SUR CERTAINES DÉCOMPOSITIONS DE LA FONCTION COMPLEXE UNIFORME LA PLUS GÉNÉRALE.

PAR

MAURICE FRÉCHET

à PARIS.

Table des matières.

Introduction.

On sait que Fredholm s'est toujours intéressé à la théorie des fonctions analytiques et qu'il a même fondé sur les notions de fonction entière et de fonction méromorphe, sa célèbre solution des équations intégrales. Il nous a donc paru qu'un travail sur la théorie des fonctions analytiques ne serait pas déplacé dans un volume consacré à la mémoire de ce grand mathématicien. Il nous est de plus particulièrement agréable de pouvoir apporter un complément à un des plus beaux théorèmes de Mittag-Leffler, dans le périodique même fondé par cet autre grand savant scandinave. — La présente étude trouve son origine dans une suite de conférences faites à l'Ecole pratique des Hautes Etudes en 1928—29. Au cours de ces conférences, nous avions exposé un théorème classique de Mittag-Leffler sur l'existence d'une fonction ayant, en des points isolés donnés, des parties principales données. Nous nous sommes alors aperçu et nous avons montré dans les conférences ultérieures que le problème résolu, et l'une des formes du résultat obtenu, pourraient être, l'un, généralisé, l'autre, complétée, dans des directions différentes.

D'une part, on peut étendre le problème de Mittag-Leffler au cas où les parties principales données sont relatives, non à des points singuliers isolés, mais à des sous-ensembles qui sont chacun isolé dans l'ensemble singulier total. D'autre part, le résultat de Mittag-Leffler peut s'énoncer ainsi: toute fonction uniforme $f(z)$ peut être représentée comme la somme de deux fonctions toutes deux holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, la première $f_1(z)$ holomorphe en outre sur l'ensemble E des points singuliers isolés de $f(z)$, la seconde $Q(z)$ ayant exactement pour ensemble singulier l'ensemble »de fermeture» $\bar{E}=E+E'$ de l'ensemble E. En passant de $f(z)$ à $f_1(z)$, on élimine les points singuliers isolés de $f(z)$; la fonction $f_1(z)$ obtenue peut cependant présenter encore des points singuliers (non isolés par rapport à $f(z)$) qui sont isolés par rapport à $f_1(z)$. De sorte que si l'une des deux fonctions obtenues, $Q(z)$ a un ensemble singulier qui est d'une nature moins générale que celui de $f(z)$, il n'en est pas évidemment de même de l'autre.

Or nous avons pu démontrer ici que, parmi l'infinité de réductions possibles d'une même fonction à une somme de Mittag-Leffler, il en est au moins une où $f_1(z)$ ne présente plus de points singuliers isolés. De sorte que l'ensemble singulier de $f_1(z)$, étant alors parfait, n'est pas non plus l'ensemble singulier le plus général. On obtient alors *une réduction effective de la difficulté de l'étude de la fonction uniforme la plus générale.* Celle-ci se présente comme la somme de deux fonctions appartenant à deux catégories distinctes, caractérisées chacune par la nature de l'ensemble singulier. Dans la première catégorie, *l'ensemble singulier est parfait;* dans l'autre, *l'ensemble singulier est l'ensemble de fermeture d'un ensemble de points isolés.*

D'ailleurs, la méthode de démonstration qui nous a conduit à ce résultat a une portée plus étendue. Nous l'avons donc exposée sous sa forme générale, *Celle-ci nous a conduit à des réductions, d'une autre espèce*, que nous avons signalées page 78. Elle nous parait susceptible d'autres applications, que, pressé par d'autres travaux, nous n'avons pu, ni aborder, ni même préciser. Peut-être l'un de nos lecteurs s'intéressera-t-il à ces questions et pourra-t-il, en découvrant de nouvelles applications, réduire encore la difficulté de l'étude de la fonction uniforme la plus générale. Un autre problème à résoudre consisterait à simplifier la démonstration que nous avons donnée du résultat de la page 75. En effet, notre démonstration utilise le procédé de récurrence *transfinie*, alors que le résultat peut s'énoncer indépendamment de la notion de nombre transfini. Ce procédé est souvent plus instructif, mais souvent aussi on a, en s'en privant, grandement abrégé certaines démonstrations, en même temps qu'on les mettait à la portée d'un cercle plus étendu de lecteurs.

Nous avons beacoup hésité à présenter ce mémoire à l'impression. Les questions qu'il traite avaient déjà du, nous semblait-il, se poser d'elles-mêmes et recevoir leurs solutions. D'éminents analystes, en nous assurant du contraire, ont levé nos scrupules.

Représentation de la fonction uniforme la plus générale par une série de fractions rationnelles.

Nous établirons d'abord une proposition dont des cas particuliers figurent dans les Traités classiques et qui, même sous sa forme générale n'est peut être pas nouvelle, mais qui nous sera très utile par la suite.

Soit $f(z)$ une fonction uniforme qui est holomorphe en au moins un point, et F son ensemble singulier.

I. Supposons d'abord F *borné*.

Soient ε et η deux nombres positifs arbitraires. Enfermons chaque point a de F dans un cercle C_a de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ et de centre a. L'ensemble F étant borné et fermé pourra alors être enfermé à l'intérieur de l'aire A constituée par certains des cercles C_a en nombre fini. Si deux de ces cercles étaient tangents, on pourrait en diminuant légèrement le rayon de l'un d'eux supposer qu'ils soient disjoints.

L'aire A est alors une aire bornée limitée par un nombre fini d'arcs appartenant à des circonférences $c_1, c_2, \ldots c_h$, dont les centres $a_1, a_2, \ldots a_h$ sont sur F. La partie l_k du contour de A appartenant à c_k peut d'ailleurs être formée d'un ou de plusieurs arcs de cercle.

Soit enfin L une circonférence de rayon supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$ et assez grand pour renfermer tout A à son intérieur. Posons

$$\psi(x) = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{L}\frac{f(z)\,dz}{z-x} - \sum_{k=1}^{k=h}\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{l_k}\frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

La première intégrale représente une fonction entière $E(x)$.

D'autre part, chacune des intégrales

$$-\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{l_k}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

peut être représentée à l'extérieur de c_k par une série entière en $\frac{1}{x-a_k}$, $\varrho_k(x)$, convergeant uniformément dans toute aire entièrement extérieure à c_k. On a donc en dehors de A

$$\psi(x) = E(x) + \sum_{k=1}^{k=h}\varrho_k(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{m=+\infty} A_m x^m + \sum_{k=1}^{k=h}\sum_{m=0}^{m=+\infty}\frac{B_m^{(k)}}{(x-a)^m}$$

et la convergence est uniforme dans toute aire bornée entièrement extérieure à A.[1] On peut donc, en prenant un nombre suffisant de termes dans ces séries, former une fraction rationnelle $Q(x)$ qui diffère de $\psi(x)$ de moins de η en module en tout point x à distance $< \frac{1}{\varepsilon}$ de l'origine et à distance $> \varepsilon$ de F, les pôles de $Q(x)$ étant tous sur F. Or on a $\psi(x) = f(x)$ dans toute cette région et même dans toute la région intérieure à L et extérieure à A.

Finalement, il est prouvé que, si l'ensemble singulier F d'une fonction $f(z)$ est borné, à tout couple de nombres positifs ε et η correspond une fraction rationnelle $Q(z)$ dont les pôles sont des points de F et telle que $Q(z)$ diffère de $f(z)$ de moins de η en module, en tout point situé à distance $> \varepsilon$ de F et à distance $< \frac{1}{\varepsilon}$ d'un point fixe, par exemple, l'origine.

En appelant $Q_n(z)$ ce que devient $Q(z)$ quand $\varepsilon = \eta = \frac{1}{n}$ et en posant $q_1(z) = Q_1(z)$, $q_{n+1}(z) = Q_{n+1}(z) - Q_n(z)$, on voit que: toute fonction uniforme $f(z)$ dont l'ensemble singulier F est borné, peut être représentée sur l'ensemble de ses points réguliers par une même série de fractions rationnelles

$$f(z) = q_1(z) + q_2(z) + \cdots + q_n(z) + \cdots$$

[1] Cette proposition classique est due à M. Appell.

dont les pôles sont des points singuliers de $f(x)$, la série convergeant uniformément sur tout ensemble borné et fermé I de points réguliers de $f(x)$.

Dans le cas particulier où $f(z)$ converge uniformement vers zéro quand z tend vers l'infini, ou, comme nous dirons plus brièvement, *quand $f(z)$ est nul à l'infini*, alors l'intégrale qui représente $E(z)$ tend vers zéro quand le rayon de L croît indéfiniment, et comme elle est indépendante de L, on voit que $E(z)$ est identiquement nulle. Il en résulte que dans ce cas la fonction $Q(z)$ est nulle à l'infini et par suite les fractions rationnelles $q_n(z)$ sont aussi nulles à l'infini. De plus, la convergence est alors uniforme dans tout ensemble fermé de points réguliers, que cet ensemble soit borné ou non.

II. Si l'ensemble singulier de $f(z)$ n'est pas borné et si $f(z)$ a au moins un point régulier a, faisons la transformation $z_1 = \frac{1}{z-a}$; alors la fonction

$$f_1(z_1) = f\left(a + \frac{1}{z_1}\right) - f(a)$$

est holomorphe pour $|z-a|$ positif et assez petit, par conséquent pour $|z_1|$ assez grand, et elle est nulle à l'infini.

La fonction $f_1(z_1)$ a donc un ensemble singulier borné F_1 et par suite, elle est représentable en dehors de F_1 sous la forme d'une série de fractions rationnelles en z_1, nulles à l'infini:

$$f_1(z_1) = r_1(z_1) + \cdots + r_n(z_1) + \cdots$$

D'ailleurs la fonction

$$\varrho_n(z) = r_n\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

est elle-même une fraction rationnelle en z nulle pour $z=a$. On peut donc représenter $f(z)$ sous la forme d'une série de fractions rationnelles

$$f(z) = [f(a) + \varrho_1(z)] + \cdots + \varrho_n(z) + \cdots$$

La convergence de la série $f_1(z_1)$ est uniforme sur toute aire fermée du plan des z_1 qui ne comprend aucun point singulier de $f_1(z)$, que cette aire soit bornée ou non. La convergence de la série f sera donc aussi uniforme dans toute aire fermée du plan des z qui ne comprend aucun point de F.

En résumé: *toute fonction uniforme $f(z)$ qui n'est pas partout singulière peut être représentée sur l'ensemble de ses points réguliers par une même série de fractions rationnelles* *dont les pôles sont des points singuliers de $f(z)$. De plus, la convergence de cette série est uniforme sur tout ensemble fermé de points réguliers.* (On entend ici qu'un tel ensemble devra en outre être borné, — à moins que l'ensemble des points singuliers ne soit borné et qu'en outre $f(z)$ ne tende uniformément vers une même limite finie quand $|z|$ croît indéfiniment de façon quelconque.)

Généralisation de la notion de partie principale.

Sous-ensemble isolé. Soit I un sous-ensemble d'un ensemble plan E; nous dirons que I est isolé dans E si la distance δ de I à $E-I$[1] est positive, ce qui suppose naturellement que $E-I$ existe.

On en conclut facilement que les ensembles fermés $\bar{I}$[2] et $\overline{E-I}$ sont disjoints et que leur distance est précisément égale à δ.

Supposons E borné; on pourra enfermer chaque point α de $\bar{I}$ dans un cercle de centre α, rayon $\frac{\delta}{2}$. Comme $\bar{I}$ est borné et fermé, on pourra, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, enfermer $\bar{I}$ dans une aire A constituée d'un nombre fini de ces cercles. De même que chacun de ces cercles, A ne comprendra aucun point de $\overline{E-I}$.

Par suite *on peut enfermer tout sous-ensemble I, isolé dans un ensemble borné E, à l'intérieur d'une aire A ne contenant, à son intérieur ou sur son contour, aucun point de $\overline{E-I}$ et limitée par un nombre fini d'arcs de cercle.*

Bien entendu cette aire A peut être formée de plus d'une aire d'un seul tenant et chacun de ses morceaux d'un seul tenant peut être limité par une ou plusieurs courbes fermées.

Les distances du contour (simple ou multiple) L de A à $\bar{I}$ et $\overline{E-I}$ sont positives. Soit ε la plus petite: la bande formée par les cercles de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrés sur L ne contient aucun point de I ou de $E-I$. On peut donc y tracer un contour polygonal simple ou multiple L' jouant le même rôle que L.

On peut même supposer, ce qui pourra être utile, que les sommets de ce contour polygonal ont des coordonnées rationnelles.

---

[1] On entend ici par δ la borne inférieure des distances de deux points arbitraires de I et de $E-I$.

[2] Nous désignons par la notation $\bar{I}$ et nous appelons ensemble de fermeture de I l'ensemble $I+I'$ des points de I et de leurs points d'accumulation.

Remarquons enfin que $\bar{I}$ étant intérieur à A, *si E est fermé, I sera aussi fermé*, puisque chacun de ses points d'accumulation sera intérieur à A et appartiendra à E. Pour une raison analogue, $E-I$ sera aussi fermé dans ce même cas. (En outre, les centres des cercles qui constituent A étant en général sur $\bar{I}$, seront dans ce cas, sur I même.)

Appelons avec Jordan, *continu*, tout ensemble fermé non réduit à un point et qui ne peut être décomposé en deux ensembles disjoints (c'est-à-dire sans point commun) et fermés. D'après ce qui précède, un tel ensemble ne possède aucun sous-ensemble isolé. Réciproquement, tout ensemble plan fermé, non réduit à un point et qui ne contient aucun sous-ensemble isolé est un continu.

Partie principale d'une fonction relativement à un sous-ensemble singulier isolé. Soit I un sous-ensemble isolé dans l'ensemble F des points singuliers d'une fonction $f(z)$. (Nous dirons plus brièvement: *soit I un ensemble singulier isolé de $f(z)$*).

Enfermons I à l'intérieur d'une aire Γ ne contenant aucun autre point de F à son intérieur ou sur son contour (simple ou multiple) γ. Nous venons de voir que cela est possible et même qu'on peut supposer Γ limitée par un nombre fini d'arcs de cercle. On peut donc supposer le contour γ de Γ rectifiable et former l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

On peut d'ailleurs évidemment encadrer γ entre deux courbes rectifiables γ_e, γ_i jouissant des mêmes propriétés que γ. Posons alors

$$P(x)=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_i}\frac{f(z)\,dz}{z-x}\qquad\text{quand } x \text{ est extérieur à } \gamma_i$$

$$Q(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_e}\frac{f(z)\,dz}{z-x}\qquad\text{quand } x \text{ est intérieur à } \gamma_e.$$

Lorsque x est à la fois extérieur à γ_i et intérieur à γ_e, x est dans une région où $f(x)$ est holomorphe (contour compris); on a donc dans cette région

$$f(x) = \frac{\mathrm{I}}{2\,i\,\pi}\int\limits_{\gamma_e} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{\mathrm{I}}{2\,i\,\pi}\int\limits_{\gamma_i} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = Q(x) + P(x).$$

Quand x est dans ou sur γ_i, ou bien quand x est extérieur à γ_e ou sur γ_e, nous conservons cette égalité

$$f(x) = P(x) + Q(x)$$

par définition de $Q(x)$ ou de $P(x)$.

En particulier, quand x n'est pas sur γ, on voit qu'on a

$$P(x) = \frac{-\mathrm{I}}{2\,i\,\pi}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-x} \qquad \text{quand } x \text{ est extérieur à } \Gamma$$

et

$$P(x) = f(x) - \frac{\mathrm{I}}{2\,i\,\pi}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-x} \qquad \text{quand } x \text{ est intérieur à } \Gamma.$$

D'ailleurs, pour tout nombre $\varepsilon > \mathrm{o}$, on peut supposer comme on l'a vu plus haut, page 42 que γ_i soit composée d'un nombre fini d'arcs de cercles centrés sur des points de I et de rayons ε. Pour tout point x n'appartenant pas à I, on peut donc en prenant ε assez petit, supposer x extérieur à γ_i et écrire aussi

$$P(x) = -\frac{\mathrm{I}}{2\,i\,\pi}\int\limits_{\gamma_i} \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

La fonction $P(x)$ reste indépendante de la position de γ_i tant que l'extérieur de γ_i comprend x, puisque $f(z)$ reste holomorphe entre deux quelconques de ses positions. Et puisque $f(z)$ est continue sur γ_i, $P(x)$ est holomorphe à l'extérieur de γ_i et tend uniformément vers zéro quand $|x|$ tend vers l'infini. Il en résulte que $P(x)$ est holomorphe en tout point n'appartenant pas à I.

D'autre part, on a à l'intérieur de Γ

$$f(x) - P(x) = \frac{\mathrm{I}}{2\,i\,\pi}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

et le second membre est, comme on sait, une fonction holomorphe de x à l'intérieur de Γ.

Finalement, si I est un sous-ensemble singulier isolé de $f(z)$, il existe une fonction $P(z)$, holomorphe en tout point n'appartenant pas à I, nulle à l'infini et ne différant de $f(z)$ que par une fonction qui est holomorphe en tout point de I.

Cette fonction $P(z)$ est unique: s'il en existait une autre $P_1(z)$, la différence $P(z)-P_1(z)$ serait, comme $P(z)$ et $P_1(z)$, holomorphe hors de I et nulle à l'infini. De plus, comme

$$P(z)-P_1(z)=[P(z)-f(z)]-[P_1(z)-f(z)]$$

le premier membre serait, comme les deux crochets, holomorphe sur I. Dès lors $P(z)-P_1(z)$ étant holomorphe partout et nulle à l'infini serait nécessairement identiquement nulle. — Dans le cas où I se réduit à un point singulier isolé de $f(z)$, $P(z)$ est, dans la terminologie classique, la partie principale de $f(z)$ relative à ce point singulier isolé. Il est donc naturel d'étendre cette appellation au cas plus général considéré ici et de dire: *la partie principale d'une fonction uniforme $f(z)$ relative à un sous-ensemble singulier isolé borné I de $f(z)$ est la fonction $P(z)$ dont l'ensemble des points singuliers se réduit à I, qui est nulle à l'infini, et qui ne diffère de $f(z)$ que par une fonction holomorphe sur I.* La définition reste valable au cas où I serait l'ensemble — supposé borné — de tous les points singuliers de $f(z)$.

Si l'ensemble singulier F de $f(z)$ est un continu, il ne contient aucun *vrai* sous-ensemble isolé. Il n'y aura dans ce cas qu'une partie principale, celle relative à F.

Si F n'est pas un continu, il contient des sous-ensemble isolés, il y aura un système Σ de parties principales $P_I(z)$ de $f(z)$ relatives à ses différents sous-ensembles isolés I. Un même point singulier a de $f(z)$ peut d'ailleurs appartenir à deux sous-ensembles singuliers isolés I et J (par exemple I et F). Dans ce cas, puisque

$$P_I(z)-P_J(z)=[P_I(z)-f(z)]-[P_J(z)-f(z)],$$

$P_I(z)-P_J(z)$ sera nécessairement holomorphe au point a.

Si l'on se donne arbitrairement un ensemble borné I et une fonction $P_I(z)$, pour que $P_I(z)$ puisse être considérée comme la partie principale relative à I d'une certaine fonction inconnue $f(z)$, il faut évidemment que $P_I(z)$ ait exactement I pour ensemble singulier (ce qui exige que I soit fermé) et que $P_I(z)$ soit nulle à l'infini. Cela suffit d'ailleurs, car on peut prendre alors $f(z) = P_I(z)$ ou plus généralement

$$f(z) = P_I(z) + H_I(z)$$

$H_I(z)$ étant une quelconque des fonctions holomorphes sur I.

Si l'on se donne un système de sous-ensembles isolés I d'un même ensemble fermé F et un système $\mathfrak{M}$ de fonctions $P_I(z)$, pour que ces fonctions puissent être considérées comme les parties principales correspondant aux divers ensembles donnés I, d'une même fonction $f(z)$, il faudra d'abord, comme on vient de le voir, que chaque fonction $P_I(z)$ ait exactement l'ensemble I correspondant pour ensemble singulier, et soit nulle à l'infini. Mais, d'après ce qui précède, *il faut* encore que le système $\mathfrak{M}$ soit »*cohérent*», c'est-à-dire, tel que, s'il existe un point a commun à deux des ensembles donnés I et J, la différence $P_I(z) - P_J(z)$ des fonctions données correspondantes soit holomorphe en a.

Si, d'autre part, on se donne arbitrairement un système σ d'ensembles fermés I, à quelle condition ces ensembles pourront-ils être considérés comme des sous-ensembles isolés d'un même ensemble fermé F?

Soit E la somme des ensembles I; si F existe, F devra comprendre E et, puisque F est supposé fermé, F devra aussi comprendre $\overline{E}$. La distance d'un ensemble I, à $\overline{E}-I$, si ce dernier n'est pas vide, est au moins égale à la distance de I à $F-I$, donc positive. I est donc isolé dans $\overline{E}$. Si cela est vrai pour tout I de σ, il y a au moins un ensemble F, à savoir $\overline{E}$.

Généralisation d'un problème de Mittag-Leffler.

Donnons-nous un système σ d'ensembles plans I et attachons à chaque ensemble I une fonction $P_I(z)$. Pour qu'il existe une même fonction $f(z)$ dont l'ensemble singulier soit borné et dont chaque ensemble I soit un ensemble singulier isolé relativement auquel $P_I(z)$ est la partie principale, il faut, d'après le paragraphe précédent, que

1° chaque ensemble I soit fermé

2° la somme E des ensembles I soit bornée

3° chaque ensemble I soit isolé par rapport à $\overline{E}$

4° chaque fonction $P_I(z)$ soit nulle à l'infini et ait exactement I pour ensemble singulier

5° les fonctions $P_I(z)$ forment un système cohérent, c'est-à-dire que si deux quelconques I, J des ensembles de σ ont un point commun a, $P_I(z) - P_J(z)$ soit holomorphe au point a.

Si ces conditions sont remplies et si la fonction $f(z)$ existe, son ensemble singulier comprend d'abord chaque I; il comprend donc E et par suite aussi l'ensemble de fermeture $\overline{E} = E + E'$ de E. La généralisation du problème que Mittag-Lefler s'était posé et avait résolu dans le cas où chaque ensemble I se réduit à un seul point a et où $P_I(z)$ est une série entière (sans terme constant) en $\frac{1}{z-a}$ — cas où les conditions 1°, 4° et 5° sont vérifiées d'elles-mêmes — consiste à se demander, non seulement si $f(z)$ existe, mais s'il existe une fonction $f(z)$ ayant le plus petit ensemble singulier éventuellement possible, à savoir $\overline{E}$.

Nous allons montrer que les cinq conditions nécessaires (1° à 5°) sont suffisantes.

Généralisation d'un théorème de Mittag-Leffler.

Supposons données la famille σ des ensembles plans I et la famille $\mathfrak{M}$ des fonctions correspondantes $P_I(z)$; et supposons que ces deux familles vérifient les conditions 1° à 5° du paragraphe précédent. Soit encore $E = \Sigma I$. Si le problème posé est résoluble, s'il a une solution $f(z)$ ayant exactement $\overline{E}$ pour ensemble singulier, soit $P(z)$ la partie principale de $f(z)$ relative à $\overline{E}: P(z)$ sera aussi une solution du problème, mais une solution nulle à l'infini.

Nous allons former une des fonctions $P(z)$ nulles à l'infini, ayant exactement $\overline{E}$ pour ensemble singulier et dont pour chaque ensemble donné I, la fonction correspondante donnée $P_I(z)$ soit la partie principale.

Réduction du problème.

Tout d'abord nous allons substituer à la famille σ des ensembles I, une suite dénombrable convenable σ_0 d'ensembles J_n et à la famille $\mathfrak{M}$ une suite convenable correspondante $\mathfrak{M}_0$ de fonctions $\psi_n(z)$.

Puisque I est isolé dans E, on peut (page 42) enfermer I dans une aire Γ_I composée d'une ou d'un nombre fini d'aires polygonales d'un seul tenant $\Gamma_I^{(1)}, \Gamma_I^{(2)}, \ldots$; chacune de ces aires ayant ses sommets en des points de coordonnées rationnelles.

L'ensemble de toutes les aires planes polygonales concevables parmi celles qui sont d'un seul tenant et qui ont des coordonnées rationnelles est dénombrable. Il en est, *a fortiori*, de même de celles de ces aires qui sont utilisées dans la construction ci-dessous, une fois et une seule pour chaque ensemble I. Soit donc

$$B^{(1)},\ B^{(2)}, \ldots$$

la suite de ces dernières aires. Chacun des ensembles I est donc contenu à l'intérieur d'une ou d'un nombre fini de ces aires et celles-ci peuvent être choisies de sorte qu'elles ne contiennent aucun point de $\overline{\overline{E}}-I$. En outre, aucun des contours des aires $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots$ ne passe par un point de $\overline{\overline{E}}$.

Nous pouvons même simplifier encore. Si $B^{(2)}$ appartient à $B^{(1)}$, supprimons $B^{(2)}$. Si l'aire $B^{(1)}+B^{(2)}$ dépasse $B^{(1)}$, elle est formée de $B^{(1)}$ et d'une ou d'un nombre fini d'aires polygonales, chacunes d'un seul tenant, que nous substituerons à $B^{(2)}$. De même si $B^{(3)}$ appartient à $B^{(1)}+B^{(2)}$, supprimons $B^{(3)}$; sinon remplaçons $B^{(3)}$ par la ou les aires obtenues en supprimant $B^{(1)}+B^{(2)}$ de $B^{(3)}$. Et ainsi de suite. On obtient ainsi finalement une suite dénombrable d'aires

$$A^{(1)},\ A^{(2)}, \ldots A^{(n)}, \ldots$$

chacune d'un seul tenant et dont deux quelconques n'ont aucun point intérieur commun. On peut même supposer qu'elles sont disjointes deux à deux, car, si, en arrivant à $A^{(n)}$, on constatait qu'un point de son contour appartenait à une des aires précédentes, il suffirait de rétrécir assez peu le contour de $A^{(n)}$, puisque ce contour ne passe par aucun point de $\overline{\overline{E}}$. Enfin, on peut supprimer celles des aires $A^{(n)}$ qui ne contiendraient aucun point de E.

Soit maintenant $J^{(n)}$ l'ensemble des points de E appartenant à $A^{(n)}$. Il est clair que $J^{(n)}$ appartient à l'un, au moins, $I^{(n)}$, des ensembles donnés I, et que tout ensemble I est constitué par un nombre fini des ensembles $J^{(n)}$.

En outre, $J^{(n)}$ est, identique soit à $I^{(n)}$, soit à un de ses sous-ensembles isolés. Il y a donc une fonction bien déterminée $\psi_n(z)$ qui est la partie principale de $P_{I^{(n)}}(z)$ relative à $J^{(n)}$. Soient σ_0 la suite des ensembles J_n et $\mathfrak{M}_0$ la suite des fonctions $\psi_n(z)$. *Nous allons montrer que le problème posé n'est pas altéré si nous substituons respectivement* σ_0 *et* $\mathfrak{M}_0$ *à* σ *et* $\mathfrak{M}$. — D'abord, les conditions nécessaires 1° à 5° de la page 46 étant satisfaites par hypothèse par σ et $\mathfrak{M}$ le seront en conséquence par σ_0 et $\mathfrak{M}_0$, comme on le voit facilement.

D'autre part, soit I un des ensembles de σ; il est la somme d'un nombre fini d'ensembles $J^{(n)}$ distincts: $I = J^{(n)} + J^{(m)} + \cdots + J^{(r)}$.

Il est alors clair que $P_I(z)$ est identique à la fonction

$$\psi_n(z) + \psi_m(z) + \cdots + \psi_r(z).$$

De plus, on voit que $\psi_n(z)$, par exemple, est la partie principale de $P_I(z)$ relativement à $J^{(n)}$.

Si maintenant il existe une solution $f(z)$ du problème pour σ et $\mathfrak{M}$, cette solution est solution du problème pour σ_0 et $\mathfrak{M}_0$.

Car $f(z)$, ayant pour ensemble singulier l'ensemble de fermeture de ΣI, aura aussi pour ensemble singulier l'ensemble de fermeture de $\Sigma J^{(n)}$, puisque $\Sigma I = = \Sigma J^{(n)}$. De plus, $\psi_n(z)$ est une fonction nulle à l'infini, ayant exactement $J^{(n)}$ pour ensemble singulier et puisque dans l'égalité

$$f(z) - \psi_n(z) = [f(z) - P_I(z)] + [P_I(z) - \psi_n(z)]$$

les deux crochets sont holomorphes sur $J^{(n)}$, il en sera de même du premier membre. Donc pour chaque $J^{(n)}$ de σ_0, la partie principale de $f(z)$ est $\psi_n(z)$.

On voit d'une façon analogue que s'il existe une solution $f_1(z)$ du problème pour σ_0 et $\mathfrak{M}_0$, $f_1(z)$ est solution pour σ et $\mathfrak{M}$. Finalement, nous avons réduit le problème posé au cas plus simple où la famille σ_0 qui remplace σ jouit des propriétés supplémentaires suivantes:

σ_0 (et par suite $\mathfrak{M}_0$) est une famille dénombrable; les ensembles $J^{(n)}$ qui constituent σ_0 sont mutuellement disjoints. Nous avons même formé une suite dénombrable d'aires polygonales d'un seul tenant et mutuellement disjointes $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$, telle que tout $J^{(n)}$ soit l'ensemble des points de E intérieurs à certains des $A^{(q)}$ en nombre fini.

Solution du problème réduit.

La suite des $J^{(n)}$ est dénombrable et formée d'ensembles distincts et même disjoints.

1° Dans le cas où les $J^{(n)}$ sont en nombre fini p, E est la somme d'un nombre fini d'ensembles fermés, par suite E est fermé. La fonction

$$P(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z) + \cdots + \psi_p(z)$$

est une solution du problème. Elle est évidemment nulle à l'infini. Les fonctions $\psi_1, \ldots \psi_p$ ne sont singulières que sur $J^{(1)}, \ldots J^{(p)}$ sous-ensembles de E. Donc $P(z)$ est holomorphe hors de E. Si maintenant a est un point de E, a appartient à un des $J^{(n)}$, par exemple à $J^{(k)}$, et n'appartient à aucun autre des $J^{(n)}$. Par suite $P(z) - \psi_k(z)$ est holomorphe au point a. Il en résulte que la fonction

$$P(z) - P_{I(k)}(z) = [P(z) - \psi_k(z)] + [\psi_k(z) - P_{I(k)}(z)]$$

est aussi holomorphe au point a.

En particulier, tout point a de E étant singulier pour un des $P_{I(k)}$ sera singulier pour $P(z)$ et comme on a vu que tout point singulier de $P(z)$ appartient à E, il en résulte finalement que l'ensemble fermé $E = \overline{E}$ est exactement l'ensemble singulier de $P(z)$.

2° Dans le cas où les $J^{(n)}$ ne sont pas en nombre fini, l'ensemble E *ne peut être fermé*. Car chaque point de l'ensemble fermé et borné E étant intérieur à l'une des aires $A^{(n)}$ E serait, par suite, intérieur à un nombre fini d'entre elles, de sorte que les $J^{(n)}$ seraient en nombre fini.

Nous allons maintenant développer un raisonnement suivant dans ses grandes lignes celui de Mittag-Leffler, mais surchargé des complications dues à la plus grande généralité du problème traité.

Tout point de E est intérieur à un des $A^{(n)}$ et à un seul, et chacun des $J^{(n)}$ est fermé. Puisque E n'est pas fermé, l'ensemble $E'-E$ n'est pas vide; d'ailleurs un point b de $E'-E$ ne peut être intérieur à une aire $A^{(n)}$, puisque l'ensemble $J^{(n)}$ des points de E appartenant à $A^{(n)}$ est fermé. Le point b ne peut non plus appartenir au contour de $A^{(n)}$ puisque E est à distance positive du contour de $A^{(n)}$.

Soit r_a la distance d'un point a de E à $E'-E$; a étant intérieur à l'un des $A^{(n)}$ et $E'-E$ étant extérieur à cet $A^{(n)}$, r_a doit être positif. Tout point a de $J^{(n)}$ est intérieur à un cercle de centre a et de rayon r_a. On peut donc couvrir $J^{(n)}$ qui est borné et fermé, au moyen d'un nombre fini de ces cercles, soient $S_1, \ldots S_q$ de centres $a_1, a_2, \ldots a_q$, (ces points et le nombre q pouvant varier avec n). Il y a au moins un point b_k de $E'-E$ qui est à distance de a_k inférieure à $2\,r_{a_k} \leq 2\,\varrho_n$, en appelant ϱ_n la borne supérieure (nécessairement finie puisque $\overline{E}$ est borné) des distances r_a quand a varie sur $J^{(n)}$. Le cercle U_k de centre b_k et de rayon $3\,\varrho_n$ comprendra certainement S_k à son intérieur. Finalement $J^{(n)}$ est entièrement intérieur à une aire $B^{(n)}$ formée d'un nombre fini de cercles de rayon $3\varrho_n$ et centrés sur $E'-E$. Or, la fonction $\psi_n(z)$ a $J^{(n)}$ pour ensemble singulier et elle est nulle à l'infini. Dès lors, d'après le théorème de M. Appell, puisque le contour de B_n est formé d'un nombre fini d'arcs de cercle, il existe une fraction rationnelle $r_n(x)$, nulle à l'infini, ayant tous ses pôles sur $E'-E$ et qui ne diffère de $\psi_n(x)$ que de moins de $\frac{1}{n^2}$ en module dans l'aire illimitée C_n dont les points sont à distance $\geq 4\varrho_n$ des points de $E'-E$. Nous allons montrer que la série

$$\sum_n [\psi_n(z) - r_n(z)]$$

représente une fonction $P(z)$ solution du problème.

Pour cela, on montre d'abord sans difficulté que ϱ_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Alors il y a pour tout $\varepsilon > 0$, un entier N tel que $4\varrho_n < \varepsilon$ pour $n > N$. Dès lors, si V_ε est l'ensemble des points du plan à distance $> \varepsilon$ de $E'-E$, l'aire C_n comprendra V_ε pour $n > N$. Par suite, la série

$$H_N(z) = \sum_{N+1}^{\infty} [\psi_n(z) - r_n(z)]$$

converge uniformément sur V_ε. D'ailleurs $\psi_n(z)$ a ses points singuliers sur $J^{(n)}$ qui est disjoint de C_n donc de V_ε pour $n > N$ et $r_n(z)$ a ses points singuliers sur $E'-E$ qui est disjoint de V_ε. Donc tous les termes de la série $H_N(z)$ sont holomorphes sur V_ε.

Finalement $H_N(z)$ est holomorphe sur V_ε. Or, la fonction

$$K_N(z) = \sum_{n \leq N} [\psi_n(z) - r_n(z)]$$

est la somme d'un nombre fini de fonctions holomorphes en dehors de $\overline{E}$. De sorte que la fonction

$$P(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} [\psi_n(z) - r_n(z)]$$

est holomorphe en tout point z_0 de V_ε n'appartenant pas à $\overline{E}$. Comme $P(z)$ ne dépend pas de ε, $P(z)$ est holomorphe en tout point n'appartenant pas à $\overline{E}$ et dont la distance à $E'-E$ est positive. La première condition entraînant la seconde, nous voyons que $P(z)$ a son ensemble singulier tout entier sur $\overline{E}$.

D'autre part, soit z_1 un point de E: z_1 appartient par exemple à $J^{(m)}$. Sa distance r_{z_1} à $E'-E$ est positive et si l'on prend $\varepsilon < r_{z_1}$, z_1 est sur V_ε et $H_N(z)$ est holomorphe au point z_1. Or

$$P(z) - \psi_m(z) = H_N(z) + [K_N(z) - \psi_m(z)]$$

et en prenant $N > m$

$$K_N(z) - \psi_m(z) = \sum{}' \psi_n(z) - \sum_{n \leq N} r_n(z)$$

en représentant par Σ' la somme étendue aux valeurs de $n \leq N$, mais $\neq m$. Les termes de Σ' sont singuliers sur des ensembles $J^{(n)}$ disjoints de $J^{(m)}$ et le dernier terme ne peut être singulier que sur $E'-E$. Tous ces termes et par suite $P(z) - \psi_m(z)$ sont donc holomorphes au point z_1 de $J^{(m)}$. Puisque $\psi_m(z)$ est singulier sur $J^{(m)}$, il en résulte que $P(z)$ est singulier en z_1. Ainsi tout point z_1 de E est singulier pour $P(z)$; l'ensemble singulier de $P(z)$ comprenant E comprend aussi $\overline{E}$; et comme il appartient à $\overline{E}$, il lui est identique.

On vient de voir que $P(z) - \psi_m(z)$ est holomorphe en tout point z_1 de $J^{(m)}$. On pourrait en outre démontrer directement que $P(z)$ est nulle à l'infini; ou bien, on peut le supposer en remplaçant au besoin $P(z)$ par sa partie principale relative à $\overline{E}$.

Finalement, nous avons obtenu une des fonctions $P(z)$ cherchées.

En résumé:

soit σ une famille d'ensembles plans I, soit $\mathfrak{M}$ une famille de fonctions $P_I(z)$ correspondantes;

pour qu'il existe au moins une fonction $f(z)$ dont: 1° chaque I soit un ensemble singulier isolé relativement auquel la partie principale de $f(z)$ est $P_I(z)$; et dont 2° l'ensemble singulier soit l'ensemble de fermeture $\overline{E}$ de l'ensemble E, supposé borné, somme des ensembles I;

il faut et il suffit:

que chaque ensemble I soit isolé dans $\overline{E}$ (et, par suite, soit fermé);

que chaque fonction $P_I(z)$ soit nulle à l'infini et ait exactement l'ensemble I pour ensemble singulier;

que les fonctions données $P_I(z)$ forment un système cohérent (c'est-à-dire qu'en tout point a, s'il en existe, commun à deux ensembles I, J de σ, $P_I(z) - P_J(z)$ soit holomorphe).

La solution la plus générale. Soient $f(z)$, $f_1(z)$ deux solutions du problème. La fonction

$$f(z) - f_1(z) = [f(z) - P_I(z)] - [f_1(z) - P_I(z)]$$

sera holomorphe comme $f(z)$ et $f_1(z)$ en dehors de $\bar{E}$ et comme les deux crochets en tout point appartenant à un ensemble I donné. Elle est donc holomorphe en dehors de

$$\bar{E} = E + (E' - E)$$

et sur E. *Par suite*

$$f_1(z) = f(z) + H(z)$$

$H(z)$ désignant une fonction holomorphe en dehors de $E'-E$. Réciproquement, si $H(z)$ est une fonction arbitraire holomorphe en dehors de $E'-E$, f et H seront holomorphes en dehors de $\bar{E}$. D'ailleurs f étant singulier et H holomorphe sur E, $f+H$ sera singulier sur E, donc sur E'. Par suite $f+H$ aura exactement $\bar{E}$ pour ensemble singulier et il est clair que les $P_I(z)$ seront ses parties principales relatives aux ensembles I de σ. En résumé, on obtient *la solution la plus générale du problème en prenant pour $H(z)$ la fonction la plus générale holomorphe en dehors de $E' - E$.*

Dans le cas particulier où E est fermé, $E' - E$ est vide et $H(z)$ est simplement la fonction *entière* la plus générale. Il y a lieu d'observer que *dans ce cas,* il n'y a *qu'une solution $P(z)$ du problème qui soit nulle à l'infini,* puisqu'alors $H(z)$ devant être une fonction entière nulle à l'infini se réduit identiquement à zéro.

Dans le cas général où E n'est pas fermé, l'ensemble singulier de $H(z)$ appartiendra à $E'-E$. Il pourra même être identique à $E'-E$, car *$E'-E$ est fermé.* En effet, si un point d'accumulation a de $E'-E$, n'appartenait pas à $E'-E$, comme il appartient nécessairement à E', il appartiendrait à E et par conséquent à un sous-ensemble I de E. Or cela est impossible puisqu'alors a serait intérieur comme on l'a vu à une aire Γ_I ne contenant aucun point de $\bar{E}$ sur son contour et ne contenant aucun point de $\bar{E}-I$ à son intérieur. Alors tout point de $E'-E$ est extérieur à Γ_I et a devrait à la fois être intérieur et extérieur à Γ_I sans être sur son contour.

Décomposition d'une fonction.

Soit σ *une* famille de sous-ensembles isolés I dans l'ensemble singulier F— supposé borné et non continu — d'une fonction $f(z)$. Posons $E = \Sigma I$; E et $\bar{E}$ appartiennent à F. La distance de I à $E-I$ (ou à $\bar{E}-I$) est au moins égale à celle de I à $F-I$, elle est donc positive: chaque I est isolé dans E et dans $\bar{E}$ comme dans F. De plus, I étant isolé dans un ensemble fermé F est fermé. D'après notre théorème général, il existe donc une fonction $P(z)$ nulle à l'infini, ayant exactement $\bar{E}$ pour ensemble singulier et ayant pour partie principale relative à chaque I donné, la partie principale $P_I(z)$ de $f(z)$ relative à I. En posant

$$f(z) = f^*(z) + P(z),$$

on voit que

$$f^*(z) = [f(z) - P_I(z)] - [P(z) - P_I(z)]$$

sera holomorphe sur I et que

$$f^*(z) = f(z) - P(z)$$

sera holomorphe hors de $\bar{E}$.

On peut donc *représenter toute fonction uniforme* $f(z)$, — *dont l'ensemble singulier* F *est supposé borné* —, *sous la forme de la somme de deux fonctions* $P(z)$ *et* $f^*(z)$, *holomorphes partout où* $f(z)$ *est holomorphe, la première*, $f^*(z)$, *holomorphe sur la somme* E *d'un ensemble arbitraire donné de sous-ensembles isolés* I *de* F, *la seconde*, $P(z)$, *nulle à l'infini et ayant exactement* $\bar{E}$ *pour ensemble singulier.*

On peut d'ailleurs indifféremment supposer que c'est $f^*(z)$ qui est nulle à l'infini; il suffit de remplacer $f^*(z)$ et $P(z)$ par $p(z)$ et $P(z) + [f^*(z) - p(z)]$ en appelant $p(z)$ la partie principale de $f^*(z)$ relative à son ensemble singulier.

Applications de la généralisation du théorème de Mittag-Leffler.

Première application.

I. Notre démonstration ne suppose pas connu le théorème de Mittag-Leffler. Tout au contraire, *celui-ci peut être déduit, comme cas particulier, de notre théorème général.*

Soit, en effet, E un ensemble plan borné dont tous les points sont isolés.

Associons arbitrairement à chaque point I de E une fonction entière en x: $g_I(x)$, nulle à l'origine et posons $P_I(z) = g_I\left(\frac{1}{z-I}\right)$. Alors les conditions d'application de notre théorème général sont satisfaites. Par suite, il existe au moins une fonction $f(z)$ ayant $\bar{E}$ pour ensemble singulier et dont, pour chaque point donné I, la partie principale relative à I soit la fonction donnée $g_I\left(\frac{1}{z-I}\right)$.

Une conséquence importante du théorème de Mittag-Leffler est la suivante: si l'ensemble singulier F, supposé borné, d'une fonction $f(z)$ n'est pas parfait, c'est-à-dire si l'ensemble $E=F-F'$ de ses points singuliers isolés n'est pas vide, on peut »balayer» pour ainsi dire cet ensemble E hors de l'ensemble singulier total F en écrivant $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = P(z) + f_1(z),$$

où les fonctions $P(z)$ et $f_1(z)$ sont holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, où en outre $f_1(z)$ est holomorphe sur E, et où $P(z)$ a $\bar{E}$ pour ensemble singulier.

Mais si en enlevant de $f(z)$ la fonction $P(z)$, la fonction restante $f_1(z)$ se trouve bien holomorphe en tout point singulier isolé de $f(z)$, cette fonction $f_1(z)$ peut, à son tour, présenter des points singuliers isolés. De sorte que si l'ensemble singulier de $P(z)$ est en général d'une nature plus simple que celle de l'ensemble singulier de $f(z)$, l'ensemble singulier de $f_1(z)$ est simplement compris dans celui de $f(z)$; il peut être de nature tout aussi complexe. *Un des résultats principaux de ce mémoire* (p. 75) *consiste à montrer qu'on peut choisir $P(z)$ de sorte que l'ensemble singulier de $f_1(z)$ soit parfait.* Mais nous n'aborderons pas ce point immédiatement.

Remarque. Il nous sera utile d'invoquer plus loin la propriété suivante: l'ensemble E_1 des points singuliers isolés de $f_1(z)$, s'il en existe, appartient à E'.

Soit, en effet, a un point de E. S'il n'appartenait pas à E', comme E est disjoint de E_1, il n'appartiendrait pas à $\bar{E}$, par suite, il y aurait un cercle de centre a ne contenant aucun point de $\bar{E}$. Dans ce cercle, $P(z)$ serait holomorphe et par suite $f(z)$ et $f_1(z)$ y auraient les mêmes singularités. Or a appartenant à E_1 est un point singulier isolé de $f_1(z)$, a devrait donc être un point singulier isolé de $f(z)$, c'est-à-dire appartenir à E. Comme $f_1(z)$ est holomorphe sur E, cela est impossible.

Il sera bon d'observer que la démonstration et le résultat précédents sont indépendants de la façon dont la décomposition de $f(z)$ a été effectuée, que ce soit ou non en utilisant la construction de $P(z)$ donnée dans le théorème d'existence de Mittag-Leffler, pourvu que $P(z)$ et $f_1(z)$ aient les mêmes propriétés.

Seconde application.

Supposons que σ soit une famille de continus I, isolés dans l'ensemble de fermeture $\bar{E}$ de la somme E, supposée bornée, de ces continus et supposons qu'à chaque continu I corresponde une fonction $P_I(z)$ nulle à l'infini et dont I soit l'ensemble singulier: pour qu'il existe une fonction uniforme dont l'ensemble singulier soit $\bar{E}$ et dont les $P_I(z)$ soient les parties principales relativement aux continus I, il faut et il suffit que le système des $P_I(z)$ soit cohérent.

Soit, maintenant, F l'ensemble singulier (supposé borné) d'une fonction uniforme $f(z)$. Si $f(z)$ a au moins un continu singulier isolé, on peut représenter $f(z)$ comme la somme

$$f(z) = f_1(z) + P(z)$$

de deux fonctions holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, la première holomorphe sur la somme E des continus singuliers isolés I de $f(z)$, la seconde, $P(z)$, nulle à l'infini et ayant exactement pour ensemble singulier l'ensemble de fermeture $\bar{E}$ de E.

Remarque. Soit E_1 la somme, s'il en existe, des continus singuliers isolés de $f_1(z)$. On ne peut plus affirmer que E_1 appartient à E'. Nous verrons même des exemples (page 75) où il n'en est pas ainsi. Cependant, on peut observer que tout continu singulier isolé I_1 de $f_1(z)$ a au moins un point commun avec E'. Sans quoi, il y aurait une distance positive ϱ de I_1 et E. Alors dans tout cercle ayant son centre en un point a de I_1 et de rayon $\frac{\varrho}{q}$ il n'y aurait aucun point de E, ni de $\bar{E}$. Dans ce cercle, $P(z)$ serait holomorphe et par suite $f(z)$ et $f_1(z)$ y aurait les mêmes singularités. Dans l'aire A couverte par ces cercles, I_1 est un continu singulier isolé de $f_1(z)$; I_1 serait donc aussi un continu singulier isolé de $f(z)$ et devrait appartenir à E contrairement à l'hypothèse.

Remarques sur certains ensembles plans.

Il sera utile pour la suite d'utiliser certaines propriétés d'ensembles plans particuliers, propriétés que nous allons rappeler ou établir ici.

I. Points de rang α d'un ensemble fermé. Soit F un ensemble plan fermé. S'il contient des points isolés, nous considérerons ceux-ci comme de rang zéro et nous appellerons en général *point de rang α dans F*, tout point de $F^{(\alpha)} - F^{(\alpha+1)}$. Un point a de F est donc de rang α s'il existe un cercle de centre a dans lequel tout point de F, à l'exception de a, est de rang $< \alpha$. Cette définition s'applique quand α est un nombre entier quelconque ou un nombre transfini de la deuxième classe.

D'après le théorème de Cantor-Bendixson, nous savons qu'il y a un nombre transfini λ de la première ou de la seconde classe tel que $F^{(\alpha)} \equiv F^{(\lambda)}$ pour $\alpha > \lambda$, que $F - F^{(\lambda)}$ est clairsemé (c'est-à-dire ne comprend aucun sous-ensemble dense en soi) et par suite dénombrable, et que $F^{(\lambda)}$, s'il n'est pas vide, est parfait. L'ensemble $F^{(\lambda)}$ est l'ensemble des *points »de condensation» de F*, c'est-à-dire dans tout voisinage duquel il y a une infinité non dénombrable de points de F. L'ensemble $N = F - F^{(\lambda)}$ est l'ensemble des *points de »non-condensation» de F*. L'ensemble $F^{(\lambda)}$ est aussi »le plus grand» de tous les sous-ensembles parfaits de F, en ce sens que c'est un sous-ensemble parfait de F et que tout sous-ensemble parfait de F appartient à $F^{(\lambda)}$.

II. Soit F un ensemble borné plan et fermé et $E = F - F^{(\alpha)}$ l'ensemble de ses points de rangs $< \alpha$, s'il en existe. A chaque point a de E on peut, par définition de E, associer un cercle C_a de centre a ne contenant pas d'autres points de F que des points de rangs $< \alpha$. On peut même choisir C_a de sorte que sa circonférence ne passe par aucun point de F. En effet l'ensemble des points de F appartenant à C_a étant dénombrable, il suffira de remplacer C_a par un cercle concentrique et de rayon plus petit, différent de l'ensemble dénombrable des distances de a aux points de cet ensemble. Appelons I_a l'ensemble des points de F appartenant à C_a. Tous les points de I_a appartiennent à E. On a donc $E = \Sigma I_a$. Chaque I_a est fermé, sans quoi il y aurait un point d'accumulation de I_a, donc un point de F, qui n'appartiendrait pas à I_a et pourtant qui devrait appartenir à C_a. Il est clair que I_a est isolé dans F, donc dans $\overline{E}$.

L'ensemble E étant nécessairement dénombrable, soient $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ ses points, (en nombre sûrement infini si $\alpha > 1$). Associons à a_n une fonction arbitraire $\theta_n(z)$, ayant exactement I_{a_n} pour ensemble singulier, et nulle à l'infini.

Ceci étant, toutes les conditions de notre théorème fondamental (p. 52) se trouvent remplies d'elles-mêmes, à l'exception de la dernière. Dès lors: la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $f(z)$ dont l'ensemble singulier soit exactement $\bar{E}$ et dont pour chaque valeur de n, la partie principale relative à I_{a_n} soit précisément la fonction donné $\theta_n(z)$, est que le système des $\theta_n(z)$ soit cohérent.

Une application importante de cette proposition est la suivante:

Soit $f(z)$ une fonction dont l'ensemble singulier F (supposé borné) admet des points de tous les rangs $< \alpha$ au moins et soit $E = F - F^{(\alpha)}$ l'ensemble de tels points. Il est possible de »balayer» l'ensemble des points singuliers de rang $< \alpha$ en écrivant $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = P_\alpha(z) + f_\alpha(z)$$

où $P_\alpha(z)$ et $f_\alpha(z)$ sont holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, où, en outre, $f_\alpha(z)$ est holomorphe sur E et où $P_\alpha(z)$ a exactement $\bar{E}$ pour ensemble singulier.

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'associer à chaque point a de E un cercle de centre a ne passant par aucun point de F et ne contenant pas d'autre point de F que des points de E. Ce cercle enfermera un sous-ensemble I_a de F qui est isolé de F et par suite de $\bar{E}$. Puis on associera à I_a la partie principale $P_{I_a}(z)$ de $f(z)$ relative à I_a. Le système des $P_{I_a}(z)$ sera nécessairement cohérent. Par suite, il existe une fonction $P_\alpha(z)$ ayant exactement $\bar{E}$ pour ensemble singulier et dont les P_{I_a} sont les parties principales relatives aux divers I_a. Comme

$$f(z) - P_\alpha(z) = [f(z) - P_{I_a}(z)] + [P_{I_a}(z) - P_\alpha(z)]$$

la fonction $f_\alpha(z)$ représentée par le premier membre est, comme les crochets, holomorphe au point a de E. Par suite $f_\alpha(z)$ qui est indépendante de a est holomorphe en tout point de E. Elle est d'ailleurs évidemment aussi holomorphe hors de F comme $f(z)$ et $P_\alpha(z)$.

Seulement, il faut observer que, si aucun point singulier de rang $< \alpha$ de $f(z)$ n'est resté point singulier de $f_\alpha(z)$, par contre $f_\alpha(z)$ n'est pas nécessairement dénué de points singuliers qui soient de rang $< \alpha$ relativement à l'ensemble singulier de $f_\alpha(z)$ lui-même.

III. Soit F un ensemble plan borné et fermé qui ne soit pas parfait. Alors l'ensemble N des points de non-condensation de F n'est pas vide et l'ensemble $P = F - N$ est vide ou parfait.

L'ensemble P est égal à l'un, $F^{(\lambda)}$, des ensembles dérivés $F^{(\alpha)}$ de F pour α assez grand. En particularisant la deuxième application, en y prenant $\alpha=\lambda$, on obtient alors le résultat suivant:
à tout point a de l'ensemble N, on peut associer un sous-ensemble fermé I_a de N comprenant a et isolé dans $\overline{N}$; soit alors $P_{I_a}(z)$ une fonction nulle à l'infini et dont l'ensemble singulier est exactement I_a; pour qu'il existe au moins une fonction dont l'ensemble singulier soit $\overline{N}$ et dont chaque fonction $P_{I_a}(z)$ soit la partie principale relativement à I_a, il faut et il suffit que le système des fonctions $P_{I_a}(z)$ soit cohérent.

On en conclut que:

si l'ensemble singulier F, supposé borné, d'une fonction $f(z)$ n'est pas parfait, on peut »balayer» l'ensemble N des points de non-condensation de F en écrivant $f(z)$ sous la forme

$$f(z)=p(z)+f_\Omega(z)$$

où $p(z)$ et $f_\Omega(z)$ sont holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, et où, en outre, $f_\Omega(z)$ est holomorphe sur N et $p(z)$ a exactement $\overline{N}$ pour ensemble singulier.

C'est là un premier perfectionnement du théorème de Mittag-Leffler. Car l'ensemble E des points singuliers isolés de $f(z)$ n'est, en général, qu'une partie de N, alors que $\overline{N}$ est toujours identique à $\overline{E}$.

Il y a lieu d'observer qu'en substituant $f_\Omega(z)$ à $f(z)$, on ne trouve plus d'autres points singuliers que ceux qui faisaient partie du »plus grand» P des sous-ensembles parfaits singuliers de $f(z)$. Mais l'ensemble singulier de $f_\Omega(z)$ n'est pas nécessairement parfait. Nous verrons plus loin (page 75) que l'on peut choisir $p(z)$ pour que l'ensemble singulier de $f_\Omega(z)$ soit parfait.

IV. Soit F un ensemble plan fermé. Nous dirons avec Jordan que c'est *un continu* si on ne peut le décomposer en deux ensembles fermés disjoints et s'il contient plus d'un point.

Lorsque F est en outre borné, cette définition est équivalente à la suivante due à Cantor: l'ensemble borné et fermé F est un continu si deux quelconques de ses points sont toujours bien enchainés. Deux points a, b d'un ensemble plan G sont *bien enchaînés* si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une ligne polygonale joignant a et b, dont les sommets sont sur G et dont les côtés ont une longueur $<\varepsilon$.

Nous dirons avec M. Zoretti qu'un ensemble plan quelconque H est *partout discontinu* s'il ne contient aucun couple de points bien enchaînés. On sait[1] que si un ensemble *fermé* F est partout discontinu, on peut tracer autour de chacun de ses points, a, et dans un cercle de rayon aussi petit que l'on veut, un contour ne passant par aucun point de F et comprenant a à son intérieur.

Un ensemble plan borné H partout discontinu ne contient aucun continu; sans quoi s'il contenait un continu C et si a et b étaient deux points distincts de ce continu, a et b seraient bien enchaînés sur C et par suite bien enchaînés sur H.

Réciproquement, si un ensemble plan borné fermé[2] G ne contient aucun continu, il est partout discontinu.

On démontre cette proposition par une adaptation au cas actuel du raisonnement cité dans la note ci-dessus.

On peut déduire des propositions précédentes que *si $\overline{C}$ est la somme des continus appartenant à un même ensemble plan borné et fermé F, et si l'ensemble F, qui contient $\overline{C}$, ne se réduit pas à $\overline{C}$, l'ensemble $A = F - \overline{C}$ est la somme d'ensembles isolés dans F.*

En effet, soit a un point de A; $\overline{C}$ étant fermé, il y a au moins un cercle λ_a de centre a et complètement extérieur à $\overline{C}$. Soit G l'ensemble des points de F appartenant à λ_a ou à son contour. G appartient à A et est fermé; G ne contenant aucun continu est partout discontinu. Comme a appartient à G, il y a donc, dans une circonférence arbitraire σ_a de centre a, un ensemble I_a de points de G auquel a appartient et qui est isolé dans G, donc dans F si on prend aussi σ_a dans λ_a. Ainsi, quelle que soit la circonférence σ_a de centre a, tout point a de A appartient à un ensemble I_a isolé dans F et appartenant à σ_a: A est bien une somme d'ensembles isolés dans F.

Il en résulte, comme nous l'avons vu page 53, que l'ensemble $A' - A$ est fermé.

L'ensemble A est partout discontinu. En effet, soient a, b deux points de A et σ_a, σ_b deux cercles disjoints centrés sur a et b. Il y a deux ensembles de points de $A: I_a$ et I_b respectivement contenus dans σ_a et σ_b, contenant l'un a, l'autre b et isolés dans F et par suite aussi dans A. Alors on peut enfermer I_a dans un contour ne passant par aucun point de F et comprenant a à son intérieur. De même pour I_b et b. Soit ε la plus petite distance des points de ces

[1] Voir, par exemple: *Leçons sur le prolongement analytique,* par Zoretti.

[2] La proposition cesse d'être vraie pour un ensemble non fermé comme on le voit en prenant pour G l'ensemble des points de ox et d'abscisses irrationnelles. Cet ensemble ne contient aucun continu et n'est pas partout discontinu.

contours à F; c'est un nombre positif. Il est clair que si une ligne polygonale, ayant ses sommets sur F, joint a et b, l'un au moins de ses côtés sera nécessairement $>\varepsilon$. Donc a et b ne sont pas bien enchaînés sur F et par conséquent non plus sur $\bar{A}$, ni sur A.

Ainsi l'ensemble A possède les deux propriétés suivantes: il est partout discontinu et $A'-A$ est fermé. Ces deux propriétés sont indépendantes. Si un ensemble plan B est tel que $B'-B$ soit fermé, B n'est pas toujours partout discontinu. Par exemple, si B est l'ensemble $(0<x\leq 1)$, $B'-B$ étant un seul point est fermé et B n'est pas partout discontinu.

Inversement, soit β l'ensemble de l'origine et des points $x=\frac{p}{n}$, $y=\frac{1}{n}$, où p, n sont des entiers positifs et $p<n$. β est visiblement partout discontinu, $\beta'-\beta$ est l'ensemble des points $(0<x\leq 1,\ y=0)$ qui n'est pas fermé.

V. Soit F un ensemble plan borné fermé, et C la somme des continus que F peut éventuellement contenir. Si F ne se réduit pas à $\bar{C}$, on a vu que l'ensemble $A=F-\bar{C}$ est une somme d'ensembles I isolés dans A. A chaque point a de A et chaque cercle σ_a de centre a, correspond un ensemble I_a de points de A intérieurs à σ_a et tels que I_a soit isolé dans A. Associons à I_a une fonction $P_{I_a}(z)$ ayant I_a comme ensemble singulier et nulle à l'infini. Pour qu'il existe une fonction ayant $\bar{A}$ pour ensemble singulier et ayant chaque $P_{I_a}(z)$ pour partie principale relative à I_a, il faut et il suffit que les $P_{I_a}(z)$ forment un système cohérent.

Comme on l'a fait dans un cas analogue, on verra qu'en vertu du théorème de la page 54, on peut en déduire la conséquence suivante.

Soit F l'ensemble singulier (supposé borné) d'une fonction $f(z)$, C la somme de ses continus singuliers et $A=F-\bar{C}$; on peut »balayer» A en écrivant $f(z)$ sous la forme

$$f(z)=A(z)+C(z)$$

où $A(z)$ et $C(z)$ sont holomorphes partout où l'est $f(z)$, où $A(z)$, nulle à l'infini, a exactement $\bar{A}$ pour ensemble singulier et où $C(z)$ est holomorphe sur $A=F-\bar{C}$.

Ainsi, l'ensemble singulier de $C(z)$ appartient à l'ensemble $\bar{C}$ des continus singuliers de $f(z)$ et des points d'accumulation de leur somme C, l'ensemble singulier $\bar{A}$ de $A(z)$ est l'ensemble de fermeture de l'ensemble singulier A disjoint de $\bar{C}$: $A=F-\bar{C}$.

Mais il faut observer que si $C(z)$ ne peut plus être singulier que sur les continus singuliers de $f(z)$ ou sur les points limites d'une suite infinie de ces continus singuliers, il n'en résulte pas que $C(z)$ ait un continu singulier.

Nous montrerons plus loin, page 77, qu'on peut choisir $A(z)$ de sorte que l'ensemble singulier de $C(z)$ soit l'ensemble de fermeture de la somme de ses propres continus singuliers.

Remarque. Il nous sera utile pour la suite d'utiliser l'observation suivante: si C_1 est la somme des continus appartenant à l'ensemble singulier G de $C(z)$, alors $A_1 = G - \overline{C}_1$ est contenu dans A'.

En effet, soit a un point de A_1. S'il n'appartenait pas à A', il n'appartiendrait pas non plus à $\overline{A}$ puisque A_1, comme G, est disjoint de A. Il y aurait donc un cercle S_a de centre a dans lequel il n'y aurait aucun point de $\overline{A}$ et sur lequel, par suite, $A(z)$ serait holomorphe. Alors $f(z)$ et $C(z)$ auraient dans ce cercle S_a les mêmes singularités. Mais G appartient à $\overline{C}$, donc a appartient à un continu singulier de $f(z)$ ou est limite de tels continus. Il y a donc dans tout cercle T de centre a intérieur à S_a au moins un continu singulier de $f(z)$ qui a des points intérieurs à T. La partie commune à ce continu et au cercle T est un continu singulier de $f(z)$ entièrement intérieur à S_a. C'est donc aussi un continu singulier de $C(z)$. Dès lors, il y a des points de C_1 dans tout cercle de centre a et a ne pourrait appartenir à $A_1 = G - \overline{C}_1$.

Il sera bon d'observer que la démonstration et le résultat précédents sont indépendants de la façon dont la décomposition a été effectuée pourvu que $A(z)$ et $C(z)$ conservent les mêmes propriétés.

Démonstration d'un théorème général.

Introduction de la catégorie $\mathfrak{T}$. Les diverses applications que nous avons faites de notre théorème général peuvent être présentées sous la forme commune suivante qui nous sera commode pour la suite.

Nous supposons définie d'une façon quelconque une certaine catégorie $\mathfrak{T}$ de sous-ensembles E d'ensembles plans bornés et fermés F, catégorie d'abord soumise à la seule condition générale que chaque sous-ensemble E soit la somme d'une certaine famille σ de sous-ensembles isolés I de F.

Par exemple: $\mathfrak{T}$ est la catégorie des ensembles E des points isolés des ensembles F; ou encore $\mathfrak{T}$ est la catégorie des ensembles E des points de non-condensation des ensembles F; ou encore $\mathfrak{T}$ est la catégorie des ensembles $E = F - C$ où C est la somme des sous-ensembles continus de F; ou encore $\mathfrak{T}$ est la catégorie des sous-ensembles E des ensembles F tels que E soit la somme des sous-ensembles de F qui en sont des continus isolés; etc. . . .

La considération de la catégorie $\mathfrak{T}$ nous permettra de démontrer en une fois des propriétés relatives à plusieurs cas et dont nous allons aborder la démonstration. Comme il s'agit ici d'une démonstration que je crois entièrement nouvelle, j'entrerai plus minutieusement dans les détails que précédemment.

D'ailleurs, cette démonstration étant fondée sur l'emploi de l'induction transfinie sans que le résultat obtenu dépende de la notion de nombre transfini, je ne serais pas étonné que, comme il est arrivé souvent dans des cas semblables, une démonstration également indépendante de cette notion, et plus brève, fût ensuite obtenue.

Utilisation de la première propriété de la catégorie $\mathfrak{T}$. La catégorie $\mathfrak{T}$ possède des propriétés communes à chacun de ces cas et dont la première, qui sera la seule dont nous nous servirons pour commencer, est la suivante établie page 54:

Si l'ensemble singulier F, supposé borné, d'une fonction $f(z)$, contient un sous-ensemble non vide E de la catégorie $\mathfrak{T}$, on peut représenter $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = f^*(z) + P(z)$$

où les deux fonctions $f^*(z)$ et $P(z)$ sont holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, où $f^*(z)$ est, en outre, holomorphe sur E et où $P(z)$ est nulle à l'infini et a exactement $\overline{E}$ pour ensemble singulier.

Lorsque F ne contient aucun ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$, on prendra $P(z) \equiv 0$ et $f^*(z) \equiv f(z)$.

Soit maintenant $f_0(z)$ la partie principale de $f(z)$ relative à F. On aura

$$f(z) = f_0(z) + E(z)$$

où $E(z)$ est une fonction entière, tandis que $f_0(z)$, nulle à l'infini a le même ensemble singulier F que $f(z)$. — Nous allons maintenant former à partir de $f_0(z)$ une suite transfinie de fonctions.

Si F ne contient aucun ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$, nous poserons $f_1(z) \equiv f_0(z)$ et $P_1(z) \equiv 0$. Si F contient un ensemble E_0 de la catégorie $\mathfrak{T}$, on aura par hypothèse

$$f_0(z) = f_1(z) + P_1(z)$$

$f_1(z)$ et $P_1(z)$ étant holomorphes hors de F, $f_1(z)$ étant en outre holomorphe sur E_0 ct $P_1(z)$, nul à l'infini, ayant exactement $\overline{E}_0$ pour ensemble singulier. On voit en outre que $f_1(z)$ comme f_0 et P_1 sera nul à l'infini.

Soit F_1 l'ensemble singulier de $f_1(z)$, F_1 appartient à F. Si F_1 ne contient aucun sous-ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$ — c'est en particulier ce qui aurait lieu si $f_1(z)$ était une fonction entière, c'est-à-dire si F_1 était vide —, nous poserons $f_2(z) \equiv f_1(z)$, $P_2(z) \equiv 0$.

Si, au contraire, F_1 contient un sous-ensemble E_1 non vide, de la catégorie $\mathfrak{T}$, on pourra écrire

$$f_1(z) = f_2(z) + P_2(z)$$

où f_2 et P_2 sont holomorphes partout où f_1 est holomorphe, où $f_2(z)$ est, en outre, holomorphe sur E_1, et où $P_2(z)$ a exactement $\overline{E}_1$ pour ensemble singulier et est nulle à l'infini. Comme

$$f_0(z) - f_2(z) = P_1(z) + P_2(z)$$

le premier membre ne peut être singulier que sur la somme $\overline{E}_0 + \overline{E}_1 = \overline{E_0 + E_1}$ des ensembles singuliers de $P_1(z)$ et $P_2(z)$. D'autre part, E_0 et $\overline{E}_1$ sont disjoints, car $\overline{E}_1$ appartient à F_1 qui est disjoint de E_0. Donc, en un point de E_0, $P_1(z)$ est singulier et $P_2(z)$ est holomorphe: l'ensemble singulier de $f_0(z) - f_2(z)$ comprend E_0 et par suite $\overline{E}_0$. En un point de $E_1 - \overline{E}_0$, s'il en existe, $P_1(z)$ est holomorphe et $P_2(z)$ est singulier. Donc l'ensemble singulier de $f_0(z) - f_2(z)$ comprend non seulement $\overline{E}_0$, mais encore $E_1 - \overline{E}_0$, il comprend donc $\overline{E}_0 + E_1$ et par suite aussi $\overline{E_0 + E_1}$.

Finalement $f_0(z) - f_2(z)$ a exactement $\overline{E_0 + E_1}$ pour ensemble singulier.

D'autre part, $f_2(z)$ sera holomorphe hors de F_1 et sur E_1, donc en particulier sur $E_0 + E_1$, et $f_2(z)$ est nul à l'infini comme f_1 et P_2. — Ceci montre que parmi les nombres ordinaux de la première ou de la seconde classe, il en existe au moins un, β (à savoir $\beta = 2$), jouissant de la propriété P suivante:

Pour tout nombre ordinal positif ou nul, $\gamma \leq \beta$, il existe une fonction $f_\gamma(z)$ telle que la suite des $f_\gamma(z)$ vérifie les conditions suivantes:

en désignant par F_γ l'ensemble singulier de $f_\gamma(z)$ et par E_γ un certain sous-ensemble de F_γ appartenant à la catégorie $\mathfrak{T}$, s'il en existe, (avec $E_\gamma \equiv 0$ s'il n'en existe pas), en posant en outre $F_0 \equiv F$:

chaque ensemble de la suite des F_γ est compris dans les précédents;

$f_\gamma(z)$ est holomorphe en particulier sur $\sigma_\gamma = \sum\limits_{\delta<\gamma} E_\delta$ et nul à l'infini;

$f_0(z) - f_\gamma(z)$ a exactement $\bar{\sigma}_\gamma$ pour ensemble singulier;

lorsque $E_\gamma \equiv 0$ et $\gamma < \delta \leq \beta$ $f_\delta(z) \equiv f_\gamma(z)$.

D'après l'énoncé même de P, si un nombre $\beta \geq 2$ possède la propriété P, il en est de même des précédents.

Nous allons montrer que *tous les nombres ordinaux* de la première ou de la seconde classe possèdent la propriété P.

Pour cela, il suffira de prouver que si tous les nombres β inférieurs à un même nombre α possèdent la propriété P, il en sera de même de α.

Dans ce but, observons d'abord que si $\gamma \leq \delta \leq \beta < \alpha$, F_γ comprend F_δ qui comprend E_δ, donc F_γ comprend E_δ. D'autre part, puisque $f_\gamma(z)$ est holomorphe sur σ_γ, F_γ est disjoint de $\sigma_\gamma = \sum\limits_{\delta<\gamma} E_\delta$. Ainsi les E_δ de rang $<\gamma$ sont disjoints de F_γ et ceux de rangs $\geq \gamma$ sont compris dans F_γ. Il en résulte que les E_δ de rangs distincts sont disjoints.

Observons aussi que, si $E_\gamma \equiv 0$, on déduit de l'identité $f_\delta(z) \equiv f_\gamma(z)$ (pour $\gamma < \delta < \alpha$) que $F_\delta \equiv F_\gamma$ et $E_\delta \equiv 0$ pour $\gamma < \delta < \alpha$.

1° Ceci étant, supposons d'abord que α soit de première espèce. On pourra appeler β le nombre $\alpha - 1$. Si l'ensemble singulier F_β de $f_\beta(z)$ ne contient aucun ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$, $E_\beta = 0$, et on pourra poser $f_\alpha(z) \equiv f_\beta(z)$, d'où $F_\alpha \equiv F_\beta$. Alors α jouira bien de la propriété P. Si au contraire F_β contient un ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$, soit E_β, alors par définition de $\mathfrak{T}$, il est possible d'écrire

$$f_\beta(z) = f_\alpha(z) + P_\alpha(z)$$

où $f_\alpha(z)$ et $P_\alpha(z)$ sont holomorphes hors de F_β, où $P_\alpha(z)$ est nul à l'infini et a exactement $\bar{E}_\beta$ pour ensemble singulier, où $f_\alpha(z)$ — nécessairement nul à l'infini comme f_β et P_α —, est holomorphe sur E_β. Puisque σ_β est disjoint de F_β, $f_\alpha(z)$ est à la fois holomorphe sur E_β et sur σ_β, donc aussi sur

$$E_\beta + \sigma_\beta = \sum_{\delta<\alpha} E_\delta = \sigma_\alpha.$$

Ainsi F_α appartient à F_β et $f_\alpha(z)$ est holomorphe sur σ_α et nul à l'infini. Enfin, comme

$$f_0(z) - f_\alpha(z) = [f_0(z) - f_\beta(z)] + P_\alpha(z)$$

le premier membre ne peut être singulier qu'en un point appartenant à l'ensemble singulier $\bar{\sigma}_\beta$ du crochet ou à l'ensemble singulier $\bar{E}_\beta$ de $P_\alpha(z)$. L'ensemble singulier de $f_0(z) - f_\alpha(z)$ est donc compris dans

$$\bar{\sigma}_\beta + \bar{E}_\beta = \overline{\sigma_\beta + E_\beta} = \bar{\sigma}_\alpha.$$

Inversement, observons qu'en un point de σ_β, le crochet est singulier, tandis que $P_\alpha(z) = f_\beta(z) - f_\alpha(z)$ est holomorphe en dehors de F_β et, par suite, comme on l'a vu plus haut, sur σ_β. Donc la fonction $p_\alpha(z) = f_0(z) - f_\alpha(z)$ est singulière sur σ_β et par suite sur $\bar{\sigma}_\beta$. En un point de $E_\beta - \bar{\sigma}_\beta$, $[f_0(z) - f_\beta(z)]$ est holomorphe et $P_\alpha(z)$ est singulier, donc aussi $p_\alpha(z)$. Dès lors, $p_\alpha(z)$ est singulière sur $\bar{\sigma}_\beta$ et $E_\beta - \bar{\sigma}_\beta$, donc sur $\bar{\sigma}_\beta + E_\beta$, donc enfin sur $\overline{\sigma_\beta + E_\beta} = \bar{\sigma}_\alpha$. Finalement, $p_\alpha(z)$ a exactement $\bar{\sigma}_\alpha$ pour ensemble singulier et nous avons établi les différents points qui permettent de conclure que α a la propriété P.

2° Reste le cas le moins simple, celui où α étant de seconde espèce, $\alpha - 1$ n'existe pas, et où par conséquent α est limite d'une suite croissante

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n < \cdots.$$

Comme $f_\beta(z)$ est supposé défini pour $\beta < \alpha$, on peut écrire

$$f_{\beta_n}(z) = f_{\beta_1}(z) + [f_{\beta_2}(z) - f_{\beta_1}(z)] + \cdots + [f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z)].$$

On va former la fonction annoncée $f_\alpha(z)$ en passant par l'intermédiaire d'une série dont le terme général sera $[f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z) - r_n(z)]$ où $r_n(z)$ sera une fraction rationnelle introduite pour assurer la convergence de la série dans une région convenablement choisie.

Observons d'abord que

$$f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z) = [f_{\beta_n}(z) - f_0(z)] + [f_0(z) - f_{\beta_{n-1}}(z)].$$

Les deux termes du premier membre sont holomorphes respectivement sur σ_{β_n} et $\sigma_{\beta_{n-1}}$, le premier ensemble comprenant le second. Donc l'ensemble singulier du premier membre est disjoint de $\sigma_{\beta_{n-1}}$. D'autre part, les deux crochets ont respectivement pour ensembles singuliers $\bar{\sigma}_{\beta_n}$ et $\bar{\sigma}_{\beta_{n-1}}$, le second compris dans le premier. Donc le premier membre a un ensemble singulier compris dans

$\bar{\sigma}_{\beta_n}$ et disjoint de $\sigma_{\beta_{n-1}}$, donc compris dans $\bar{\sigma}_{\beta_n} - \sigma_{\beta_{n-1}}$ et *a fortiori* compris dans $\bar{\sigma}_\alpha - \sigma_{\beta_{n-1}}$ (Observons que $\sigma_\alpha = \sum_{\gamma<\alpha} E_\gamma$ est déjà connu, avant qu'on ait formé $f_\alpha(z)$). Enfin, puisque les deux termes du premier membre ont pour ensembles singuliers F_{β_n} et $F_{\beta_{n-1}}$, le premier ensemble compris dans le second, le premier membre a un ensemble singulier compris dans $F_{\beta_{n-1}}$ et comprenant en particulier $F_{\beta_{n-1}} - F_{\beta_n}$.

Nous voyons que l'ensemble singulier de $f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z)$ appartient à la fois à $F_{\beta_{n-1}}$ et à $\bar{\sigma}_\alpha$.

Si l'un des ensembles E_γ, définis pour $\gamma < \beta$, est nul, les fonctions $f_\beta(z)$ de rang $\beta > \gamma$ seront toutes identiques à $f_\gamma(z)$, les F_β de rang $\beta > \gamma$ seront tous $\equiv F_\gamma$ et les E_β de rang $\beta > \gamma$ seront tous vides. On posera dans ce cas $f_\alpha(z) \equiv \equiv f_\gamma(z)$. Alors on aura $F_\alpha \equiv F_\gamma$ et $E_\alpha \equiv 0$, et on voit que $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma$, de sorte que les conditions annoncées sont remplies et α a bien encore la propriété P.

Si aucun des E_γ n'est vide, désignons par G l'ensemble commun à $\bar{\sigma}_\alpha$ et à $F_{\beta_1}, F_{\beta_2}, \ldots F_{\beta_n}, \ldots$: l'ensemble G n'est pas vide. Car il y aura au moins un point a_n appartenant à E_{β_n}. De la suite des a_n (contenue dans l'ensemble fermé et borné F), on peut extraire une suite de points en coïncidence ou une suite convergente. Cette suite étant contenue dans σ_α et étant, à partir d'un certain rang contenue dans l'ensemble fermé F_{β_n}, son point commun ou son point-limite a appartiendra à $\bar{\sigma}_\alpha$ et aussi quel que soit n à F_{β_n}. L'ensemble G contient donc au moins un point a. D'ailleurs, comme c'est l'ensemble commun à des ensembles fermés, il est fermé. Il est en particulier contenu dans F, donc borné.

Puisque G n'est pas vide, il y a une aire déterminée G_r couverte par les cercles de rayon r centrés sur G. En prenant r assez grand, G_r contiendra à son intérieur l'ensemble commun à F_{β_n} et à $\bar{\sigma}_\alpha$. Soit ϱ_n la borne inférieure de telles valeurs de r. Puisque la suite des F_γ est »monotone», on a $\varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \cdots$. Si ϱ_n ne tendait pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ϱ_n aurait une limite positive ϱ. Pour chaque entier, n, il y aurait au moins un point b_n commun à $\bar{\sigma}_\alpha$ et à F_{β_n} et à distance $> \frac{\varrho}{2}$ de G. Alors: ou bien, il y a une infinité de points b_n qui coïncident géométriquement, ou bien, il y en a une infinité qui sont distincts et d'où l'on peut tirer une suite convergente. Dans les deux cas, il y a un point c qui est à distance $< \frac{\varrho}{2}$ d'une infinité de points b_n et pourtant ce point c appartiendrait nécessairement à G.

Ceci étant, on voit que si $r > \varrho_{n-1}$, l'ensemble singulier de $f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z)$ appartient à G_r; comme cet ensemble singulier est fermé et borné, on peut le recouvrir par un nombre fini des cercles qui composent G_r. D'après le théorème d'Appell, et puisque $f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z)$ est nulle à l'infini, on peut approcher de cette fonction par une fraction rationnelle $r_n(z)$ nulle à l'infini, dont les pôles sont des centres de ces cercles, et qui en diffère de moins de $\frac{1}{n^2}$ en module dans toute l'aire couverte par les points à une distance donnée, supérieure à r, de G. En prenant $\varrho_{n-1} < r < \varrho_{n-1} + \frac{1}{n-1}$; on voit que l'on a

$$|f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z) - r_n(z)| < \frac{1}{n^2}$$

dans toute l'aire ouverte illimitée V_{n-1} où z est à distance $> \varrho_{n-1} + \frac{1}{n-1}$ de G; et on observe que les pôles de $r_n(z)$ sont sur G. D'ailleurs, V_{n-1} est comprise dans V_n; il en résulte que la série

$$h_s(z) = \sum_{n>s} [f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z) - r_n(z)]$$

est uniformément convergente sur V_s. Si z_0 est un point de V_s, non seulement les termes de $h_s(z)$ sont holomorphes dans V_s, mais ils le sont dans un même cercle, de centre z_0, assez petit pour appartenir à V_s. Par suite, $h_s(z)$ est holomorphe sur V_s. Il est même aisé de voir que cette fonction est nulle à l'infini.

Ceci étant, la somme

$$\begin{aligned} k_s(z) &= f_{\beta_1}(z) + \sum_{2 \leq n \leq s} [f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z) - r_n(z)] \\ &= f_{\beta_s}(z) + R_s(z) \end{aligned}$$

— où l'on a posé $R_s(z) = \sum_{2 \leq n \leq s} [-r_n(z)]$ — est la somme d'une fonction holomorphe hors de F_{β_s} et nulle à l'infini et d'une fraction rationnelle nulle à l'infini et ayant ses pôles sur G.

Alors nous prendrons pour $f_\alpha(z)$ la fonction

$$f_\alpha(z) = f_{\beta_s}(z) + R_s(z) + h_s(z)$$

c'est-à-dire la somme de trois fonctions nulles à l'infini, et l'une holomorphe hors de F_{β_s}, l'autre hors de G, la troisième hors de W_s en appelant W_s l'ensemble complémentaire de V_s. La fonction $f_\alpha(z)$ est donc holomorphe en dehors, à la fois, de $F_{\beta s}$, de G et de W_s. Or

$$f_\alpha(z) = f_{\beta_1}(z) + \sum_{n \geq 2} [f_{\beta_n}(z) - f_{\beta_{n-1}}(z) - r_n(z)]$$

est indépendant de s et son ensemble singulier F_α appartient à $F_{\beta_s} + W_s$ puisque G appartient à F_{β_s}. Donc F_α est un ensemble commun aux $F_{\beta_s} + W_s$. Soit a un point de F_α. S'il y avait un F_{β_s} auquel a n'appartint pas, alors a serait commun aux W_s, c'est-à-dire que sa distance à G serait $\leq \varrho_s + \frac{1}{s}$ pour toute valeur de s et comme G est fermé, a appartiendrait à G, et par suite à F_{β_s}. Ainsi l'ensemble singulier F_α de $f_\alpha(z)$ appartient à tous les F_{β_n} et par suite à tous les F_β pour lesquels $\beta < \alpha$.

Nous avons observé que E_γ est disjoint des F_β de rangs compris entre γ et α. Donc E_γ est disjoint de F_α, si $\gamma < \alpha$. Il en résulte que $f_\alpha(z)$ est holomorphe sur σ_α; on a observé plus haut qu'elle est nulle à l'infini.

Puisque σ_α appartient à F, $f_0(z)$ est singulier sur σ_α, donc $f_0(z) - f_\alpha(z)$ est singulier sur σ_α et par suite aussi sur $\bar{\sigma}_\alpha$. Il nous reste à montrer que tout point singulier de cette différence appartient à $\bar{\sigma}_\alpha$. Or

$$f_0(z) - f_\alpha(z) = [f_0(z) - f_{\beta_s}(z)] - R_s(z) - h_s(z).$$

Le crochet a $\bar{\sigma}_{\beta_s}$ pour ensemble singulier, $R_s(z)$ a ses pôles sur G et $h_s(z)$ ne peut être singulier que sur W_s. Le premier membre ne peut donc être singulier que sur

$$\bar{\sigma}_{\beta_s} + G + W_s$$

qui appartient à $\bar{\sigma}_\alpha + W_s$. L'ensemble singulier de $f_0(z) - f_\alpha(z)$ est indépendant de s, il appartient donc à l'ensemble commun aux ensembles $\bar{\sigma}_\alpha + W_1$, $\bar{\sigma}_\alpha + W_2, \ldots$, donc à $\bar{\sigma}_\alpha + G$ puisque G est l'ensemble commun aux W_s. Enfin puisque G

appartient à σ_α, il est bien établi que l'ensemble singulier de $f_0(z) - f_\alpha(z)$ est exactement $\bar{\sigma}_\alpha$. Finalement nous avons établi dans tous les cas, que α a la propriété P.

Il en résulte, puisque le nombre 2 a la propriété P, que celle-ci appartient à tous les nombres ordinaux de la première ou de la seconde classe.

Utilisation de la seconde propriété de la catégorie $\mathfrak{T}$. Les diverses catégories $\mathfrak{T}$ citées plus haut consistent toutes en familles de sous-ensembles E d'ensembles F plans bornés et fermés tels que E soit la somme de sous-ensembles I de F chacun *isolé* dans F. S'il en est ainsi, tout point a de E appartenant nécessairement à l'un des I est à une distance positive de $F-I$ et par suite aussi à une distance positive de $F-E$. Nous allons maintenant faire entrer en ligne de compte cette seconde propriété de la catégorie $\mathfrak{T}$: si un sous-ensemble E de F appartient à $\mathfrak{T}$, chaque point de E est à distance positive de $F-E$; autrement dit: E est disjoint de l'ensemble de fermeture $(\overline{F-E})$.

Sous l'hypothèse simple formulée maintenant, démontrons, d'abord, qu'il existe toujours un rang ordinal de la première ou de la seconde classe à partir duquel les E_α sont vides. En effet, dans le cas contraire, il y aurait au moins un point a_α dans chaque E_α. Comme les E_α sont tous disjoints, ces points a_α sont distincts. Soit N l'ensemble des a_α: cet ensemble ne serait pas dénombrable. Or il y a une distance positive δ_α de a_α à $F_\alpha - E_\alpha$. C'est dans ce dernier ensemble que sont contenus les E_β pour $\beta > \alpha$ et, par conséquent, il y a une distance positive $\geq \delta_\alpha$ de a_α à tous les E_β pour $\beta > \alpha$. Un cercle C_α de centre a_α et de rayon inférieur à la distance δ_α ne contiendra aucun des points a_β d'indice $> \alpha$. S'il contient des points de N, ce seront des points d'indice $\leq \alpha$. Or l'ensemble des indices $\leq \alpha$ est dénombrable, donc tout point de N est un point de non-condensation de N. Il en résulte que N est dénombrable: ce qui nous fournit la contradiction annoncée.

Les fonctions $f_\alpha(z)$, les ensembles F_α, E_α sont déterminés pour chaque nombre ordinal α de la 1ère ou de la 2de classe. Si l'un des E_β est vide, les suivants sont vides; soit E_α le premier des E_β qui sont vides. Posons

$$f_0(z) = f_\alpha(z) + p_\alpha(z);$$

$f_\alpha(z)$ et $p_\alpha(z)$ sont holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, $f_\alpha(z)$ et par suite $p_\alpha(z)$ sont nuls à l'infini. Enfin, l'ensemble singulier de $f_\alpha(z)$ ne comprend aucun ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$, tandis que l'ensemble singulier de $p_\alpha(z)$ est l'ensemble de fermeture d'un certain ensemble σ_α sur lequel $f_\alpha(z)$ est holomorphe et $f_0(z)$ singulier.

Comme $f(z) = f_0(z) + E(z)$, on a

$$f(z) = P(z) + Q(z)$$

en posant $P(z) = f_\alpha(z) + E(z)$; $Q(z) = p_\alpha(z)$ et alors $P(z)$ et $Q(z)$ sont tous deux holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, l'ensemble singulier de $P(z)$ ne contient aucun ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$ et il existe un ensemble σ_α, somme d'une suite dénombrable d'ensembles disjoints appartenant chacun à la catégorie $\mathfrak{T}$, cette somme σ_α étant telle que $P(z)$ soit holomorphe sur σ_α et que $Q(z)$ ait exactement $\bar{\sigma}_\alpha$ pour ensemble singulier. En outre, on peut supposer que l'une au moins des deux fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ soit nulle à l'infini, soit en ajoutant comme plus haut $E(z)$ à $f_\alpha(z)$, soit en l'ajoutant à $p_\alpha(z)$.

En résumé

soit $\mathfrak{T}$ une certaine catégorie de sous-ensembles E d'ensembles plans fermés et bornés F;

chaque sous-ensemble E, non vide, d'un ensemble borné et fermé F étant, quand il appartient à la catégorie $\mathfrak{T}$, disjoint de l'ensemble de fermeture $\overline{(F-E)}$;

et toute fonction uniforme $f(z)$ dont F est l'ensemble singulier pouvant être, par définition de $\mathfrak{T}$, représentée sous la forme

$$f(z) = P_0(z) + Q_0(z)$$

où les deux fonctions $P_0(z)$ et $Q_0(z)$ sont holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, où $P_0(z)$ est, en outre, holomorphe sur E et où $Q_0(z)$ est nul à l'infini et a exactement $\bar{E}$ pour ensemble singulier.

Alors, il est aussi possible de représenter $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = P(z) + Q(z)$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, où l'une, au choix, de ces fonctions est nulle à l'infini, où l'ensemble singulier de $P(z)$ ne contient aucun sous-ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$, où l'ensemble singulier $\bar{\sigma}$ de $Q(z)$ est l'ensemble de fermeture $\sigma + \sigma'$ de la somme σ d'une certaine suite dénombrable d'ensembles disjoints E_γ d'indices finis ou transfinis, chacun d'eux, E_β, étant le sous-ensemble appartenant à la catégorie $\mathfrak{T}$ d'un certain ensemble F_β disjoint de la somme des E_γ d'indices $<\beta$, compris dans les F_γ d'indices $<\beta$ et comprenant aussi les F_γ d'indices $>\beta$.

Considérons en particulier le cas où E est la somme des sous-ensembles I de F qui sont des continus chacun isolé dans F. Il est d'ailleurs clair que si l'on en considère deux qui ont un point commun, ils sont identiques, et que dans le cas contraire ils seront à distance positive l'un de l'autre (en continuant à supposer F borné et fermé). Il est clair, en outre, que les ensembles I seront aussi tous des sous-ensembles continus isolés de $\bar{E}$.

Alors d'après le théorème de la page 61, les deux propriétés d'une catégorie $\mathfrak{T}$ qui viennent d'être utilisées appartiennent à la catégorie $\mathfrak{T}$ des sous-ensembles E des ensembles fermés F telle que E soit la somme des continus isolés de F. De sorte que nous pouvons particulariser ainsi le théorème précédent:

Soit E la somme des continus singuliers isolés d'une fonction uniforme $f(z)$ dont l'ensemble singulier F est borné:

la fonction $f(z)$ peut être représentée comme la somme

$$f(z) = P(z) + Q(z)$$

de deux fonctions holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, où l'une, au choix, de ces fonctions est nulle à l'infini, où l'ensemble singulier de $P(z)$ ne contient aucun continu isolé et où l'ensemble singulier $\bar{\sigma}$ de $Q(z)$ est l'ensemble de fermeture $\sigma+\sigma'$ de la somme σ d'une certaine suite dénombrable et bien ordonnée de continus singuliers I_γ de $f(z)$, chacun des I_γ étant à distance positive de la somme de ceux qui sont d'un rang supérieur à γ, et cette suite commençant par celle des continus singuliers isolés de $f(z)$.

Remarque. Nous n'énoncerons pas les applications analogues aux autres catégories $\mathfrak{T}$ que nous avons citées parce que celles-ci possèdent une troisième propriété que nous allons énoncer et qui nous permettra d'obtenir un résultat plus complet.

Utilisation d'une troisième propriété de certaines catégories $\mathfrak{T}$. — Nous allons maintenant nous restreindre à la considération des catégories $\mathfrak{T}$, satisfaisant non seulement aux deux propriétés des pages 63, 70, mais encore à la suivante (où nous utilisons les notations de la page 63):

s'il y a un ensemble E^* de la catégorie $\mathfrak{T}$ dans l'ensemble fermé F^* des points singuliers de f^*, alors E^* (qui est disjoint de E) appartient à E'.

(Nous avons reconnu (pages 56 et 62) cette propriété en particulier dans les cas où E, sous-ensemble d'un ensemble fermé F, appartient à la catégorie $(\mathfrak{T})$: soit quand E est formé de l'ensemble, s'il existe, des points isolés de F, soit quand $E = F - \ddot{C}$, C étant la somme des sous-ensembles continus de F s'il en existe.)

Si cette propriété est satisfaite, nous voyons que $(\overline{E + E^*})$ appartient à $\bar{\bar{E}}$.

Alors, en employant les notations de la page 65, on voit que $\bar{\sigma}_1 \equiv \bar{E}_0 \equiv \bar{E}$ et que $\bar{\sigma}_2 \equiv (\overline{E_0} + \overline{E_1})$ appartient à $\bar{E}$.

Dès lors, aux conditions imposées au nombre β, page 64, pour que β possède la propriété P, nous aurions pu adjoindre la suivante: E_γ appartient à $\bar{E}$ pour $\gamma < \beta$; nous aurions obtenu une propriété P^* plus précise qui n'aurait pas cessé d'être vérifiée au moins pour $\beta = 2$. Montrons que tous les nombres ordinaux de première et de seconde classe possèdent aussi la propriété P^*. D'abord, ils posséderont la propriété P. Remarquons en outre que, si β possède la propriété P^*, on a pour $\gamma < \beta$, $E_\gamma < \bar{E}$, donc $\bar{\sigma}_\beta < \bar{E}$. Ceci étant, supposons qu'il existe un nombre ν qui n'admette pas la propriété P^*. Alors, soit δ le premier des nombres tels que ν.

Si δ est de première espèce, il existe un nombre $\delta - 1$ et on a

$$f_{\delta-1}(z) = f_\delta(z) + P_\delta(z)$$

et d'après la propriété P^*, E_δ sera compris dans l'ensemble $E'_{\delta-1}$. Or, par définition de δ, $E_{\delta-1}$ appartient à $\bar{E}$ donc $E_\delta < E'_{\delta-1} < \bar{E}$ et δ posséderait la propriété P*.

Si δ est de seconde espèce, E_δ est l'ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$ appartenant à l'ensemble singulier F_δ de f_δ. Or on a vu que si l'on pose

$$f_0(z) = f_\delta(z) + p_\delta(z)$$

$p_\delta(z)$ a pour ensemble singulier $\bar{\sigma}_\delta$, et $f_\delta(z)$ est holomorphe sur σ_δ. Puisque $\sigma_\delta = \sum_{\gamma<\delta} E_\gamma$, alors, par définition de δ, σ_δ appartient à $\bar{E}$, donc $\bar{\sigma}_\delta$ appartient aussi à $\bar{E}$. D'autre part: σ_δ comprend $E_0 = E$ donc $\bar{\sigma}_\delta$ comprend $\bar{E}$. Finalement $\bar{\sigma}_\delta = \bar{E}$.

Ainsi la décomposition

$$f_0(z) = f_\delta(z) + p_\delta(z)$$

est telle que $f_\delta(z)$ et $p_\delta(z)$ soient holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, que $p_\delta(z)$ ait exactement $\overline{E}$ pour ensemble singulier et que $f_\delta(z)$ (holomorphe sur $\sigma_\delta > E$) soit holomorphe sur E. Par suite en vertu de la troisième propriété admise pour la catégorie $\mathfrak{T}$ (propriété indépendante par hypothèse de l'origine de la décomposition de $f(z)$) E_δ appartiendra à $\overline{E}$. Donc δ posséderait encore la propriété P^*.

Ainsi il n'y a aucun E_δ qui n'appartienne pas à $\overline{E}$; alors α étant encore le premier des indices γ des E_γ qui sont vides, σ_α et par suite $\bar{\sigma}_\alpha$ appartient à $\overline{E}$ et comme σ_α contient E, $\bar{\sigma}_\alpha$ est identique à $\overline{E}$.

Finalement, on voit qu'on peut compléter le théorème de la page 71 et lui donner la forme suivante:

Convenons de dire qu'un sous-ensemble E d'un ensemble borné et fermé F appartient à la catégorie $\mathfrak{T}$ s'il jouit des trois propriétés suivantes:

I. E est disjoint de l'ensemble de fermeture $(\overline{F-E})$.

II. toute fonction uniforme $f(z)$ dont F est l'ensemble singulier peut être représentée sous la forme

$$f(z) = f^*(z) + Q_0(z) \tag{1}$$

de la somme de deux fonctions holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, la première holomorphe sur E, la seconde nulle à l'infini et ayant exactement $\overline{E}$ pour ensemble singulier.

III. s'il y a un ensemble E^* de la catégorie $\mathfrak{T}$ dans l'ensemble fermé F^* des points singuliers de $f^*(z)$, alors E^* (qui est disjoint de E) appartient à E'.

Nous venons de démontrer que pour de telles catégories $\mathfrak{T}$: parmi toutes les représentations possibles de $f(z)$ de la forme (1), il en existe au moins une où $f^*(z)$, $Q_0(z)$ possédant les propriétés du § II ci-dessus, l'ensemble singulier de $f^*(z)$ ne contient aucun sous-ensemble de la catégorie $\mathfrak{T}$.

Nous avons indiqué deux catégories $\mathfrak{T}$ particulières auxquelles ce théorème s'applique.

Si, au contraire, on considère la catégorie $\mathfrak{T}$ des sous-ensembles E de F qui sont chacun somme des continus isolés de F, non seulement la démonstration précédente ne s'y applique pas, mais l'énoncé non plus ne peut s'y étendre. Il n'est pas exact, autrement dit, que si E désigne la somme des continus singuliers isolés de $f(z)$, on puisse représenter $f(z)$ comme la somme de deux fonctions holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, la première f^* dont l'ensemble singulier est disjoint de E et ne contient aucun continu isolé, l'autre $Q_0(z)$ ayant exactement $\bar{E}$ pour ensemble singulier.

Considérons par exemple le cas où $f(z)$ a un ensemble singulier F constitué des segments, $I_0, I_1, I_3 \ldots . I_{2n-1} \ldots$ à savoir: $-1 \leq x \leq 0$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n-1}, \ldots$

Alors $E = I_1 + I_3 + \cdots + I_{2n-1} + \cdots$; $\bar{E} = E +$ (le point $x = 0$). Donc $Q_0(z)$ serait holomorphe sur I_0, sauf pour $x = 0$; par suite $f^*(z) = f(z) - Q_0(z)$ serait singulier sur I_0. Comme, d'autre part, $f^*(z)$ est holomorphe sur E, l'ensemble singulier de $f^*(z)$ se réduirait à I_0, c'est-à-dire à un continu isolé, contrairement à l'hypothèse.

Par contre, il est possible que la propriété reconnue page 56, permette de remplacer dans une certaine mesure la propriété III et d'obtenir un théorème, non équivalent, mais analogue à celui de la page 74.

Considérons maintenant successivement, puis simultanément, les deux catégories $\mathfrak{T}$ auxquelles le théorème précédent s'applique.

Applications du précédent théorème.

Première application. — En appliquant à la première catégorie $\mathfrak{T}$:

toute fonction uniforme $f(z)$ dont l'ensemble singulier F est borné sans être parfait est la somme

$$f(z) = P(z) + Q(z)$$

de deux fonctions holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, l'une d'elle (au choix) étant nulle à l'infini, l'ensemble singulier de la seconde, $Q(z)$, étant l'ensemble de fermeture $\bar{E}$ de l'ensemble E des points singuliers isolés de $f(z)$, l'ensemble singulier P de la première, $P(z)$, étant parfait.

Nous n'avons pas introduit dans cet énoncé l'affirmation, pourtant établie plus haut, que $P(z)$ est holomorphe sur E. En effet, de cet énoncé même il résulte que tout point de P appartient à F et est point de condensation de F (puisque P est parfait). Il résulte donc de cet énoncé que $P(z)$ *est holomorphe*, non seulement sur l'ensemble E des points isolés de F, mais même *sur l'ensemble N des points de non-condensation de F.* Et cet ensemble N comprend nécessairement E.

Si, dans l'énoncé ci-dessus, on remplaçait l'assertion que P est parfait par l'affirmation que P est disjoint de E, on obtiendrait l'énoncé de Mittag-Leffler. Notre théorème apporte donc au théorème de Mittag-Leffler deux compléments, de natures très différentes. Il montre, d'une part, qu'on peut choisir la décomposition de façon que l'ensemble singulier P de $P(z)$ soit, en général, plus petit que celui prévu par Mittag-Leffler, c'est-à-dire qu'il soit contenu non seulement dans $F-E$ mais même dans $F-N$.

Le second complément a une portée beaucoup plus grande en ce sens qu'il donne une solution à un problème important auquel l'énoncé de Mittag-Leffler n'apportait aucune lumière, et qu'au reste, Mittag-Leffler n'avait sans doute même pas songé à aborder, du moins par cette voie.

Réduction de l'étude de la fonction uniforme la plus générale. — L'énoncé du théorème de Mittag-Leffler fournissait une décomposition de la fonction uniforme la plus générale $f(z)$ en une somme de deux fonctions. La première $P(z)$ avait un ensemble singulier en général plus petit que celui de $f(z)$, mais qui pouvait être tout aussi complexe, qui pouvait en particulier posséder, tout comme F, des points singuliers isolés.

Au contraire, nous voyons que *notre énoncé permet de réduire l'étude de la fonction uniforme le plus générale à l'étude de deux types de fonctions uniformes* dont aucun n'est le plus général possible. Il suffit, grâce à notre énoncé, d'étudier *soient les fonctions dont l'ensemble singulier est parfait, soient les fonctions dont l'ensemble singulier est l'ensemble de fermeture* $\overline{E}=E+E'$ *d'un ensemble isolé* E. Nous entendons ici par ensemble isolé un ensemble dont tous les points sont isolés. Un ensemble fermé n'étant pas nécessairement parfait, il est clair que le premier type de fonctions uniformes n'est pas le plus général possible. Pour montrer qu'il en est de même du second type, il suffit de faire voir qu'un ensemble fermé, H, n'est pas en général l'ensemble de fermeture $\overline{E}$ d'un ensemble isolé E. Or il est clair que l'ensemble des points isolés de $\overline{E}$ est précisément E. De sorte que l'ensemble $\overline{E}$ contient nécessairement des points singuliers isolés. Et d'autre part, un ensemble fermé H, contenant des points isolés, ne se réduit pas en général à l'ensemble de fermeture de ses points isolés, il peut, par exemple, contenir des continus isolés. L'ensemble E s'il peut contenir des continus ne peut en contenir qui soient isolés dans $\overline{E}$.

La réalité de la réduction opérée étant établie, nous montrerons qu'il peut en être effectuée, soit d'une toute autre nature, soit d'une façon plus complète.

Seconde application. — En appliquant la proposition de la page 74 à la seconde catégorie $\mathfrak{T}$, on obtient la proposition suivante:

toute fonction uniforme $f(z)$ dont l'ensemble singulier F est borné est la somme

$$f(z) = A(z) + C(z)$$

de deux fonctions holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe (dont l'une, au choix, est nulle à l'infini) et dont les ensembles singuliers sont, le premier l'ensemble de fermeture $\bar{A}$ de l'ensemble $A = F - \bar{C}$, où C est la somme de tous les continus singuliers de $f(z)$, le second l'ensemble de fermeture $\bar{c} = c + c'$ de la somme c de certains continus singuliers de $f(z)$.

Ce second ensemble $\bar{c}$ est évidemment parfait.

On voit facilement que pour que le premier ensemble singulier $\bar{A}$ soit parfait, il faut et il suffit que F soit parfait.

Il est important de donner des propriétés de $A(z)$ et $C(z)$ indépendantes de la fonction $f(z)$ et de son ensemble singulier F.

En ce qui concerne $C(z)$; appelons c_1 la somme de *tous* ses continus singuliers. On aura $c < c_1 < \bar{c}$; d'où: $\bar{c} < \bar{c}_1 < \bar{c}$ et par suite $\bar{c}_1 = \bar{c}$. Ainsi $C(z)$ *est une fonction uniforme dont l'ensemble singulier est exclusivement formé de l'ensemble de fermeture* $\bar{c}_1$ *de l'ensemble* c_1 *de ses propres continus singuliers.*

Pour caractériser $A(z)$, rappelons que son ensemble singulier $\bar{A}$ est déduit de $A = F - \bar{C}$. Soit alors Γ la somme des continus singuliers, s'il en existe, de $\bar{A}$ et formons $B = \bar{A} - \bar{\Gamma}$. On a $\Gamma < C$, donc $\bar{\Gamma} < \bar{C}$ et $\bar{A} < F$. Il est clair que $A = \bar{A} - \bar{C}$. Mais puisque $\bar{\Gamma} < \bar{C}$, $\bar{A} - \bar{\Gamma} > \bar{A} - \bar{C}$ et par suite $B > A$[1]. Des relations $B = \bar{A} - \bar{\Gamma}$ et $B > A$, on tire $A < B < \bar{A}$. D'où $\bar{A} < \bar{B} < \bar{A}$ et finalement $\bar{A} = \bar{B}$. De sorte que $\bar{A}$ est du type suivant: c'est l'ensemble de fermeture $\bar{B} = \bar{A}$ de l'ensemble B obtenu en retranchant de $\bar{A}$ l'ensemble de fermeture $\bar{\Gamma}$ de la somme Γ des sous-ensembles continus de $\bar{A}$.

On peut encore décrire $\bar{A}$ de la façon suivante. Observons que tout point a de B est le centre d'un cercle ne contenant aucun point de $\bar{\Gamma}$. L'ensemble de fermeture de l'ensemble des points de B appartenant à ce cercle appartiendra

---

[1] B peut effectivement comprendre d'autres points que ceux de A. Prenons par exemple pour F l'ensemble fermé composé des segments $(-1 \leq x \leq 0)$ et de la suite N des points $x = \frac{1}{n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Alors B est formé de A et de l'origine.

à $\bar{A}$ sans contenir un seul point de $\bar{\Gamma}$, il ne contiendra donc aucun continu. Appelons *ensemble ponctuellement discontinu* tout ensemble G tel que chacun de ses points soit le centre d'un cercle tel que l'ensemble de fermeture des points communs à G et à l'intérieur de ce cercle ne contienne aucun continu. Alors B est un ensemble ponctuellement discontinu et $\bar{B}=\bar{A}$ est l'ensemble de fermeture d'un ensemble ponctuellement discontinu.

Inversement, tout ensemble de fermeture $\bar{G}$ d'un ensemble ponctuellement discontinu G peut être engendré de la même façon que $\bar{A}$. Prenons pour F l'ensemble $\bar{G}$ qui est fermé et soit C la somme de ses continus et $A=F-\bar{C}$. Tout point a de G est centre d'un cercle tel que l'ensemble de fermeture de l'ensemble des points communs à G et à l'intérieur de ce cercle ne contienne aucun continu. Or cet ensemble de fermeture est, à l'intérieur du cercle, identique à l'ensemble commun à $\bar{G}=F$ et à l'intérieur du cercle. Donc a n'appartient pas à $\bar{C}$, a appartient à A. Ainsi G appartient à A. Alors $G<A<\bar{G}$, d'où $\bar{A}=\bar{G}$.

En résumé, *$A(z)$ est une fonction uniforme dont l'ensemble singulier est l'ensemble de fermeture d'un ensemble ponctuellement discontinu.*

Il faut d'ailleurs observer qu'un tel ensemble $\bar{A}$ peut contenir des continus. Mais il appartient néanmoins à une catégorie particulière. Par exemple, il est clair qu'il ne peut contenir de continus isolés.

Finalement, nous voyons que

toute fonction uniforme $f(z)$ dont l'ensemble singulier F est borné peut être représentée comme la somme

$$f(z) = A(z) + C(z)$$

de deux fonctions holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, l'une d'elles (au choix) nulle à l'infini, leurs ensembles singuliers étant les ensembles de fermeture: $\bar{A}$ d'un ensemble A ponctuellement discontinu, l'autre $\bar{C}$ d'une somme de continus. Observons que $\bar{A}$ peut présenter des points isolés lorsque F en présente et dans ce cas seulement.

Troisième application. Nous pouvons maintenant combiner les deux applications précédentes en effectuant la seconde application non pas sur la fonction $f(z)$ la plus générale, mais sur une fonction $P(z)$ dont l'ensemble singulier est parfait.

Toute fonction uniforme $f(z)$ dont l'ensemble singulier F est borné peut être *représentée comme la somme*

$$f(z) = Q(z) + \alpha(z) + \gamma(z)$$

de trois fonctions holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe, dont l'une (au choix) est nulle à l'infini et dont les ensembles singuliers appartiennent à trois types dont aucun n'est l'ensemble singulier le plus général possible. Ces ensembles singuliers sont les ensembles de fermeture respectifs de trois ensembles disjoints:

un ensemble isolé,
un ensemble ponctuellement discontinu dense en soi,
une somme de continus.

Les deux derniers ensembles singuliers sont parfaits[1]; le premier, s'il n'est pas vide, ne l'est pas. Un ou deux des termes de la somme peuvent éventuellement être nuls.

Nouvelle réduction. On pourrait d'ailleurs effectuer une nouvelle réduction en appliquant la réduction précédente, non pas à $f(z)$, mais à la différence entre $f(z)$ et une fonction $\psi(z)$ égale à $f(z)$ en tout point, s'il en existe, intérieur à l'ensemble singulier de $f(z)$ et nulle en dehors. On aura alors

$$f(z) = \psi(z) + Q_1(z) + \alpha_1(z) + \gamma_1(z)$$

où $Q_1(z)$, $\alpha_1(z)$, $\gamma_1(z)$ ont des ensembles singuliers de même nature que ceux de $Q(z)$, $\alpha(z)$, $\gamma(z)$, mais sans aires singulières et où $\psi(z)$ est une fonction nulle en tout point qui n'appartient pas à une aire singulière.

---

[1] L'ensemble singulier de $\alpha(z)$ est l'ensemble de fermeture d'un ensemble A partout discontinu. Il ne faudrait pas en conclure que cet ensemble singulier est nécessairement lui-même partout discontinu.