ÜBER DIE WERTEVERTEILUNG DER RIEMANNSCHEN ZETAFUNKTION.

VON

HARALD BOHR und BÖRGE JESSEN

in KOPENHAGEN.

(Erste Mitteilung. Das Verhalten der Funktion in der Halbebene $\sigma > 1$.)

Inhaltsübersicht.

Einleitung.[1]

Die RIEMANNsche Zetafunktion $\zeta(s)$ ist eine in der ganzen Ebene der komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ definierte eindeutige Funktion, die bis auf den einen Pol $s = 1$ erster Ordnung regulär ist. In der Halbebene $\sigma > 1$ ist die Funktion durch die beiden gleichwertigen Darstellungen

---

[1] Eine programmässige Skizze der Untersuchungen, die jetzt genau ausgeführt werden, ist in einem Vortrag von H. BOHR: Über diophantische Approximationen und ihre Anwendungen auf Dirichletsche Reihen, besonders auf die Riemannsche Zetafunktion, Fünfter skandinavischer Mathematikerkongres, Helsingfors 1922, gegeben worden.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}} \tag{1}$$

bestimmt, wo in der zweiten (der EULERschen Produktdarstellung) p_n die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots$ durchläuft. Aus dieser Produktdarstellung geht sofort hervor, dass $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ von Null verschieden ist.

Die Zetafunktion genügt — wie RIEMANN gezeigt hat — einer einfachen Funktionalgleichung, welche die Werte der Funktion in den beiden Punkten s und $1-s$ miteinander verbindet. Diese Punkte liegen symmetrisch zu $s = \frac{1}{2}$; man pflegt daher die Funktion nur in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ zu studieren. Die berühmte, unbewiesene RIEMANNsche Vermutung über die Nullstellen von $\zeta(s)$ besagt, dass alle dieser Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ angehörigen Nullstellen auf der Begrenzungsgeraden $\sigma = \frac{1}{2}$ der Halbebene liegen, dass also $\zeta(s)$ nicht nur in $\sigma > 1$ sondern sogar in der grösseren Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ von Null verschieden ist. Im folgenden studieren wir die Verhältnisse nur in dieser offenen Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$, nicht aber auf der Begrenzungsgeraden $\sigma = \frac{1}{2}$.

Die Resultate, die hergeleitet werden sollen, sind für die betrachteten Fragen von relativ abschliessender Natur und stellen das beste dar, was wir mit den benutzten Methoden beweisen können. Es sei jedoch schon hier gesagt, dass sie über die RIEMANNsche Vermutung nichts Neues aussagt.

Um die EULERsche Produktdarstellung bequem ausnützen zu können werden wir statt $\zeta(s)$ selber lieber die Funktion $\log \zeta(s)$ betrachten. In der Halbebene $\sigma > 1$ ist ein eindeutiger regulärer Zweig dieser Funktion, nämlich derjenige dessen Werte auf der reellen Achse reel sind, durch den Ausdruck

$$\log \zeta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-s}) \tag{2}$$

gegeben, wo auf der rechten Seite $\log u$ den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet. Soll aber $\log \zeta(s)$ bis zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ untersucht werden, so müssen wir uns die Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ zuerst aufgeschnitten denken, sowohl längs einer Linie, die den Pol $s = 1$ mit der Begrenzungsgeraden $\sigma = \frac{1}{2}$ verbindet, wie auch — wenn es Nullstellen von $\zeta(s)$ rechts von $\sigma = \frac{1}{2}$ geben sollte — längs Linien, welche von diesen Nullstellen zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ hinführen. Unter $\log \zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ soll im folgenden die Funktion verstanden werden, die man erhält, wenn man die Schnitte immer als horizontale Strecken wählt.

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Reihe (2) in der Halbebene $\sigma > 1 + \varepsilon$ gleichmässig konvergent und stellt $\log \zeta(s)$ dar; auch für $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$ kann aber (2) zur Darstellung von $\log \zeta(s)$ benutzt werden; für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert nämlich die Reihe in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$ im Mittel gegen $\log \zeta(s)$, sogar gleichmässig in σ. Diese Ausdrücke sollen in der zweiten Mitteilung erklärt werden. Vorläufig betrachten wir nur die Halbebene $\sigma > 1$. Die Resultate, die wir gewinnen werden, sollen dann in der zweiten Mitteilung, im wesentlichen durch denselben Beweisgang aber unter Heranziehung schwierigerer Hilfsmittel, für die grössere Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ hergeleitet werden.

Die Untersuchung zerfällt in jeder der beiden Mitteilungen in zwei Teile: *In dem ersten Teil* handelt es sich von dem Verhalten von $\log \zeta(s)$ *auf einer vertikalen Geraden* $\sigma = \sigma_0$, d. h. von der Betrachtung derjenigen Punktmenge in der komplexen Ebene, die der Punkt $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ für $-\infty < t < +\infty$ beschreibt. Früher hat man im Wesentlichen nur die abgeschlossene Hülle dieser Menge bestimmt, d. h. die Menge aller Punkte welche $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ für $-\infty < t < +\infty$ beliebig nahe kommt. In der vorliegenden Untersuchung tritt ein neues Element hinzu; es wird nun auch nach der *Wahrscheinlichkeit* gefragt mit der $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ in der Nähe dieser Punkte kommt.[1] Dass eine solche Wahrscheinlichkeit erklärt

[1] In einer groberen Ausführung kommt dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff schon in den folgenden Arbeiten vor: H. BOHR und R. COURANT, Neue Anwendungen der Theorie der diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion. Journ. f. Math. Bd. 144 (1914). S. 249—274. H. BOHR, Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen. Acta math. Bd. 40 (1915). S. 67—100. Der Leser braucht übrigens die zitierten Arbeiten nicht zu kennen.

werden kann sagt der folgende Satz aus, dessen Beweis das wesentlichste Ziel des ersten Teiles bildet:

Erster Hauptsatz. *Es gibt in der komplexen $z = u + iv$-Ebene eine reelle, beschränkte, stetige, nirgends negative Funktion $F(z)$ von der folgenden Beschaffenheit; ist $R\,(u_1 < u < u_2,\ v_1 < v < v_2)$ ein beliebiges parallel zu den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck, und bezeichnet man mit $L(T)$ die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $-T < t < T$, in denen $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ in R liegt, so konvergiert mit unbegrenzt wachsendem T der Quotient $\frac{L(T)}{2T}$ gegen das über R erstreckte Integral der Funktion $F(z)$:*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} = \iint_R F(z)\,du\,dv.$$

Im zweiten Teil wird das Verhalten von $\log \zeta(s)$ *in einem vertikalen Streifen* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ untersucht. Es handelt sich hier von den Werten, die $\log \zeta(s)$ *wirklich annimmt.* Früher hat man die Menge dieser Werte bestimmt; jetzt wird auch nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit der ein Wert im Streifen angenommen wird; es wird der folgende Satz bewiesen:

Zweiter Hauptsatz. *Es sei a ein Wert, der von $\log \zeta(s)$ in $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ angenommen wird, und es bezeichne $N_a(T)$ die Anzahl der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) a-Punkte von $\log \zeta(s)$ im Rechteck $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-T < t < T$; dann konvergiert für $T \to \infty$ der Quotient $\frac{N_a(T)}{2T}$ gegen eine endliche, positive Zahl.*

In dieser Richtung waren bisher nur die Ungleichungen

$$0 < \varliminf_{T \to \infty} \frac{N_a(T)}{2T}; \quad \varlimsup_{T \to \infty} \frac{N_a(T)}{2T} < +\infty$$

bekannt.[1]

Beim Beweis des zweiten Hauptsatzes müssen wir den ersten Hauptsatz benutzen.

---

[1] Für den Fall $1 < \sigma_1 < \sigma_2$ siehe S. Wennberg, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. (Dissertation, Uppsala 1920), S. 9; für den Fall $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ H. Bohr, loc. cit. (Fussnote S. 3) S. 72. Für den Fall $1 < \sigma_1 < \sigma_2$ geben wir übrigens im folgenden einen von dem Wennbergschen verschiedenen Beweis.

Erster Teil. Das Verhalten der Zetafunktion auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 (> 1)$.

§ 1. Excurs über die Methode.

a. Der KRONECKERsche Satz und der arithmetische Teil der Methode.

Auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 > 1$ wird $\log \zeta(s)$ als Funktion von t durch die gleichmässig konvergente Reihe

$$\log \zeta(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)}\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{-it \log p_n}\right)$$

dargestellt. Indem wir

$$-t \log p_n = 2\pi \mu_n(t)$$

setzen, können wir schreiben

$$\log \zeta(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi \mu_n(t)}\right). \tag{3}$$

Auf diese Reihe wenden wir eine arithmetisch-geometrische Methode an, die schon von BOHR in mehreren Arbeiten benutzt worden ist[1], und die darin besteht, dass man gleichzeitig mit (3) die Funktion

$$S(\theta_1, \theta_2, \ldots) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi \theta_n}\right) \tag{4}$$

der unendlich vielen Veränderlichen $\theta_1, \theta_2, \ldots$ betrachtet, die aus (3) entsteht, wenn man die von der einen Veränderlichen t abhängigen Grössen $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots$

---

[1] In dieser Beziehung (Untersuchungen über gleichmässig konvergente Reihen) ist besonders zu erwähnen: H. BOHR, Über die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$. Journ. f. Math. Bd. 141 (1912). S. 217—234. Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$. Gött. Nachr. Math.-phys. Klasse. 1913.

durch unabhängige (reelle) Variabeln ersetzt. Die Reihe (4) ist im ganzen Raum der Veränderlichen $\theta_1, \theta_2, \ldots$ gleichmässig konvergent; sie wird ja wie (3) durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 - p_n^{-\sigma_0})| = \sum_{n=1}^{\infty} (-\log(1 - p_n^{-\sigma_0}))$$

majorisiert; es genügt offenbar, wenn man $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ im Einheitswürfel $0 \leqq \theta_1 < 1, 0 \leqq \theta_2 < 1, \ldots$ betrachtet.

Gleichzeitig mit (3) und (4) wollen wir auch die Abschnitte

$$f_N(t) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\mu_n(t)})$$

und

$$S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n})$$

der beiden Reihen betrachten.

Der Zusammenhang zwischen $\log\zeta(\sigma_0 + it)$ und $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ bzw. zwischen $f_N(t)$ und $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, welcher zunächst nur ein rein formaler ist, bekommt nun einen realen Sinn, wenn man einen bekannten Satz von Kronecker über diophantische Approximationen in die Untersuchung hineinführt, dessen Bedeutung ist festzustellen, dass die Grössen $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots$, obwohl sie von einander abhängen, sich doch in manchen Beziehungen fast ganz so benehmen als wären sie von einander unabhängige Variabeln. Die genaue Formulierung des Satzes ist der folgende:

Kroneckerscher Satz[1]: *Es seien N reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ gegeben, die von einander linear unabhängig sind, d. h. es bestehe keine Relation $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_N\lambda_N = 0$ mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden c_n, und es sei t ein reeller Parameter. Es seien ferner $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem positiven ε mindestens einen Wert von t und dazu gehörige ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_N$, so dass die N Ungleichungen*

$$|t\lambda_n - \theta_n - g_n| < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

sämtlich erfüllt sind.

[1] Siehe für einen einfachen Beweis z. B. H. Bohr, Another Proof of Kronecker's Theorem. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 21 (1923), p. 315—316.

Eine andere Formulierung dieses Satzes ist die folgende:

Es seien die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ von einander linear unabhängig, und es bezeichne Q_N den Einheitswürfel $0 \leqq x_1 < 1, 0 \leqq x_2 < 1, \ldots, 0 \leqq x_N < 1$ im Raum der Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Ferner bezeichne A die Teilmenge von Q_N, die aus der Geraden

$$x_1 = t\lambda_1,\ x_2 = t\lambda_2,\ \ldots,\ x_N = t\lambda_N; \qquad -\infty < t < +\infty$$

entsteht, wenn man die Koordinaten ihrer Punkte mod. 1 reduziert. Dann liegt diese Punktmenge A in Q_N *überall dicht.*

Ausser diesen Satz wird im folgenden eine Verschärfung derselben, die man Weyl verdankt, eine wichtige Rolle spielen; dieser verschärfte Satz (den wir unten genau formulieren werden) besagt, dass die Menge A sogar in einem gewissen Sinn »*überall gleich dicht*» in Q_N verteilt ist.

Vorläufig begnügen wir uns damit an die Bedeutung des ursprünglichen Satzes für die Zetafunktion zu erinnern; seine Anwendung beruht darauf, dass für jeden Wert von N die Zahlen $\log p_1, \log p_2, \ldots, \log p_N$, wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen Zahl in Primfaktoren, linear unabhängig sind. Wir beweisen den

Satz I. *Es sei für jeden Wert von $\sigma_0\,(>1)$ mit $M(\sigma_0)$ die Menge der Werte bezeichnet, die $\log \zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, d. h. die Wertemenge der Funktion $\log \zeta(\sigma_0 + it)$; dann ist die Wertemenge der entsprechenden Funktion $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ von unendlich vielen Veränderlichen genau gleich der abgeschlossenen Hülle $\overline{M}(\sigma_0)$ von $M(\sigma_0)$, oder anders ausgedrückt: Es ist die Wertemenge von $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ abgeschlossen und die Werte von $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ liegen in ihr überall dicht.*

Beweis. Dass die Wertemenge von $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ abgeschlossen ist, ist in Satz II enthalten; wir beweisen deshalb hier nur, dass die Werte von $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ überall dicht in ihr liegen. — Wie schon bemerkt, sind für jeden Wert von N die Zahlen $\log p_1, \log p_2, \ldots, \log p_N$ und somit auch die Zahlen $-\frac{\log p_1}{2\pi}, -\frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, -\frac{\log p_N}{2\pi}$ von einander linear unabhängig. Die Menge der Punkte $(\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_N(t))$, wo man t das Intervall $-\infty < t < +\infty$ durchlaufen lässt und für jeden Wert von t die Koordinaten mod. 1 reduziert, bilden somit eine im N-dimensionalen Einheitswürfel Q_N überall dicht liegende Punktmenge. Nun ist aber die Funktion $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ in Q_N stetig; der Wertevorrat von $f_N(t)$ muss also im Wertevorrat dieser Funktion von N Veränderlichen überall dicht liegen. — Von hier aus beweist man nun den entsprechenden Satz für die Funktionen $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ und $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ einfach so: Es sei $\varepsilon > 0$ und die Werte von $\theta_1, \theta_2, \ldots$ beliebig gegeben; es soll ein Wert von t gefunden werden, so dass

$$|\log \zeta(\sigma_0 + it) - S(\theta_1, \theta_2, \ldots)| < \varepsilon$$

ist. Hierzu bestimmen wir zuerst N so gross, dass das Restglied

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\log(1 - p_n^{-\sigma_0})|$$

der gemeinsamen Majorante der Reihen (3) und (4) kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ausfällt, und danach für diesen Wert von N und die gegebenen Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ einen Wert von t so dass

$$|f_N(t) - S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist; dann genügt offenbar dieses t der gestellten Bedingung.

b. Der geometrische Teil der Methode; Addition unendlich vieler konvexen Kurven.

Wir stellen uns als Aufgabe die Bestimmung des Wertevorrats der Funktionen

$$S(\theta_1, \theta_2, \ldots) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n})$$

und

$$S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n}),$$

wenn die Variabeln θ_n unabhängig von einander die Intervalle $0 \leqq \theta_n < 1$ durchlaufen. Hierbei durchlaufen die Grössen $1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n}$ Kreise mit dem Mittelpunkt 1 und den Radien $r_n = p_n^{-\sigma_0}$. Wenn aber eine komplexe Zahl x_n einen Kreis $|x_n - 1| = r_n < 1$ durchläuft, so durchläuft $z_n = -\log x_n$ eine konvexe Kurve

ω_n, die den Nullpunkt im Innern enthält; der Winkel, den die Tangente an ω_n mit der Abszissenachse der z_n-Ebene bildet, ist nämlich infolge der konformen Abbildung gleich dem Winkel, den die Kreistangente mit dem Radiusvektor vom Nullpunkte aus in der x_n-Ebene bildet, und ändert sich daher monoton, wenn x_n den Kreis durchläuft. Die Kurve ω_n hat zwei auf einander senkrechte Symmetrieachsen, nämlich, wenn wir $z_n = u_n + i v_n$ schreiben, die beiden Geraden $v_n = 0$ und $u_n = -\log \sqrt{1 - r_n^2}$.

Die gestellte Aufgabe ist hiermit in eine rein geometrische überführt: Wenn die Punkte z_n unabhängig von einander konvexe Kurven durchlaufen, dann die Menge aller Summenpunkte $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ bzw. $\sum_{n=1}^{N} z_n$ zu bestimmen. Diese Aufgabe, die man als Addition von unendlich vielen bzw. von endlich vielen konvexen Kurven bezeichnen kann, kann für beliebige konvexe Kurven durch elementare Betrachtungen behandelt werden[1]; nimmt man die vorliegenden speziellen Umständen in Betracht so erhält man leicht den folgenden

Satz II. 1) *Es bildet der Wertevorrat* $\overline{M}(\sigma_0)$ *der Funktion* $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ *ein abgeschlossenes Gebiet in der* $z = u + iv$*-Ebene, mit den beiden auf einander senkrechten Symmetrieachsen* $v = 0$ *und* $u = -\sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt{1 - r_n^2}$, *das entweder von einer einzelnen geschlossenen konvexen Kurve* Y *begrenzt wird, oder aber von zwei geschlossenen konvexen Kurven* Y *und* I, *von denen* I *ganz im Inneren von* Y *verläuft; in beiden Fällen enthält* Y *den Nullpunkt im Inneren. Der erste Fall tritt für alle hinreichend nahe an* 1 *gelegene, der zweite für alle hinreichend grosse Werte von* σ_0 *ein.*

2) *In derselben Weise bildet für jeden Wert von* $N > 1$ *der Wertevorrat der Funktion* $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ *ein abgeschlossenes Gebiet mit den Symmetrieachsen* $v = 0$ *und* $u = -\sum_{n=1}^{N} \log \sqrt{1 - r_n^2}$, *das entweder von einer konvexen Kurve* Y_N *oder*

---

[1] H. BOHR, Om Addition af uendelig mange konvekse Kurver. Oversigt over D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forhandlinger, 1913, S. 349—374. H. BOHR og B. JESSEN, Om Sandsynligheds-fordelinger ved Addition af konvekse Kurver. D. K. D. Vidensk. Selsk. Skrifter. 8. Række XII, 3 (1929), S. 1—82. Der Leser braucht für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung diese Arbeiten nicht zu kennen; die Resultate die wir aus ihnen benutzen, sollen immer genau formuliert werden.

2—29643. *Acta mathematica.* 54. Imprimé le 11 février 1930.

von zwei konvexen Kurven Y_N und I_N begrenzt wird; Y_N verläuft ganz im Inneren von Y_{N+1}, I_{N+1} (falls sie existiert) ganz im Inneren von I_N.

3) *Für $N \to \infty$ konvergiert die Kurve Y_N gegen Y, die Kurve I_N gegen I, falls diese Kurve existiert. Gibt es keine Kurve I, wohl aber für jeden Wert von N eine Kurve I_N, so konvergiert für $N \to \infty$ diese Kurve gegen das Symmetriezentrum von $\overline{M}(\sigma_0)$, das wir dann wieder mit I bezeichnen; $\overline{M}(\sigma_0)$ heisst in diesem Fall, der für mindestens einen Wert von σ_0 vorkommt, ein ausgeartetes Ringgebiet. Als innere Punkte von $\overline{M}(\sigma_0)$ bezeichnen wir in allen Fällen nur die Punkte von $\overline{M}(\sigma_0)$, die nicht den Kurven Y und I angehören, auch dann wenn I zu einem Punkt ausartet.*

4) *Die Kurven Y und I variieren mit σ_0 stetig, und zwar verläuft für $\sigma_0' < \sigma_0''$ die Kurve $Y(\sigma_0'')$ ganz im Inneren der Kurve $Y(\sigma_0')$; bezeichnen wir mit Γ bzw. γ den grössten bzw. kleinsten Abstand zwischen dem Nullpunkt und einem Punkt von Y, so gilt $\lim\limits_{1 \leftarrow \sigma_0} \gamma = \infty$, $\lim\limits_{\sigma_0 \to \infty} \Gamma = 0$. Für hinreichend grosse Werte von σ_0 enthält I den Nullpunkt im Inneren.*

Wir haben diesen ausführlichen Satz nur zur Orientierung über den Charakter der Punktmenge $\overline{M}(\sigma_0)$ sowie über seine Variation mit σ_0 angeführt, werden ihn aber im folgenden nicht wesentlich brauchen. Für den Beweis der Hauptsätze genügt der folgende, in Satz II sehr speziell enthaltende, Hilfssatz, den wir aber auch unmittelbar beweisen können.

Hilfssatz 1. *Ist a eine ganz beliebige komplexe Zahl, so gibt es einen Wert von σ_0, der natürlich von a abhängt, so gross, dass die Menge $\overline{M}(\sigma_0)$ den Wert a nicht enthält; es hat also die Funktion $|\log \zeta(s) - a|$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ eine positive untere Grenze.*

Beweis. Ist a von Null verschieden, so wähle man σ_0 so gross, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 - p_n^{-\sigma_0})| < |a|$$

ist; ist dagegen a gleich Null, so wähle man σ_0 so gross, dass

$$\log(1 + 2^{-\sigma_0}) - \sum_{n=2}^{\infty} |\log(1 - p_n^{-\sigma_0})| > 0$$

ist.

c. Der Wertevorrat von $\log \zeta(s)$ in unendlicher Nähe einer Geraden $\sigma = \sigma_0 > 1$; der analytische Teil der Methode.[1]

Ausser den arithmetisch-geometrischen Untersuchungen kommt in der ursprünglichen BOHRschen Methode noch ein dritter, analytischer Teil vor, der sich aber nicht auf dem Verhalten *auf* einer vertikalen Geraden, sondern auf dem Verhalten *in unendlicher Nähe* einer solchen Geraden bezieht. Er besteht in dem Nachweis des folgenden Satzes.

Satz III. *Es sei $\sigma_0 > 1$ gegeben; dann machen die Werte, die* $\log \zeta(s)$ *in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$, d. h. die Werte, die sie in jedem Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ $(\delta < \sigma_0 - 1)$ um diese Gerade annimmt, genau der Punktmenge $\overline{M}(\sigma_0)$ aus.*

Wir erwähnen diesen Satz nicht nur, um die wahre Bedeutung der Mengen $\overline{M}(\sigma_0)$ für die Funktion deutlich hervortreten zu lassen, sondern auch weil man mit ihrer Hilfe eine unmittelbare Bestimmung des Wertevorrats von $\log \zeta(s)$ in einem beliebigen *Streifen* $(1 \leqq) \sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ bekommt. Ein Beweis des Satzes wird sich im zweiten Teil mit Hilfe allgemeiner Hilfssätze sehr leicht erbringen lassen.

§ 2. Verschärfung der Hilfsmittel.

a. Der KRONECKER-WEYLsche Satz.

Um zu einer genaueren Betrachtung der Wahrscheinlichkeit zu gelangen, mit der sich die Wertemenge $M(\sigma_0)$ von $\log \zeta(s)$ auf einer Geraden $\sigma = \sigma_0$ in ihrer abgeschlossenen Hülle $\overline{M}(\sigma_0)$ verteilt, müssen wir sowohl den arithmetischen als auch den geometrischen Teil der obigen Methode wesentlich verschärfen. Die Verschärfung des arithmetischen Teils der Methode geschieht durch Heranziehung des folgenden verschärften KRONECKERschen Satzes:

KRONECKER-WEYLscher Satz[2]**:** *Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ reelle, von einander linear unabhängige Zahlen und es bezeichne wie oben A die Teilmenge des N-dimensionalen*

---

[1] Kann übergangen werden.

[2] H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. Bd. 77 (1916). S. 313—352, S. 324. In dieser Arbeit wird gleichzeitig der KRONECKERsche Satz bewiesen und zwar durch eine Methode, die die Gleichdichtigkeit der Menge A in Evidenz setzt. Dieselbe Beweismethode zeigt sich von Wichtigkeit für die Behandlung anderer Probleme in der Theorie der Diophantischen Approximationen. Wenn es sich aber nur um den verallgemeinerten KRONECKERschen Satz handelt, kann man den Beweis mit Hilfe des KRONECKERschen Satzes selbst leicht erbringen (vgl. H. BOHR und R. COURANT, loc. cit. (Fussnote S. 3) S. 259).

Einheitswürfels Q_N: $0 \leqq x_1 < 1$, $0 \leqq x_2 < 1$, ..., $0 \leqq x_N < 1$, *die aus der Geraden*

$$(5) \qquad x_1 = t\lambda_1,\ x_2 = t\lambda_2, \ldots, x_N = t\lambda_N, \qquad -\infty < t < +\infty$$

entsteht, wenn wir die Koordinaten ihrer Punkte mod. 1 *reduzieren. Diese Menge* A *liegt dann im folgenden Sinne in* Q_N *überall gleich dicht: Es bedeute* Ω *eine beliebige im* JORDAN*schen Sinne messbare Teilmenge von* Q_N *mit dem (N-dimensionalen) Mass* $m\Omega$; *ferner bedeute* $G(T)$ *für jeden Wert von* T *die Menge derjenigen Werte von* t *im Intervalle* $-T < t < T$, *für welche der entsprechende Punkt von* A *der Menge* Ω *angehört, und es bezeichne* $m_i G(T)$ *bzw.* $m_y G(T)$ *das innere bzw. das äussere* JORDAN*sche Mass dieser (linearen) Punktmenge* $G(T)$. *Dann bestehen für* $T \to \infty$ *die Gleichungen*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{m_i G(T)}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{m_y G(T)}{2T} = m\Omega.$$

Es sei hervorgehoben, dass der Satz ganz unrichtig sein würde, wenn man statt des JORDANschen den LEBESGUEschen Massbegriff zu Grunde gelegt hatte. Das einfachste Beispiel um dies zu illustrieren ist der Fall, dass Ω mit A identisch ist; dann bekommt man für die beiden Grenzwerte denselben Wert 1, dagegen für $m\Omega$ den Wert Null.

Dagegen kann der Satz in einer anderen Richtung verschärft werden. Es ist offenbar für die Gültigkeit des Satzes gleichgültig, ob wir die Gerade (5) durch eine beliebige Gerade

$$x_1 = a_1 + t\lambda_1,\ x_2 = a_2 + t\lambda_2, \ldots, x_N = a_N + t\lambda_N, \qquad -\infty < t < +\infty$$

mit denselben Richtungszahlen ersetzen. Die erwähnte Verschärfung läuft darauf hinaus, dass sogar der Anfangspunkt »gleichmässig gleichgültig» ist: Wenn die Menge Ω gegeben ist, kann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $T_0 = T_0(\varepsilon)$ bestimmt werden, so dass, wenn nur $T > T_0$ ist, gleichzeitig für alle Anfangspunkte

$$m\Omega - \varepsilon < \frac{m_i G(T)}{2T};\ \frac{m_y G(T)}{2T} < m\Omega + \varepsilon$$

ist. Wir werden aber diesen verschärften Satz im folgenden nicht benutzen.

b. **Addition von konvexen Kurven mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.**

Die Bestimmung des Wertevorrates der Funktion

$$S(\theta_1, \theta_2, \ldots) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n}\right)$$

bzw. der Funktionen

$$S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n}\right)$$

war, wie wir soeben sahen, mit der Addition der unendlich vielen konvexen Kurven

$$\text{(6)} \qquad \omega_n\colon\ z_n = -\log\left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n}\right), \qquad 0 \leqq \theta_n < 1$$

bzw. der N ersten dieser Kurven gleichbedeutend.

Eine allgemeinere Frage (die sobald einen genauen Sinn bekommen soll) ist die folgende: Mit welcher Wahrscheinlichkeit verteilen sich die Werte von $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ bzw. $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ in ihren entsprechenden Mengen? Wir zitieren aus der oben (Fussnote S. 9) erwähnten gemeinsamen Arbeit, wo ähnliche Fragen in grösserer Allgemeinheit behandelt sind, die folgende Antwort:

Satz IV. *Es sei in der komplexen $z = u + iv$ Ebene R ein beliebiges parallel zu den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck, d. h. eine Punktmenge, die durch Ungleichungen der Form $u_1 < u < u_2$, $v_1 < v < v_2$ definiert ist. Wir betrachten, für jeden Wert von N, die Punktmenge Ω_N im N-dimensionalen Einheitswürfel $Q_N\,(0 \leqq \theta_n < 1,\ n = 1, 2, \ldots, N)$ für die der Punkt $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ dem Rechtecke R angehört; dann gilt:*

1) *Die Punktmenge Ω_N ist im Jordanschen Sinne messbar; wir nennen ihr (N-dimensionales) Mass $W_N(R)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ dem Rechtecke R angehört.*[1]

2) *Für $N \to \infty$ konvergiert $W_N(R)$ gegen einen bestimmten Grenzwert $W(R)$; wir nennen ihn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ dem Rechtecke R angehört. $W(R)$ ist positiv dann und nur dann, wenn R Punkte des Wertevorrats $\overline{M}(\sigma_0)$ von $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ enthält.*

---

[1] Dieser Teil des Satzes (und etwas mehr) ist schon in der oben (Fussnote S. 3) erwähnten Arbeit von H. Bohr und R. Courant bewiesen worden.

3) *Die Funktion* $W(R)$ *lässt sich als Integral einer beschränkten, stetigen Punktfunktion* $F(z)$ *darstellen:*

$$W(R) = \iint_R F(z)\, du\, dv.$$

$F(z)$ *ist positiv genau für die inneren Punkte (vgl. Satz* II, 3) *der Menge* $\bar{M}(\sigma_0)$.

4) *Für alle hinreichend grosse* N *lässt sich auch* $W_N(R)$ *als Integral einer stetigen Punktfunktion* $F_N(z)$ *darstellen:*

$$W_N(R) = \iint_R F_N(z)\, du\, dv.$$

$F_N(z)$ *konvergiert für* $N \to \infty$ *gleichmässig gegen* $F(z)$.

Der letzte Punkt 4) wird übrigens im folgenden nicht verwendet.

§ 3. Erster Hauptsatz. Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf vertikalen Geraden.

Das Ziel des vorliegenden Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz V. *Es sei* $R(u_1 < u < u_2,\ v_1 < v < v_2)$ *ein Rechteck in der* $z = u + iv$*-Ebene, und es bedeute* $L(T)$ *die gesammelte Länge derjenigen Teilintervalle von* $-T < t < T$, *in denen* $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ *in* R *fällt; dann gilt:*

1) *Es konvergiert mit unbeschränkt wachsendem* T *der Quotient* $\frac{L(T)}{2T}$ *gegen einen bestimmten Grenzwert; wir nennen ihn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass* $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ *dem Rechtecke angehört.*

2) *Es ist dieser Grenzwert gleich der Wahrscheinlichkeit* $W(R)$ *dafür, dass* $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ *in* R *fällt, und somit als Integral der obengenannten, beschränkten, stetigen Funktion* $F(z)$ *darstellbar; wir nennen* $F(z)$ *die Wahrscheinlichkeit, mit der* $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ *in der Nähe des Punktes* z *kommt.*

Dieser Satz sagt etwas mehr aus als der erste Hauptsatz der Einleitung, indem er den Grenzwert von $\frac{L(T)}{2T}$ mit der Werteverteilung von $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ in Zusammenhang stellt. Eine andere Formulierung des Satzes ist die folgende:

Es liegen die Werte, die $\log \zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, nicht nur wie in Satz I behauptet in der Wertemenge der Funktion $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ überall dicht, sondern sie liegen sogar in dieser Menge genau »*ebenso dicht*» wie die Werte dieser Funktion $S(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ selbst.

Beweis. Wir beweisen zuerst den entsprechenden Satz über die Funktionen

$$f_N(t) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{-it\log p_n}\right),$$

dass, wenn $L_N(T)$ die Länge der Teilintervalle von $-T < t < T$ bezeichnet, in denen $f_N(t)$ dem Rechteck R angehört, die Limesgleichung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L_N(T)}{2T} = W_N(R) \tag{7}$$

besteht. Es bedeute wie oben Ω_N die Teilmenge von Q_N $(0 \leqq \theta_n < 1,\ n = 1, 2, \ldots, N)$, in der

$$S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i\cdot 2\pi\theta_n}\right)$$

in R fällt; nach Satz IV, 1 ist Ω_N im Jordanschen Sinne messbar, und ihr Mass ist $W_N(R)$; dass für irgendein Wert von t der Punkt $f_N(t)$ dem Rechteck angehören soll, ist nun damit gleichbedeutend, dass der aus dem Punkt

$$\left(-t\frac{\log p_1}{2\pi},\ -t\frac{\log p_2}{2\pi},\ \ldots,\ -t\frac{\log p_N}{2\pi}\right)$$

durch Reduktion der Koordinaten mod. 1 entstehende Punkt von Q_N in Ω_N fallen soll. Da die Zahlen $-\frac{\log p_1}{2\pi}, -\frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, -\frac{\log p_N}{2\pi}$ linear unabhängig sind, wird somit (7) eine direkte Folge des Kronecker-Weylschen Satzes.

Der Beweis des Satzes V geschieht nun einfach durch den Grenzübergang $N \to \infty$.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir betrachten zwei achsenparallele Rechtecke R_i und R_y, die mit R den Mittelpunkt gemeinsam haben, und von denen R_i innerhalb R liegt, während R in R_y gelegen ist; nach Satz IV, 3 können wir R_i und R_y so nahe an R wählen, dass

$$W(R) - \varepsilon < W(R_i) \leqq W(R) \leqq W(R_y) < W(R) + \varepsilon.$$

Wir bezeichnen mit δ den kleinsten Abstand zwischen einem Randpunkt von R und einem Randpunkt von R_i oder R_y und wählen danach (Satz IV, 2) N so gross, dass gleichzeitig

$$|W(R_i) - W_N(R_i)| < \varepsilon, \quad |W(R_y) - W_N(R_y)| < \varepsilon$$

und

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\log(1 - p_n^{-\sigma_0})| < \delta$$

ist. Dann ist erstens

$$W(R) - 2\varepsilon < W_N(R_i); \quad W_N(R_y) < W(R) + 2\varepsilon \tag{8}$$

Und zweitens ist für jeden Wert von t

$$|\log\zeta(\sigma_0 + it) - f_N(t)| < \delta;$$

damit $\log\zeta(\sigma_0 + it)$ in R fällt, ist es also notwendig, dass $f_N(t)$ in R_y fällt, und hinreichend, dass $f_N(t)$ in R_i fällt. Bezeichnen wir nun mit $L_{N,i}(T)$ und $L_{N,y}(T)$ die Länge der Teilintervalle von $-T < t < T$, in denen $f_N(t)$ dem Rechteck R_i bzw. dem Rechteck R_y angehört, so ist also für jeden Wert von T

$$L_{N,i}(T) \leqq L(T) \leqq L_{N,y}(T).$$

Durch Division mit $2T$ und Ausführung des Grenzüberganges $T \to \infty$ bekommt man hieraus nach dem obigen

$$W_N(R_i) \leqq \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{L(T)}{2T} \leqq \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{L(T)}{2T} \leqq W_N(R_y)$$

und somit nach (8)

$$W(R) - 2\varepsilon \leqq \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{L(T)}{2T} \leqq \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{L(T)}{2T} \leqq W(R) + 2\varepsilon.$$

Da aber ε beliebig war, folgt hieraus

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{L(T)}{2T} = \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{L(T)}{2T} = W(R),$$

womit der Satz bewiesen ist.

Es ist offenbar für die Gültigkeit des Satzes V gleichgültig, ob wir statt Intervalle $-T < t < T$ mit dem Mittelpunkte Null Intervalle $|t - t_0| < T$ mit einem anderen festen Mittelpunkt gewählt hatten; hierdurch wird nämlich die Grösse $L(T)$ höchstens um t_0 geändert, was für $T \to \infty$ ohne Bedeutung ist. Nimmt man die oben erwähnte Verschärfung des KRONECKER-WEYLschen Satzes im Beweise hinzu, so zeigt sich, dass die Wahl von t_0 sogar gleichmässig gleichgültig ist: Wenn R gegeben ist, so gibt es immer zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängiges T_0, so dass für $T > T_0$ gleichzeitig für alle t_0

$$W(R) - \varepsilon < \frac{L(T)}{2T} < W(R) + \varepsilon$$

ist. Wir gehen aber auf diese Verschärfung nicht näher ein.

Zweiter Teil. Das Verhalten der Zetafunktion in einem vertikalen Streifen $(1 <) \sigma_1 < \sigma < \sigma_2$.

§ 4. Analytische Vorbereitungen.

a. Allgemeine Hilfssätze.

Wir beweisen zunächst einige allgemeine, an und für sich nicht unbekannte, Sätze über analytische Funktionen, die aber für das folgende von so grosser Bedeutung sind, dass wir sie gern in genauer Formulierung zur Verfügung haben wollen. Die Sätze können als Folgerungen bekannter Ungleichungen wie der von JENSEN angesehen werden, und zwar bekommt man, wenn man diese Ungleichungen benutzt, genaue Abschätzungen für die in den Hilfssätzen auftretenden Grössen N_0 und m_0. Wir brauchen aber nur die Existenz dieser Grössen und können daher einfacher die Beweise mit Hilfe der folgenden klassischen Sätze führen; von denen der zweite auch mehrmals direkt benutzt werden soll.

MONTELscher Auswahlsatz. Es sei in einem offenen Gebiet G eine unendliche Menge von regulären Funktionen gegeben, die alle in G numerisch $\leqq$ einer festen Grösse K sind. Dann kann man aus dieser Menge eine Folge herausgreifen, die in jeder beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von G gleichmässig konvergiert.

ROUCHÉscher Satz. Es seien $f(s)$ und $\varphi(s)$ zwei in einem von einer JORDANschen Kurve ω begrenzten abgeschlossenen Gebiet reguläre Funktionen, die überall auf ω der Ungleichung $|f(s)| > |\varphi(s)|$ genügen. Dann nehmen die Funktionen $f(s)$ und $f(s)+\varphi(s)$, die beide auf ω von Null verschieden sind, innerhalb ω gleich oft den Wert Null an (die Nullstellen sollen hierbei, wie auch stets im folgenden, in ihrer Vielfachkeit gezählt werden).

Wir gehen nunmehr zum ersten der erwähnten Hilfssätze über.

Hilfssatz 2. *Es sei G ein offenes Gebiet in der komplexen s-Ebene, A eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von G und s_0 ein Punkt von G. Es seien ferner k und $K > k$ zwei positive Konstanten. Es gibt dann hierzu eine Zahl $N_0 = N_0(G, A, s_0, k, K)$ von der folgenden Beschaffenheit. Ist $f(s)$ eine beliebige in G reguläre Funktion, die in G numerisch $\leqq K$ ist, für die aber $|f(s_0)| \geqq k$, so hat diese Funktion in der Menge A höchstens N_0 Nullstellen.*

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an

$$f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots \tag{9}$$

sei eine Folge von Funktionen, die den Bedingungen des Satzes genügen, für die aber $f_n(s)$ in A mehr als n Nullstellen hat; nach dem MONTELschen Auswahlsatz wählen wir aus der Folge (9) eine Teilfolge, die in jeder beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von G gleichmässig konvergiert; wir bezeichnen mit $f(s)$ die in G reguläre Grenzfunktion dieser Folge. Es ist $|f(s_0)| \geqq k$; die Funktion $f(s)$ ist somit nicht identisch Null und hat daher in A höchstens endlich viele, etwa N Nullstellen (jede Nullstelle in ihrer Vielfachkeit gezählt). Um jede dieser Nullstellen als Mittelpunkt bestimmen wir jetzt eine abgeschlossene Kreisscheibe, die ganz in G gelegen ist, und in der $f(s)$ bis auf im Mittelpunkt von Null verschieden ist; keine zwei dieser Kreisscheiben dürfen Punkte gemeinsam haben. Die Ränder dieser Kreisscheiben und die Teilmenge von A, die ausserhalb der Kreise fällt, bilden zusammen eine abgeschlossene Menge A', auf der $f(s)$ nicht beliebig nahe an Null herankommt. Nennen wir $m\,(>0)$ die untere Grenze von $|f(s)|$ auf A', so können wir ein $n > N$ so wählen, dass auf der Menge A'

$$|f_n(s) - f(s)| < m$$

also umsomehr

$$|f_n(s) - f(s)| < |f(s)|$$

ist. In der Menge A' ist $f_n(s)$ von Null verschieden; wenden wir den ROUCHÉschen Satz (mit $\varphi(s)=f_n(s)-f(s)$) auf jede der Kreisscheiben an, so sehen wir also, dass $f_n(s)$ in einer A enthaltenden Menge nur N Nullstellen hat; dies ist aber ein Wiederspruch; denn wir haben ja $n>N$ gewählt und $f_n(s)$ sollte in A mehr als n Nullstellen haben. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Der zweite der erwähnten Hilfssätze lautet folgendermassen.

Hilfssatz 3. *Es haben G, A, s_0, k und K dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 2, und es sei ferner r eine feste positive Zahl. Dann gibt es hierzu eine positive Zahl $m_0=m_0(G, A, s_0, k, K, r)$ mit folgender Eigenschaft: Ist $f(s)$ eine beliebige Funktion, die den Bedingungen des Hilfssatzes 2 genügt, d. h. die in G regulär und numerisch $\leqq K$, in s_0 aber numerisch $\geqq k$ ist, so ist in der abgeschlossenen Teilmenge von A, die aus allen Punkten von A besteht, welche von jeder beliebigen Nullstelle von $f(s)$ in G eine Entfernung $\geqq r$ besitzen, die Funktion $f(s)$ numerisch $\geqq m_0$.*

Beweis. Es bedeute δ den kleinsten Abstand zwischen einem Punkt von A und einem Randpunkt von G; es genügt den Satz unter der Annahme $r<\delta$ zu beweisen. Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an es gäbe eine Folge

$$f_1(s),\ f_2(s),\ \ldots,\ f_n(s),\ \ldots \tag{10}$$

von Funktionen, die den Bedingungen des Satzes genügen, und eine zugehörige Folge von Punkten

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots \tag{11}$$

von A, so dass für jeden Wert von n erstens $|f_n(s_n)|<\frac{1}{n}$ ist und zweitens $f_n(s)$ in $|s-s_n|<r$ von Null verschieden ist.

Aus der Folge (10) wählen wir nach dem MONTELschen Satz eine Teilfolge aus, die in jeder beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von G gleichmässig gegen eine in G reguläre Grenzfunktion $f(s)$ konvergiert; $f(s)$ ist in G wegen $|f(s_0)|\geqq k$ nicht identisch Null; es sei s' ein Häufungspunkt der entsprechenden Teilfolge von (11); dann ist, wie man sofort sieht, $f(s')=0$. Wir wählen nun $\varrho<r$ so klein, dass $f(s)$ in $|s-s'|\leqq\varrho$ nur die eine (vielleicht doch vielfache) Nullstelle s' hat, und bezeichnen mit m das Minimum von $|f(s)|$ auf $|s-s'|=\varrho$; danach wählen wir n so, dass $|s_n-s'|<r-\varrho$ ist, und gleichzeitig damit auf

$|s-s'|=\varrho$ die Ungleichung $|f_n(s)-f(s)|<m$ gilt; dann hat $f_n(s)$ nach dem ROUCHÉschen Satze in $|s-s'|<\varrho$ und somit umsomehr in $|s-s_n|<r$ wenigstens eine Nullstelle; dies ist aber in Widerspruch mit der Annahme, und der Satz ist bewiesen.

b. Hilfssätze über $\log \zeta(s)$.

Die Hilfssätze 1—3 erlauben uns einige für das folgende wichtige Sätze über $\log \zeta(s)$ in wenigen Worten abzuleiten.

Hilfssatz 4. *Es seien* $1<\alpha_1<\alpha_2$ *und* $d>0$ *beliebig gegeben. Ferner sei* a *eine beliebige komplexe Zahl. Dann gibt es hierzu eine Zahl* $C_0=C_0(\alpha_1, \alpha_2, d, a)$, *die grösser als oder gleich der Anzahl der (in ihrer Vielfachkeit gezählten)* a*-Stellen von* $\log \zeta(s)$ *in jedem Rechteck* $R(t_0)$: $\left(\alpha_1 \leqq \sigma \leqq \alpha_2,\ t_0-\frac{d}{2} \leqq t \leqq t_0+\frac{d}{2}\right)$, $-\infty<t_0<+\infty$, *von der Höhe* d *ist.*

Beweis. Wir wählen nach Hilfssatz 1 ein σ_0 so gross, dass auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ die Funktion $|\log \zeta(s)-a|$ eine positive untere Grenze k hat; ferner wählen wir $\alpha_0>1$ so nahe an 1, dass sowohl der Streifen $\alpha_1 \leqq \sigma \leqq \alpha_2$ als auch die Gerade $\sigma=\sigma_0$ der Halbebene $G\,(\sigma>\alpha_0)$ angehört. Mit K bezeichnen wir die (endliche) obere Grenze von $|\log \zeta(s)-a|$ in G. Nun ist die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in $R(t_0)$ gleich der Anzahl der Nullstellen von $\log \zeta(s+i t_0)-a$ im Rechteck $R(0)$, und es sind diese Funktionen im Punkte σ_0 alle numerisch $\geqq k$. Im Sinne von Hilfssatz 2 können wir also

$$C_0=N_0(G, R(0), \sigma_0, k, K)$$

wählen.

Hilfssatz 5. *Es seien wieder* $1<\alpha_1<\alpha_2$ *und die komplexe Zahl* a *beliebig gegeben, und es bezeichne* r *eine beliebige positive Zahl. Wir bezeichnen mit* M *die abgeschlossene Teilmenge des Streifens* $\alpha_1 \leqq \sigma \leqq \alpha_2$, *die aus allen Punkten dieses Streifens besteht, deren Abstand von jeder beliebigen* a*-Stelle von* $\log \zeta(s)$ *in der Halbebene* $\sigma>1$ *grösser als oder gleich* r *ist. Dann kommt* $\log \zeta(s)$ *auf der Menge* M *überhaupt nicht in der Nähe von* a, *d. h. es hat* $|\log \zeta(s)-a|$ *auf* M *eine positive untere Grenze.*

Beweis. Wird $d > 0$ beliebig gewählt (z. B. $d = 1$), so ist mit den obigen Bezeichnungen im Sinne von Hilfssatz 3 in der Menge M

$$|\log \zeta(s) - a| \geqq m_0(G, R(0), \sigma_0, k, K, r) > 0.$$

§ 5. Erste Anwendung der Hilfssätze auf die Zetafunktion.

a. Bestimmung des Wertevorrats von $\log \zeta(s)$ im Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$.[1]

Der Hilfssatz 5 erlaubt uns einen sehr einfachen Beweis des Satzes III, § 1, c zu führen.

Es sei $\sigma_0 > 1$ gegeben; dann soll gezeigt werden: Es bilden die Werte a, welche $\log \zeta(s)$ in *jedem* beliebigen Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ $(\delta < \sigma_0 - 1)$ um die Gerade $\sigma = \sigma_0$ annimmt, genau die abgeschlossene Hülle $\bar{M}(\sigma_0)$ der Wertemenge $M(\sigma_0)$ von $\log \zeta(s)$ auf dieser Geraden.

Dass ein Wert a, der nicht der Menge $\bar{M}(\sigma_0)$ angehört, in einem gewissen (hinreichend schmalen) Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ von $\log \zeta(s)$ nicht angenommen werden kann, ist eine unmittelbare Folge der Beschränktheit des numerischen Wertes des Differentialquotienten von $\log \zeta(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > 1 + \varepsilon$ (die wieder eine unmittelbare Folge der Beschränktheit von $|\log \zeta(s)|$ in jeder solchen Halbebene ist); und dass umgekehrt ein Wert a, der von $\log \zeta(s)$ in einem gewissen Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ nicht angenommen wird, auch nicht der Menge $\bar{M}(\sigma_0)$ angehören kann, lehrt uns der Hilfssatz 5 (mit $\alpha_1 = \sigma_0 - \delta$, $\alpha_2 = \sigma_0 + \delta$), sobald wir $r < \delta$ wählen.

Für jeden offenen Streifen $(1 <)\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ wird nach dem bewiesenen Satz der (wieder offene) Wertevorrat von $\log \zeta(s)$ als Vereinigungsmenge aller Punktmengen $\bar{M}(\sigma_0)$ mit $\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2$ bestimmt. Aus den allgemeinen Ausführungen in Satz II, 4 über die Variation von $\bar{M}(\sigma_0)$ mit σ_0 folgt dann der

Satz VI. *Der Wertevorrat von $\log \zeta(s)$ im Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ besteht entweder aus dem Innern einer konvexen Kurve oder aus dem Innern eines von zwei ineinanderliegenden konvexen Kurven begrenzten Ringes.*

Weiter folgt aus Satz III in Verbindung mit Satz II, 1 und 4, dass $\log \zeta(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > 1$, und übrigens allgemeiner in jedem Streifen $1 < \sigma < 1 + \varepsilon$, jeden Wert sogar unendlich oft annimmt.

---

[1] Kann übergangen werden.

b. **Beweis der Relationen** $0 < \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T}$; $\overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T} < \infty$.

Als eine andere Anwendung unserer Hilfssätze beweisen wir den folgenden

Satz VII. *Es sei* $1 < \sigma_1 < \sigma_2$ *und* a *ein Wert von* $\log \zeta(s)$ *im Streifen* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$; *ferner bezeichne* $N_a(T)$ *die Anzahl der (in ihrer Vielfachkeit gezählten)* a*-Punkte von* $\log \zeta(s)$ *im Rechteck* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-T < t < T$. *Dann gilt*

$$0 < \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T}; \quad \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T} < \infty.$$

Beweis. Die zweite der angegebenen Ungleichungen ist eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes 4, nach dem für jeden Wert von T

$$N_a(T) \leqq (2T + 1)\, C_0(\sigma_1, \sigma_2, 1, a)$$

ist. Die erste Ungleichung beweisen wir in der folgenden Weise:

Es sei σ_0 die Abszisse einer a-Stelle von $\log \zeta(s)$ in $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$; wir wählen $r > 0$ kleiner als die beiden Differenzen $\sigma_0 - \sigma_1$ und $\sigma_2 - \sigma_0$ und bestimmen für jede beliebige a-Stelle $\sigma' + it'$ von $\log \zeta(s)$ in $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ das entsprechende Intervall

$$I\colon\ (t' - r < t < t' + r)$$

auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$. Jeder Punkt s der Geraden $\sigma = \sigma_0$, der keinem der Intervalle I angehört, hat von jeder a-Stelle von $\log \zeta(s)$ wenigstens den Abstand r; es gibt somit nach dem Hilfssatze 5 eine positive Konstante m, so dass für jeden solchen Wert von s

$$|\log \zeta(s) - a| > m$$

ist. Bestimmen wir also in der komplexen z-Ebene ein achsenparalleles Rechteck R mit dem Mittelpunkt a, das dem Kreise $|z - a| \leqq m$ angehört, so fällt $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ gewiss nur dann in R wenn t einem der Intervalle I angehört. Wir haben daher mit den Bezeichnungen des Satzes V

$$L(T) \leqq 2r \cdot N_a(T + r)$$

oder

$$\frac{L(T)}{2T} \leqq 2r \frac{N_a(T + r)}{2(T + r)} \cdot \frac{T + r}{T},$$

woraus für $T \to \infty$

$$W(R) \leqq 2r \varlimsup_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T}.$$

Da aber R einen Punkt von $\bar{M}(\sigma_0)$, nämlich a, enthält, ist nach Satz IV, 2 die Wahrscheinlichkeit $W(R)$ positiv; der Satz ist somit bewiesen.

Wir fügen hinzu, dass wir den obigen Beweis auch ohne Heranziehung des Hauptsatzes von dem ersten Teil hätten führen können (nämlich unter direkter Benutzung des Kronecker-Weylschen Satzes); wir haben aber die obige Form des Beweises gewählt um schon an dieser Stelle, wo es sich noch um eine recht oberflächliche Abschätzung handelt, eine Beweismethode zu verwenden, die uns späterhin bei der tieferliegenden Abschätzung in § 7 unumgänglich wird.

§ 6. Zweiter Hauptsatz. Wahrscheinlichkeitsverteilungen in vertikalen Streifen.

In den folgenden Paragraphen soll nun die folgende sehr wesentliche Verschärfung des Satzes VII bewiesen werden:

Satz VIII. *Es sei* $1 < \sigma_1 < \sigma_2$ *und* a *eine beliebige komplexe Zahl; ferner bezeichne* $N_a(T)$ *die Anzahl der (in ihrer Vielfachkeit gezählten)* a*-Stellen von* $\log\zeta(s)$ *im Rechteck* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-T < t < T$; *den Quotienten* $\frac{N_a(T)}{2T}$ *bezeichnen wir als die Wahrscheinlichkeit, mit der* $\log\zeta(s)$ *im betrachteten Rechteck den Wert* a *annimmt; dann gilt:*

1) *Es konvergiert für* $T \to \infty$ *der Quotient* $\frac{N_a(T)}{2T}$ *gegen einen bestimmten Grenzwert*

$$G(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T}; \tag{12}$$

wir nennen diesen Grenzwert die Wahrscheinlichkeit, mit der $\log\zeta(s)$ *im Streifen* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ *den Wert* a *annimmt.*

2) $G(a)$ *ist positiv dann und nur dann, wenn im betrachteten Streifen* $\log\zeta(s)$ *den Wert* a *tatsächlich annimmt.*

3) $G(a)$ *variiert stetig mit* σ_1 *und* σ_2.

Bis auf dem letzten Punkt stimmt dieser Satz mit dem zweiten Hauptsatz der Einleitung überein. Es genügt Punkt 1 zu beweisen; dann folgt Punkt 2 aus dem Satze VII und Punkt 3 aus dem zunächst zu beweisenden Hilfssatz 6. Für die Formulierung dieses letzten Punktes war es bequem auch solche Werte a zu betrachten, die im Streifen nicht angenommen werden. Der Beweis des Satzes wird mit Hilfe des KRONECKER-WEYLschen Satzes und des ersten Hauptsatzes (Satz V) erbracht.

Betrachtet man statt der Rechtecke $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-T < t < T$ Rechtecke $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $|t - t_0| < T$, wo t_0 eine beliebige feste Zahl bedeutet, so ändert sich dabei $N_a(T)$ nach dem Hilfssatz 4 höchstens um $C_0(\sigma_1, \sigma_2, t_0, a)$; der Grenzwert $G(a)$ bleibt somit ungeändert. Ohne weiter darauf einzugehen bemerken wir, dass die Wahl von t_0 sogar gleichmässig gleichgültig ist: Wenn a gegeben ist, so kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängiges T_0 so gross bestimmen, dass gleichzeitig für alle t_0

$$G(a) - \varepsilon < \frac{N_a(T)}{2T} < G(a) + \varepsilon;$$

der Beweis dieses verschärften Satzes gelingt, wenn man statt des KRONECKER-WEYLschen Satzes und des Satzes V die oben erwähnten Verschärfungen derselben verwendet.

§ 7. Anwendung des ersten Hauptsatzes zum Beweis eines Hilfssatzes.

Hilfssatz 6. *Es sei $\sigma_0 > 1$ und a eine beliebige komplexe Zahl; ferner sei für jeden Wert von $\varepsilon < \sigma_0 - 1$ mit $N_a^\varepsilon(T)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ im Rechteck $\sigma_0 - \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$, $-T < t < T$ bezeichnet, und es sei*

$$l(\varepsilon) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{N_a^\varepsilon(T)}{2T}$$

gesetzt. Dann konvergiert für $\varepsilon \to 0$ die Grösse $l(\varepsilon)$ gegen Null.[1]

[1] Wir bemerken, dass der Hilfssatz 6 nicht etwa für beliebige Funktionen gilt, die wie

$$\log \zeta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - p_n^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} p_n^{-ls}$$

durch eine (absolut konvergente) Dirichletsche Reihe $\Sigma a_n n^{-s}$ dargestellt wird. Z. B. hat die Funktion $1 - 2^{2-s}$ in der ganzen Ebene, die Funktion $(1 - 2^{2-s}) . \log \zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$

Beweis. Es sei ein positives $\varepsilon_0 < \sigma_0 - 1$ fest gewählt; es genügt offenbar, wenn wir $l(\varepsilon)$ für $\varepsilon < \varepsilon_0$ untersuchen. Der Beweis geschieht durch eine direkte Abschätzung, die jedoch erst durch die Heranziehung des Hauptsatzes aus dem ersten Teil ermöglicht wird.

Wir bezeichnen mit K die (endliche) obere Grenze von $\left|\frac{d \log \zeta(s)}{ds}\right|$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0 - \varepsilon_0$; dann gilt für jede beliebige im Streifen $\sigma_0 - \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$ gelegene a-Stelle $s' = \sigma' + it'$ von $\log \zeta(s)$ im entsprechenden Intervalle

$$I\colon\ (t' - \varepsilon < t < t' + \varepsilon)$$

auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ die Ungleichung

$$|\log \zeta(s) - a| < K \,.\, \varepsilon\sqrt{2}; \tag{13}$$

denn jeder Punkt dieses Intervalls hat ja von s' einen Abstand kleiner als $\varepsilon\sqrt{2}$.

Die Kreisscheibe $|z - a| < K\varepsilon\sqrt{2}$ in der $z = u + iv$-Ebene gehört einem achsenparallelen Quadrat R mit der Seitenlänge $2K\varepsilon\sqrt{2}$ an; wir bezeichnen wie in Satz V mit $L(T)$ die Länge derjenigen Teilintervalle des Intervalls $-T < t < T$, für die $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ dem Quadrate R angehört. Jeder Punkt $\sigma_0 + it_0$ von $\sigma = \sigma_0$ gehört genau so vielen der Intervalle I an, wie es a-Stellen von $\log \zeta(s)$ im Quadrate $\sigma_0 - \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$, $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ gibt, also nach dem Hilfssatz 4 niemals mehr als C_0, wo

$$C_0 = C_0(\sigma_0 - \varepsilon_0,\ \sigma_0 + \varepsilon_0,\ 2\varepsilon_0,\ a)$$

von ε unabhängig ist. Da die Teilintervalle von $\sigma = \sigma_0$, in denen $\log \zeta(s)$ in R fällt, wegen (13) die Intervalle I enthalten, ist also für jeden Wert von $T (> \varepsilon)$

$$\frac{N_a^\varepsilon(T - \varepsilon)}{C_0} \cdot 2\varepsilon \leqq L(T)$$

und demnach

$$\frac{N_a^\varepsilon(T - \varepsilon)}{2(T - \varepsilon)} \leqq \frac{C_0}{2\varepsilon} \cdot \frac{L(T)}{2T} \cdot \frac{T}{T - \varepsilon}\,.$$

---

eine solche Darstellung; beide haben sie aber auf der Geraden $\sigma = 2$ äquidistante Nullstellen. — Im Laufe des Beweises wird man den »wahren» Grund des Satzes darin erblicken, dass bei der Werteverteilung von $\log \zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$, wie sie im ersten Teil untersucht wurde, nicht nur von einer Rechteckswahrscheinlichkeit (Gebietswahrscheinlichkeit), sondern sogar von einer beschränkten (stetigen) *Punktwahrscheinlichkeit* $F(z)$ gesprochen werden konnte.

Führen wir hier den Grenzübergang $T \to \infty$ aus, so folgt nach Satz V

$$l(\varepsilon) \leqq \frac{C_0}{2\varepsilon} \cdot W(R).$$

Wir schätzen nunmehr $W(R)$ ab, und zwar mit Hilfe der Darstellung (vgl. Satz IV, 3)

$$W(R) = \iint_R F(z)\,du\,dv.$$

Indem wir mit M die obere Grenze der Funktion $F(z)$ bezeichnen, erhalten wir

$$W(R) \leqq M(2K\varepsilon\sqrt{2})^2 = 8MK^2 . \varepsilon^2$$

(wo das Entscheidende ist, dass ε^2 und nicht ε^1 auftritt) also

$$l(\varepsilon) \leqq \frac{C_0}{2\varepsilon} \cdot 8MK^2 . \varepsilon^2 = 4\,C_0 MK^2 . \varepsilon;$$

diese Ungleichung, in welcher der erste Faktor $4\,C_0MK^2$ nicht von ε abhängt, zeigt aber sofort, dass für $\varepsilon \to 0$ die Grösse $l(\varepsilon)$ gegen Null konvergiert.

§ 8. Beweis des zweiten Hauptsatzes.

Nachdem der Hilfssatz 6 bewiesen ist, genügt es um den Beweis des Satzes VIII zu führen die Existenz des Grenzwertes (12) zu beweisen; wir ersetzen diese Aufgabe durch die folgende äquivalente:

Es sei für jeden Wert von t_0 mit $n_a(t_0)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ im Rechteck

$$R(t_0): \left(\sigma_1 < \sigma < \sigma_2,\ t_0 - \frac{1}{2} < t < t_0 + \frac{1}{2}\right)$$

bezeichnet; dann ist $n_a(t_0)$ eine im Intervalle $-\infty < t_0 < +\infty$ beschränkte, stückweise konstante Funktion, für die $\left(\text{für } T > \frac{1}{2}\right)$

$$N_a\left(T - \frac{1}{2}\right) \leqq \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,dt_0 \leqq N_a\left(T + \frac{1}{2}\right),$$

d. h.

$$\frac{T-\frac{1}{2}}{T}\cdot\frac{N_a\left(T-\frac{1}{2}\right)}{2\left(T-\frac{1}{2}\right)} \leqq \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} n_a(t_0)\,dt_0 \leqq \frac{T+\frac{1}{2}}{T}\cdot\frac{N_a\left(T+\frac{1}{2}\right)}{2\left(T+\frac{1}{2}\right)}$$

gilt. Aus diesen Ungleichungen folgt, dass für $T\to\infty$ die beiden Grössen

$$\frac{N_a(T)}{2T} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} n_a(t_0)\,dt_0$$

dieselben oberen und unteren Limites haben müssen. Es genügt somit um den Satz VIII zu beweisen, die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} n_a(t_0)\,dt_0$$

nachzuweisen.

Wir wählen eine für das folgende feste positive Zahl ε_0, die kleiner als die drei Zahlen $\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und $\sigma_1 - 1$ ist, und betrachten für jedes positives $\varepsilon < \varepsilon_0$ und für jeden Wert von t_0 die beiden Rechtecke

$$R_i(t_0):\left(\sigma_1+\varepsilon\leqq\sigma\leqq\sigma_2-\varepsilon;\ t_0-\frac{1}{2}+\varepsilon\leqq t\leqq t_0+\frac{1}{2}-\varepsilon\right)$$

und

$$R_y(t_0):\left(\sigma_1-\varepsilon<\sigma<\sigma_2+\varepsilon;\ t_0-\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0+\frac{1}{2}+\varepsilon\right);$$

nach der Wahl von ε_0 gehören diese Rechtecke der Halbebene $\sigma>\sigma_1-\varepsilon_0(>1)$ an. Die Differenz $R_y(t_0)-R_i(t_0)$ ist ein Gebiet, das den Rand des Rechteckes $R(t_0)$ enthält. Bezeichnen wir mit $n_a^i(t_0)$ bzw. $n_a^y(t_0)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log\zeta(s)$ in $R_i(t_0)$ bzw. $R_y(t_0)$, so ist

$$n_a^i(t_0)\leqq n_a(t_0)\leqq n_a^y(t_0),$$

und es ist $n_a^y(t_0)-n_a^i(t_0)$ gleich der Anzahl der a-Stellen von $\log\zeta(s)$ in $R_y(t_0)-R_i(t_0)$. Wir beweisen zuerst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 7. *Es konvergiert für $\varepsilon \to 0$ die Grösse*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\, \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(n_a^y(t_0)-n_a^i(t_0)\right)dt_0$$

gegen Null.

Beweis. Unabhängig von t_0 und ε ist $n_a^y(t_0)$, und somit auch $n_a^i(t_0)$ und $n_a^y(t_0)-n_a^i(t_0)$, nach dem Hilfssatz 4 höchstens gleich der von t_0 und ε unabhängigen Konstanten

$$C_0 = C_0(\sigma_1-\varepsilon_0,\ \sigma_2+\varepsilon_0,\ 1+2\varepsilon_0,\ a). \tag{14}$$

Wir teilen für jeden Wert von t_0 die Menge $R_y(t_0)-R_i(t_0)$ in drei kleinere Mengen, nämlich in die Rechtecke

$$R_1(t_0): \left(\sigma_1-\varepsilon<\sigma<\sigma_1+\varepsilon;\ t_0-\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$$

und

$$R_2(t_0): \left(\sigma_2-\varepsilon<\sigma<\sigma_2+\varepsilon;\ t_0-\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$$

und in die von den beiden Rechtecken

$$\sigma_1+\varepsilon\leqq\sigma\leqq\sigma_2-\varepsilon;\ t_0-\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0-\frac{1}{2}+\varepsilon$$

und

$$\sigma_1+\varepsilon\leqq\sigma\leqq\sigma_2-\varepsilon;\ t_0+\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0+\frac{1}{2}+\varepsilon$$

gebildete Menge $A(t_0)$. Wir bezeichnen mit $n_a^1(t_0)$, $n_a^2(t_0)$ und $n_a'(t_0)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log\zeta(s)$ in diesen Mengen. Es ist

$$n_a^y(t_0)-n_a^i(t_0)=n_a^1(t_0)+n_a^2(t_0)+n_a'(t_0).$$

Ferner bezeichnen wir mit $N_a^1(T)$, $N_a^2(T)$ und $N_a'(T)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log\zeta(s)$ in den Rechtecken $(\sigma_1-\varepsilon<\sigma<\sigma_1+\varepsilon;\ -T<t<T)$, $(\sigma_2-\varepsilon<\sigma<\sigma_2+\varepsilon;$ $-T<t<T)$ und $(\sigma_1+\varepsilon\leqq\sigma\leqq\sigma_2-\varepsilon;\ -T<t<T)$. Dann gilt

$$\frac{1}{1+2\varepsilon}\int_{-T}^{T} n_a^1(t_0)\,dt_0 \leqq N_a^1\left(T+\frac{1}{2}+\varepsilon\right) \leqq N_a^1(T+1)$$

$$\frac{1}{1+2\varepsilon}\int_{-T}^{T} n_a^2(t_0)\,dt_0 \leqq N_a^2\left(T+\frac{1}{2}+\varepsilon\right) \leqq N_a^2(T+1)$$

$$\frac{1}{4\varepsilon}\int_{-T}^{T} n_a'(t_0)\,dt_0 \leqq N_a'\left(T+\frac{1}{2}+\varepsilon\right) \leqq (2T+3)\,C_0,$$

wo in der letzten Relation C_0 die Konstante (14) bedeuten kann. Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0))\,dt_0 \leqq (1+2\varepsilon)\left\{\frac{N_a^1(T+1)}{2T} + \frac{N_a^2(T+1)}{2T}\right\} + 4\varepsilon\,\frac{2T+3}{2T}\,C_0$$

und für $T\to\infty$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0))\,dt_0 \leqq (1+2\varepsilon)\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{N_a^1(T)}{2T} + \overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{N_a^2(T)}{2T}\right\} + 4\varepsilon\,C_0.$$

Hiermit ist aber der Hilfssatz bewiesen, denn für $\varepsilon\to 0$ konvergiert die Grösse rechts gegen Null (Hilfssatz 6).

Hilfssatz 8. *Für jeden festen Wert von $\varepsilon < \varepsilon_0$ ist es möglich zwischen die Funktionen $n_a^i(t_0)$ und $n_a^y(t_0)$ eine stückweise konstante Funktion $n_a^*(t_0)$ einzuschieben, für die der Grenzwert*

$$G^*(a) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\,dt_0$$

existiert.

Beweis. Für jeden Wert von t_0 gibt es in $R_y(t_0) - R_i(t_0)$ höchstens C_0 a-Stellen von $\log\zeta(s)$. Wir wählen eine positive Zahl $r < \dfrac{\varepsilon}{2C_0+1}$ und bezeichnen mit M diejenige Teilmenge des Streifens $\sigma_1 - \varepsilon < \sigma < \sigma_2 + \varepsilon$, die aus allen Punkten besteht, deren Abstand von jeder beliebigen a-Stelle von $\log\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ grösser als r ist; dann ist es (siehe Fig. 1) möglich für jeden Wert von t_0 eine Zahl $\tau = \tau(t_0)$ im Intervalle $0 < \tau < \varepsilon$ so zu bestimmen, dass die Ränder der beiden Rechtecke

$$R_i'(t_0): \left(\sigma_1 + \tau < \sigma < \sigma_2 - \tau;\ t_0 - \frac{1}{2} + \tau < t < t_0 + \frac{1}{2} - \tau\right)$$

und

$$R_y'(t_0): \left(\sigma_1 - \tau < \sigma < \sigma_2 + \tau;\ t_0 - \frac{1}{2} - \tau < t < t_0 + \frac{1}{2} + \tau\right)$$

der Menge M angehören. In der Menge M gilt nun nach dem Hilfssatz 5 eine Ungleichung der Form

$$|\log\zeta(s) - a| > m,$$

wo m eine positive Konstante bedeutet; jede beliebige reguläre Funktion $f_{t_0}^*(s)$, die auf den Rändern von $R_i'(t_0)$ und $R_y'(t_0)$ der Ungleichung

$$|f_{t_0}^*(s) - \log\zeta(s)| < m \tag{15}$$

genügt, hat somit nach dem Rouchéschen Satze in den Rechtecken $R_i'(t_0)$ und $R_y'(t_0)$ ebensoviele a-Stellen wie $\log\zeta(s)$, und es gilt also, wenn wir mit $n_a^*(t_0)$ die Anzahl der a-Stellen von $f_{t_0}^*(s)$ in $R(t_0)$ bezeichnen, die Ungleichung

$$n_a^i(t_0) \leqq n_a^*(t_0) \leqq n_a^y(t_0).$$

Eine dem Hilfssatz genügende Funktion $n_a^*(t_0)$ soll nun durch Bestimmung geeigneter Funktionen $f_{t_0}^*(s)$ definiert werden.

Wir wählen hierzu zuerst N so gross, dass im ganzen Streifen $\sigma_1 - \varepsilon < \sigma < \sigma_2 + \varepsilon$ die Ungleichung

$$\left| -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-s}) - \log\zeta(s) \right| < \frac{m}{2} \tag{16}$$

besteht, und ändern danach für jeden Wert von t_0 die Funktion

$$-\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-s})$$

in der folgenden Weise ab:

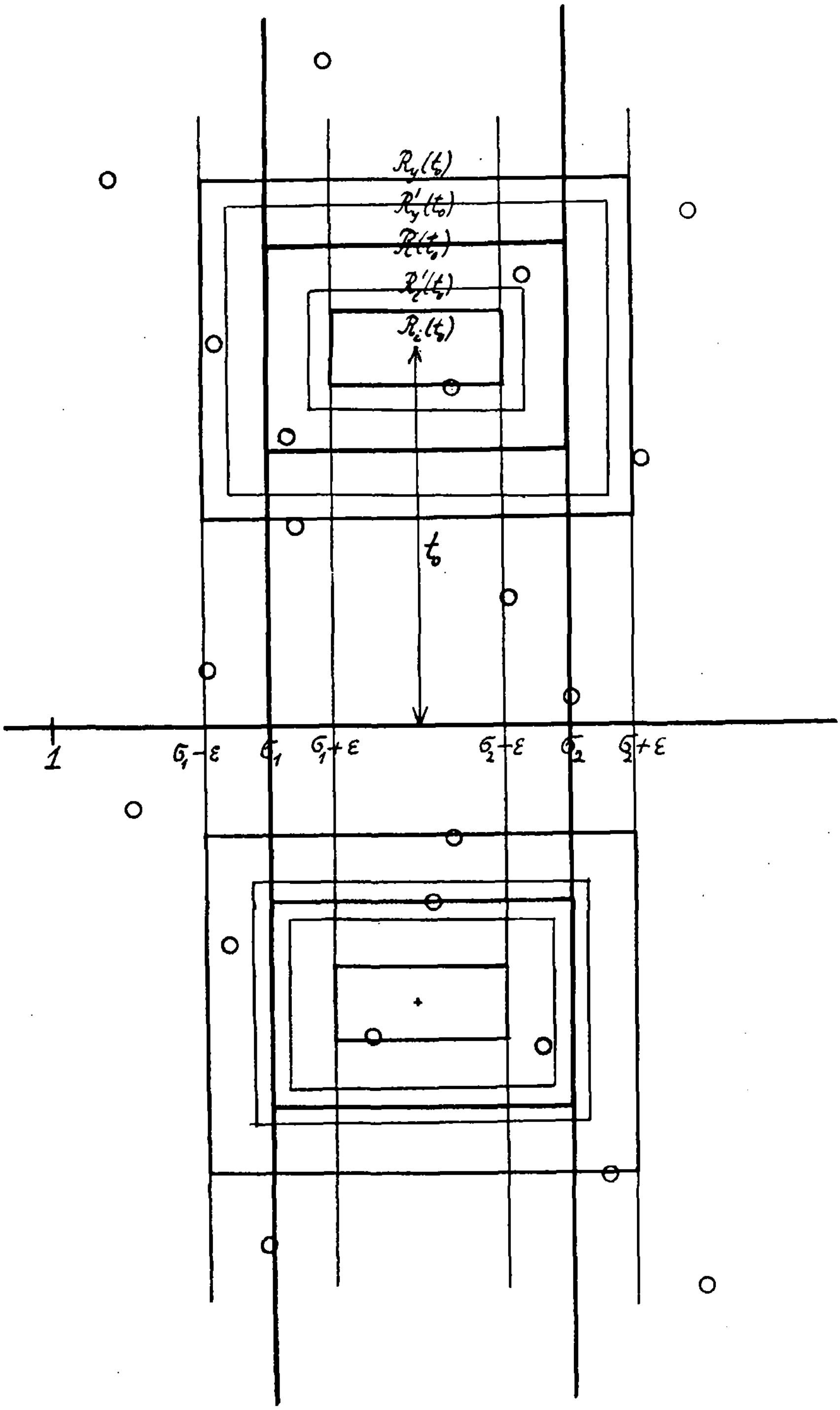
$\mathcal{R}_y(t_0)$
$\mathcal{R}'_y(t_0)$
$\mathcal{R}(t_0)$
$\mathcal{R}'_i(t_0)$
$\mathcal{R}_i(t_0)$
t_0
1
$\sigma_1-\varepsilon$
σ_1
$\sigma_1+\varepsilon$
$\sigma_2-\varepsilon$
σ_2
$\sigma_2+\varepsilon$

Fig. 1.

Es sei die natürliche Zahl P so gross gewählt, dass für beliebige reelle Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, die nur alle um weniger als $\frac{1}{P}$ von ganzen Zahlen abweichen, die Funktion

$$(17) \qquad f^*(s) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - e^{i \cdot 2\pi\varphi_n} p_n^{-s}\right)$$

im Streifen $\sigma_1 - \varepsilon < \sigma < \sigma_2 + \varepsilon$ der Ungleichung

$$\left| f^*(s) - \left(-\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - p_n^{-s}\right)\right) \right| < \frac{m}{2}$$

genügt. Dann gilt wegen (16) in diesem Streifen die Ungleichung

$$|f^*(s) - \log \zeta(s)| < m.$$

Wir betrachten nunmehr diejenige Zerlegung des Einheitswürfels Q_N $(0 \leqq \theta_n < 1)$ im Raum der Koordinaten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ in P^N Würfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{P}$, die man erhält, wenn jedes der Intervalle $0 \leqq \theta_n < 1$ in P gleichgrosse Teile $\frac{q_n}{P} \leqq \theta_n < \frac{q_n + 1}{P}$ $(q_n = 0, 1, \ldots, P-1)$ geteilt wird. Indem wir die P^N Kombinationen $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ in irgend einer Weise in eine einfache Folge geordnet denken, können wir diese Würfel mit Q_N^q bezeichnen, wo dann der Index q die Zahlen $1, 2, \ldots, P^N$ durchläuft; den Anfangspunkt $\left(\frac{q_1}{P}, \frac{q_2}{P}, \ldots, \frac{q_N}{P}\right)$ des q^{ten} Würfels bezeichnen wir kurz mit $(\theta_1^q, \theta_2^q, \ldots, \theta_N^q)$. Für jeden Wert von t_0 betrachten wir jetzt den Punkt von Q_N, welcher aus dem Punkt $\left(t_0 \frac{\log p_1}{2\pi}, t_0 \frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, t_0 \frac{\log p_N}{2\pi}\right)$ durch Reduktion der Koordinaten mod. 1 entsteht. Gehört dieser Punkt dem Würfel Q_N^q an, sind dann die Differenzen $t_0 \frac{\log p_1}{2\pi} - \theta_1^q$, $t_0 \frac{\log p_2}{2\pi} - \theta_2^q$, $\ldots$, $t_0 \frac{\log p_N}{2\pi} - \theta_N^q$ alle mod. 1 kleiner als $\frac{1}{P}$ und können somit als Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ in (17) benutzt werden. Es genügt also die Funktion

$$f_{t_0}^*(s) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - e^{i\left(t_0 \log p_n - 2\pi\theta_n^q\right)} p_n^{-s}\right)$$
$$= -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - e^{-i\cdot 2\pi\theta_n^q} p_n^{-s+it_0}\right)$$

im ganzen Streifen $\sigma_1 - \varepsilon < \sigma < \sigma_2 + \varepsilon$ (und also speziell auf den Rändern der Rechtecken $R_i'(t_0)$ und $R_y'(t_0)$) der Ungleichung (15). Mit der getroffenen Wahl der Funktionen $f_{t_0}^*(s)$ ist also eine Funktion $n_a^*(t_0)$ definiert, die zwischen $n_a^i(t_0)$ und $n_a^y(t_0)$ fällt. Von dieser Funktion soll nun gezeigt werden, dass sie stückweise konstant ist, und dass der Grenzwert

$$G^*(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\, d t_0$$

existiert.

Für jeden Wert von t_0 ist die Anzahl $n_a^*(t_0)$ der a-Stellen von $f_{t_0}^*(s)$ im Rechteck $R(t_0)$ gleich der Anzahl der a-Stellen der Funktion

$$f_{t_0}^*(s + i t_0) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - e^{-i\cdot 2\pi\theta_n^q} p_n^{-s}\right) = f^q(s)$$

im Rechteck $R(0)$. Von solchen Funktionen $f^q(s)$ gibt es nur eine endliche Anzahl, nämlich P^N; die Anzahl $n_a^*(t_0)$ ist also stückweise konstant und nimmt in allen Teilintervallen von $-\infty < t_0 < +\infty$, in denen der Punkt $\left(t_0 \frac{\log p_1}{2\pi}, t_0 \frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, t_0 \frac{\log p_N}{2\pi}\right)$ mod. 1 in Q_N^q fällt, einen nur von q abhängigen Wert n_a^q an. Bezeichnen wir also mit $l^q(T)$ die Länge derjenigen dieser Intervalle, die dem Intervall $-T < t < T$ angehören, so wird

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\, d t_0 = \sum_{q=1}^{P^N} n_a^q \frac{l^q(T)}{2T}. \tag{18}$$

Nun konvergiert aber für $T \to \infty$ nach dem Kronecker-Weylschen Satze jede der Grössen

$$\frac{l^q(T)}{2T}$$

gegen das Mass $\frac{1}{P^N}$ des entsprechenden Würfels Q_N^q. Es konvergiert somit die Grösse (18) gegen den Mittelwert

$$G^*(a) = \sum_{q=1}^{P^N} \frac{n_a^q}{P^N};$$

hiermit ist der Hilfssatz 8 bewiesen.

Mit Hilfe der Hilfssätze 7 und 8 ist nun der Beweis des Satzes VIII in wenigen Worten vollendet. Es sei $\eta > 0$ beliebig gegeben; wir wählen nach dem Hilfssatz 7 ein $\varepsilon = \varepsilon(\eta) < \varepsilon_0$ so, dass für diesen Wert von ε

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0))\,dt_0 < \eta.$$

Dann ist für alle hinreichend grosse T etwa für $T > T_0$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0))\,dt_0 < \eta.$$

Zum gegebenen ε wählen wir nun nach dem Hilfssatz 8 eine Funktion $n_a^*(t_0)$, für die erstens

$$n_a^i(t_0) \leqq n_a^*(t_0) \leqq n_a^y(t_0)$$

und zweitens der Grenzwert

$$G^*(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\,dt_0 \tag{19}$$

existiert. Wegen

$$n_a^i(t_0) \leqq n_a(t_0) \leqq n_a^y(t_0)$$

ist nun

$$|n_a(t_0) - n_a^*(t_0)| \leqq n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0);$$

für alle $T > T_0$ hat man daher

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 - \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\, d t_0 \right| < \eta .$$

Aus dieser Ungleichung in Verbindung mit (19) folgt aber für $T \to \infty$

$$G^*(a) - \eta \leqq \varliminf_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 ; \quad \varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 \leqq G^*(a) + \eta$$

und also

$$\varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 - \varliminf_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 \leqq 2\eta .$$

Diese Ungleichung, in welcher η beliebig ist, zeigt aber die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 ,$$

und hiermit ist der Satz VIII bewiesen.