revient au même, qu'elles sont intégrables dans toute aire circulaire, appartenant avec sa frontière au domaine D. Soit K une telle aire, au centre Q_0 et au rayon r et supposons pour l'instant que la fonction $u(Q)$ ait une valeur finie au point Q_0. Dans ce cas, l'intégrabilité de la fonction $u(Q)$, semi-continue par hypothèse, est une conséquence immédiate de ce que u est intégrable linéairement sur tout cercle concentrique à K, de rayon $\varrho\leqq r$ et que de plus, la moyenne arithmétique de $u(Q)$, calculée pour ces cercles,

---

[1] *Cf.* E. Levi, Sopra una proprietà caratteristica delle funzione armoniche, *Atti d. R. Accademia dei Lincei*, t. 18 (1909), 1° sem., p. 10—15. *Voir* encore, pour cet ordre d'idées, la contribution très intéressante de M. T. Carleman dans: G. Pólya u. G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin, Springer, 1925, t. I., p. 291.

est une fonction croissante de ϱ pour $0 \leqq \varrho \leqq r$. Or, l'ensemble des points pour lesquels $u(Q)$ est finie étant partout dense dans D, toute aire circulaire K intérieure avec sa frontière à D fait partie d'une aire du type particulier que nous venons de considérer.

Du raisonnement qui précède il s'ensuit encore que l'on a partout

$$u(x, y) \leqq \mathfrak{A}_r u(x, y) \tag{5}$$

et que, d'une façon plus générale,

$$\mathfrak{A}_{r_2} u(x, y) \leqq \mathfrak{A}_{r_1} u(x, y) \qquad (r_2 < r_1). \tag{6}$$

De plus, *toute fonction subharmonique jouit d'une certaine espèce de continuité qui s'exprime par l'équation*

$$u(x, y) = \lim_{r \to 0} \mathfrak{A}_r u(x, y). \tag{7}$$

En effet, il vient de l'inégalité (6) que pour $r \to 0$, $\mathfrak{A}_r u(x, y)$ va vers une limite déterminée, finie ou infinie négative. Ce dernier cas ne pourra se présenter, d'après (5), que si $u(x, y) \to -\infty$. Quand la valeur $u(x_0, y_0)$ est finie on observera que, la fonction $u(x, y)$ étant semicontinue supérieurement, on a pour tout ε positif arbitrairement choisi,

$$u(x, y) \leqq u(x_0, y_0) + \varepsilon \tag{8}$$

dans le voisinage du point (x_0, y_0) et que, par conséquent, on a aussi

$$\mathfrak{A}_r u(x_0, y_0) \leqq u(x_0, y_0) + \varepsilon$$

pour r suffisamment petit. Comparée avec (5), cette inégalité fournit l'équation (7).

Mais on peut aller plus loin. Tout d'abord, il vient par une application répétée de l'inégalité (6) que l'on a

$$\mathfrak{A}_{r''_2} \mathfrak{A}_{r'_2} \mathfrak{A}_{r_2} u(x, y) \leqq \mathfrak{A}_{r''_1} \mathfrak{A}_{r'_1} \mathfrak{A}_{r_1} u(x, y) \qquad (r_2 \leqq r_1, r_2' \leqq r_1', r_2'' \leqq r_1'')$$

et en particulier

$$\mathfrak{A}^3_{r_2} u(x, y) \leqq \mathfrak{A}^3_{r_1} u(x, y) \qquad (r_2 \leqq r_1).$$

C'est-à-dire que les fonctions $\mathfrak{A}^3_r u(x, y)$, dépendant du paramètre r, décroissent avec r. Je dis que l'on a

$$u(x, y) = \lim_{r \to 0} \mathfrak{A}^3_r u(x, y). \tag{9}$$

Cela ce vérifie de la même manière que l'équation (7). D'une part, il vient par une itération de l'inégalité (5) que

$$u(x,y) \leqq \mathfrak{A}_r^s u(x,y). \tag{10}$$

D'autre part, les $\mathfrak{A}_r^s u(x,y)$ allant en décroissant avec r, $\mathfrak{A}_r^s u(x,y)$ ira vers une limite déterminée, finie ou infinie négative. Ce dernier cas ne pourra se présenter, d'après (8), que si $u(x,y) = -\infty$. Quand la valeur $u(x_0,y_0)$ est finie, l'inégalité (8) est valable dans un certain voisinage du point (x_0,y_0) et l'on pourra supposer r suffisamment petit pour que le calcul de $\mathfrak{A}_r^s u(x_0,y_0)$ s'effectue sans qu'il faille sortir de ce voisinage; il s'ensuit que l'on a aussi, pour r suffisamment petit,

$$\mathfrak{A}_r^s u(x_0,y_0) \leqq u(x_0,y_0) + \varepsilon. \tag{11}$$

Or, l'équation (9) est une conséquence immédiate des inégalités (10) et (11).

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$u_n(x,y) = \mathfrak{A}_{1/n}^s u(x,y);$$

alors le fait essentiel qui ressort des considérations précédentes c'est *qu'il existe des fonctions* $u_n(x,y)$, *subharmoniques et continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, qui vont en décroissant vers la fonction* $u(x,y)$. En réalité, ces fonctions ne sont pas définies pour le domaine tout entier; cependant les ensembles pour lesquelles nous les avons définies vont en croissant vers D et cela nous suffira pour le but que nous porsuivons.[1]

Les fonctions $u_n(x,y)$ donnent lieu à des fonctions d'ensembles $\mu_n(e)$, définies par l'intégrale de $\Delta u_n / 2\pi$ étendue sur l'ensemble e. Ces fonctions d'ensemble sont évidemment additives; pour en conclure qu'il en est de même quant à la fonction d'ensemble $\mu(e)$, correspondant à la fonction $u(x,y)$ et définie par l'équation (4), il nous faudra faire voir que, dans un certain sens que nous allons préciser, la fonction d'ensemble $\mu(e)$ est la limite des fonctions d'ensembles $\mu_n(e)$.

Pour cet effet, considérons un anneau A intérieur avec sa frontière au domaine D et pour cet anneau, formons les meilleures majorantes harmoniques $U(x,y)$, $U_n(x,y)$ des fonctions $u(x,y)$, $u_n(x,y)$. D'après le paragraphe 2° de notre premier mémoire, les U_n tendent en décroissant vers la fonction U et comme ces fonctions sont harmoniques, la convergence est uniforme à l'intérieur de l'anneau A et cela

[1] *Cf.* pour un artifice analogue, T. RADÓ, Remarque sur les fonctions subharmoniques, *Comptes Rendus de l'Académie d. Sc.,* Paris, t. 186 (1928), p. 346—348. M. RADÓ se sert des carrés au lieu des cercles, ce qui revient au même autant qu'il s'agit d'une analyse des fonctions subharmoniques *continues;* mais les suites analogues à $\{u_n\}$ que l'on obtient de cette sorte, manquant d'être monotones, elles ne conviennent pas pour l'analyse du cas général.

non seulement pour les U_n et leur limite U, mais aussi pour les dérivées de ces fonctions. Il s'ensuit que si l'on désigne respectivement par I et $I^{(n)}$ les intégrales du type tant de fois considéré correspondant à l'anneau A et aux fonctions u et u_n, on aura aussi

$$I^{(n)} \to I.$$

Ce résultat s'étend, par addition, à tous les systèmes composés de figures G comme nous les avons envisagés; c'est-à-dire que l'on a, avec une notation évidente et pour tout tel systeme,

$$I_{12}^{(n)} \to I_{12}. \tag{12}$$

Cela étant, envisageons un ensemble ouvert e_0, intérieur avec sa frontière au domaine D. Soit $\bar{\mu}(e_0)$ la masse extérieure correspondant à l'ensemble e_0, calculée conformément à la définition posée au paragraphe 1°, c'est-à-dire la borne inférieure des quantités $\mu(e)$ correspondant aux ensembles ouverts e comprenant e_0 ainsi que sa frontière. Supposons que $\mu(e_0) = \bar{\mu}(e_0)$, c'est-à-dire que, avec l'expression adoptée au paragraphe 1°, l'ensemble e_0 soit régulier par rapport à la fonction d'ensemble $\mu(e)$.[1] Je dis que, sous l'hypothèse faite, on a

$$\mu_n(e_0) \to \mu(e_0).$$

En effet, l'hypothèse faite nous assure que, pour ε positif arbitrairement choisi, il y en a des ensembles ouverts e, comprenant e_0 ainsi que sa frontière de sorte que

$$\mu(e) < \mu(e_0) + \varepsilon.$$

Soit $\bar{e}$ un tel ensemble. Envisageons un système de figures $\overline{G}_l$ comprises en $\bar{e}$, extérieures l'une à l'autre et entourant dans leur ensemble l'ensemble e_0. Alors la quantité I_{12} qui y correspond sera comprise entre $\mu(e_0)$ et $\mu(e_0) + \varepsilon$. D'autre part, d'après la définition de $\mu(e)$, on pourra trouver un système du même type $\{G_k\}$, compris dans e_0 et tel que la quantité I_{12} qui y correspond soit plus grande que $\mu(e_0) - \varepsilon$. Désignons enfin par $I_{12}^{(n)}$ et $\bar{I}_{12}^{(n)}$ les quantités analogues qui correspondent aux systèmes $\{G_k\}$ et $\{\overline{G}_l\}$ et aux fonctions $u_n(x, y)$. Alors l'équation (12) nous assure que l'on aura aussi, pour n suffisamment grand,

$$\mu(e_0) - \varepsilon < I_{12}^{(n)}; \; \bar{I}_{12}^{(n)} < \mu(e_0) + \varepsilon$$

et comme, d'autre part,

[1] Observons que sous cette forme, la définition des ensembles réguliers ne dépend point de l'additivité de la fonction d'ensemble $\mu(e)$.

$$I_{12}^{(n)} \leqq \mu_n(e_0) \leqq I_{12}^{(n)}$$

il vient que, pour n suffisamment grand,

$$\mu(e_0) - \varepsilon \leqq \mu_n(e_0) \leqq \mu(e_0) + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que

$$\mu_n(e_0) \rightarrow \mu(e_0), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Voici une conséquence immédiate de cette équation. La fonction d'ensemble $\mu_n(e)$ étant additive, on a pour deux ensembles ouverts quelconques e_1 et e_2

$$\mu_n(e_1) + \mu_n(e_2) = \mu_n(e_1 + e_2) + \mu_n(e_1 e_2)$$

et cette relation se conserve à la limite. Par conséquent, si les ensembles e_1, e_2, $e_1 + e_2$, $e_1 e_2$ sont réguliers par rapport à $\mu(e)$, on aura aussi

$$\mu(e_1) + \mu(e_2) = \mu(e_1 + e_2) + \mu(e_1 e_2). \tag{13}$$

Il s'agira de démontrer que cette équation subsiste dans le cas général. Pour cela, désignons par t une variable positive et soit $e_t^{(1)}$ le sous-ensemble de e_1, formé par les points dont la distance de la frontière est plus grande que t; soit $e_t^{(2)}$ le sous-ensemble analogue de e_2 et envisageons encore les ensembles $e_t^{(1)} + e_t^{(2)}$, $e_t^{(1)} e_t^{(2)}$. Le raisonnement général concernant les variétés monotones d'ensembles e_t, fait au paragraphe 1°, étant valable pour les ensembles envisagés, il s'ensuit que tous ces ensembles sont réguliers par rapport à $\mu(e)$, sauf peut-être à une infinité dénombrable d'entre eux. Donc on pourra faire aller t vers zéro de sorte que les ensembles correspondant aux valeurs parcourues soient réguliers, et comme la fonction $\mu(e)$ est continue inférieurement, les valeurs respectives de $\mu(e)$ iront vers les limites $\mu(e_1)$, $\mu(e_2)$, $\mu(e_1 + e_2)$ et $\mu(e_1 e_2)$. On en conclut que l'équation 13) est valable sans exception; c'est-à-dire que l'additivité de la fonction d'ensemble $\mu(e)$ est démontrée.

Étudions enfin la relation qui existe entre la fonction $u(x, y)$ et le potentiel de la couche $-\mu(e)$, formé pour un ensemble ouvert E intérieur avec sa frontière au domaine D. Supposons encore pour l'instant que l'ensemble E soit régulier par rapport à $\mu(e)$. Dans ce cas on a, pour toute fonction $f(P)$ uniformément continue dans E,

$$\int_E f(P)\, d\mu_n \rightarrow \int_E f(P)\, d\mu. \tag{14}$$

En effet, si l'on décompose E en des ensembles réguliers e_k et l'on forme les sommes

$$(15) \qquad \sum_{k=1}^{m} f(P_k)\,\mu_n(e_k), \quad \sum_{k=1}^{m} f(P_k)\,\mu(e_k),$$

P_k appartenant à e_k, la première de ces sommes tend vers la seconde pour $n \to \infty$. Or la différence entre les intégrales envisagées et les sommes respectives est, en module, inférieure ou égale à la plus grande des oscillations de $f(P)$ sur les ensembles e_k, multipliée respectivement par $\mu_n(E)$ ou $\mu(E)$. Comme $\mu_n(E) \to \mu(E)$ et comme, d'autre part, on peut choisir les ensembles e_k de sorte que les oscillations en question soient aussi petites que l'on voudra, il s'ensuit que l'on pourra approcher indéfiniment les deux intégrales par des sommes (15) et cela uniformément par rapport à n; la relation (14) en découle immédiatement.

Envisageons maintenant les potentiels des couches $-\mu_n(e)$ et $-\mu(e)$, formés pour l'ensemble E,

$$(16) \qquad u_n^*(x, y) = u_n^*(Q) = \int_E \log PQ\, d\mu_n, \quad u^*(x, y) = u^*(Q) = \int_E \log PQ\, d\mu.$$

Nous allons montrer que

$$(17) \qquad \mathfrak{A}_r u_n^*(x, y) \to \mathfrak{A}_r u^*(x, y).$$

En effet, il vient des règles générales concernant les intégrations successives que les intégrations en (16) et l'opération $\mathfrak{A}_r$ peuvent être interchangées de sorte que les fonctions $\mathfrak{A}_r u_n^*$ et $\mathfrak{A}_r u^*$ pourront être calculées en remplaçant $\log PQ$ par la fonction que l'on obtient en y appliquant l'opération $\mathfrak{A}_r$. Or cette fonction $\mathfrak{A}_r \log PQ$ étant continue par rapport aux points variables P et Q, la formule (14) pourra être appliquée et fournira la relation (17) qu'il fallait démontrer.[1]

Cela étant, nous sommes à même de comparer la fonction subharmonique donnée $u(x, y)$ au potentiel $u^*(x, y)$. Pour cela, envisageons les fonctions

$$h_n(x, y) = u_n(x, y) - u_n^*(x, y), \quad h(x, y) = u(x, y) - u^*(x, y).$$

La relation (17) et la relation évidente $\mathfrak{A}_r u_n \to \mathfrak{A}_r u$ donnent que

---

[1] En réalité on a aussi

$$u_n^*(x, y) \to u^*(x, y);$$

cela vient immédiatement des considérations qui suivent.

$$\mathfrak{A}_r h_n(x, y) \to \mathfrak{A}_r h(x, y).$$

Or les fonctions $h_n(x, y)$ étant harmoniques dans E (d'après la théorie classique du potentiel), on a

$$\mathfrak{A}_r h_n(x, y) = h_n(x, y)$$

et par conséquent

$$h_n(x, y) \to \mathfrak{A}_r h(x, y).$$

Cette relation est valable indépendamment de r à condition que r reste plus petit que la distance du point (x, y) de la frontière de l'ensemble E. Donc $\mathfrak{A}_r h(x, y)$ ne dépend pas de r, ce qui permet d'écrire

$$\mathfrak{A}_r h(x, y) = h^*(x, y).$$

D'autre part, on conclut de la relation (7) et de la relation analogue concernant la fonction subharmonique $u^*(x, y)$ qu'une telle relation est valable aussi pour la fonction $h(x, y) = u(x, y) - u^*(x, y)$, en tout point (x, y) tel que l'une au moins des valeurs $u(x, y)$, $u^*(x, y)$ est finie. C'est-à-dire que l'on a pour tous ces points (x, y)

$$h(x, y) = h^*(x, y) = \mathfrak{A}_r h(x, y) = \mathfrak{A}_r h^*(x, y), \tag{18}$$

l'égalité des deux derniers membres s'ensuivant par intégration de celle des deux premiers. De plus, la fonction $h^*(x, y) = \mathfrak{A}_r u(x, y) - \mathfrak{A}_r u^*(x, y)$ étant continue et la relation (18) étant valable presque partout dans l'ensemble E, il s'ensuit que l'on a *partout* dans cet ensemble

$$h^*(x, y) = \mathfrak{A}_r h^*(x, y)$$

et cette relation nous assure, par un théorème bien connu, que la fonction continue $h^*(x, y)$ est harmonique en tout point de l'ensemble E.

En résumé, la différence

$$u(x, y) - u^*(x, y)$$

est égale à la fonction harmonique $h^*(x, y)$ en tout point de l'ensemble E, excepté ceux pour lesquels cette différence n'a pas de sens, les deux termes devenant infinis à la fois. C'est-à-dire que, dans E, le potentiel $u^*(x, y)$ admet une valeur finie ou infinie négative en même temps que la fonction $u(x, y)$ et c'est le premier cas qui se présente presque partout dans E, donnant lieu à la relation

$$u(x, y) = u^*(x, y) + h^*(x, y),$$

où $h^*(x, y)$ est une fonction harmonique, sans exception, dans l'ensemble E.

Enfin lorsque l'ensemble E n'est pas régulier par rapport à la fonction d'ensemble $\mu(e)$, on n'aura qu'à envisager un ensemble régulier E_0 dont E fait partie et former le potentiel $u_0^*(x,y)$ et la fonction harmonique $h_0^*(x,y) = u(x,y) - u_0^*(x,y)$ qui correspondent à l'ensemble E_0. Alors, d'après ce que nous venons de voir au paragraphe précédent, la différence

$$h^*(x,y) - h_0^*(x,y) = u_0^*(x,y) - u^*(x,y),$$

potentiel de la couche donnée par $\mu(Ee) - \mu(E_0 e)$, sera harmonique dans l'ensemble E, vide par rapport à cette couche. Il s'ensuit que la fonction $h^*(x,y)$ est harmonique elle-même, ce qu'il fallait prouver.

En résumé, énonçons notre théorème principal:

Toute fonction $u(Q)$ subharmonique dans un domaine D donne lieu à une fonction d'ensemble $\mu(e)$, positive, monotone, additive et continue inférieurement, définie pour les ensembles ouverts intérieurs ainsi que leur frontière au domaine D et cela de sorte que l'on ait pour tout ensemble E du type considéré

$$u(Q) = \int_E \log PQ \, d\mu + h(Q)$$

la fonction $h(Q)$ étant harmonique en tout point de l'ensemble E.

Observons encore que ce théorème général renferme entre autres un théorème élémentaire sur les singularités des fonctions harmoniques, établi par Bôcher en 1903 et retrouvé il y a quelques ans par M. Picard.[1] Ce théorème dit qu'*une fonction harmonique dans un domaine D à l'exception d'un point P dans lequel elle devient infinie de signe déterminé, est nécessairement de la forme*

$$c \log r + h(Q) \qquad (r = PQ).$$

En effet, en supposant par exemple qu'il s'agisse d'une infinie négative, notre fonction est subharmonique sans exception dans D, si bien que le théorème général y pourra être appliqué. D'autre part, la fonction étant partout harmonique à l'exception du point P, $\mu(e)$ s'annulera sauf lorsque P appartient à e et

---

[1] M. Bôcher, Singular points of functions which satisfy partial differential equations of the elliptic type, *Bulletin American Math. Society*, t. 9 (1903), p. 455—465.; E. Picard, Deux théorèmes élémentaires sur les singularités des fonctions harmoniques, *Comptes Rendus de l'Academie d. Sc.*, Paris, t. 176 (1923), p. 933—935. *Cf.* encore O. D. Kellogg, On some theorems of Bôcher concerning isolated singular points of harmonic functions, *Bulletin American Math. Society*, t. 32 (1926), p. 664—668.

pour tous ces ensembles, $\mu(e)$ aura la même valeur c, ce que l'on pourra aussi exprimer en disant que la masse totale égale à $-c$ est concentrée au point P. Le théorème s'ensuit d'une manière évidente.

Qu'il me soit permis d'attirer encore l'attention, sans entrer dans les détails, à une conséquence importante de notre théorème principal; c'est qu'il entr'ouvre la voie pour *une analyse de l'allure infinitésimale des fonctions subharmoniques*, en réduisant cette analyse à celle du potentiel logarithmique; en effet, à ce point de vue, la fonction harmonique additive ne compte rien.

5. Seconde démonstration du théorème principal.

Nous allons indiquer sommairement une autre démonstration de notre théorème principal, ayant l'avantage de ne pas exiger l'étude des relations qui existent entre la fonction d'ensemble $\mu(e)$ et les anneaux qui nous serviront à l'évaluer. Mais en échange, la méthode que nous allons indiquer sera moins directe que l'autre; c'est par l'intermédiaire des fonctions auxiliaires $u_n(x, y)$ et des fonctions d'ensembles $\mu_n(e)$ qui y correspondent que nous construirons la fonction d'ensemble $\mu(e)$ et au lieu de démontrer la convergence de la suite $\mu_n(e)$, convergente en réalité comme nous venons de le voir, nous nous contenterons d'affirmer l'existence d'une suite partielle convergente. Pour cet effet, nous nous reporterons au principe général que voici.

Supposons donnée une suite de fonctions $\mu_n(e)$ d'ensemble ouvert, positives, monotones, continues inférieurement et additives[1], *définies pour tous les ensembles ouverts intérieurs avec leur frontière au domaine D, ou encore, d'une façon plus générale, admettons que $\mu_n(e)$ soit seulement définie à partir d'un certain rang n, variant avec l'ensemble e. Supposons de plus que, pour chaque ensemble e, la suite $\mu_n(e)$ reste inférieure à une borne finie, cette borne pouvant d'ailleurs varier d'une manière quelconque avec l'ensemble e. Dans ces hypothèses, la suite $\mu_n(e)$ admet une ou*

---

[1] Cela veut dire que les $\mu_n(e)$ satisfont aux hypothèses 1)—4), posées à la tête du paragraphe 1°. Observons que l'hypothèse 3), exigeant la continuité inférieure, n'est pas essentielle; en effet, si cette hypothèse n'était pas remplie pour une fonction d'ensemble $\mu(e)$ satisfaisant aux autres hypothèses, la fonction d'ensemble $\mu^*(e)$ définie comme la limite supérieure des quantités $\mu(e_1)$ formées pour tous les ensembles ouverts e_1 appartenant à e ainsi que leur frontière, satisfait aux hypothèses 1)—4) et d'autre part, $\mu(e) = \mu^*(e)$ pour tout ensemble régulier par rapport à $\mu^*(e)$. C'est par cette raison que l'on pourrait supprimer l'hypothèse 3) dans les prémisses, tout en la maintenant dans la conclusion. D'ailleurs, le passage de $\mu(e)$ à $\mu^*(e)$ est analogue à celui par lequel nous passerons tout à l'heure, dans le texte, de $\mu_0(\pi)$ à $\mu(e)$.

plusieurs limites $\mu(e)$; cela veut dire qu'il existe des suites partielles $\mu^{(n)}(e)$ tendant vers une fonction d'ensemble $\mu(e)$, positive, monotone, continue inférieurement et additive, et cela pour tout ensemble ouvert e régulier par rapport à $\mu(e)$.

Ce principe se démontre de la même manière que son analogue pour les fonctions d'intervalle, compris en substance dans un théorème bien connu de M. Helly. Envisageons et désignons par π ceux de nos ensembles e qui sont limités par un ou plusieurs polygones dont les sommets aient des coordonnées rationnelles; comme ces ensembles π font une infinité dénombrable on pourra tirer, de la suite des $\mu_n(e)$, une suite partielle $\mu^{(n)}(e)$ convergeant, pour chacun des ensembles π, vers une limite finie et déterminée $\mu_0(\pi)$ définissant, pour les ensembles π, une fonction d'ensemble positive, monotone et additive. Cela étant, on définira la fonction d'ensemble $\mu(e)$, pour chaque ensemble ouvert e, en la posant égale à la borne supérieure des quantités $\mu_0(\pi)$ formées pour tout ensemble π intérieur avec sa frontière à l'ensemble e ou ce qui revient au même, en la posant égale à la limite, évidemment existante et univoquement déterminée, des quantités $\mu_0(\pi)$ formées pour des ensembles π allant en croissant vers l'ensemble e. Il vient immédiatement de cette définition de la fonction $\mu(e)$ que cette fonction d'ensemble ouvert est positive, monotone, additive et continue inférieurement. Pour faire voir que la suite $\mu^{(n)}(e)$ converge vers $\mu(e)$ pour tout ensemble régulier, soit e_0 un tel ensemble, e_1 un autre ensemble ouvert, comprenant e_0 ainsi que sa frontière et choisi de sorte que $\mu(e_1) < \mu(e_0) + \varepsilon$, ε désignant une quantité positive arbitrairement petite, donnée d'avance. Soit π_1 un de nos ensembles polygonaux construit de sorte qu'il soit compris de même que sa frontière dans l'ensemble e_1 et que d'autre part e_0 et sa frontière en fassent partie. Alors on aura évidemment

$$\mu(e_0) \leqq \mu_0(\pi_1) < \mu(e_0) + \varepsilon.$$

Soit de plus π_2 un de nos ensembles polygonaux, compris avec sa frontière en e_0 et choisi de sorte que

$$\mu_0(\pi_2) > \mu(e_0) - \varepsilon.$$

Alors en rappelant que $\mu^{(n)}(\pi) \to \mu_0(\pi)$, on voit que l'on aura aussi, à partir d'un certain rang n,

$$\mu(e_0) - \varepsilon < \mu^{(n)}(\pi_2) \leqq \mu^{(n)}(e_0) \leqq \mu^{(n)}(\pi_1) < \mu(e_0) + \varepsilon;$$

on en conclut que $\mu^{(n)}(e_0) \to \mu(e_0)$, ce qu'il fallait prouver.

Pour que le principe de choix que nous venons d'établir puisse être appliqué aux fonctions d'ensemble $\mu_n(e)$ du paragraphe précédent, correspondant aux fonctions $u_n(x, y) = \mathfrak{A}^2_{1/n} u(x, y)$, rappelons que la fonction d'ensemble $\mu_n(e)$ était fournie par l'intégrale de $\Delta u_n / 2\pi$ étendue sur l'ensemble e et que, par conséquent, cette fonction d'ensemble remplit les hypothèses posées à la tête de notre principe. Il ne nous reste qu'une seule hypothèse à vérifier, savoir que, pour chaque ensemble e, la suite $\mu_n(e)$ est bornée supérieurement. Or comme chaque ensemble e peut être couvert complètement par un nombre fini d'aires circulaires, il suffira de vérifier notre hypothèse pour de telles aires. Envisageons l'intérieur d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r_0; pour cet ensemble, la valeur de $\mu_n(e)$ s'obtient en considérant comme fonction de $\log r$ la valeur moyenne $I_n(r)$ de la fonction $u_n(x, y)$, calculée sur les cercles au centre (x_0, y_0) et de rayon r; $\mu_n(e)$ n'est que la dérivée de cette fonction pour $r = r_0$. Par conséquent, en choisissant un rayon $r_1 < r_0$, la quantité $\mu_n(e)$ ne pourra dépasser la valeur du rapport

$$\frac{I_n(r_1) - I_n(r_0)}{\log r_1 - \log r_0}.$$

Or, ce rapport allant, pour $n \to \infty$, vers le rapport analogue correspondant à la fonction $u(x, y)$, il devra rester inférieur à une borne ne dépendant pas de n; il s'ensuit qu'il en sera de même pour les quantités $\mu_n(e)$.[1] Par conséquent, il est permis d'appliquer notre principe de choix aux fonctions d'ensemble $\mu_n(e)$ et d'en tirer de cette sorte une suite partielle $\mu^{(n)}(e)$ allant vers une fonction d'ensemble $\mu(e)$, positive, monotone, additive et continue inférieurement et cela pour tout ensemble e régulier par rapport à $\mu(e)$.

La démonstration du théorème principal s'achève comme au paragraphe précédent, en partant de la formule (14); on n'aura qu'à remplacer la suite $\mu_n(e)$ par la suite partielle choisie $\mu^{(n)}(e)$ et les fonctions $u_n(x, y)$ par celles d'entre elles qui correspondent à la suite choisie.

6. Représentation de $u(x, y)$ moyennant la fonction de Green.

On sait que sous certaines conditions de régularité imposées au domaine D et à la fonction $f(Q) = f(x, y)$ définie dans ce domaine, l'intégrale

[1] On aurait pu aussi s'en rapporter à un théorème d'une évidence immédiate que je ne me rappelle pas d'avoir rencontré dans les traités d'Analyse. Ce théorème dit, en substance, que *toute suite convergente de fonctions convexes peut être dérivée terme à terme.* D'une façon précise, lorsque les fonctions $f_n(x)$, convexes dans l'intervalle (a, b), tendent vers une fonction limite $f(x)$, on a pour $a < x < b$

$$f'_- \leqq \underline{\lim}\, f'_{n-} \leqq \overline{\lim}\, f'_{n+} \leqq f'_+.$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D G(\xi,\eta;x,y)\,\Delta f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

formée avec la fonction de Green $G(P,Q)=G(\xi,\eta;x,y)$ correspondant au domaine D et avec le laplacien $\Delta f=f''_{xx}+f''_{yy}$, reproduit la fonction $f(x,y)$ à une fonction harmonique additive $h(x,y)$ près et que la différence $f(x,y)-h(x,y)$ s'annule sur la frontière de D. La question se pose sous quelle forme et dans quelles conditions générales cette relation s'étend aux fonctions subharmoniques.

Soit $u(Q)=u(x,y)$ une fonction subharmonique dans le domaine D et soit $\mu(e)$ la fonction d'ensemble qui y correspond par la notation adoptée. Envisageons l'intégrale généralisée de Stieltjes

$$v(Q)=\int\limits_D G(P,Q)\,d\mu, \tag{1}$$

où l'intégration se fait par rapport à P et où l'on définit l'intégrale étendue à D comme la limite des intégrales

$$v_k(Q)=\int\limits_{E_k} G(P\,Q)\,d\mu,\text{[1]} \tag{2}$$

les ensembles ouverts E_k allant en croissant vers le domaine D. Comme la différence $G(P,Q)-\log\frac{1}{PQ}$ est harmonique par rapport à P ainsi que par rapport à Q, l'intégrale (2) existe pour presque tout point Q de D et ne diffère de $-u(Q)$ que par une fonction harmonique en E_k. Les ensembles E_k allant en croissant vers le domaine D, les fonctions $v_k(Q)$ iront aussi en croissant et il en sera de même quant aux fonctions $h_k(Q)=v_k(Q)+u(Q)$, harmoniques dans les E_k. Or, d'après le théorème de Harnack, il n'y a que deux cas qui pourront se présenter; ou bien ces fonctions $h_k(Q)$ tendent vers une fonction limite $h(Q)$ harmonique dans D, ou bien elles croissent au delà de toute limite. C'est seulement dans le premier des deux cas que l'intégrale (1) a un sens et l'on a, dans ce cas,

$$v(Q)=h(Q)-u(Q). \tag{3}$$

On montre par un raisonnement familier que la limite des intégrales (2), c'est à dire la fonction $v(Q)$ ne dépend pas du choix particulier de la suite des E_k.

[1] L'intégrale (2) elle-même est définie de la même façon que le potentiel.

Voici maitenant une condition nécessaire pour que ce soit le premier cas qui se présente, c'est-à-dire pour que l'intégrale (1) existe. La fonction $G(P, Q)$ et la fonction d'ensemble $\mu(e)$ étant non-négatives, il en sera de même quant à la fonction $v(Q)$. Comparé à (3), cela nous dit que

$$u(Q) \leqq h(Q)$$

c'est-à-dire *qu'il existe une fonction harmonique supérieure à la fonction* $u(Q)$ *dans le domaine* D *entier.*

Nous allons montrer que cette condition nécessaire est aussi suffisante. Supposons qu'elle soit remplie et soit $H(Q) = H(x, y)$ une fonction harmonique supérieure ou égale à la fonction $u(Q)$ dans tout le domaine D. Pour prouver l'existence presque partout de la fonction $v(Q)$ définie par l'intégrale (1), nous aurons à montrer, conformément à la définition de l'intégrale (1), que la suite des fonctions $v_k(Q)$ définies par l'intégrale (2) et allant en croissant avec k reste bornée presque partout en D. Or c'est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$\int_E G(P, Q)\, d\mu \leqq H(Q) - u(Q), \tag{4}$$

valable pour chaque ensemble E du type considéré et que nous allons vérifier.

Observons d'abord, que chaque ensemble E faisant partie d'un ensemble E régulier, nous pourrons supposer, sans restreindre la généralité, que l'ensemble E envisagé soit régulier. Cela étant, soit D' un domaine compris avec sa frontière en D et comprenant l'ensemble E ainsi que sa frontière; supposons de plus que D' soit choisi de sorte que l'on puisse y appliquer les méthodes classiques de la Théorie du potentiel et que, en particulier, il y corresponde une fonction de Green $G'(P, Q)$ s'annulant d'une façon continue sur la frontière de D'. On pourra par exemple supposer que le domaine D' soit la réunion d'un nombre fini d'aires circulaires. Reprenons les fonctions $u_n(Q) = \mathfrak{A}^2_{1/n}\, u(Q)$ dont nous nous sommes servis auparavant et les fonctions d'ensemble $\mu_n(e)$ qui y correspondent, en supposant que $1/n$ soit inférieur à la distance de D' de la frontière de D; de cette sorte les fonctions $u_n(Q)$ et leurs dérivées des deux premiers ordres seront continues dans D', y compris sa frontière et même un peu au delà de cette frontière et l'on pourra y appliquer la théorie classique. D'après cette théorie, la fonction définie par l'intégrale

$$(5) \qquad \int\limits_{D'} G'(P, Q)\, d\mu_n = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D'} G'(\xi, \eta; x, y)\, \Delta u_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ne diffère de $u_n(Q)$, dans le domaine D', que par une fonction harmonique $h_n(Q)$ admettant à la frontière de D' les mêmes valeurs que la fonction u_n elle-même. Comme

$$u_n(Q) = \mathfrak{A}^2_{1/n}\, u(Q) \leqq \mathfrak{A}^2_{1/n}\, H(Q) = H(Q),$$

on aura aussi, dans le domaine D',

$$h_n(Q) \leqq H(Q).$$

D'autre part, $u_n(Q) \geqq u(Q)$; par conséquent, on a

$$h_n(Q) - u_n(Q) \leqq H(Q) - u(Q),$$

c'est-à-dire que, en aucun point Q de D', la valeur de l'intégrale (5) ne surpasse la différence $H(Q) - u(Q)$. Il s'ensuit que

$$\int\limits_E G(P, Q)\, d\mu_n \leqq \int\limits_{D'} G'(P, Q)\, d\mu_n \leqq H(Q) - u(Q).$$

Pour en passer à l'inégalité (4) qu'il nous faut vérifier, on pourrait s'en rapporter aux relations, aisées à prouver,

$$\int\limits_E G(P, Q)\, d\mu_n \to \int\limits_E G'(P, Q)\, d\mu \to \int\limits_E G(P, Q)\, d\mu,$$

correspondant respectivement à $n \to \infty$ et à $D' \to D$, cette dernière relation entraînant la relation $G'(P, Q) \to G(P, Q)$.[1] Cependant comme c'est seulement une inégalité qu'il s'agit de vérifier, on pourra aussi se tirer de l'affaire par le raisonnement moins précis qui suit. Désignons par $G(P, Q; \nu)$ la fonction égale à $G(P, Q)$ partout où la valeur de cette fonction ne surpasse pas le nombre ν et égale à ν ailleurs et soit $G'(P, Q; \nu)$ la fonction analogue attachée à $G'(P, Q)$; alors on aura, avec des notations évidentes,

[1] C'est précisément de cette sorte que l'on définit la fonction de Green pour les domaines D de type général.

$$H(Q)-u(Q) \geqq \int_E G'(P, Q)\, d\mu_n \geqq \int_E G'(P, Q; \nu)\, d\mu_n \to$$

$$\to \int_E G'(P, Q; \nu)\, d\mu \to \int_E G(P, Q; \nu)\, d\mu.$$

En effet, les deux passages à la limite sont légitimes, le premier comme la fonction $G'(P, Q; \nu)$ est continue et le second puisque la convergence de $G'(P, Q; \nu)$ vers $G(P, Q; \nu)$ est monotone et même uniforme dans l'ensemble E. Par conséquent on a

$$\int_E G(P, Q;\ \nu)\, d\mu \leqq H(Q)-u(Q)$$

et comme le premier membre tend, pour $\nu \to \infty$, vers le premier membre de (4), cette dernière inégalité se trouve vérifiée.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

Pour que la fonction $u(Q)$, définie et subharmonique dans le domaine D, puisse être représentée moyennant la fonction de Green $G(P, Q)$ de ce domaine sous la forme

$$u(Q) = -\int_D G(P, Q)\, d\mu + h(Q)$$

où $\mu(e)$ est une fonction d'ensemble positive, monotone, additive et continue inférieurement, définie pour les ensembles ouverts e intérieurs avec leur frontière au domaine D et où $h(Q)$ est une fonction harmonique dans D, il faut et il suffit qu'il existe une fonction harmonique supérieure à la fonction $u(Q)$ dans tout le domaine D.

Ajoutons enfin que *la fonction harmonique $h(Q)$ figurant dans la représentation n'est que la plus petite parmi les fonctions harmoniques supérieures dans D à la fonction $u(Q)$.*[1] En effet on a, d'une part, $u(Q) \leqq h(Q)$ et d'autre part, d'après (4),

$$h(Q) = u(Q) + \int_D G(P, Q)\, d\mu \leqq u(Q) + H(Q) - u(Q) = H(Q),$$

où $H(Q)$ désigne l'une quelconque des fonctions harmoniques en question.

[1] L'idée de la plus petite fonction harmonique $h(Q)$ supérieure à la fonction subharmonique $u(Q)$ dans le domaine entier D ne devra pas être confondue avec celle de la meilleure majorante harmonique, l'allure des fonctions $u(Q)$ et $h(Q)$ sur la frontière de D n'étant soumise à aucune hypothèse.

D'ailleurs *la fonction $h(Q)$ pourra être caractérisée, sans faire appel à la représentation de $u(Q)$, comme la borne supérieure des meilleures majorantes harmoniques de $u(Q)$ formées pour les domaines D' ou ce qui revient au même, comme la limite de ces meilleures majorantes lorsque le domaine D' tend en croissant vers le domaine D.* En effet, la meilleure majorante harmonique formée pour D' variera aussi en croissant et comme elle ne pourra jamais surpasser aucune des fonctions $H(Q)$, elle tendra vers une fonction harmonique $h^*(Q) \leqq H(Q)$. D'autre part, il est évident que la fonction $h^*(Q)$ est elle-même une $H(Q)$. Par conséquent, elle n'est que la plus petite parmi ces fonctions, c'est-à-dire que $h^*(Q) = h(Q)$ et c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Pour illustrer ces résultats, essayons de les appliquer à la fonction subharmonique $u(x, y) = \log |f(x+iy)| = \log |f(z)|$, $f(z)$ désignant une fonction holomorphe dans le domaine D. La couche $\mu(e)$ qui y correspond, se compose évidemment des masses ponctuelles placées dans les zéros de la fonction $f(z)$ et égales, au signe près, à la multiplicité des zéros respectifs. Soient $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ ces zéros, compté chacun avec sa multiplicité; alors l'intégrale (1) correspondant au cas envisagé pourra être mise, avec une notation évidente, sous la forme

$$\int_k G(\zeta_k, z). \tag{6}$$

Donc, par le théorème démontré, la convergence de la série (6) est équivalente à l'existence d'une fonction harmonique $U(z)$ supérieure à la fonction $\log |f(z)|$. Or, *l'existence d'une telle fonction est en même temps une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(z)$ puisse être mise sous la forme*

$$f(z) = \varphi(z) \psi(z),$$

produit de deux fonctions holmorphes $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, dont la première est supposée d'être bornée et la seconde de ne pas s'annuler dans le domaine D. En effet, lorsqu'il en est ainsi, on a

$$\log |f(z)| \leqq \log |\psi(z)| + \log \max |\varphi(z)|$$

et c'est précisément une fonction harmonique qui figure au second membre. Inversement, en supposant la condition remplie, posons

$$\psi(z) = e^{U(z) + i V(z)}, \varphi(z) = f(z)/\psi(z),$$

$V(z)$ désignant la conjugée de $U(z)$; alors on aura $|\varphi(z)| \leqq 1$ et $\psi(z)$ ne s'annulera pas dans le domaine D. Ajoutons que si l'on prend, en particulier, la plus petite parmi les fonctions $U(z)$, la fonction $\varphi(z)$ sera telle que $\log|\varphi(z)|$ est représentée par la série (6), ou ce qui revient au même, on aura, à un facteur arbitraire de module 1 près,

$$\varphi(z) = \prod_k g(\zeta_k, z),$$

où nous avons posé

$$g(\zeta, z) = e^{G(\zeta, z) + i V(\zeta, z)},$$

V désignant la fonction conjugée à G.

Quand D est le cercle unité, on retombe au produit infini bien connu

$$\prod_k \frac{\zeta_k - z}{1 - \bar{\zeta}_k z} \tag{7}$$

dont la convergence dans le cercle entier est assurée par la convergence absolue du produit $\Pi\zeta_k$.[1] Donc, pour le cercle unité, la convergence absolue du produit $\Pi\zeta_k$, ou ce qui revient au même, *la convergence de la série* $\Sigma(1 - |\zeta_k|)$ *est une condition nécessaire et suffisante pour que* $f(z)$ *puisse être mise sous la forme exigée.* Bien entendu, ce fait pourra aussi être démontré par les méthodes de la Théorie des fonctions, sans faire appel aux fonctions subharmoniques.[2]

Quant à la fonction $\varphi(z)$ définie par le produit (7), comme elle est holomorphe et bornée dans l'intérieur du cercle unité, elle admettra des valeurs limites radiales presque en tout point de la périphérie. Cela vient par un théorème célèbre de Fatou et j'ai ajouté autrefois que, dans le cas particulier envisagé, ces valeurs limites sont presque partout de module unité.[3] C'est-à-dire que *la fonction subharmonique* $\log|\varphi(z)|$ *aura, presque partout, une valeur limite égale à zéro.* Or il y a deux ans, par un calcul ingénieux, M. Littlewood est parvenu à démontrer que *ce fait subsiste, dans le cas d'un domaine circulaire, pour toute fonction subharmo-*

---

[1] W Blaschke, Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen, *Berichte d. sächsischen Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse*, t. 67 (1915), p. 194—200.

[2] *Cf.* A. Ostrowski, Über die Bedentung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, *Acta Univ. Franc.-Jos., Szeged*, t. 1 (1923), p. 80—87. Pour le cas d'un demi-plan *cf.* R. M. Gabriel, An improved result concerning the zeros of a function regular in a half-plane, *Journal of the London Math. Soc.*, t. 4 (1929), p. 307—309.

[3] F. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Zeitschrift*, t. 18 (1923), p. 87—95.

nique qui peut être représentée par la formule (1).[1] En combinant ce résultat avec le théorème général que je viens de démontrer (et que j'ai déjà énoncé autrefois sans démonstration) et avec le théorème de FATOU, il pourra être mis, avec M. LITTLEWOOD, sous la forme suivante, généralisation du théorème de FATOU.

Toute fonction $u(x,y)$ *subharmonique dans l'intérieur du cercle unité et telle que la valeur moyenne du module de* $u(x,y)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(r\cos\theta, r\sin\theta)|\, d\theta$$

reste bornée pour $r < 1$ *et en particulier, toute fonction subharmonique et bornée supérieurement dans le cercle unité admet presque partout des valeurs limites radiales finies et déterminées.*

Il convient d'ajouter que la méthode de M. LITTLEWOOD s'applique à des domaines d'un type beaucoup plus général. D'ailleurs, dans le cas de deux variables que nous venons d'envisager, rien n'empèche de tirer parti de la représentation conforme.

[1] J. E. LITTLEWOOD, Mathematical notes (8); On functions subharmonic in a circle (II), *Proceedings of the London Math. Soc.* (2), 28 (1928), p. 383—394.