ÜBER DIE DARSTELLUNG DER INTEGRALE LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

VON

ALFRED TAUBER

in WIEN.

Die Dualität[1] in der Abhängigkeit der Lösungen einer linearen Differentialgleichung

$$(1) \qquad L_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + L_1(x)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + L_m(x)y = 0,$$

einerseits von der Unabhängigen x, anderseits von dem gewählten Anfangswert der letzteren, für den ihnen gewisse Bedingungen vorgeschrieben sind, kommt in dem Satze zum Ausdruck, dass diejenige ausgezeichnete Lösung $Y(x, c)$ von (1), welche für $x=c$ samt ihren ersten $m-2$ Differentialquotienten nach x verschwindet, während ihr $(m-1)$-ter Differentialquotient den Wert $(-1)^{m-1}/L_0(c)$ annehmen soll, *gleichzeitig auch* (vgl. § 1) *der Adjungierten von* (1) *mit c als Unabhängiger*

$$(2) \qquad \tilde{L}_0(c)\frac{\partial^m Y(x, c)}{\partial c^m} + \tilde{L}_1(c)\frac{\partial^{m-1} Y(x, c)}{\partial c^{m-1}} + \cdots + \tilde{L}_m(c)\, Y(x, c) = 0$$

$$(3) \qquad \tilde{L}_0 = L_0,\ \tilde{L}_1 = m\, L'_0 - L_1, \ldots\ \tilde{L}_\varkappa = \sum_{i=0}^{\varkappa} (-1)^i \binom{m-i}{\varkappa-i} L_i^{(\varkappa-i)}$$

[1] Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bilden mehrere meiner in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften über dieses Thema erschienenen Mitteilungen (1919—1927), um aber nicht auf die letzteren Bezug nehmen zu müssen, werden die dort erhaltenen Sätze im folgenden, mit wesentlich einfacheren Beweisen, wieder abgeleitet. Betreffs der Möglichkeit einer Übertragung auf lineare partielle Differentialgleichungen cf. die genannten Berichte II a, Bd. 134, S. 161.

genügt. Ebenso verschwindet, als Lösung von (2) betrachtet, $Y(x, c)$ für $c=x$ samt den ersten $m-2$ Differentialquotienten nach c, während der $(m-1)$-te den Wert $1/L_0(x)$ annimmt. Im Verein mit $\partial Y/\partial c$, $\partial^2 Y/\partial c^2 \ldots \partial^{m-1} Y/\partial c^{m-1}$ konstituiert Y ein Fundamentalsystem von (1), und die Kenntnis von Y dient deshalb auch, nach einem bekannten Cauchyschen Satze, dem Zweck, für alle inhomogenen Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} L_\varkappa(x) \frac{d^{m-\varkappa} \mathfrak{y}}{d x^{m-\varkappa}} = K(x)$$

ein Integral

$$\mathfrak{y}=(-1)^{m-1} \int_c^x K(u)\, Y(x, u)\, du$$

angeben zu können.

Nun folgt aus (2) durch Vertauschung von x, c

$$\tilde{L}_0(x) \frac{\partial^m Y(c, x)}{\partial x^m} + \tilde{L}_1(x) \frac{\partial^{m-1} Y(c, x)}{\partial x^{m-1}} + \cdots + \tilde{L}_m(x) Y(c, x)=0, \tag{4}$$

und da $Y(c, x)$ durch die in (1) auftretenden Funktionen $L_0(x), L_1(x), \ldots L_m(x)$ eindeutig definiert ist, muss die in vollkommen gleicher Weise mittels $\tilde{L}_0(x)$, $\tilde{L}_1(x)$, $\ldots \tilde{L}_m(x)$ gebildete Funktion $\tilde{Y}(c, x)$ eine Lösung der Adjungierten von (4), d. h. der vorgegebenen Differentialgleichung (1) sein. Zwischen $Y(x, c)$ und $\tilde{Y}(c, x)$ besteht der Zusammenhang

$$\tilde{Y}(c, x) = (-1)^{m-1} Y(x, c), \tag{5}$$

wenn also $Y(x, c)$ als Integral von (2) in eine Potenzreihe

$$Y(x, c) = \sum_{\nu=m-1}^{\infty} \psi_\nu(x) \frac{(c-x)^\nu}{\nu!}, \quad \psi_{m-1}(x) = \frac{1}{L_0(x)} \tag{6}$$

entwickelt wird, und wenn genau wie die Funktionen ψ mittels $L_0, L_1, \ldots L_m$ analog Funktionen $\tilde{\psi}$ mittels $\tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \ldots \tilde{L}_m$ gebildet werden, *erhält* $Y(x, c)$ *die doppelte Darstellungsform*

$$Y(x, c) = \sum_{\nu=m-1}^{\infty} \psi_\nu(x) \frac{(c-x)^\nu}{\nu!} = (-1)^{m-1} \sum_{\nu=m-1}^{\infty} \tilde{\psi}_\nu(c) \frac{(x-c)^\nu}{\nu!}. \tag{7}$$

Die erstere gestattet immerhin den Übergang des Parameters c in eine Nullstelle von $L_0(x)$ wenigstens formal.

Für beide Koeffizientenreihen ψ, $\tilde{\psi}$ existieren lineare Rekursionen, welche durch Einführung der Funktionen

$$(8) \qquad L_{hi}(x) = \sum_{\varkappa=0}^{i} \binom{h}{i-\varkappa} L_{\varkappa}^{(i-\varkappa)}(x), \; L_{0i}(x) = L_i(x), \; L_{hi}(x) = 0 \text{ für } i < 0,$$

wobei $L_{m+1}(x)$, $L_{m+2}(x)$, ... gleich Null definiert sind, die Gestalt

$$(9) \qquad L_0 \psi_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\nu+1-m} (-1)^\varkappa L_{\varkappa-\nu-1,\varkappa} \psi_{\nu-\varkappa} = 0, \quad L_0 \tilde{\psi}_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\nu+1-m} L_{\nu-m} \tilde{\psi}_{\nu-\varkappa} = 0, \quad \nu \geqq m$$

erlangen, *woraus eine explizite Darstellung dieser Entwicklungskoeffizienten* ψ, $\tilde{\psi}$ *als Determinanten folgt* (§ 2)

$$(10) \qquad (-1)^{m-1} L_0^{\nu+2-m} \psi_\nu = \operatorname{Det} | L_{-\varkappa-m,\, i-\varkappa+1} |,$$

$$(-1)^{\nu+1-m} L_0^{\nu+2-m} \tilde{\psi}_\nu = \operatorname{Det} | L_{i,\, i-\varkappa+1} |, \quad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu - m.$$

Die Rekursionen (9) haben die endliche Stufe n, wenn die L Polynome und $L_0^{(n)}$, $L_1^{(n-1)}$, $L_2^{(n-2)}$, ... sämtlich Konstante sind.

Zu vereinfachter Darstellung können in manchen Fällen auch die Polynomiallösungen linearer Differentialgleichungen herangezogen, und hiebei die letzteren, ohne die Allgemeinheit der Betrachtung einzuschränken, in der Form

$$(11) \qquad L_0 \overline{(x)}^{n} \frac{d^n y}{d x^n} + L_1 \overline{(x)}^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + L_{n-1} \overline{(x)}^{1} \frac{d y}{d x} + L_n y = 0$$

angenommen werden, derart dass das Polynom $L_\varkappa \overline{(x)}^{n-\varkappa}$ höchstens den Grad $n-\varkappa$ hat. Dann *ist einem willkürlich vorgegebenen System von* $n-1$ *Polynomen* $L_0 \overline{(x)}^{n}$, $L_1 \overline{(x)}^{n-1}$, ... $L_{n-1} \overline{(x)}^{1}$ *insbesonders eine Halphensche Reihe von Polynomen* η_ν *zugeordnet*

$$(12) \qquad \eta_\nu = \operatorname{Det} | L_{i,\, i-\varkappa+n-1} |, \quad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu - 1, \quad L_{in} = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \binom{i}{n-\varkappa} L_\varkappa^{(n-\varkappa)},$$

aus welchen sich durch einfache Substitutionen die Polynomiallösungen von (11), ebenfalls in Determinantenform, ableiten lassen, vgl. § 3 (13).

Unter gewissen Voraussetzungen kann sich eine Quadraturdarstellung für y, durch eine oder mehrere Integrationen, als zweckmässig erweisen, wofern nämlich die zu integrierende Funktion eine einfachere Entwicklung als die der Potenzreihen (7) gestattet. Ausserdem soll die zu integrierende Funktion so gewählt sein, dass jeder zulässige Integrationsweg zwischen c und x eine Lösung von (1) hervorbringt.

Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$L_0(x)\,y'' + L_1(x)\,y' + L_2(x)\,y = 0, \tag{13}$$

deren Koeffizienten $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ Polynome von x sind, *gelangt man so zur Integraldarstellung einer Lösung*

$$y^* = \int_c^x f(v) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{G_\nu(v)}{\nu!^2} \zeta^\nu \, dv, \quad \zeta = \frac{(c-v)(x-v)}{L_0(v)} \tag{14}$$

mit der Definition $L_0 f' + L_1 f = 0$ *für die Funktion* f *und*

$$G_\nu(v) = \mathrm{Det}\,|L_{i,\,i-\varkappa+2}(v)|, \quad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu - 1 \tag{15}$$

für die Polynome G. Diese letzteren reduzieren sich für die Stufe $n=2$ auf leicht zu bestimmende Konstante, und für $n=3$, welcher Fall die verallgemeinerte Lamésche Differentialgleichung, die elliptische Zylinderfunktion, sowie die Heinesche Funktion mitumfasst, auf die oben η_ν genamten Polynome einer Halphenschen Reihe (§§ 5, 6).

Für ein beliebiges n wird die Bestimmung der Polynome G, da sie zwei simultane Rekursionsbedingungen erfüllen müssen, nur durchführbar, wenn man von dem eigentümlichen *Zusammenhang zwischen der Quadraturdarstellung* (14) *von* y^* *und dem Kettenbruch für die logarithmische Derivierte einer Lösung* y *von* (13) *Gebrauch macht.* Dieser Kettenbruch, als Inbegriff von Quotienten $Q_\nu(x)/R_\nu(x)$, deren Zähler und Nenner ein und dieselbe lineare Rekursion besitzen

$$\begin{aligned} &Q_\nu + L_{\nu 1}\, Q_{\nu-1} + L_{\nu 2}\, L_0\, Q_{\nu-2} + L_{\nu 3}\, L_0^2\, Q_{\nu-3} + \cdots = 0 \\ &R_\nu + L_{\nu 1}\, R_{\nu-1} + L_{\nu 2}\, L_0\, R_{\nu-2} + L_{\nu 3}\, L_0^2\, R_{\nu-3} + \cdots = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

verdient schon an sich Erörterung, aber auch wegen seines Zusammenhanges mit den beiden anderen Lösungsformen, nämlich einerseits der Potenzreihe (7), weil

$R(x) = \tilde{\psi}_{\nu+2}(x)\, L_0(x)^{\nu+2}$ ist, anderseits dem Integrale (13), indem sich $G_\nu(v)$ als identisch mit

$$(17) \qquad \frac{Q_{\nu-1}(v)\, R_{\nu-2}(v) - Q_{\nu-2}(v)\, R_{\nu-1}(v)}{L_0(v)^{\nu-1}}$$

herausstellt, wodurch der Ansatz (15) beweisbar wird (§ 7).

Indes ist zu beachten, dass der Kettenbruch für y'/y, falls er konvergiert, *noch keineswegs die bei rationalen Koeffizienten der Differentialgleichung zu fordernde Darstellung von y selbst als Grenzwert rationaler Funktionen leistet.* Allerdings besteht die Möglichkeit eine der Potenzreihen (7) oder sonstige Potenzreihen für y in korrespondierende Kettenbrüche umzuwandeln, einfacher erscheint es aber bei Differentialgleichungen 2. Ordnung, *den Kettenbruch für y'/y zu benützen, und zwar dessen Näherungsnenner R_ν als Zähler von Quotienten R_ν/S_ν anzunehmen,* deren zugehörige Nenner dann noch geeignet zu wählen sind, und deren Grenzwert eben y sein soll. Dabei kann auch der Zusammenhang mit den Kettenbrüchen für Integrale inhomogener Differentialgleichungen 1. Ordnung gewahrt bleiben (§ 8).

§ 1. Beweis des Dualitätssatzes.

Betrachtet man eine homogene lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{\mu=1}^{m} P_\mu(x) \frac{d^{m-\mu} y}{dx^{m-\mu}}$$

und bildet irgend eine lineare Verbindung U von y, $dy/dx, \ldots d^{m-1}y/dx^{m-1}$

$$(2) \qquad U = \varphi_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \varphi_2(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + \varphi_m(x) y$$

so können auch deren Differentialquotienten $d^h U/dx^h$ mittels (1) linear durch y, $dy/dx, \ldots d^{m-1}y/dx^{m-1}$ ausgedrückt werden

$$(3) \qquad \frac{d^h U}{dx^h} = \varphi_{h1}(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \varphi_{h2}(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + \varphi_{hm}(x) y.$$

Es handelt sich zunächst darum, die Beziehungen zwischen den Koeffizienten $\varphi_{h1}, \varphi_{h2} \ldots$ explizit aufzustellen und zu zeigen, wie sich $\varphi_{h2}, \ldots \varphi_{hm}$ auf φ_{h1},

$\varphi_{h+1,1}$, $\varphi_{h+2,1}$, ... zurückführen lassen, andererseits die Rekursion anzugeben welche φ_{h1}; $\varphi_{h-1,1}$, $\varphi_{h-2,1}$, ... verbindet.

Die letztere lautet, wenn man zur Abkürzung

$$\chi_h = \varphi_{h1}, \quad \chi_{hi} = \sum_{\lambda=0}^{i} (-1)^\lambda \binom{i}{\lambda} \chi_{h+i-\lambda}^{(\lambda)} \tag{4}$$

setzt und die Koeffizienten $\tilde{P}_\nu$ *der zu* (1) *Adjungierten einführt*

$$\sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \tilde{P}_\nu \chi_{h,\,m-\nu} = 0, \quad \tilde{P}_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{m-i}{\nu-i} P_i^{(\nu-i)}, \quad \tilde{P}_0 = P_0 = -1. \tag{5}$$

Als independente Darstellung der Koeffizienten $\varphi_{h2} \ldots \varphi_{hm}$ *durch die Funktionen* χ_h *findet man, für* $\mu = 1, 2, \ldots m-1$

$$\varphi_{h,\,\mu+1} = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu+1} p_{\mu\nu} \chi_{h,\,m-\nu}, \quad p_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{\mu-i}{\nu-i} P_i^{(\nu-i)}. \tag{6}$$

Beweis: Aus der durch Differentiation von (3) nach x entstehenden Gleichung

$$\frac{d^{h+1}U}{dx^{h+1}} = \left[\varphi_{h1}\left(P_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + P_2 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m y\right) + \varphi'_{h1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right] +$$
$$+ \left[\varphi_{h2} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \varphi'_{h2} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right] + \cdots + \left[\varphi_{hm} \frac{dy}{dx} + \varphi'_{hm} y\right]$$

folgt für die Funktionen $\varphi_{h\mu}$ die Beziehung

$$\varphi_{h+1,\,\mu} = \varphi'_{h\mu} + P_\mu \varphi_{h1} + \varphi_{h,\,\mu+1}, \qquad h \geqq 0 \tag{7}$$

mit Giltigkeit bei $\mu = 1, 2, \ldots m$, wofern $\varphi_{h,\,m+1}$ für alle h gleich Null definiert wird.

Bezüglich der zu beweisenden Gleichung (6) bleibt, da sie für $\mu = 1$ mit (7) übereinstimmt:

$$\varphi_{h2} = \chi_{h1} - P_1 \chi_{h0} \text{ resp. } \chi_{h+1} = \chi'_h + P_1 \chi_h + \varphi_{h2},$$

nur der Schluss von μ auf $\mu + 1$ zu ziehen. Hiezu differentiiert man die für ein bestimmtes μ als bereits bewiesen gedachte Gleichung (6)

$$\varphi'_{h,\mu+1} = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu+1} p_{\mu\nu} \chi'_{h,\mu-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu+1} p'_{\mu\nu} \chi_{h,\mu-\nu} \tag{8}$$

und entfernt mithilfe der leicht zu verifizierenden Gleichungen

$$\chi'_{hi} = \chi_{h+1,i} - \chi_{h,i+1}, \quad p'_{\mu\nu} = p_{\mu+1,\nu+1} - p_{\mu,\nu+1} \tag{9}$$

die Differentialquotienten aus beiden Summen auf der rechten Seite von (8)

$$(10) \quad \begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu+1} p_{\mu\nu} \chi'_{h,\mu-\nu} = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu+1} p_{\mu\nu} (\chi_{h+1,\mu-\nu} - \chi_{h,\mu-\nu+1}) \\ &\sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu+1} p'_{\mu\nu} \chi_{h,\mu-\nu} = \sum_{\nu=1}^{\mu+1} (-1)^{\nu} p'_{\mu,\nu-1} \chi_{h,\mu-\nu+1} = \sum_{\nu=1}^{\mu+1} (-1)^{\nu} (p_{\mu+1,\nu} - p_{\mu\nu}) \chi_{h,\mu-\nu+1} \end{aligned}$$

so findet man die Summe der beiden Ausdrücke (10), das heisst $\varphi'_{h,\mu+1}$, unter Berücksichtigung von $p_{n0} = p_{n+1,0} = -1$ und $p_{\mu,\mu+1} = (-1)^{\mu+1} P_{\mu+1}$

$$\varphi'_{h,\mu+1} = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu+1} p_{\mu\nu} \chi_{h+1,\mu-\nu} - \sum_{\nu=0}^{\mu+1} (-1)^{\nu+1} p_{\mu+1,\nu} \chi_{h,\mu+1-\nu} - P_{\mu+1} \chi_h. \tag{10a}$$

Der Voraussetzung nach ist die erste Summe rechts $\varphi_{h+1,\mu+1}$, *also muss gemäss der allgemein geltenden Beziehung* (7) *die zweite Summe mit* $\varphi_{h,\mu+2}$ *zusammenfallen*, was die Richtigkeit der Formel (6) für alle $\mu \leqq m-1$ besagt. Ebenso folgt aus (10 a) für $\mu = m-1$, dass dann die zweite Summe rechts $\sum_0^m (-1)^{\nu+1} p_{m\nu} \chi_{h,m-\nu}$ verschwinden muss, oder wegen $p_{m\nu} = \tilde{P}_\nu$, dass auch die zu beweisende Rekursion (5) richtig ist.

Ein zweiter Hilfssatz betrifft den speziellen Fall $U = y$, *indem alsdann zwischen den Funktionen* $\varphi_{h\mu}$ *bei fixem* μ *eine lineare Rekursion besteht*, deren Koeffizienten von μ unabhängig sind

$$\varphi_{h\mu} = \sum_{\nu=1}^{h} P_{h-m,\nu} \varphi_{h-\nu,\mu}, \quad P_{hi} = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{h}{i-\lambda} P_\lambda^{(i-\lambda)} = (-1)^i p_{i-h-1,i} \tag{11}$$

mit Beschränkung auf die Werte $h \geqq m$.

Evident wird diese Rekursion für $h = m$, denn es verschwinden bei $U = y$ alle Koeffizienten $\varphi_{m-1,\mu}, \ldots \varphi_{1\mu}, \varphi_{0\mu}$ mit der einzigen Ausnahme $\varphi_{m-\mu,\mu} = 1$, daher steht rechts in (11) für $h=m$ nur der eine Term $P_{0\mu}\varphi_{m-\mu,\mu}=P_\mu$, und das ist auch wirklich der Wert von $\varphi_{m,\mu}$. Angenommen nun, dass die aus (11) gewonnenne Werte von $\varphi_{m\mu},\dots\varphi_{h\mu}$ im Verein mit $\varphi_{0\mu},\varphi_{1\mu},\dots\varphi_{m-1,\mu}$ den für alle $h\geqq 0$ vorgeschriebenen Bedingungen (7) entsprechen, so verlangt der Schluss von h auf $h+1$, *dass die gemäss* (11) *für* $\varphi_{h+1,\mu}$ *gebildete Summe*

$$\sum_{\nu=1}^{h+1} P_{h+1-m,\nu}\,\varphi_{h+1-\nu,\mu}$$

mit

$$\varphi'_{h\mu}+P_\mu\varphi_{h1}+\varphi_{h,\mu+1}=\sum_{\nu=1}^{h}\left[(P_{h-m,\nu}\,\varphi'_{h-\nu,\mu}+P'_{h-m,\nu}\,\varphi_{h-\nu,\mu})+\right.$$
$$\left.+\,P_\mu P_{h-m,\nu}\,\varphi_{h-\nu,1}+P_{h-m,\nu}\,\varphi_{h-\nu,\mu+1}\right]$$

übereinstimmt. Wegen der Beziehung (7)

$$\varphi_{h+1-\nu,\mu}=\varphi'_{h-\nu,\mu}+P_\mu\varphi_{h-\nu,1}+\varphi_{h-\nu,\mu+1}$$

vereinfacht sich die zu verifizierende Gleichung in

$$(12)\qquad \sum_{\nu=1}^{h+1}P_{h+1-m,\nu}\,\varphi_{h+1-\nu,\mu}=\sum_{\nu=1}^{h}P_{h-m,\nu}\,\varphi_{h+1-\nu,\mu}+\sum_{\nu=1}^{h}P'_{h-m,\nu}\,\varphi_{h-\nu,\mu}.$$

Nach ihrer weiteren Umformung, wenn noch in der zweiten Summe rechts die Variable ν durch $\nu-1$ und $P'_{h-m,\nu-1}$ durch $P_{h+1-m,\nu}-P_{h-m,\nu}$ ersetzt wird, vgl (9),

$$(13)\quad \sum_{\nu=1}^{h+1}P_{h+1-m,\nu}\,\varphi_{h+1-\nu,\mu}=\sum_{\nu=1}^{h}P_{h-m,\nu}\,\varphi_{h+1-\nu,\mu}+\sum_{\nu=2}^{h+1}(P_{h+1-m,\nu}-P_{h-m,\nu})P_{h-\nu,\mu}$$

erhellt wegen $P_{h-m,1}=P_{h+1-m,1}=P_1$ und $P_{h-m,h+1}=0$ ihre Richtigkeit.

Bildet man jetzt die m Generierenden der $\varphi_{h\mu}(x)$

$$(14)\qquad Z_\mu=\sum_{h=0}^{\infty}\varphi_{h\mu}(x)\frac{\varepsilon^h}{h!},\qquad \mu=1,2,\dots m$$

so genügt jede von ihnen der (gewöhnlichen) linearen Differentialgleichung bezüglich ε

$$(15)\qquad \sum_{\lambda=0}^{m}P_\lambda(x+\varepsilon)\frac{\partial^{m-\lambda}Z}{\partial\varepsilon^{m-\lambda}}=0.$$

Denn durch die Substitution der Potenzreihen

$$P_\lambda(x+\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty} P_\lambda^{(n)}(x)\frac{\varepsilon^n}{n!}, \qquad Z=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\Phi_\varkappa(x)\frac{\varepsilon^\varkappa}{\varkappa!}$$

verwandelt sich die Differentialgleichung (15) in die bei jedem Werte von ε zu erfüllende Gleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty} P_\lambda^{(n)}(x)\frac{\varepsilon^n}{n!}\sum_{\varkappa=m-\lambda}^{\infty}\Phi_\varkappa(x)\frac{\varepsilon^{\varkappa+\lambda-m}}{(\varkappa+\lambda-m)!}=0,$$

sodass die Ordnung der linken Seite nach den Potenzen ε^ν, $\nu=\varkappa+\lambda+n-m$ und die Nullsetzung des Koeffizienten von $\varepsilon^\nu/\nu!$

$$\sum_{\lambda=0}^{m}\sum_{n=0}^{\nu}\binom{\nu}{n}P_\lambda^{(m)}(x)\,\Phi_{\nu+m-\lambda-n}(x)=\sum_{i=0}^{\nu+m}\Phi_{\nu+m-i}(x)\sum_{\lambda=0}^{i}\binom{\nu}{i-\lambda}P_\lambda^{(i-\lambda)}(x)$$

für die Funktionen $\Phi_\varkappa(x)$ die Bedingung liefert

$$(16)\qquad \sum_{i=0}^{\nu+m}\Phi_{\nu+m-i}P_{\nu i}=0 \quad\text{oder}\quad \sum_{i=0}^{h}\Phi_{h-i}P_{h-m,\,i}=0, \qquad h\geqq m.$$

Diese Rekursion der $\Phi_h(x)$ ist aber mit derjenigen der $\varphi_{h\mu}(x)$ in (11) identisch.

An der Formel (16) würde sich nichts geändert haben, wenn P_0 in (15) irgend eine Funktion, und nicht wie bisher den speziellen Wert (-1) bedeutet hätte, nur muss die Definition der $P_{hi}=\sum_{\lambda=0}^{i}\binom{h}{i-\lambda}P_\lambda^{(i-\lambda)}$ aufrecht bleiben. Setzt man daher $P_\varkappa=-\mathrm{L}_\varkappa/\mathrm{L}_0$ und multipliziert die Differentialgleichung (15) mit $\mathrm{L}_0(x+\varepsilon)$, welche dadurch in $\sum_{\lambda=0}^{m}\mathrm{L}_\lambda(x+\varepsilon)\,\partial^{m-\lambda}Z/\partial\varepsilon^{m-\lambda}=0$ übergeht, so erhält man für die Funktionen $\varphi_{h\mu}$ eine neue, genau wie (16) abzuleitende Rekursion

$$(16\,\text{a})\qquad \sum_{i=0}^{h}\varphi_{h-i,\,\mu}\,\mathrm{L}_{h-m,\,i}=0, \qquad \mathrm{L}_{hi}=\sum_{\lambda=0}^{i}\binom{h}{i-\lambda}\mathrm{L}_\lambda^{(i-\lambda)}.$$

Speziell nun die Funktion Z_1 genügt zugleich, wenn $\varepsilon=c-x$ gesetzt wird, der Adjungierten von (1) mit x als Unabhängiger

$$\frac{\partial^m Z_1(x,c)}{\partial x^m} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \tilde{P}_\varkappa(x) \frac{\partial^{m-\varkappa} Z_1(x,c)}{\partial x^{m-\varkappa}}. \tag{17}$$

Um nämlich aussagen zu können, wann irgend eine Reihe z der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(x) \frac{(c-x)^\nu}{\nu!}$$

Integral einer linearen Differentialgleichung mit x als Unabhängiger wird, bildet man, falls die gliedweise Differentiation statthaft ist, die Differentialquotienten

$$\frac{d^\varkappa z}{dx^\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}\left[\Psi_\nu(x) \frac{(c-x)^\nu}{\nu!}\right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} (-1)^\lambda \binom{\varkappa}{\lambda} \Psi_\nu^{(\varkappa-\lambda)}(x) \frac{(c-x)^{\nu-\lambda}}{(\nu-\lambda)!}$$

oder, nach Potenzen von $(c-x)$ geordnet, bei $h=\nu-\lambda$

$$\frac{d^\varkappa z}{dx^\varkappa} = (-1)^\varkappa \sum_{h=0}^{\infty} \Psi_{h\varkappa}(x) \frac{(c-x)^h}{h!}, \quad \Psi_{h\varkappa}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} (-1)^\lambda \binom{\varkappa}{\lambda} \Psi_{h+\varkappa-\lambda}^{(\lambda)}(x) \tag{18}$$

und substituiert diese Werte (18) in die vorgegebene Differentialgleichung, etwa wieder in (1):

hieraus ergeben sich, durch Nullsetzung des Koeffizienten einer jeden Potenz $(c-x)^h$ *die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Funktionen* Ψ

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} (-1)^\varkappa P_\varkappa(x) \Psi_{h,\, m-\nu}(x) = 0, \qquad h \geqq 0, \tag{19}$$

damit die Reihe $\sum_0^\infty \Psi_\nu(x) \frac{(c-x)^\nu}{\nu!}$ *eine Lösung von* (1) *sei.*

Durch Vergleich der Bedingungen (19) mit den Rekursionen (5) für die Funktionen $\chi_h = \varphi_{h1}$ ist ersichtlich, dass die Reihe $z = \sum_0^\infty \chi_h(x) \frac{(c-x)^h}{h!}$ der Differentialgleichung $\sum_{\varkappa=0}^{m} \tilde{P}_\varkappa(x) \frac{d^{m-\varkappa} z}{dx^{m-\varkappa}} = 0$ genügt, wie immer auch die Funktion U gewählt war, aber in dem speziellen Falle $U=y$, $\chi_0=0$, $\chi_1=0$, $\ldots$ $\chi_{m-2}=0$, $\chi_{m-1}=1$ wird z mit $Z_1(x,c)$ identisch, *was den Dualitätssatz beweist:*

(20) *Ist* $y^{(m)} = P_1(x)\, y^{(m-1)} + P_2(x)\, y^{(m-2)} + \cdots + P_m(x)\, y$ *eine vorgegebene Differentialgleichung, und berechnet man den h-ten Differentialquotienten von y nach x als lineares Aggregat von* $y, y', \ldots y^{(m-1)}$

$$y^{(h)} = \varphi_{h\,1}(x) y^{(m-1)} + \varphi_{h\,2}(x) y^{(m-2)} + \cdots + \varphi_{h\,m}(x) y$$

so genügt die Funktion $Z_1(x, c) = \sum_{h=m-1}^{\infty} \varphi_{h\,1}(x) \frac{(c-x)^h}{h!}$ *gleichzeitig den beiden Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial^m Z_1}{\partial x^m} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \tilde{P}_\varkappa(x) \frac{\partial^{m-\varkappa} Z_1}{\partial x^{m-\varkappa}}, \quad \frac{\partial^m Z_1}{\partial c^m} = \sum_{\varkappa=1}^{m} P_\varkappa(c) \frac{\partial^{m-\varkappa} Z_1}{\partial c^{m-\varkappa}}.$$

Die Frage betreffs der Statthaftigkeit der gliedweisen Differentiation ist für die Reihen $Z_\mu = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_{h\mu}(x) \frac{(c-x)^h}{h!}$ sofort zu bejahen, weil die hiedurch entstehenden Reihen

$$\sum_{h=0}^{\infty} [\varphi'_{h\mu}(x) - \varphi_{h+1,\,\mu}(x)] \frac{(c-x)^h}{h!} = -P_\mu(x)\, Z_1 - Z_{\mu+1}$$

vgl. (7) *ebensowie die Z selbst gleichmässig in Bezug auf x konvergieren.* Der Cauchysche Majorantenbeweis für die Darstellung der Integrale Z einer Differentialgleichung als Potenzreihen zeigt eben unter Einem, dass die letzteren auch *gleichmässig bezüglich des gewählten Anfangswertes der unabhängigen Variabeln konvergieren.* Im vorliegenden Falle $\sum_{\lambda=0}^{m} P_\lambda(c)\, \partial^{m-\lambda} Z / \partial c^{m-\lambda} = 0$ ist c die Unabhängige, x deren Anfangswert, und die Potenzreihenentwicklung der Z_μ solange erlaubt, als $|c-x|$ unter der Distanz zwischen dem Punkt x und dem ihm nächstgelegenen Unstetigkeitspunkt der Koeffizienten P_λ bleibt.

Folgerungen aus dem Satz (20).

Nunmehr seien die Funktionen $\tilde{\chi}_h(x)$ ganz so mittels der Koeffizienten $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \ldots \tilde{P}_m$ definiert, wie die $\chi_h(x)$ aus $P_0, P_1, \ldots P_m$, dann wird die zu Z_1 korrespondierende Reihe

$$\Upsilon(x, c) = \sum_{h=m-1}^{\infty} \tilde{\chi}_h(x) \frac{(c-x)^h}{h!}, \quad \tilde{\chi}_{m-1}(x) = 1 \tag{21}$$

eine Lösung von (1) *bezüglich x und ihrer Adjungierten bezüglich c*

$$\frac{\partial^m \Upsilon}{\partial x^m} = \sum_{\varkappa=1}^{m} P_\varkappa(x) \frac{\partial^{m-\varkappa} \Upsilon}{\partial x^{m-\varkappa}}; \quad \frac{\partial^m \Upsilon}{\partial c^m} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \tilde{P}_\varkappa(c) \frac{\partial^{m-\varkappa} \Upsilon}{\partial c^{m-\varkappa}}. \tag{21 a}$$

Um den allgemeineren Fall herbeizuführen, wo der Koeffizient von $d^m y / dx^m$ nicht mehr wie oben den Wert 1 hat, braucht man nur

$$P_\varkappa(x) = -\mathrm{L}_\varkappa(x)/\mathrm{L}_0(x), \quad \Upsilon(x, c) = \mathrm{L}_0(c)\, Y(x, c) \tag{22}$$

zu setzen, woraus, wenn man von dem leicht zu verifizierenden Zusammenhang zwischen den $\tilde{P}$ und den zu $\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \ldots \mathrm{L}_m$ adjungierten Koeffizienten $\tilde{\mathrm{L}}$ Gebrauch macht

$$\tilde{\mathrm{L}}_\varkappa = \sum_{i=0}^{\varkappa} (-1)^i \binom{m-i}{\varkappa-i} \mathrm{L}_i^{(\varkappa-i)} = -\sum_{\lambda=0}^{\varkappa} \binom{m-\lambda}{\varkappa-\lambda} \mathrm{L}_0^{(\varkappa-\lambda)} \tilde{P}_\lambda \tag{22 a}$$

sich ergibt, *dass $Y(x, c)$, wie in der Einleitung behauptet, den beiden Differentialgleichungen genügt*

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} \mathrm{L}_\varkappa(x) \frac{\partial^{m-\varkappa} Y}{\partial x^{m-\varkappa}} = 0, \quad \sum_{\varkappa=0}^{m} \tilde{\mathrm{L}}_\varkappa(c) \frac{\partial^{m-\varkappa} Y}{\partial c^{m-\varkappa}} = 0. \tag{23}$$

Gemäss Formel (16 a) sind also in der Entwicklung

$$Y = \sum_{\nu=m-1}^{\infty} \psi_h(x) \frac{(c-x)^h}{h!}, \quad \psi_{m-1}(x) = \frac{1}{\mathrm{L}_0(x)}$$

die Koeffizienten $\psi_h(x)$ durch die Rekursion

$$\sum_{i=0}^{h-(m-1)} \psi_{h-i}\, \tilde{\mathrm{L}}_{h-m,\, i} = 0, \quad \tilde{\mathrm{L}}_{h\, i} = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{h}{i-\lambda} \tilde{\mathrm{L}}_\lambda^{(i-\lambda)} = (-1)^i\, \mathrm{L}_{i-h-m-1,\, i} \tag{24}$$

d. h. durch die erste der Gleichungen (9) der Einleitung bestimmt. Die Richtigkeit der Umformung $\tilde{\mathrm{L}}_{h i} = (-1)^i\, \mathrm{L}_{i-h-m-1,\, i}$ erkennt man aus dem Vergleich von

$$\tilde{\mathrm{L}}_{hi}=\sum_{\lambda=0}^{i}\binom{h}{i-\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}(-1)^{\mu}\binom{m-\mu}{\lambda-\mu}\mathrm{L}_{\mu}^{(i-m)}$$

und

$$(-1)^{i}\,\mathrm{L}_{i-h-m-1,\,i}=(-1)^{i}\sum_{\mu=0}^{i}\binom{i-h-m-1}{i-\mu}\mathrm{L}_{\mu}^{(i-\mu)}=\sum_{\mu=0}^{i}(-1)^{\mu}\binom{h+m-\mu}{i-\mu}\mathrm{L}_{\mu}^{(i-\mu)}.$$

Korrespondierend der Gleichung (24) besteht eine solche für die Funktionen $\tilde{\psi}$ der Einleitung.

Auf inhomogene Differentialgleichungen

$$y^{(m)}=P_1(x)\,y^{(m-1)}+P_2(x)\,y^{(m-2)}+\cdots+P_m(x)\,y+V(x)$$

lässt sich der Satz (15), durch eine der früher angewandten Argumentation vollkommen analoge, *in entsprechend modifizierter Gestalt erweitern.* In dem sukzessive für den h-ten Differentialquotienten von y nach x zu ermittelnden Ausdruck

$$y^{(h)}=\varphi_{h1}(x)\,y^{(m-1)}+\varphi_{h2}(x)\,y^{(m-2)}+\cdots+\varphi_{hm}(x)\,y+V_h(x) \tag{26}$$

bleiben die Koeffizienten $\varphi_{h\mu}(x)$ genau dieselben wie früher bei $V=0$, es ist also nur die Generierende $\mathfrak{z}=\sum^{\infty}V_h(x)\frac{\varepsilon^h}{h!}$ zu betrachten, und zwar genügt sie der inhomogenen Differentialgleichung

$$V(x+\varepsilon)+\sum_{\lambda=0}^{m}P_\lambda(x+\varepsilon)\frac{\partial^{m-\lambda}\mathfrak{z}}{\partial\varepsilon^{m-\lambda}}=0. \tag{27}$$

Ausserdem besteht zwischen den Funktionen $\mathfrak{z}(x,c)=\sum_{h=m}^{\infty}V_h(x)\frac{(c-x)^h}{h!}$ und $Z_1(x,c)$ der Zusammenhang

$$\frac{\partial\mathfrak{z}(x,\,c)}{\partial x}+V(x)\,Z_1(x,c)=0. \tag{27 a}$$

Wieder handelt es sich darum, zu zeigen, dass die betrachteten Funktionen $V_h(x)$ gleichzeitig die zwei Rekursionen erfüllen, welche aus (26) resp. (27) durch nochmalige Differentiation resp. Entwicklung von $V(x+\varepsilon)$, $P_\lambda(x+\varepsilon)$, $\mathfrak{z}$ nach Potenzen von ε resultieren

$$V_{h+1}=V'_h+\varphi_{h1}V,\qquad V^{(m)}=V \tag{28}$$

$$V^{(h-m)}+\sum_{i=0}^{h-m}V_{h-i}P_{h-m,\,i}=0,\qquad h\geqq m. \tag{28 a}$$

Nachdem der Wert $V_m = V$ auch der zweiten Bedingung (28 a) für $h=m$ entspricht, hat man bloss den Schluss von h auf $h+1$ zu führen, was durch Differentiation von (28 a)

$$V^{(h+1-m)} + \sum_{i=0}^{h-m} V'_{h-i} P_{h-m,i} + \sum_{i=0}^{h-m} V_{h-i} P'_{h-m,i} = 0$$

geschieht. In der ersten Summe ersetzt man V'_{h-i} nach (28) durch $V_{h+1-i} - \varphi_{h-i,1} V$, in der zweiten vorerst i durch $i-1$, nachher $P'_{h-m,i-1}$ durch $P_{h+1-m,i} - P_{h-m,i}$ und findet so, mit Rücksicht auf die Rekursion (11) der Koeffizienten φ_{h1} die Gleichung (28 a) für $h+1$ statt h bestätigt.

Die Beziehung (27 a) zwischen $\mathfrak{z}(x, c)$ und $Z_1(x, c)$ ist eine unmittelbare Konsequenz der Rekursion (28).

Andere lineare Rekursionen für die Funktionen $V_h(x)$ ergeben sich, wenn man wie oben $P_\varkappa = -\mathrm{L}_\varkappa/\mathrm{L}_0$ und überdies $V = K/\mathrm{L}_0$ setzt, aus der mit $\mathrm{L}_0(x+\varepsilon)$ multiplizierten Differentialgleichung (27), analog zu (16 a)

$$(29) \qquad \sum_{i=0}^{h-m} V_{h-i} \mathrm{L}_{h-m,i} = K^{(h-m)}, \qquad h \geqq m.$$

§ 2. Die Entwicklungskoeffizienten der ausgezeichneten Lösung $Y(x, c)$.

Als lineare Rekursionen der Koeffizienten ψ_ν, $\tilde{\psi}_\nu$ in den Potenzreihen für die ausgezeichnete Lösung Y

$$(1) \qquad Y(x, c) = \sum_{\nu=m-1}^{\infty} \psi_\nu(x) \frac{(c-x)^\nu}{\nu!} = (-1)^{m-1} \sum_{\nu=m-1}^{\infty} \tilde{\psi}_\nu(c) \frac{(x-c)^\nu}{\nu!}, \quad \psi_{m-1} = \tilde{\psi}_{m-1} = \frac{1}{\mathrm{L}_0}$$

wurden, vgl. (9) der Einleitung, die Gleichungen nachgewiesen

$$\mathrm{L}_0 \psi_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\nu+1-m} (-1)^\varkappa \mathrm{L}_{\varkappa-\nu-1,\varkappa} \psi_{\nu-\varkappa} = 0, \quad \mathrm{L}_0 \tilde{\psi}_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\nu+1-m} \mathrm{L}_{\nu-m,\varkappa} \tilde{\psi}_{\nu-\varkappa} = 0.$$

Hienach sind diese Koeffizienten rationale Funktionen der $\mathrm{L}_{i\varkappa}$ mit dem Nenner $\mathrm{L}_0^{\nu+2-m}$, setzt man also

$$(3) \qquad \psi_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1-m} \omega_{\nu+1-m}}{\mathrm{L}_0^{\nu+2-m}}, \quad \tilde{\psi}_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1-m} \varpi_{\nu+1-m}}{\mathrm{L}_0^{\nu+2-m}}$$

so werden die ω, ϖ Polynome der $L_{i\varkappa}$ mit den Rekursionen

$$(4)\quad \omega_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} L_0^{\varkappa-1} L_{\varkappa-\nu-m,\varkappa}\,\omega_{\nu-\varkappa} = 0, \qquad \varpi_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} (-1)^\varkappa L_0^{\varkappa-1} L_{\nu-1,\varkappa}\varpi_{\nu-\varkappa} = 0, \quad \omega_0 = \varpi_0 = 1.$$

Es reicht aus, eine der beiden Rekursionen (4) näher zu verfolgen, z. B. die letztere. Sukzessive berechnet man

$$(5)\qquad \varpi_1 = L_1, \quad \varpi_2 = \begin{vmatrix} L_1 & L_0 \\ L_{12} & L_{11} \end{vmatrix}, \quad \varpi_3 = \begin{vmatrix} L_1 & L_0 & 0 \\ L_{12} & L_{11} & L_0 \\ L_{23} & L_{22} & L_{21} \end{vmatrix}$$

und hat daher für die independente Darstellung von ϖ_ν als Determinante ν-ten Grades

$$(6)\qquad \varpi_\nu = \mathrm{Det}\,|L_{i,i-\varkappa+1}|, \quad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu-1,$$

in welcher gemäss der Definition (8) *der Einleitung ein $L_{i\varkappa}$ mit negativem zweiten Index durch Null zu ersetzen ist, nur den Schluss von ν auf $\nu+1$ zu führen.*
Die Determinante (6), oder ausführlicher geschrieben

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} L_{01} & L_{00} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{\nu-3,\nu-2} & L_{\nu-3,\nu-3} & \cdots & L_{\nu-3,1} & L_{\nu-3,0} & 0 \\ L_{\nu-2,\nu-1} & L_{\nu-2,\nu-2} & \cdots & L_{\nu-2,2} & L_{\nu-2,1} & L_{\nu-2,0} \\ L_{\nu-1,\nu} & L_{\nu-1,\nu-1} & \cdots & L_{\nu-1,3} & L_{\nu-1,2} & L_{\nu-1,1} \end{vmatrix}$$

nach ihrer letzten Zeile, von rechts angefangen, den Elementen $L_{\nu-1,1}$, $L_{\nu-1,2}, \ldots L_{\nu-1,\nu}$ entwickelt, deren Unterdeterminanten, *wenn bereits für $\varpi_{\nu-1}$, $\varpi_{\nu-2}, \ldots$ die zu* (7) *analoge Determinantenform feststeht,* gleich sind

$$\varpi_{\nu-1}, \quad -L_{\nu-2,0}\,\varpi_{\nu-2}, \quad L_{\nu-2,0}\,L_{\nu-3,0}\,\varpi_{\nu-3}, \ldots$$

hat aber gerade den Wert, welchen die Rekursion (4) für ϖ_ν verlangt.

Der so für ϖ_ν nachgewiesenen Darstellung (6) korrespondiert für ω_ν die Determinante der Elemente $\tilde{L}_{i,i-\varkappa+1} = (-1)^{i-\varkappa+1} L_{-\varkappa-m,i-\varkappa+1}$, vgl. (24) § 1, und durch Herausheben der Potenzen von (-1) wird

$$(8)\qquad \omega_\nu = (-1)^\nu\,\mathrm{Det}\,|L_{-\varkappa-m,i-\varkappa+1}|, \qquad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu-1.$$

Nach Einführung der independenten Form (6) resp. (8) von ϖ_ν resp. ω_ν kann die Reihenentwicklung für Y

$$(9) \qquad Y(x,c) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu \omega_\mu(x)}{L_0(x)^{\mu+1}} \frac{(c-x)^{\mu+m-1}}{(\mu+m-1)!} = (-1)^{m-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu \varpi_\mu(c)}{L_0(c)^{\mu+1}} \frac{(x-c)^{\mu+m-1}}{(\mu+m-1)!}$$

als eine explizite bezeichnet werden.

Eine Quadratur bewirkt die Integration der inhomogenen Differentialgleichung $\sum_{\varkappa=0}^{m} L_\varkappa(x)\mathfrak{y}^{(m-\varkappa)} = K(x)$ *auf einfache Weise, indem man die erste, mit* $K(u)$ *multiplizierte, Reihe* (9) *für* $Y(x,u)$ *gliedweise integriert*

$$(10) \qquad \mathfrak{y} = (-1)^{m-1} \int_c^x Y(x,u)\,K(u)\,du = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\omega_\mu(x)}{L_0(x)^{\mu+1}} \int_c^x \frac{(x-u)^{\mu+m-1}}{(\mu+m-1)!} K(u)\,du.$$

Die linearen Rekursionen (4) der Entwicklungskoeffizienten von Y werden zu solchen *einer endlichen Stufe*, wofern die Funktionen $L_0(x), L_1(x), \ldots L_m(x)$ Polynome von x sind, und zwar der Stufe n, wenn n die kleinste Zahl bedeutet, für welche sich $L_0^{(n)}, L_1^{(n-1)}, L_2^{(n-2)}, \ldots L_\mu^{(n-\mu)}$ sämtlich auf Konstante reduzieren, unter $L_\mu(x)$ die letzte nichtverschwindende der Funktionen $L_0(x), L_1(x), \ldots$ verstanden ($\mu \leqq m$). Im Fall einer endlichen Stufe n der Rekursionen (4) verschwinden alle Funktionen $L_{h,n+1}, L_{h,n+2}, \ldots,$ sodass sich die Beschränkung der Summationsvariabeln $\varkappa$ ausser auf $\varkappa \leqq \nu$ auch auf $\varkappa \leqq n$ erstreckt.

Komplizierter als bei Y sind die Entwicklungskoeffizienten der Lösung Υ, vgl. (21) in § 1, wie aus der Definition von Υ zu ersehen

$$(11) \qquad \Upsilon = \sum_{h=m-1}^{\infty} \tilde{\chi}_h(x) \frac{\varepsilon^h}{h!} = L_0(x+\varepsilon) \sum_{\nu=m-1}^{\infty} \psi_\nu(x) \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}, \quad \tilde{\chi}_h = \sum_{\mu=0}^{h+1-m} \binom{h}{\mu} L_0^{(\mu)} \psi_{h-\mu}.$$

§ 3. Polynome als Lösungen linearer Differentialgleichungen.

Eine ähnliche Determinantendarstellung, wie die Entwicklungskoeffizienten ω, ϖ der ausgezeichneten Lösung Y, gestatten auch die Polynomiallösungen linearer Differentialgleichungen. Die letzteren dürfen, wie schon erwähnt, in der Form

$$\text{(1)} \qquad L_0(\overset{n}{\overline{x}})y^{(n)} + L_1(\overset{n-1}{\overline{x}})y^{(n-1)} + \cdots + L_{n-1}(\overset{1}{\overline{x}})y' + L_n y = 0$$

angenommen werden, denn sonst bringt man eine Differentialgleichung $\sum_{\varkappa=0}^{m} L_\varkappa(x) y^{(m-\varkappa)} = 0$, bei welcher $L_\varkappa(x)$ vom Grade $n_\varkappa$ in x und n das Maximum der Zahlen $\varkappa + n_\varkappa$ ist, durch $(n-m)$-malige Differentiation auf die obige Form ($L_m \neq 0$ vorausgesetzt).

Damit ein Polynom ν-ten Grades y_ν als Lösung von (1) existiert, muss die Konstante L_n der Bedingung

$$\text{(2)} \qquad L_n + \binom{\nu}{1} L'_{n-1} + \binom{\nu}{2} L''_{n-2} + \cdots + \binom{\nu}{n-1} L_1^{(n-1)} + \binom{\nu}{n} L_0^{(n)} = 0$$

entsprechen, welche resultiert, wenn man in die linke Seite von (1) statt y ein Polynom ν-ten Grades mit unbestimmten Koeffizienten substituiert und den Faktor der ν-ten als der höchstvorkommenden Potenz von x Null setzt.

Anstatt der zum Funktionssystem $L_0(x)$, $L_1(x)$, ... $L_{n-1}(x)$ gehörigen Polynome y_ν *ist es jedoch einfacher, andere, eine Halphensche Reihe bildende Polynome* η_ν *zu betrachten*, weil dies bloss auf Ermittlung einer Konstantenfolge hinauskommt, nachher aber die gesuchten Polynome y_ν mittels einfacher Substitutionen aus den η_ν abzuleiten. *Und zwar soll* η_ν *als Polynome* ν*-ten Grades von* x *der Differentialgleichung genügen*

$$\text{(3)} \qquad \sum_{\varkappa=0}^{n-1} (-1)^\varkappa L_{\nu-n+\varkappa,\,\varkappa}(x)\eta_\nu^{(n-\varkappa)} + (-1)^n \mathfrak{L}_{\nu n}\eta_\nu = 0, \qquad \mathfrak{L}_{\nu n} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{\nu}{n-\lambda} L_\lambda^{(n-\lambda)}.$$

Dass die Konstante $(-1)^n \mathfrak{L}_{\nu n}$ der Bedingung (2) entspricht

$$\text{(4)} \qquad (-1)^{n-1}\mathfrak{L}_{\nu n} = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} (-1)^\varkappa \binom{n}{\nu-\varkappa} L_{\nu-n+\varkappa,\,\varkappa}^{(n-\varkappa)},$$

geht aus der Definition $L_{hi} = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{h}{i-\lambda} L_\lambda^{(i-\lambda)}$ hervor, wonach die rechte Seite von (4) gleich ist

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} (-1)^\varkappa \binom{n}{\nu-\varkappa} \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} \binom{\nu-n+\varkappa}{\varkappa-\lambda} L_\lambda^{(n-\lambda)} = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} (-1)^\varkappa \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} \binom{\nu}{n-\lambda}\binom{n-\lambda}{\varkappa-\lambda} L_\lambda^{(n-\lambda)},$$

weiters gibt die Vertauschung der Summationsfolge

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1}\binom{\nu}{n-\lambda}L_{\lambda}^{(n-\lambda)}\sum_{\varkappa=\lambda}^{n-1}(-1)^{\varkappa}\binom{n-\lambda}{\varkappa-\lambda}$$

und die Summation über $\varkappa$ hat $(-1)^{n-1}$ zum Resultat.

Eine Halphensche Reihe bilden die durch (3) für alle ν definierten Polynome η_ν aus dem Grunde, weil η'_ν der Differentialgleichung für $\eta_{\nu-1}$ genügt und daher, wenigstens solange die Funktionen $L_0(x), L_1(x), \ldots L_{n-1}(x)$ willkürlich bleiben, nichts anderes als $\eta_{\nu-1}$ mal einer Konstanten sein kann. Um dies nachzuweisen differentiert man (3) nach x

$$(5)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{n-1}(-1)^{\varkappa}L_{\nu-n+\varkappa,\varkappa}\eta_\nu^{(n-\varkappa+1)}+\sum_{\varkappa=0}^{n-1}(-1)^{\varkappa}L'_{\nu-n+\varkappa,\varkappa}\eta_\nu^{(n-\varkappa)}+(-1)^n\mathfrak{L}_{\nu n}\eta'_\nu=0,$$

führt in der zweiten Summe die Variable $\varkappa-1$ statt $\varkappa$ ein, und formt mittels der Beziehung zwischen den L_{hi} und ihren Differentialquotienten

$$(6)\qquad L'_{hi}(x)=L_{h+1,i+1}(x)-L_{h,i+1}(x),$$

die noch für $i=n-1$ richtig bleibt, wofern L_{hn} durch $\mathfrak{L}_{hn}$ substituert wird, zunächst die Differentialgleichung (5) um

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1}(-1)^{\varkappa}L_{\nu-n+\varkappa,\varkappa}\eta_\nu^{(n+1-\varkappa)}+\sum_{\varkappa=1}^{n}(-1)^{\varkappa-1}(L_{\nu-n+\varkappa,\varkappa}-L_{\nu-n+\varkappa-1,\varkappa})\eta_\nu^{(n+1-\varkappa)}+$$
$$+(-1)^n\mathfrak{L}_{\nu n}\eta'_\nu=0.$$

Hieraus entsteht, durch Ordnung nach den Ableitungen von η'_ν, eine Differentialgleichung für η'_ν

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1}(-1)^{\varkappa}L_{\nu-1-n+\varkappa,\varkappa}\eta_\nu^{(n+1-\varkappa)}+(-1)^n\mathfrak{L}_{\nu-1,n}\eta'_\nu=0$$

deren Koeffizienten mit jenen der Differentialgleichung für $\eta_{\nu-1}$ identisch sind.

Nachdem also η'_ν der Differentialgleichung für $\eta_{\nu-1}$ genügt, sollen die noch freien multiplikativen Konstanten so gewählt werden, dass $\eta'_\nu=\mathfrak{L}_{\nu n}\eta_{\nu-1}$, daher $\eta''_\nu=\mathfrak{L}_{\nu n}\mathfrak{L}_{\nu-1,n}\eta_{\nu-2},\ldots$ allgemein

$$(7)\qquad \eta_\nu^{(\varkappa)}=\mathfrak{L}_{[\varkappa]\nu n}\eta_{\nu-\varkappa},\quad \mathfrak{L}_{[\varkappa]\nu n}=\mathfrak{L}_{\nu n}\mathfrak{L}_{\nu-1,n}\ldots\mathfrak{L}_{\nu-\varkappa+1,n},\quad \mathfrak{L}_{[0]\nu n}=1$$

wird, wodurch die Differentialgleichung (3) in die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} (-1)^{\varkappa} L_{\nu-n+\varkappa,\,\varkappa}(x)\, \mathfrak{L}_{[n-\varkappa]\,\nu\,n}\, \eta_{\nu-\varkappa} + (-1)^n \mathfrak{L}_{\nu n}\, \eta_\nu = 0$$

oder nach Kürzung durch $\mathfrak{L}_{\nu n}$ und Substitution von $\nu-\varkappa$ statt $\varkappa$ *in die Rekursion*

$$\eta_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{n} (-1)^{\varkappa-1} L_{\nu-\varkappa,\, n-\varkappa}(x)\, \mathfrak{L}_{[\varkappa-1]\,\nu-1,\,n}\, \eta_{\nu-\varkappa} \tag{8}$$

übergeht. Die Summation ist rechts bloss auf $\varkappa \leqq \nu$ zu erstrecken, resp. ein η mit negativem Index durch Null zu ersetzen. Die ersten der Reihe $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ sind

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_1 = L_{0,\,n-1}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} L_{0,\,n-1} & L_{0,\,n-2} \\ \mathfrak{L}_{1n} & L_{1,\,n-1} \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} L_{0,\,n-1} & L_{0,\,n-2} & L_{0,\,n-3} \\ \mathfrak{L}_{1n} & L_{1,\,n-1} & L_{1,\,n-2} \\ 0 & \mathfrak{L}_{2n} & L_{2,\,n-1} \end{vmatrix} \tag{9}$$

und allgemein gelangt man durch den Schluss von ν auf $\nu+1$ zu einer Determinantendarstellung

$$\eta_\nu = \mathrm{Det}\,\left| L_{i,\,i-\varkappa+n-1} \right|, \quad L_{in} = \mathfrak{L}_{in}, \quad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu-1. \tag{10}$$

Denn die Entwicklung dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} L_{0,\,n-1} & L_{0,\,n-2} & \cdots & L_{0,\,n-\nu+2} & L_{0,\,n-\nu+1} & L_{0,\,n-\nu} \\ \mathfrak{L}_{1n} & L_{1,\,n-1} & \cdots & L_{1,\,n-\nu+3} & L_{1,\,\nu-n+2} & L_{1,\,n-\nu+1} \\ 0 & 0 & \cdots & L_{\nu-3,\,n-1} & L_{\nu-3,\,n-2} & L_{\nu-3,\,n-3} \\ 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{L}_{\nu-2,\,n} & L_{\nu-2,\,n-1} & L_{\nu-2,\,n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{L}_{\nu-1,\,n} & L_{\nu-1,\,n-1} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der letzten Kolonne (von unten angefangen) liefert ihren Wert, wenn bereits die Giltigkeit der Formel (10) für $\eta_{\nu-1}, \eta_{\nu-2}, \ldots$ konstatiert ist, gleich

$$L_{\nu-1,\,n-1}\,\eta_{\nu-1} - \mathfrak{L}_{\nu-1,n}\, L_{\nu-2,\,n-2}\,\eta_{\nu-2} + \mathfrak{L}_{\nu-1,\,n}\,\mathfrak{L}_{\nu-2,\,n}\, L_{\nu-3,\,n-3}\,\eta_{\nu-3} - \cdots$$

was mit dem Wert (8) von η_ν übereinstimmt.

Als Glieder einer Halphenschen Reihe sind die Polynome η_ν durch die Konstanten $b_\nu = \eta_\nu(0)$ die ihrerseits nach (8) berechnet werden, schon fixiert

$$(12) \qquad \eta_\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} b_{\nu-\varkappa}\mathfrak{L}_{[\varkappa]\nu n}\frac{x^\varkappa}{\varkappa!}, \quad b_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{n-1}(-1)^{\varkappa-1}\mathrm{L}_{\nu-\varkappa,\, n-\varkappa}(0)\,\mathfrak{L}_{[\varkappa-1],\, \nu-1,\, n}\, b_{\nu-\varkappa}.$$

Ferner verwandelt sich die so gefundene Reihe der η_ν in diejenige der oben mit y_ν bezeichneten Polynome, wenn $\mathrm{L}_\varkappa$ durch $\tilde{\mathrm{L}}_{-\nu-1,\varkappa}$ ersetzt wird. Hienach findet man

$$(13) \qquad y_\nu = (-1)^{\nu(n-1)}\,\mathrm{Det}\,|\,\mathrm{L}_{\nu-\varkappa-1,\, i-\varkappa+n-1}\,| \qquad i,\varkappa = 0 \text{ bis } \nu-1,$$

wo aber L_{hn} *gleich* $\mathfrak{L}_{\nu-h,n} - \mathfrak{L}_{\nu n}$ *definiert ist.*

Es verwandelt sich nämlich der in (3) auftretende Koeffizient von $\eta_\nu^{(n-\varkappa)}$

$$(-1)^\varkappa \mathrm{L}_{\nu-n+\varkappa,\varkappa} = (-1)^\varkappa \sum_{\mu=0}^{\varkappa}\binom{\nu-n+\varkappa}{\varkappa-\mu}\mathrm{L}_\mu^{(\varkappa-\mu)}$$

(durch die erwähnte Substitution von $\tilde{\mathrm{L}}_{-\nu-1,\mu}$ oder $(-1)^\mu \mathrm{L}_{\nu-n+\mu,\mu}$ statt L_μ) in

$$(-1)^\varkappa \sum_{\mu=0}^{\varkappa}\binom{\nu-n+\varkappa}{\varkappa-\mu}(-1)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\mu}\binom{\nu-n+\mu}{\mu-\lambda}\mathrm{L}_\lambda^{(\varkappa-\lambda)} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\varkappa}(-1)^{\varkappa-\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\binom{\nu-n+\varkappa}{\varkappa-\lambda}\binom{\varkappa-\lambda}{\mu-\lambda}\mathrm{L}_\lambda^{(\varkappa-\lambda)}$$

und weiters, durch Vertauschung der Summationsfolge, in den Ausdruck

$$\sum_{\lambda=0}^{\varkappa}\binom{\nu-n+\varkappa}{\varkappa-\lambda}\mathrm{L}_\lambda^{(\varkappa-\lambda)}\sum_{\mu=\lambda}^{\varkappa}(-1)^{\varkappa-\mu}\binom{\varkappa-\lambda}{\mu-\lambda},$$

der aber den Wert $\mathrm{L}_\varkappa$ hat, weil die Summation über μ entweder 0 oder 1 gibt, je nach $\lambda < \varkappa$ oder $\lambda = \varkappa$. *Die Substitution bewirkt also dass, wie verlangt, an die Stelle der Koeffizienten von (3) jene von (1) kommen.*

An die Stelle von $\mathrm{L}_{i\varkappa} = \sum_{\mu=0}^{\varkappa}\binom{i}{\varkappa-\mu}\mathrm{L}_\mu^{(\varkappa-\mu)}$ tritt hiedurch bei $\varkappa \leqq n-1$

$$\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\binom{i}{\varkappa-\mu}\tilde{\mathrm{L}}_{-\nu-1,\mu}^{(\varkappa-\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\varkappa}\binom{i}{\varkappa-\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\binom{-\nu-1}{\mu-\lambda}\tilde{\mathrm{L}}_\lambda^{(\varkappa-\lambda)}$$

was nach dem Additionssatz der Binominalkoeffizienten gleich ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\varkappa}\binom{i-\nu-1}{\varkappa-\lambda}\tilde{\mathrm{L}}_{\lambda}^{(\varkappa-\lambda)}=\tilde{\mathrm{L}}_{i-\nu-1,\varkappa}=(-1)^{\varkappa}\mathrm{L}_{\nu+\varkappa-i-n,\varkappa},$$

daher verwandelt sich in der Determinante (10) das Element $\mathrm{L}_{i,i-\varkappa+n-1}$ bei $i\leqq\varkappa$ in $(-1)^{i+\varkappa+n-1}\mathrm{L}_{\nu-\varkappa-1,i-\varkappa+n-1}$.

Schliesslich berechnet man in ganz analoger Weise den Wert, in welchen durch die obige Substitution $\mathfrak{L}_{in}=\sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{i}{n-\mu}\mathrm{L}_{\mu}^{(n-\mu)}$ übergeht

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{i}{n-\mu}\tilde{\mathrm{L}}_{-\nu-1,\mu}^{(n-\mu)}=\sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{i}{n-\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\binom{-\nu-1}{\mu-\lambda}\tilde{\mathrm{L}}_{\lambda}^{(n-\lambda)}=$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{n-1}\tilde{\mathrm{L}}_{\lambda}^{(n-\lambda)}\left[\binom{i-\nu-1}{n-\lambda}-\binom{-\nu-1}{n-\lambda}\right]$$

gleich $(-1)^n(\mathfrak{L}_{\nu-i,n}-\mathfrak{L}_{\nu,n})$. Durch Herausheben der Potenzen von (-1) *entsteht so die Determinante* (13). Die ersten y lauten

$$y_0=1,\quad y_1=(-1)^{n-1}\mathrm{L}_{n-1},$$

$$y_2=\begin{vmatrix}\mathrm{L}_{1,n-1} & \mathrm{L}_{0,n-2}\\ \mathfrak{L}_{1,n}-\mathfrak{L}_{2,n} & \mathrm{L}_{0,n-1}\end{vmatrix},\quad y_3=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}\mathrm{L}_{2,n-1} & \mathrm{L}_{1,n-2} & \mathrm{L}_{0,n-3}\\ \mathfrak{L}_{1,n}-\mathfrak{L}_{3,n} & \mathrm{L}_{1,n-1} & \mathrm{L}_{0,n-2}\\ 0 & \mathfrak{L}_{2,n}-\mathfrak{L}_{3,n} & \mathrm{L}_{0,n-1}\end{vmatrix}.$$

Im einfachsten Falle, $n=2$, dem der Differentialgleichung

$$\mathrm{L}_0\overset{2}{(x)}y''+\mathrm{L}_1\overset{1}{(x)}y'+\mathrm{L}_2y=0$$

unter welchen Typus sich auch die der hypergeometrischen Reihe subsumiert, lassen sich *die Generierenden der Polynome* η_ν, y_ν leicht angeben. Man beweist zunächst

$$(15)\qquad \eta_\nu=\frac{(-1)^\nu\mathrm{L}_0(x)^\nu f^{(\nu)}(x)}{f(x)},\quad y_\nu=(-1)^\nu\mathrm{L}_0(x)f(x)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\frac{\mathrm{L}_0(x)^{\nu-1}}{f(x)}$$

mit der Definitionsgleichung für die Funktion $f(x)$

$$(16)\qquad \mathrm{L}_0(x)f'(x)+\mathrm{L}_1(x)f(x)=0,$$

denn die $(\nu-1)$-malige Differentiation von (16)

$$(17)\qquad L_0(x)f^{(\nu)}(x)+L_{\nu-1,1}(x)f^{(\nu-1)}(x)+\mathfrak{L}_{\nu-1,2}f^{(\nu-2)}(x)=0$$

zeigt, dass die durch (15) definierten Funktionen η_ν die lineare Rekursion

$$(18)\qquad \eta_\nu-L_{\nu-1,1}(x)\eta_{\nu-1}+\mathfrak{L}_{\nu-1,2}L_0(x)\eta_{\nu-2}=0,\ \eta_0=1,\ \eta_1=L_1(x)$$

d. h. die Rekursion (8) für $n=2$ erfüllen, also mit den früher η_ν genannten Polynomen für $n=2$ identisch sind. Ferner muss man, um aus den η_ν die Polynome y_ν abzuleiten, nach dem früheren $L_1(x)$ überall durch $-L_{\nu-1,1}(x)$ substituieren. Hierdurch verwandelt sich $f(x)$ in $L_0(x)^{\nu-1}/f(x)$, demnach hat y_ν die in (15) angegebene Gestalt.

Während die Generierende der Polynome η_ν

$$(19)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu\frac{v^\nu}{\nu!}=\frac{1}{f(x)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-v)^\nu L_0(x)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x)=\frac{f[x-vL_0(x)]}{f(x)}$$

ohneweiters in geschlossener Form summierbar ist, erfordert für diejenige der y_ν

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}y_\nu\frac{v^\nu}{\nu!}=L_0(x)f(x)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-v)^\nu}{\nu!}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[L_0(x)^\nu\frac{1}{L_0(x)f(x)}\right]$$

die Summation der rechts stehenden Lagrange-Reihe die Auflösung der Gleichung $\xi=x-vL_0(\xi)$

$$(20)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}y_\nu\frac{v^\nu}{\nu!}=\frac{L_0(x)f(x)}{L_0(\xi)f(\xi)}\,\frac{1}{1+vL'_0(\xi)}\,.$$

Die wirkliche Ausrechnung der Polynome η_ν geschieht, da die Konstanten $b_\nu=\eta_\nu(0)$ die Rekursion, vgl. (12),

$$(21)\qquad b_\nu=L_{\nu-1,1}(0)\,b_{\nu-1}-L_0(0)\,\mathfrak{L}_{\nu-1,2}b_{\nu-2},\ b_0=1,\ b_1=L_1(0)$$

haben, am einfachsten, *wenn man unterscheidet, ob* $L_0(x)$ *eine Konstante ist oder nicht und im letzteren Falle* $L_0(0)=0$ *voraussetzt.*

Auch unabhängig von den früheren Sätzen ergibt die Definition (15) der Polynome η_ν dass sie eine Halphensche Reihe bilden und Lösungen von (14) sind. Ersteres folgt aus der Differentiation von $\eta_\nu=(-1)^\nu L_0(x)^\nu f^{(\nu)}(x)/f(x)$, da

$$\eta'_\nu=(-1)^\nu\frac{L_0(x)^\nu f^{(\nu+1)}(x)+L_0(x)^{\nu-1}L_{\nu\,1}(x)f^{(\nu)}(x)}{f(x)}$$

gemäss (17), dort $\nu+1$ statt ν geschrieben, gleich $\mathfrak{L}_{\nu 2}\eta_{\nu-1}$ ist, letzteres aus (18) durch Multiplikation mit $\mathfrak{L}_{\nu 2}$

$$\mathfrak{L}_{\nu 2}\eta_\nu - \mathrm{L}_{\nu-1,1}(x)\eta'_\nu + \mathrm{L}_0(x)\eta''_\nu = 0. \tag{22}$$

§ 4. Die Quadraturdarstellung.

Der Zweck bei der Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen durch Quadraturen kann ein doppelter sein, entweder zu erreichen, dass die Reihenentwicklung der zu integrierenden Funktion einfacher ist, als die direkt aus der Differentialgleichung resultierenden Potenzreihen für die ausgezeichnete Lösung $Y(x, c)$, oder der, bei Annäherung der Unabhängigen an singuläre Stellen die Untersuchung zu erleichtern. Die hier eingeschlagene Methode verfolgt den ersteren, den reihentheoretischen Zweck und führt dazu, bei Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten die Zahl der in rekursivem Zusammenhang stehenden Entwicklungskoeffizienten, gegenüber der Entwicklung (7) der Einleitung, um eins herabzudrücken, wodurch in bestimmten Fällen auch eine Vereinfachung erzielt wird.

Als Ansatz für eine Lösung y^* der vorgelegten Differentialgleichung $\sum\limits_{\varkappa=0}^{m} \mathrm{L}_\varkappa(x) y^{(m-\varkappa)} = 0$ dient hiebei das Integral

$$y^* = \int_c^x f(v)\,\Omega(x, c, v)\,dv, \quad \mathrm{L}_0(v) f'(v) + \mathrm{L}_1(v) f(v) = 0 \tag{1}$$

mit beliebigem Integrationsweg. Die Funktion Ω soll die Eigenschaften haben, dass erstens $\partial^{m-1}\Omega/\partial x^{m-1}$ für $v=c$ verschwindet, zweitens $\partial^{m-2}\Omega/\partial x^{m-2}$ für $v=x$ den Wert 1 annimmt und drittens, bei $m \geqq 3$, Ω samt seinen partiellen Ableitungen nach x bis inkl. zur Ordnung $m-3$ für $v=x$ verschwindet.

Durch die zweite und dritte Eigenschaft erhalten die nach x genommenen Ableitungen von y^*, bis inkl. zur Ordnung $m-1$, die Form

$$\frac{d^\varkappa y^*}{dx^\varkappa} = \int_c^x f(v) \frac{\partial^\varkappa \Omega}{\partial x^\varkappa} dv, \qquad \varkappa = 0 \text{ bis } m-2 \tag{2}$$

(3) $$\frac{d^{m-1}y^*}{dx^{m-1}} = f(x) + \int\limits_c^x f(v) \frac{\partial^{m-1}\Omega}{\partial x^{m-1}} dv$$

und die nochmalige Differentiation von (3) gibt, wenn $\Omega_1(c, x)$ diejenige Funktion vorstellt, in welche $\partial^{m-1}\Omega/\partial x^{m-1}$ für $v=x$ übergeht,

(4) $$\frac{d^m y^*}{dx^m} = f'(x) + f(x)\,\Omega_1(c, x) + \int\limits_c^x f(v) \frac{\partial^m \Omega}{\partial x^m} dv.$$

Die Einsetzung dieser Werte von y, $dy/dx, \ldots d^m y/dx^m$ in die vorgelegte Differentialgleichung bewirkt, dass diese gleichbedeutend mit

(5) $$\mathrm{L}_0(x) f(x)\,\Omega_1(c, x) + \int\limits_c^x f(v) \sum_{\varkappa=0}^{m} \mathrm{L}_\varkappa(x) \frac{\partial^{m-\varkappa}\Omega}{\partial x^{m-\varkappa}} dv = 0$$

wird und daher auch, weil der links ausserhalb des Integralzeichens befindliche Ausdruck, im Hinblick auf die erstangeführte Eigenschaft von Ω sich durch

$$\int\limits_c^x \frac{\partial}{\partial v}\left[\mathrm{L}_0(v) f(v) \frac{\partial^{m-1}\Omega}{\partial x^{m-1}}\right] dv$$

substituieren lässt, gleichbedeutend mit

(6) $$\int\limits_c^x N dv = 0,\quad N = \frac{\partial}{\partial v}\left[\mathrm{L}_0(v) f(v) \frac{\partial^{m-1}\Omega}{\partial x^{m-1}}\right] + f(v) \sum_{\varkappa=0}^{m} \mathrm{L}_\varkappa(x) \frac{\partial^{m-\varkappa}\Omega}{\partial x^{m-\varkappa}}.$$

(7) *Daher muss die Funktion Ω die Bedingung erfüllen, dass $N + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}$ Null wird, wenn $\mathfrak{N}$ irgend eine sowohl für $v=x$ als $v=c$ verschwindende Funktion von x, c, v ist. Der Ansatz*

$$\Omega = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{m+h-2}}{(m+h-2)!}\,\Omega_h(c, v),\quad \Omega_0 = 1,\quad \Omega_h(c, c) = 0 \text{ für } h \geqq 1$$

entspricht den oben an Ω gestellten Forderungen.

Die durch Differentiation von Ω nach x entstehenden Reihen

$$\frac{\partial^{m-\varkappa}\Omega}{\partial x^{m-\varkappa}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{\nu}}{\nu!}\,\Omega_{\nu+2-\varkappa}(c, v)$$

(wobei aber Funktionen $\Omega_h(c, v)$ mit negativem Index durch Null zu ersetzen sind) verwendet man nunmehr zur Umformung der in (7) auftretenden Summe $\sum\limits_{\varkappa=0}^{m} \mathrm{L}_\varkappa(x)\frac{\partial^{m-\varkappa}\Omega}{\partial x^{m-\varkappa}}$, oder allgemeiner, um den Fall $\mathrm{L}_m=0$ mitzuumfassen, der Summe $\sum\limits_{\varkappa=0}^{\mu} \mathrm{L}_\varkappa(x)\frac{\partial^{m-\varkappa}\Omega}{\partial x^{m-\varkappa}}$, wenn L_μ der letzte nicht verschwindende Koeffizient unter L_0, $\mathrm{L}_1, \ldots \mathrm{L}_m$ ist, in eine Reihe desselben Typus. Diese Umformung von

$$(8) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \mathrm{L}_\varkappa(x)\frac{\partial^{m-\varkappa}\Omega}{\partial x^{m-\varkappa}} = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \mathrm{L}_\varkappa(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{\nu}}{\nu!}\,\Omega_{\nu+2-\varkappa}(c, v)$$

geschieht durch Taylor-Entwicklung der Koeffizienten $\mathrm{L}_\varkappa(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(x-v)^i}{i!}\mathrm{L}_\varkappa^{(i)}(v)$ und Ordnung nach den Potenzen $(x-v)^\lambda$, $\lambda=\nu+i$, so dass rechts eine Potenzreihe nach $x-v$ resultiert

$$(9) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(x-v)^\lambda}{\lambda!} \sum_{i=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{i} \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \mathrm{L}_\varkappa^{(i)}(v)\,\Omega_{\lambda+2-i-\varkappa}(c, v)$$

deren Koeffizienten durch die Funktionen $\mathrm{L}_{\lambda i}(v) = \sum\limits_{\varkappa=0}^{i} \binom{\lambda}{i-\varkappa}\mathrm{L}_\varkappa^{(i-\varkappa)}(v)$ *ausdrückbar sind*, denn die über i, $\varkappa$ erstreckte Doppelsumme in (9) geht durch die Einführung der Summationsvariabeln $j=i+\varkappa$ über in

$$\sum_{j=0}^{\lambda+\mu} \Omega_{\lambda+2-j}(c, v) \sum_{\varkappa=0}^{j} \binom{\lambda}{j-\varkappa}\mathrm{L}_\varkappa^{(j-\varkappa)}(v) = \sum_{j=0}^{\lambda+\mu} \mathrm{L}_{\lambda j}(v)\,\Omega_{\lambda+2-j}(c, v).$$

Da ferner $\Omega_{\lambda+2-j}$ für $j>\lambda+2$ verschwindet, darf die Summation über j auf das Intervall 0 bis $\lambda+2$ eingeschränkt werden, und die Entwicklung des Ausdruckes (8) nach Potenzen von $x-v$ erhält die relativ einfache Gestalt

$$(11)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \mathrm{L}_\varkappa(x) \frac{\partial^{m-\varkappa}\Omega}{\partial x^{m-\varkappa}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(x-v)^\lambda}{\lambda!} \sum_{j=0}^{\lambda+2} \mathrm{L}_{\lambda j}(v)\, \Omega_{\lambda+2-j}(c, v).$$

Ebenso entwickelt man noch den anderen in (6) vorkommenden Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\mathrm{L}_0(v) f(v) \frac{\partial^{m-1}\Omega}{\partial x^{m-1}}\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left[\mathrm{L}_0(v) f(v) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(x-v)^\lambda}{\lambda!} \Omega_{\lambda+1}(c, v)\right],$$

indem man, unter Berücksichtigung der Definition (1) von $f(v)$, ausdifferentiiert

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left[\mathrm{L}_0(v) f(v) \frac{\partial^{m-1}\Omega}{\partial x^{m-1}}\right] = f(v) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(x-v)^\lambda}{\lambda!} \Big\{[\mathrm{L}'_0(v) - \mathrm{L}_1(v)]\, \Omega_{\lambda+1} + \\ + \mathrm{L}_0(v)\left[\frac{\partial \Omega_{\lambda+1}}{\partial v} - \Omega_{\lambda+2}\right]\Big\},$$

sonach ergibt die Addition der rechten Seiten von (11) und (12) die gesuchte Reihe für N nach Potenzen von $x-v$

$$N = f(v) \sum_{\lambda=0}^{\infty} N_\lambda \frac{(x-v)^\lambda}{\lambda!},$$

$$N_\lambda = [\mathrm{L}'_0(v) - \mathrm{L}_1(v)]\, \Omega_{\lambda+1} + \mathrm{L}_0(v)\left[\frac{\partial \Omega_{\lambda+1}}{\partial v} - \Omega_{\lambda+2}\right] + \sum_{j=0}^{\lambda+2} \mathrm{L}_{\lambda j}(v)\, \Omega_{\lambda+2-j}.$$

Es fällt aber $\Omega_{\lambda+2}$ aus dem Koeffizienten N_λ heraus, während als Faktor von $\Omega_{\lambda+1}$

$$\mathrm{L}'_0(v) - \mathrm{L}_1(v) + \mathrm{L}_{\lambda 1}(v) = (\lambda + 1)\, \mathrm{L}'_0(v)$$

auftritt, so dass der Koeffizient N_λ, wenn man

$$(14)\qquad \Omega_\lambda(c, v) = \frac{\mathrm{F}_\lambda(c, v)}{\mathrm{L}_0(v)^\lambda}$$

setzt, sich noch weiter vereinfachen lässt in

$$(15)\qquad \frac{1}{\mathrm{L}_0(v)^\lambda}\left[\frac{\partial \mathrm{F}_{\lambda+1}(c, v)}{\partial v} + \sum_{j=2}^{\lambda+2} \mathrm{L}_{\lambda j}(v)\, \mathrm{L}_0(v)^{j-2}\, \mathrm{F}_{\lambda+2-j}(c, v)\right].$$

Um jetzt die Funktionen F aus der Bedingung $N + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v} = 0$ zu bestimmen, denkt man sich auch $\mathfrak{N}$ in eine Reihe nach Potenzen von $x-v$ entwickelt

(16)
$$\mathfrak{N}=f(v)\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(x-v)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}\frac{\mathfrak{F}_\lambda(c,v)}{L_0(v)^\lambda},\quad \mathfrak{F}_\lambda(c,c)=0$$

und ermittelt in dem Differentialquotienten dieser Reihe nach v

$$\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(x-v)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{f(v)\,\mathfrak{F}_\lambda(c,v)}{L_0(v)^\lambda}\right]-\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(x-v)^\lambda}{\lambda!}\frac{f(v)\,\mathfrak{F}_\lambda(c,v)}{L_0(v)^\lambda},$$

wieder unter Berücksichtigung der Definition (1) von $f(v)$, den Koeffizienten von $f(v)\,(x-v)^\lambda/\lambda!$

(18)
$$\frac{1}{L_0(v)^\lambda}\left[L_0(v)\frac{\partial\mathfrak{F}_{\lambda-1}}{\partial v}-L_{\lambda-1,1}(v)\,\mathfrak{F}_{\lambda-1}-\mathfrak{F}_\lambda\right],\quad \mathfrak{F}_{-1}=0.$$

Die Bedingung $N+\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}=0$ besagt also, dass die Summe der Ausdrücke (15) und (18) verschwinden muss, somit ist der Satz bewiesen:

(19)

In der Integraldarstellung der Lösung

$$y^* \;\textit{von}\; \sum_{\varkappa=0}^{m} L_\varkappa(x)\frac{d^{m-\varkappa}y}{dx^{m-\varkappa}}=0$$

$$y^*=\int_c^x f(v)\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(x-v)^{m+\lambda-2}}{(m+\lambda-2)!}\frac{F_\lambda(c,v)}{L_0(v)^\lambda}dv,\quad F_0=1,\quad F_\lambda(c,c)=0 \;\textit{für}\; \lambda\geqq 1$$

müssen die Funktionen F *für jedes* $\lambda\geqq 0$ *die Bedingung erfüllen*

$$\frac{\partial F_{\lambda+1}}{\partial v}+\sum_{j=2}^{\lambda+2}L_{\lambda j}(v)\,L_0(v)^{j-2}\,F_{\lambda+2-j}+$$
$$+\left[L_0(v)\frac{\partial\mathfrak{F}_{\lambda-1}}{\partial v}-L_{\lambda-1,1}(v)\,\mathfrak{F}_{\lambda-1}-\mathfrak{F}_\lambda\right]=0.$$

Die Funktionen $\mathfrak{F}_\lambda(c,v)$ *sind bis auf die eine Forderung, dass sie für* $v=c$ *verschwinden sollen, willkürlich* ($\mathfrak{F}_{-1}=0$).

Nach vollzogener Wahl der $\mathfrak{F}$ sind aber $F_1, F_2, \ldots$ eindeutig durch (19) definiert.

Handelt es sich um *Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten der Stufe* n, so stehen die n Funktionen $F_{\lambda+1}, F_\lambda, \ldots F_{\lambda+2-n}$ durch die Bedingung

(19) in rekursiven Zusammenhang, während sich die Rekursionen der Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe für Y, vgl. Formel (9) der Einleitung, auf $(n+1)$ derselben erstreckten.

Es wäre zwar, statt des oben eingeschlagenen Vorganges, auch möglich gewesen, in (5) direkt den Ausdruck $L_0(x) f(x)\, \Omega_1(c, x)$ durch

$$\int_c^x \frac{\partial}{\partial v}[L_0(v) f(v)\, \Omega_1(c, v)]\, dv \text{ bei } \Omega_1(c, c) = 0$$

zu ersetzen, wonach die vorgelegte Differentialgleichung mit $\int_c^x \overline{N}\, dv = 0$

$$\overline{N} = \frac{\partial}{\partial v}[L_0(v) f(v)\, \Omega_1(c, v)] + f(v) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(x-v)^\lambda}{\lambda!} \sum_{j=0}^{\lambda+2} L_{\lambda j}(v)\, \Omega_{\lambda+2-j}(c, v)$$

gleichbedeutend geworden wäre, aber wie die Entwicklung von

$$\overline{N} = f(v) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \overline{N}_\lambda \frac{(x-v)^\lambda}{\lambda!}$$

$$\overline{N}_0 = L_0(v)\, \Omega_2 + \left[L_0(v) \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} + L'_0(v)\, \Omega_1\right] + L_2(v), \qquad \overline{N}_\lambda = \sum_0^{\lambda+2} L_{\lambda j}(v)\, \Omega_{\lambda+2-j} \text{ für } \lambda > 0$$

lehrt, wäre auf diese Weise wieder ein rekursiver Zusammenhang zwischen $n+1$ der Funktionen $\Omega_\lambda(c, v)$ zustandegekommen, allerdings auch $\Omega_1(c, v)$ bis auf die eine Bedingung $\Omega_1(c, c) = 0$ willkürlich geblieben.

Die Benützung der Rekursion (19) zur Bestimmung der Funktionen $F_\lambda(c, v)$ geschieht derart, dass man sowohl diese, als die $\mathfrak{F}_\lambda(c, v)$ nach Potenzen von $c - v$ entwickelt

$$(21) \qquad F_\lambda(c, v) = \sum_{\nu=0} \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} F_{\lambda\nu}(v), \qquad \mathfrak{F}_\lambda(c, v) = \sum_{\nu=0} \frac{(c-v)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \mathfrak{F}_{\lambda\nu}(v).$$

Wegen $F_0 = 1$ muss $F_{0\nu}$ für $\nu \geqq 1$ verschwinden, ebenso $F_{\lambda 0}$ bei $\lambda \geqq 1$ zugleich mit $F_\lambda(c, c)$, auch $F_{11} = L_2$ hängt nicht von der Wahl der $\mathfrak{F}$ ab. Nach Übertragung der Werte (21) für die F_λ und $\mathfrak{F}_\lambda$ in die Gleichung (19) gibt die Nullsetzung des Koeffizienten von $(c-v)^\nu$

(22) *eine allgemeine Formel zur sukzessiven Berechnung der Entwicklungskoeffizienten* $\mathrm{F}_{\lambda\nu}(v)$

$$\mathrm{F}_{\lambda+1,\,\nu+1} = \mathrm{F}'_{\lambda+1,\,\nu} + \sum_{j=2}^{\lambda+2} \mathrm{L}_{\lambda j}\,\mathrm{L}_0^{j-2}\,\mathrm{F}_{\lambda+2-j,\,\nu} - (\mathfrak{F}_{\lambda,\,\nu-1} + \mathrm{L}_0\mathfrak{F}_{\lambda-1,\,\nu}) + \\ + (\mathrm{L}_0\,\mathfrak{F}'_{\lambda-1,\,\nu-1} - \mathrm{L}_{\lambda-1,\,1}\mathfrak{F}_{\lambda-1,\,\nu-1})$$

für alle $\lambda \geqq 0$, $\nu \geqq 0$ *bei beliebigen* $\mathfrak{F}_{\lambda\nu}(v)$. (*Ein* F *oder* $\mathfrak{F}$ *mit einem negativen Index ist durch Null zu ersetzen*). *Es wird dann*

$$y^* = \int_c^x f(v) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0} \frac{(x-v)^{m+\lambda-2}}{(m+\lambda-2)!}\,\frac{(c-v)^\nu}{\nu!}\,\frac{\mathrm{F}_{\lambda\nu}(v)}{\mathrm{L}_0(v)^\lambda}\,dv.$$

Die in diesem Abschnitt betrachtete Lösung y^* steht mit den früher besprochenen Υ, Y, vgl. (21), (22) in § 1, in der Beziehung

$$y^* = (-1)^{m-1} f(c)\,\Upsilon = (-1)^{m-1} f(c)\,\mathrm{L}_0(c)\,Y, \tag{23}$$

weil $d^{m-1}y^*/dx^{m-1}$ für $x=c$ den Wert $f(c)$ hat, vgl. (3).

(23 a) *Bei Differentialgleichungen 2. Ordnung ist* $y^*(x, c)$ *eine alternierende Funktion von* x, c,

denn nach Formel (21 a) § 1 genügt $\Upsilon(x, c)$ den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial x^2} = P_1(x)\frac{\partial\Upsilon}{\partial x} + P_2(x)\Upsilon, \quad \frac{\partial^2\Upsilon}{\partial c^2} = -P_1(c)\frac{\partial\Upsilon}{\partial c} +]P_2(c) - P'_1(c)]\,\Upsilon, \tag{24}$$

deren zweite mittels der Substitution

$$\Upsilon = -\frac{y^*(x, c)}{f(c)}, \quad f'(c) = P_1(c)f(c)$$

eine Differentialgleichung für $y^*(x, c)$ liefert

$$\frac{\partial^2 y^*(x, c)}{\partial c^2} = P_1(c)\frac{\partial y^*(x, c)}{\partial c} + P_2(c)\,y^*(x, c). \tag{25}$$

Die Vertauschung von x, c in (25) zeigt, dass $y^*(c, x)$ ebensowie $y^*(x, c)$ eine Lösung von $y'' = P_1(x)y' + P_2(x)y$ ist, und zwar muss $y^*(c, x) = -y^*(x, c)$ sein, da für $x=c$ die Funktionen

$$y^*(x, c) = f(c)(x-c) + \cdots, \quad y^*(c, x) = f(x)(c-x) + \cdots$$

beide verschwinden und ihre Differentialquotienten nach x die Werte $\pm f(c)$ annehmen.

§ 5. Die Differentialgleichung $\overset{2}{L_0(x)}\, y'' + \overset{1}{L_1(x)}\, y' + L_2 y = 0$.

In diesem Falle nimmt die Lösung y^* eine besonders einfache Gestalt an, ohne dass erst nötig wäre, verschiedene Typen des Koeffizienten $L_0(x)$ zu unterscheiden. Da jetzt die Grössen $L_{\lambda 2} = L_2 + \lambda L'_1 + \binom{\lambda}{2} L''_0$ Konstante sind, reduziert sich die Formel (19) § 4, wenn alle $\mathfrak{F}$ gleich Null gewählt werden, auf die Bedingung $\frac{\partial F_{\lambda+1}}{\partial v} + L_{\lambda 2} F_\lambda = 0$ mit $F_0 = 1$. Hiedurch wird

$$(1) \qquad F_\lambda = \alpha_\lambda \frac{(c-v)^\lambda}{\lambda!}, \quad \alpha_\lambda = L_{02}\, L_{12} \ldots L_{\lambda-1, 2}, \quad \alpha_0 = 1$$

und die explizite Reihenentwicklung

$$(2) \qquad y^* = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\alpha_\lambda}{\lambda!^2} \int_c^x f(v)\, \zeta^\lambda\, dv, \quad \zeta = \frac{(x-v)(c-v)}{L_0(v)}$$

konvergiert, solange für alle in Betracht kommenden ζ und grosse λ der Betrag von $\frac{\alpha_{\lambda+1}}{\alpha_\lambda} \frac{\zeta}{(\lambda+1)^2}$ kleiner als 1 bleibt, was bei $|\zeta| < \frac{2}{L''_0}$ zutrifft.

Die andere, oben mit $Y(x, c)$ bezeichnete Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist nach (23) § 4

$$(3) \qquad Y(x, c) = -\frac{1}{\varphi(c) L_0(c)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\alpha_\lambda}{\lambda!^2} \int_c^x f(v)\, \zeta^\lambda\, dv,$$

aus ihr gewinnt man durch Vertauschung von x, c bei gleichzeitiger Ersetzung von α_λ durch $\tilde{\alpha}_\lambda = \tilde{L}_{02}\, \tilde{L}_{12} \ldots \tilde{L}_{\lambda-1, 2} = L_{-1, 2}\, L_{-2, 2} \ldots L_{-\lambda, 2}$ und von f durch $\tilde{f}$, letzteres durch

$$(4) \qquad L_0(x) \tilde{f}'(x) + \tilde{L}_1(x) \tilde{f}(x) = 0, \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{L_0(x)^2 f(x)}$$

definiert, *nach* (5) *der Einleitung, eine andere Form von* Y

$$\tilde{Y}(c, x) = -Y(x, c) = \mathrm{L}_0(x) f(x) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_\lambda}{\lambda!^2} \int_c^x \frac{\zeta^\lambda \, dv}{\mathrm{L}_0(v)^2 f(v)}. \tag{5}$$

Die Quadraturdarstellung von $Y(x, c)$ kann auch benützt werden, um eine explizite Gestalt der Entwicklungskoeffizienten ω oder ϖ der Potenzreihen für $Y(x, c)$ anzugeben. Es geht z. B. das Integral (3) durch die Substitution $v = c - \varepsilon t$, $\varepsilon = c - x$ über in

$$\frac{\varepsilon}{f(c)\,\mathrm{L}_0(c)} \int_0^1 f(c - \varepsilon t) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\alpha_\lambda}{\lambda!^2} \left[\frac{-\varepsilon^2 t(1-t)}{\mathrm{L}_0(c-\varepsilon t)}\right]^\lambda dt$$

und wird durch die Einsetzung der Taylor-Reihe

$$\frac{f(c - \varepsilon t)}{\mathrm{L}_0(c - \varepsilon t)^\lambda} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon t)^\mu}{\mu!} D_c^\mu \frac{f(c)}{\mathrm{L}_0(c)^\lambda}$$

zu einer Potenzreihe nach ε, bei welcher der Koeffizient von $\varepsilon^{\nu+1}$, $\nu = 2\lambda + \mu$, gleich ist

$$\frac{1}{f(c)\,\mathrm{L}_0(c)} \int_0^1 \sum_{\lambda=0}^{\frac{\nu}{2}} \frac{\alpha_\lambda}{\lambda!^2} \frac{(-t)^{\nu-\lambda}(1-t)^\lambda}{(\nu - 2\lambda)!} D_c^{\nu-2\lambda} \frac{f(c)}{\mathrm{L}_0(c)^\lambda} dt.$$

Demnach ergibt die Auswertung des Integrals $\int_0^1 t^{\nu-\lambda}(1-t)^\lambda dt$ die Potenzreihe

$$Y(x, c) = \frac{1}{f(c)\,L_0(c)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\nu}{2}} (-1)^{\nu-\lambda} \alpha_\lambda \binom{\nu-\lambda}{\lambda} D_c^{\nu-2\lambda} \frac{f(c)}{\mathrm{L}_0(c)^\lambda},$$

welche man nur mit der Reihe (9) in § 2

$$Y(x, c) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \varpi_\nu(c)}{\mathrm{L}_0(c)^{\nu+1}} \frac{(x-c)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$$

zu vergleichen braucht, um die Funktion ϖ_ν zu bestimmen

$$\varpi_\nu = \frac{\mathrm{L}_0(c)^\nu}{f(c)} \sum_{\lambda=0}^{\frac{1}{2}\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu-\lambda}{\lambda} \alpha_\lambda D_c^{\nu-2\lambda} \frac{f(c)}{\mathrm{L}_0(c)^\lambda}.$$

Nun ist, gemäss (15) § 3 die zum Funktionssystem L_0, $L_1 + \lambda L_0$ gehörige Polynomiallösung des $(\nu - 2\lambda)$-ten Grades gegeben durch

$$(6) \qquad \eta_{\nu-2\lambda,\lambda} = \frac{(-L_0)^{\nu-2\lambda}}{(f L_0^{-\lambda})} D^{\nu-2\lambda}(f L_0^{-\lambda})$$

somit resultiert für das Polynom ϖ_ν die explizite Darstellung

$$(7) \qquad \varpi_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\frac{1}{2}\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu-\lambda}{\lambda} \alpha_\lambda L_0^\lambda \eta_{\nu-2\lambda,\lambda}.$$

§ 6. Die Differentialgleichung $\overset{3}{\overline{L_0(x)}}\, y'' + \overset{2}{\overline{L_1(x)}}\, y' + \overset{1}{\overline{L_2(x)}}\, y = 0$.

Als Unterfälle umfasst diese Differentialgleichung 1) die verallgemeinerte Lamésche Differentialgleichung, wenn $L_0(x) = x(x-\beta)(x-\gamma)$, $L_1(x) = \frac{1}{2} L'_0(x)$ gesetzt wird (x bedeutet das Quadrat der Laméschen elliptischen Koordinate, bei Lamé selbst ist $L'_2 = -\frac{1}{4}\varkappa(\varkappa+1)$, $\varkappa$ positiv ganz), 2) die elliptische Zylinderfunktion bei $L_0(x) = x(1-x)$, $L_1(x) = \frac{1}{2} L'_0(x)$ und 3) die Heinesche Funktion bei $L_0(x) = x(1+x)$ $L_1(x) = \varkappa + \left(\varkappa + \frac{1}{2}\right) x$.

Um hier eine Quadraturdarstellung zu finden, bei welcher *die zu integrierende Funktion symmetrisch in x, c ist,* wird der Ansatz gemacht, dass von den in (21) § 4 definierten Funktionen $F_{\lambda\nu}$ *alle mit ungleichen Indizes verschwinden* sollen (ohne auf den allgemeinern Ansatz $F_{\lambda\nu} = F_{\nu\lambda} L_0^{\lambda-\nu}$ einzugehen). Die Definitionsgleichungen der $F_{\nu\lambda}(v)$, $\mathfrak{F}_{\nu\lambda}(v)$ in (22) § 4, dort $\lambda - 1$, $\nu - 1$ statt λ, ν geschrieben

$$(1) \qquad F_{\lambda\nu} = F'_{\lambda,\nu-1} + L_{\lambda-1,2} F_{\lambda-1,\nu-1} + L_{\lambda-1,3} L_0 F_{\lambda-2,\nu-1} - (\mathfrak{F}_{\lambda-1,\nu-2} + L_0 \mathfrak{F}_{\lambda-2,\nu-1}) + \\ + L_0 \mathfrak{F}'_{\lambda-2,\nu-2} - L_{\lambda-2,1} \mathfrak{F}_{\lambda-2,\nu-2}$$

liefern, wofern auch unter den $\mathfrak{F}_{\lambda\nu}$ bloss $\mathfrak{F}_{\nu\nu}$ als von Null verschieden angenommen wird, für $\lambda = \nu - 1$, ν, $\nu + 1$ die Bedingungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} 0 &= F'_{\nu-1,\nu-1} - \mathfrak{F}_{\nu-2,\nu-2} \\ F_{\nu\nu} &= L_{\nu-1,2} F_{\nu-1,\nu-1} + L_0 \mathfrak{F}'_{\nu-2,\nu-2} - L_{\nu-2,1} \mathfrak{F}_{\nu-2,\nu-2} \\ 0 &= L_0(L_{\nu 3} F_{\nu-1,\nu-1} - \mathfrak{F}_{\nu-1,\nu-1}) \end{aligned}$$

und hieraus folgen durch Elimination der $\mathfrak{F}$ *zwei simultane Bedingungsgleichungen für die Polynome* $F_{\nu\nu} = G_\nu$

$$G_\nu = L_0 G''_{\nu-1} - L_{\nu-2,1} G'_{\nu-1} + L_{\nu-1,2} G_{\nu-1}, \quad G'_\nu = L_{\nu 3} G_{\nu-1}, \quad G_0 = 1. \tag{3}$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung, wobei die Differentialquotienten $L'_{\nu\varkappa}$ durch ihre Werte $L_{\nu+1,\varkappa+1} - L_{\nu,\varkappa+1}$ zu ersetzen sind, und Subtraktion der zweiten entsteht *eine Differentialgleichung für* $G_{\nu-1}$

$$L_0 G'''_{\nu-1} - L_{\nu-3,1} G''_{\nu-1} + L_{\nu-2,2} G'_{\nu-1} - L_{\nu-1,3} G_{\nu-1} = 0. \tag{4}$$

Umgekehrt wieder ist $G'_\nu = L_{\nu 3} G_{\nu-1}$ eine Konsequenz des gleichzeitigen Bestehens von (4) und der ersten Gleichung (3), ebenso auch

$$G''_\nu = L_{\nu 3} G'_{\nu-1}, \quad G'''_\nu = L_{\nu 3} G''_{\nu-1}, \tag{5}$$

so dass die Elimination von $G_{\nu-1}$ aus (3) und (5) die Differentialgleichung für G_ν ergibt

$$L_0 G'''_\nu - L_{\nu-2,1} G''_\nu + L_{\nu-1,2} G'_\nu - L_{\nu 3} G_\nu = 0, \tag{6}$$

deren Erfüllung zur Vereinbarkeit der beiden Bedingungen für $G_{\nu+1}$ ausreicht. Nun genügt $G_1 = L_2$ beiden Bedingungen (3) für $\nu = 1$, *also sind dieselben für alle* ν *vereinbar*. Nach (2), (3) besitzen aber die Polynome G_ν die lineare Rekursion

$$\begin{gathered} G_\nu = L_{\nu-1,2} G_{\nu-1} - L_{\nu-2,1} L_{\nu-1,3} G_{\nu-2} + L_0 L_{\nu-1,3} L_{\nu-2,3} G_{\nu-3} \\ G_0 = 1, \quad G_1 = L_2, \quad G_2 = L_2 (L_2 + L'_1) - L_1 L'_2, \ldots \end{gathered} \tag{7}$$

und dies zeigt, vgl. (8) § 3, *ihre Identität mit den zu* L_0, L_1, L_2 *gehörigen Polynomiallösungen* η_ν *im Falle* $n=3$.

Somit sind die Polynome $G_\nu(v)$, *welche in der Integralform der Lösung der vorgegebenen Differentialgleichung*

$$y^* = \int_c^x f(v) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{G_\nu(v)\zeta^\nu}{\nu!^2} dv, \quad \zeta = \frac{(x-v)(c-v)}{L_0(v)} \tag{8}$$

auftreten, Glieder einer Halphenschen Reihe und dargestellt durch

$$G_\nu(v) = \mathrm{Det}\,|L_{i,\,i-\varkappa+2}(v)|, \quad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu - 1. \tag{9}$$

Die Konstanten $b_\nu = G_\nu(0)$ *haben die Rekursion*

(10) $$b_\nu = b_{\nu-1}\, L_{\nu-1,2}(0) - b_{\nu-2}\, L_{\nu-2,1}(0)\, L_{\nu-1,3} + b_{\nu-3}\, L_0(0)\, L_{\nu-1,3}\, L_{\nu-2,3}.$$

Eine Vereinfachung der letzteren tritt ein wenn $L_0(0) = 0$ angenommen wird, was nur in dem Falle $L_0(x) = \text{Const.}$ nicht zu bewirken ist.

§ 7. **Der Kettenbruck für y'/y und die Quadraturdarstellung bei Differentialgleichungen 2. Ordnung.**

Für die logarithmische Derivierte der Lösung irgend einer homogenen linearen Differentialgleichung lässt sich durch die Differentiationsmethode formal ein Kettenbruch aufstellen, dieser als Inbegriff von Quotienten gedacht, deren Zähler und Nenner einunddieselbe lineare Rekursion besitzen, doch sollen hier nur Differentialgleichungen 2. Ordnung

(1) $$y'' = P_1(x)\, y' + P_2(x)\, y \quad \text{oder} \quad L_0(x)\, y'' + L_1(x)\, y' + L_2(x)\, y = 0$$

betrachtet werden. Durch $(\nu-2)$-malige Differentiation ergibt sich, in der Bezeichnungsweise des § 1

(2) $$y^{(\nu)} = \varphi_{\nu 1}(x)\, y' + \varphi_{\nu 2}(x)\, y,$$

und nach Formel (16a) § 1 *besteht eine gemeinsame Rekursion für die beiden Funktionen* $\varphi_{\nu 1}(x)$, $\varphi_{\nu 2}(x)$

(3) $$L_0\, \varphi_{\nu\mu} + \sum_{i=1}^{\nu} L_{\nu-2,i}\, \varphi_{\nu-i,\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \quad \nu \geqq 2$$

auf Grund der Anfangswerte $\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{11} = 1$, $\varphi_{02} = 1$, $\varphi_{12} = 0$.

Nun ersieht man aus dem Vergleich mit der Rekursion der Funktionen $\tilde{\psi}_\nu$, vgl. (9) der Einleitung,

$$L_0 \tilde{\psi}_\nu + \sum_{i=1}^{\nu-1} L_{\nu-2,i}\, \tilde{\psi}_{\nu-i} = 0, \quad \tilde{\psi}_1 = \frac{1}{L_0},$$

dass $\tilde{\psi}_\nu$ mit $\varphi_{\nu 1}/L_0$ identisch ist, daher stellt sich, wofern $\lim\limits_{\nu \to \infty} y^{(\nu)}/\varphi_{\nu 1}$ Null wird,

(4) *y'/y als Grenzwert der Quotienten $-\varphi_{\nu 2}(x)/\varphi_{\nu 1}(x)$, d. h. als Kettenbruch dar, nachdem $\varphi_{\nu 1}(x)$ und $\varphi_{\nu 2}(x)$ dieselbe lineare Rekursion aufweisen. Die Nenner des Kettenbruches stimmen bis auf den von ν unabhängigen Faktor $L_0(x)$ mit den Funktionen $\tilde{\psi}_\nu(x)$ überein, welche aus den Koeffizienten $\tilde{\psi}_\nu(c)$ der Potenzreihe für Y entstehen, wenn x statt c geschrieben wird.*

Die beiden Funktionen $\varphi_{\nu 1}$, $\varphi_{\nu 2}$ sind übrigens auf einander rückführbar, denn aus (2) folgt durch einmalige Differentiation

$$\varphi_{\nu+1,1} = \varphi'_{\nu 1} + P_1 \varphi_{\nu 1} + \varphi_{\nu 2}, \quad \varphi_{\nu+1,2} = \varphi'_{\nu 2} + P_2 \varphi_{\nu 1}. \tag{5}$$

Eine Vereinfachung kann noch erzielt werden, wenn man mittels der Gleichungen

$$\varphi_{\nu 1}(x) = \frac{R_{\nu-2}(x)}{L_0(x)^{\nu-1}}, \quad \varphi_{\nu 2}(x) = -\frac{Q_{\nu-2}(x)}{L_0(x)^{\nu-1}} \tag{6}$$

Funktionen $Q_\nu(x)$, $R_\nu(x)$ einführt, deren Rekursionen gemäss (3) lauten

$$0 = Q_\nu + L_{\nu 1} Q_{\nu-1} + L_{\nu 2} L_0 Q_{\nu-2} + L_{\nu 3} L_0^2 Q_{\nu-3} + \cdots \tag{7}$$

$$0 = R_\nu + L_{\nu 1} R_{\nu-1} + L_{\nu 2} L_0 R_{\nu-2} + L_{\nu 3} L_0^2 R_{\nu-3} + \cdots, \tag{8}$$

und welche gleichzeitig mit den Koeffizienten L der Differentialgleichung (1) Polynome von x sind (Q_{-2} ausgenommen). Als Werte der ersten Q, R berechnet man

$$\begin{aligned} &Q_{-2} = -1/L_0, \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = L_2, \quad Q_1 = L_0 L'_2 - L_2 L_{11}, \ldots \\ &R_{-2} = 0, \quad R_{-1} = 1, \quad R_0 = -L_1, \quad R_1 = L_1 L_{11} - L_0 L_{12}, \ldots \end{aligned} \tag{8 a}$$

Die Nenner dieser zur Darstellung von y'/y dienenden Quotienten Q_ν/R_ν fallen mit den früher, (3) in § 2, *als ϖ bezeichneten Funktionen zusammen,* wie aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} R_\nu = \varphi_{\nu+2,1} L_0^{\nu+1} = \tilde{\psi}_{\nu+2} L_0^{\nu+2} = (-1)^{\nu+1} \varpi_{\nu+1} = \\ = (-1)^{\nu+1} \operatorname{Det} |L_{i, i-\varkappa+1}|, \quad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu \end{aligned} \tag{9}$$

hervorgeht. Bezüglich der Konvergenz der Quotienten Q_ν/R_ν zu einer Grenzfunktion entscheidet die Grössenordnung *der Funktion*

$$(10) \qquad \frac{Q_\nu R_{\nu-1} - Q_{\nu-1} R_\nu}{R_{\nu-1} R_\nu}$$

für deren Zähler ebenfalls ein rekursiver Zusammenhang existiert. Setzt man nämlich

$$(11) \qquad G_{\nu h} = \frac{Q_\nu R_{\nu-h} - Q_{\nu-h} R_\nu}{L^{\nu+1-h}}$$

so ist die durch Multiplikation der Rekursionen (7), (8) mit $R_{\nu-1}$, $Q_{\nu-1}$ und nachherige Subtraktion entstandene Gleichung

$$(12) \qquad G_{\nu 1} = L_{\nu 2} G_{\nu-1,1} + L_{\nu 3} G_{\nu-1,2} + L_{\nu 4} G_{\nu-1,3} + \cdots$$

offenbar als rekursiver Zusammenhang von $G_{\nu 1}$, $G_{\nu-1,1}$, $G_{\nu-2,1}, \ldots$ *charakterisiert,* wofern noch dargetan wird, dass sich $G_{\nu 2}$, $G_{\nu 3}, \ldots$ durch die Funktionen $G_{\nu-1,1}$, $G_{\nu-2,1}, \ldots$ ausdrücken lassen. Eine Formel, welche dies leistet, findet man durch Differentiation der Gleichung (11)

$$(13) \qquad G'_{\nu h} = \frac{(Q_\nu R'_{\nu-h} + Q'_\nu R_{\nu-h}) - (Q_{\nu-h} R'_\nu + Q'_{\nu-h} R_\nu)}{L_0^{\nu+1-h}} - \\ - (\nu + 1 - h) L'_0 \frac{Q_\nu R_{\nu-h} - Q_{\nu-h} R_\nu}{L_0^{\nu+2-h}}$$

und Entfernung der Differentialquotienten Q', R' mithilfe der sofort aus (5), (6) folgenden Gleichungen

$$(14) \qquad \begin{aligned} Q_{\nu-1} &= L_0 Q'_{\nu-2} - (\nu-1) L_0 Q_{\nu-2} + L_2 R_{\nu-2}, \\ R_{\nu-1} &= L_0 R'_{\nu-2} - L_{\nu-1,1} R_{\nu-2} - L_0 Q_{\nu-2}, \end{aligned}$$

dann vereinfacht sich der Differentialquotient (13) *in*

$$(15) \qquad G'_{\nu h} = \frac{G_{\nu+1,h+1} + L_{\nu+1,1} G_{\nu h} + L_0 G_{\nu,h-1}}{L_0},$$

woraus wieder umgekehrt $G_{\nu 2}$, $G_{\nu 3}, \ldots$ *sukzessive zu berechnen sind*

$$(16) \qquad G_{\nu+1,2} = L_0 G'_{\nu 1} - L_{\nu+1,1} G_{\nu 1}, \ \ldots \ G_{\nu+1,h+1} = L_0 (G'_{\nu h} - G_{\nu,h-1}) - L_{\nu+1,1} G_{\nu h}.$$

Eine Verallgemeinerung von (12), *die ebenfalls Eigenschaften der* $G_{\nu h}$ *aussagt,* wird durch Subtraktion der mit $R_{\nu-h}$, $Q_{\nu-h}$ multiplizierten Rekursionen (7), (8) gewonnen

$$(17) \qquad G_{\nu h} + \sum_{\varkappa=1}^{h-1} L_{\nu\varkappa} L_0^{\varkappa-1} G_{\nu-\varkappa, h-\varkappa} = L_0^{h-1} [L_{\nu, h+1} G_{\nu-h, 1} + L_{\nu, h+2} G_{\nu-h, 2} + \cdots],$$

und dies spezialisiert sich für $h=2$ und 3, wenn man die linke Seite gemäss (16) durch $G_{\nu-1,1}$, $G_{\nu-2,1}$ ausdrückt und durch L_0 dividiert, zu den Gleichungen

$$(17\,\mathrm{a}) \qquad G'_{\nu-1,1} = L_{\nu 3} G_{\nu-2,1} + L_{\nu 4} G_{\nu-2,2} + L_{\nu 5} G_{\nu-2,3} + \cdots$$

$$(17\,\mathrm{b}) \qquad L_0 G''_{\nu-2,1} - L_{\nu-2,1} G'_{\nu-2,1} + L_{\nu-1,2} G_{\nu-2,1} - G_{\nu-1,1} =$$
$$= L_0 [L_{\nu 4} G_{\nu-3,1} + L_{\nu 5} G_{\nu-3,2} + \cdots].$$

Nunmehr reichen die angeführten Sätze über die Funktionen $G_{\nu h}$ aus, um den Zusammenhang zwischen der Darstellung von y'/y als Kettenbruch und derjenigen von y^* als Integral festzustellen:

(18) *Für jede Differentialgleichung 2. Ordnung mit rationalen Koeffizienten*

$$L_0 \overset{n}{\overline{(x)}} y'' + L_1 \overset{n-1}{\overline{(x)}} y' + L_2 \overset{n-2}{\overline{(x)}} y = 0$$

ist $G_{\nu-1,1}$, abgesehen von der Benennung der Unabhängigen, mit jenem Polynom G_ν identisch, welches bei der Quadraturdarstellung von y^*, vgl. (14) der Einleitung, auftritt.

Da y^* bei Differentialgleichungen 2. Ordnung eine alternierende Funktion von x und c ist, kann man versuchen, alle unter den zur Quadraturdarstellung, vgl. (22) § 4, dienenden Polynomen $F_{\lambda\nu}(v)$ mit ungleichen Indizes zum Verschwinden zu bringen, wobei bezüglich der willkürlich gebliebenen Funktionen $\mathfrak{F}_{\lambda\nu}(v)$ angenommen werde, dass alle $\mathfrak{F}_{\lambda\nu}$, bei denen entweder $\lambda<\nu$ oder $\lambda>\nu+n-3$ ist, ebenfalls verschwinden mögen. Die erwähnten Bedingungen (22) § 4 lauten hier

$$(19) \qquad F_{\lambda+1, \nu+1} = F'_{\lambda+1, \nu} + L_0^{\lambda-\nu} L_{\lambda, \lambda+2-\nu} F_{\nu\nu} - (\mathfrak{F}_{\lambda, \nu-1} + L_0 \mathfrak{F}_{\lambda-1, \nu}) +$$
$$+ (L_0 \mathfrak{F}'_{\lambda-1, \nu-1} - L_{\lambda-1, 1} \mathfrak{F}_{\lambda-1, \nu-1})$$

(20) *und liefern durch Einsetzung der Werte $\lambda=\nu+1$ bis $\nu+n-2$ ein System von $n-2$ Gleichungen, welches die Funktionen $\mathfrak{F}_{\nu\nu}$, $\mathfrak{F}_{\nu+1,\nu}$, ... $\mathfrak{F}_{\nu+n-3,\nu}$ in ihrer Abhängigkeit von den $F_{\nu\nu}=G_\nu$ definiert, so dass also noch zwei simultane Bedingungen von den G_ν zu erfüllen sind, wenn λ die beiden Werte $\nu-1, \nu$ in (19) annimmt.*

Zunächst ist die Abhängigkeit der $\mathfrak{F}_{\lambda\nu}$ von den G_ν zu untersuchen. Aus (19) folgt durch Einsetzung von $\lambda=\mu+\nu$ eine Rekursion

$$(21)\qquad L_0 \mathfrak{F}_{\mu+\nu-1,\,\nu} = L_{\mu+\nu,\,\mu+2} L_0^\mu G_\nu - \dot{\mathfrak{F}}_{\mu+\nu,\,\nu-1} + \\ + (L_0 \mathfrak{F}'_{\mu+\nu-1,\,\nu-1} - L_{\mu+\nu-1,\,1} \mathfrak{F}_{\mu+\nu-1,\,\nu-1})$$

zur sukzessiven Berechnung von $\mathfrak{F}_{\nu+n-3,\,\nu}$, $\mathfrak{F}_{\nu+n-4,\,\nu}$, ...

$$\mathfrak{F}_{\nu+n-3,\,\nu} = L_0^{n-3} L_{\nu+n-2,\,n} G_\nu,$$
$$\mathfrak{F}_{\nu+n-4,\,\nu} = L_0^{n-4} [L_{\nu+n-3,\,n-1} G_\nu + L_{\nu+n-3,\,n} (L_0 G'_{\nu-1} - L_{\nu-1,\,1} G_{\nu-1})], \ldots$$

und *man gelangt auf diesem Wege, wenn noch in Analogie zu* (16) *die Funktionen*

$$(22)\qquad G_{\nu 1} = G_{\nu+1}, \quad G_{\nu 2} = L_0 G'_{\nu-1,\,1} - L_{\nu 1} G_{\nu-1,\,1}, \ldots \\ G_{\nu,\,h+1} = L_0 (G'_{\nu-1,\,h} - G_{\nu-1,\,h-1}) L_{\nu 1} G_{\nu-1,\,h}$$

eingeführt werden, zu dem allgemeinen Ansatz

$$(23)\qquad \mathfrak{F}_{\mu+\nu,\,\nu} = L_0^\mu \sum_{h=\mu+1}^{n-2} L_{\mu+\nu+1,\,h+2} G_{\nu-1,\,h-\mu},$$

von dem man unschwer nachweist, dass er wirklich der Rekursion (21) entspricht. (Man braucht hiezu nur in dem Ausdruck für $\mathfrak{F}'_{\mu+\nu-1,\,\nu-1}$ die Differentialquotienten mittels der beiden Formeln

$$L_0 G'_{\nu h} = G_{\nu+1,\,h+1} + L_{\nu+1,\,1} G_{\nu h} + L_0 G_{\nu,\,h-1}, \quad L'_{\mu+\nu,\,\varkappa} = L_{\mu+\nu+1,\,\varkappa+1} - L_{\mu+\nu,\,\varkappa+1}$$

wegzuschaffen.) Ferner sind noch von den Polynomen G_ν die für $\lambda=\nu-1$, ν aus (19) entstehenden simultanen Bedingungen

$$(24)\qquad 0 = G'_\nu - \mathfrak{F}_{\nu-1,\,\nu-1}, \quad G_{\nu+1} = L_{\nu 2} G_\nu - \mathfrak{F}_{\nu,\,\nu-1} + L_0 \mathfrak{F}'_{\nu-1,\,\nu-1} - L_{\nu-1,\,1} \mathfrak{F}_{\nu-1,\,\nu-1}$$

zu erfüllen. Hier gilt der Satz:

(25) *Identifiziert man die Funktionen $G_{\nu h}$ in* (22) *mit den früher, durch* (11) *definierten, (v statt x als Unabhängige gedacht), so genügen sie in der Tat den beiden Bedingungen* (24).

Bezüglich der ersteren trifft dies zu, weil nach (17 a), (23)

$$G'_{\nu 1} = \mathrm{L}_{\nu+1,3}\, G_{\nu-1,1} + \mathrm{L}_{\nu+1,4}\, G_{\nu-1,2} + \cdots, \qquad \mathfrak{F}_{\nu\nu} = \sum_{h=1}^{n-2} \mathrm{L}_{\nu+1,h+2}\, G_{\nu-1,h}$$

ist und bezüglich der letzteren, welche in der Form

$$\mathfrak{F}_{\nu,\nu-1} = G_{\nu 1} - [\mathrm{L}_0\, G''_{\nu-1,1} - \mathrm{L}_{\nu-1,1}\, G'_{\nu-1,1} + \mathrm{L}_{\nu 2}\, G_{\nu-1,1}]$$

geschrieben werden kann, aus dem Grunde, weil die rechte Seite, nach (17 b) den Wert $\mathrm{L}_0(\mathrm{L}_{\nu+1,4}\, G_{\nu-2,1} + \mathrm{L}_{\nu+1,5}\, G_{\nu-2,2} + \cdots)$ hat, übereinstimmend mit dem nach (23) berechneten Werte von $\mathfrak{F}_{\nu,\nu-1}$.

Der so erbrachte Beweis der Identität von $G_\nu(v)$ mit

$$G_{\nu-1,1}(v) = \frac{Q_{\nu-1}(v)\, R_{\nu-2}(v) - Q_{\nu-2}(v)\, R_{\nu-1}(v)}{\mathrm{L}_0(v)^\nu}$$

ermöglicht auch, eine Darstellung von $G_\nu(v)$ zu finden, welche nicht auf dem Umwege über die Q, R sondern direkt von $\mathrm{L}_{i\varkappa}$ abhängt

(26) $$G_\nu(v) = G_{\nu-1,1}(v) = \mathrm{Det}\,|\,a_{i\varkappa}\,|, \quad a_{i\varkappa} = \mathrm{L}_{i,i-\varkappa+2}, \quad i, \varkappa = 0 \text{ bis } \nu - 1$$

und zwar besteht der Satz, dass die Entwicklung (12) *für* $G_{\nu-1,1}$

$$G_{\nu-1,1} = \mathrm{L}_{\nu-1,2}\, G_{\nu-2,1} + \mathrm{L}_{\nu-1,3}\, G_{\nu-2,2} + \mathrm{L}_{\nu-1,4}\, G_{\nu-2,3} + \cdots$$

mit derjenigen der Determinante Δ_ν *in* (26) *nach ihrer letzten Zeile*

$$\Delta_\nu = \mathrm{L}_{\nu-1,2}\, \Delta_{\nu 1} - \mathrm{L}_{\nu-1,3}\, \Delta_{\nu 2} + \mathrm{L}_{\nu-1,4}\, \Delta_{\nu 3} + \cdots,$$

wo $(-1)^{h-1} \Delta_{\nu h}$ die zum h-ten Element der letzten Zeile (von rechts gezählt) gehörige Unterdeterminante bedeutet, *Term für Term identisch ist.*

Anders formuliert lautet diese Behauptung

(26 a) $$(-1)^{h-1}\, G_{\nu-2,h}(v) = \Delta_{\nu h}(v) = \mathrm{Det}\,|\,a_{i\varkappa}\,|, \quad \begin{array}{l} i = 0 \text{ bis } \nu - 2 \\ \varkappa = 0 \text{ bis } \nu - 1 \text{ exkl. } \nu - h \end{array}$$

und zur vollständigen Induktion bedarf es eines Hilfssatzes: *Transformiert man die Determinante* $\Delta_{\nu h}$ *dadurch, dass man statt der Elemente ihrer letzten Zeile* ($a_{\nu-2,\varkappa}$, $\varkappa \neq \nu - h$) *die Elemente* $a_{\nu-1,\varkappa}$ *(ebenfalls* $\varkappa \neq \nu - h$) *einträgt, in eine andere Determinante* $\Gamma_{\nu h}$, *so wird*

(27) $$\Gamma_{\nu h} = \frac{d\Delta_{\nu h}(v)}{dv} + \Delta_{\nu, h-1}(v), \qquad \Delta_{\nu 0} = 0.$$

Beweis. Da der Differentialquotient von $\Delta_{\nu h}$ gleich der Summe der $(\nu-1)$ Determinanten $\delta^{(j)}_{\nu h}$ ist, die aus $\Delta_{\nu h}$ enstehen, wenn jeweils bloss die Elemente der $(j+1)$-ten Zeile nach v differentiert werden, so kann der Hilfssatz auch die Form

(27 a) $$\delta^{(0)}_{\nu h} + \delta^{(1)}_{\nu h} + \cdots + \delta^{(\nu-3)}_{\nu h} + [\delta^{(\nu-2)}_{\nu h} - \Gamma_{\nu h}] = -\Delta_{\nu, h-1}$$

erhalten. Nun figurieren in $\delta^{(j)}_{\nu h}$ als Elemente der $(j+1)$-ten Zeile

$$\frac{d a_{j\varkappa}}{dv} = \frac{d \mathrm{L}_{j, j-\varkappa+2}}{dv} = \mathrm{L}_{j+1, j-\varkappa+3} - \mathrm{L}_{j, j-\varkappa+3} = a_{j+1, \varkappa} - a_{j, \varkappa-1}, \quad a_{j, -1} = 0$$

wenn man also, bei $j < \nu - 2$, die Elemente $a_{j+1, \varkappa}$ der nächstfolgenden Zeile subtrahiert so werden sie durch $-a_{j, \varkappa-1}$ ersetzbar. Ebenso liefert die Subtraktion und Kontraktion der beiden, bloss in der letzten Zeile verschiedenen, Determinanten $\delta^{(\nu-2)}_{\nu h}$, $\Gamma_{\nu h}$ als Elemente dieser Zeile

$$(a_{\nu-1, \varkappa} - a_{\nu-2, \varkappa-1}) - a_{\nu-1, \varkappa} = -a_{\nu-2, \varkappa-1}.$$

Gegenüber $\Delta_{\nu h}$ unterscheidet sich somit, nach den genannten Modifikationen, die $(j+1)$-te Determinante auf der linken Seite von (27 a), für alle j, bloss bezüglich der $(j+1)$-ten Zeile, in welcher die Elemente $-a_{j, \varkappa-1}$ stehen (exkl. $-a_{j, \nu-h-1}$), *und jetzt zerlegt man, bei $h > 1$, die Elemente ihrer $(\nu-h+1)$-ten Kolonne in zwei Summanden*

(28) $$\begin{aligned} a_{i, \nu-h+1} &= a_{i, \nu-h} + (a_{i, \nu-h+1} - a_{i, \nu-h}) && \text{für } i \neq j \\ -a_{j, \nu-h} &= -a_{j, \nu-h} + \text{Null} && \text{für } i = j, \end{aligned}$$

wodurch sie sich ebenfalls in zwei Determinanten $\Delta^{(j)}_{\nu h} + \Theta^{(j)}_{\nu h}$ zerlegen lässt. Dann gehört zu jedem Element der $(j+1)$-ten Zeile von $\Delta^{(j)}_{\nu h}$ resp $\Theta^{(j)}_{\nu h}$ genau dieselbe Unterdeterminante, wie zu dem an genau derselben Stelle befindlichen von $\Delta_{\nu, h-1}$ resp. von $\Delta_{\nu h} - \Delta_{\nu, h-1}$, wofern man wieder die beiden, nur in einer Kolonne von einander verschiedenen Determinanten $\Delta_{\nu h}$, $\Delta_{\nu, h-1}$ substrahiert und kontrahiert denkt, denn in $\Delta_{\nu, h-1}$ resp. $\Delta_{\nu h} - \Delta_{\nu, h-1}$ lautet die $(i+1)$-te Zeile

$$a_{i,0} \;\; a_{i,1} \ldots a_{i, \nu-h-1} \;\; a_{i, \nu-h} \qquad\qquad a_{i, \nu-h+2} \ldots a_{i, \nu-1}$$

$$a_{i,0} \;\; a_{i,1} \ldots a_{i, \nu-h-1} \;\; (a_{i, \nu-h+1} - a_{i, \nu-h}) \;\; a_{i, \nu-h+2} \ldots a_{i, \nu-1}.$$

Die Summierung der $\Delta^{(j)}_{\nu h}$ resp. $\Theta^{(j)}_{\nu h}$ ist sofort ausführbar

$$\sum_{j=0}^{\nu-2} \Delta^{(j)}_{\nu h} = -\Delta_{\nu, h-1}, \quad \sum_{j=0}^{\nu-2} \Theta^{(j)}_{\nu h} = 0. \tag{29}$$

Bezeichnet man nämlich die zum Element $a_{i\varkappa}$ in $\Delta_{\nu, h-1}$ gehörige Unterdeterminante kurz mit $\Delta^{(i,\varkappa)}$, und die zum gleichstelligen Element in $\Delta_{\nu h} - \Delta_{\nu, h-1}$ mit $\Delta'^{(i,\varkappa)}$, so ist bei Entwicklung von $\Delta^{(j)}_{\nu h}$, $\Theta^{(j)}_{\nu h}$ nach der $(j+1)$-ten Zeile

$$-\sum_{j=0}^{\nu-2} \Delta^{(j)}_{\nu h} = \sum_{j=0}^{\nu-2} \left\{ \left[\sum_{\varkappa=0}^{\nu-h-1} a_{j,\varkappa-1} \Delta^{(j,\varkappa)} \right] + \left[a_{j,\nu-h} \Delta^{(j,\nu-h)} \right] + \left[\sum_{\varkappa=\nu-h+2}^{\nu-1} a_{j,\varkappa-1} \Delta^{(j,\varkappa)} \right] \right\}$$

$$-\sum_{j=0}^{\nu-2} \Theta^{(j)}_{\nu h} = \sum_{j=0}^{\nu-2} \left\{ \left[\sum_{\varkappa=0}^{\nu-h-1} a_{j,\varkappa-1} \Delta'^{(j,\varkappa)} \right] + \left[\sum_{\varkappa=\nu-h+2}^{\nu-1} a_{j,\varkappa-1} \Delta'^{(j,\varkappa)} \right] \right\}$$

und die Vertauschung der Summationsfolge zeigt die Richtigkeit von (29), somit auch die des Hilfssatzes (27 a) bei $h > 1$.

Ebenso entwickelt man bei $h = 1$ die $(j+1)$-te Determinante links in (27 a) nach den Elementen ihrer $(j+1)$-ten Zeile, und weil jedes von ihnen dieselbe Unterdeterminante hat, wie das in $\Delta_{\nu 1}$ an seiner Stelle befindliche Element, verschwindet aus demselben Grunde, wie bei $h > 1$, die linke Seite von (27 a).

Aber neben dem Zusammenhang (27) *besitzen die Determinanten* $\Delta_{\nu h}$, $\Gamma_{\nu h}$ *noch einen anderen:*

$$\Delta_{\nu+1, h+1} = \mathrm{L}_{\nu-1,1} \Delta_{\nu h} - \mathrm{L}_0 \Gamma_{\nu h}, \tag{30}$$

wie man durch Entwicklung von $\Delta_{\nu+1, h+1}$ nach den (zwei) Elementen der letzten Kolonne erkennt, daher bewirkt die Identifizierung von $G_{\nu-2,h}$ mit $(-1)^{h-1}\Delta_{\nu h}$ gemäss (26 a) das Bestehen der Gleichung

$$G_{\nu-1, h+1} = \mathrm{L}_0 (G'_{\nu-2,h} - G_{\nu-2, h-1}) - \mathrm{L}_{\nu-1,1} G_{\nu-2,h} \tag{30 a}$$

d. h. gerade der Rekursion (16) *oder* (22), *welche von den Funktionen* $G_{\nu h}$ *erfüllt werden musste.*

§ 8. Die Darstellung von y als Grenzwert von Quotienten.

Die im vorigen Abschnitt erörterte Differentiationsmethode bietet zwar unter gewissen Konvergenzbedingungen für y'/y eine Darstellung als Grenzwert der Quotienten Q_ν/R_ν, es bleiben aber zu derjenigen von y noch Operationen nötig, die mit einem Kettenbruch, selbst nur ideell, vorzunehmen Schwierigkeiten bereitet, und die ausserdem nicht mit der Forderung im Einklang sind, die Lösung y als Grenzwert rationaler Funktionen von x anzugeben, wenn die Koeffizienten $P_1(x)$, $P_2(x)$ rationale Funktionen sind. So vermag auch der Gauss'sche Kettenbruch für den Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen nur $F(1, \beta, \gamma, x)$ darzustellen, und dasselbe gilt überhaupt für die Differentialgleichungen $L_0(x)y'' + L_1(x)y' + L_2(x)y = 0$, wo nur im Spezialfalle $L_0 y' + (L_1 - L'_0)y = \text{Konst.}$ diese Methode einen Kettenbruch für y hervorbringt.

Nun können gerade solche Spezialfälle einen Weg zur Darstellung von y zeigen: Da für inhomogene Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten die Differentiationsmethode, wieder unter gewissen Konvergenzbedingungen, eine Lösung als Grenzwert von Quotienten liefert, die ebenfalls rational sind, liegt es nahe, den Zusammenhang homogener Differentialgleichungen 2. Ordnung mit ihren ersten Integralen als Grundlage der Betrachtung zu nehmen.

Nun findet man bei einer inhomogenen Differentialgleichung $y' = A + By$ durch sukzessive Differentiationen

$$(1) \qquad y^{(\nu)} = A_\nu + B_\nu y, \quad A_{\nu+1} = A'_\nu + AB_\nu, \quad B_{\nu+1} = B'_\nu + BB_\nu$$

und y unter der Bedingung $\lim\limits_{\nu \to \infty} y^{(\nu)}/B_\nu = 0$ als Grenzwert der Quotienten $-A_\nu/B_\nu$. Anderseits ist $y' = A + By$ ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$(1\,\text{a}) \qquad y'' = P_1 y' + P_2 y \quad \text{oder} \quad L_0 y'' + L_1 y' + L_2 y = 0$$

dann, wenn $z = A^{-1}$ ihrer Adjungierten genügt

$$(2) \qquad z'' + P_1 z' + (P'_1 - P_2) z = 0$$

und $B = \frac{z'}{z} + P_1$ gesetzt wird, so dass aus dem simultanen Bestehen von

$$y^{(\nu)} = A_\nu + B_\nu y = \varphi_{\nu 1} y' + \varphi_{\nu 2} y = \varphi_{\nu 1}(A + By) + \varphi_{\nu 2} y$$

sich ein Zusammenhang zwischen A_ν, B_ν, $\varphi_{\nu 1}$, $\varphi_{\nu 2}$ herstellen lässt

$$A_\nu = A\varphi_{\nu 1}, \quad B_\nu = B\varphi_{\nu 1} + \varphi_{\nu 2}, \quad \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{\varphi_{\nu 1}}{(z' + P_1 z)\varphi_{\nu 1} + z\varphi_{\nu 2}}$$

oder wenn wieder $P_1 = -\mathrm{L}_1/\mathrm{L}_0$, $P_2 = -\mathrm{L}_2/\mathrm{L}_0$ gesetzt wird, eine Beziehung zwischen den Quotienten A_ν/B_ν und den in § 7 eingeführten Funktionen

$$(4) \qquad \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{R_{\nu-2}}{T_{\nu-2}}, \quad T_\nu = (z' + P_1 z) R_\nu - z\, Q_\nu.$$

Man gelangt so zur Aufgabe, y als Grenzwert von Quotienten darzustellen, deren Zähler mit den früher erhaltenen Funktionen R zusammenfallen und deren erst noch zu bestimmende Nenner genau dieselbe Rekursion haben, wie die Nenner in (4). Die letztere ist jedoch direkt aus den Gleichungen des vorigen Abschnittes herzuleiten. Zunächst verwendet man die Gleichungen (14) in § 7, um die Differentialquotienten der Q, R durch diese Funktionen selbst auszudrücken

$$(5) \quad Q_{\nu-1} = \mathrm{L}_0 Q'_{\nu-2} - (\nu-1)\mathrm{L}'_0 Q_{\nu-2} + \mathrm{L}_2 R_{\nu-2}, \quad R_{\nu-1} = \mathrm{L}_0 R'_{\nu-2} - \mathrm{L}_{\nu-1,1} R_{\nu-2} - \mathrm{L}_0 Q_{\nu-2}$$

und bringt mittels der linearen Rekursion (8) § 7

$$R_{\nu-1} + \mathrm{L}_{\nu-1,1} R_{\nu-2} = -[\mathrm{L}_{\nu-1,2}\mathrm{L}_0 R_{\nu-3} + \mathrm{L}_{\nu-1,3}\mathrm{L}_0^2 R_{\nu-4} + \cdots]$$

die zweite der Gleichungen (5), nach Division durch L_0, in die Form

$$(6) \qquad R'_{\nu-2} - Q_{\nu-2} = -[\mathrm{L}_{\nu-1,2} R_{\nu-3} + \mathrm{L}_{\nu-1,3}\mathrm{L}_0 R_{\nu-4} + \cdots].$$

Ebenso benützt man die Rekursion (7) § 7 der Q zur Umformung der ersten Gleichung (5)

$$\mathrm{L}_0 Q'_{\nu-2} - (\nu-1)\mathrm{L}'_0 Q_{\nu-2} + \mathrm{L}_2 R_{\nu-2} = -[\mathrm{L}_{\nu-1,1} Q_{\nu-2} + \mathrm{L}_{\nu-1,2}\mathrm{L}_0 Q_{\nu-3} + \cdots],$$

woraus sich nach Division durch L_0

$$(7) \qquad Q'_{\nu-2} = [P_1 Q_{\nu-2} + P_2 R_{\nu-2}] - [\mathrm{L}_{\nu-1,2} Q_{\nu-3} + \mathrm{L}_{\nu-1,3}\mathrm{L}_0 Q_{\nu-4} + \cdots]$$

ergibt. Berechnet man jetzt den Differentialquotienten der in (4) definierten Funktion T_ν unter Berücksichtigung der von z zu erfüllenden Differentialgleichung (2)

$$T'_\nu = (z' + P_1 z)(R'_\nu - Q_\nu) - z(Q'_\nu - P_1 Q_\nu - P_2 R_\nu)$$

und substituiert für R'_ν, Q'_ν ihre Werte aus (6), (7), dort $\nu+2$ statt ν genommen,

$$T'_\nu = -(z' + P_1 z)[\mathrm{L}_{\nu+1,2} R_{\nu-1} + \mathrm{L}_{\nu+1,3} \mathrm{L}_0 R_{\nu-2} + \cdots] +$$
$$+ z[\mathrm{L}_{\nu+1,2} Q_{\nu-1} + \mathrm{L}_{\nu+1,3} \mathrm{L}_0 Q_{\nu-2} + \cdots]$$

so gelangt man zur Rekursion der Funktion T_ν

(8) $$T'_\nu = -[\mathrm{L}_{\nu+1,2} T_{\nu-1} + \mathrm{L}_{\nu+1,3} \mathrm{L}_0 T_{\nu-2} + \cdots].$$

Dieselbe Rekursion wird demnach für die Nenner S_ν *der Quotienten* R_ν/S_ν, *deren Grenzwert* y *sein soll, als Bedingung aufgestellt*

(9) $$S'_\nu = -[\mathrm{L}_{\nu+1,2} S_{\nu-1} + \mathrm{L}_{\nu+1,3} \mathrm{L}_0 S_{\nu-2} + \cdots],$$

und es handelt sich noch darum den ersten unter ihnen sowie die Konstanten $S_\nu(0)$ *zu fixieren.*

Am einfachsten erscheint es, vorausgesetzt dass $\mathrm{L}_0(x)$ für $x=0$ verschwindet, $S_\nu(0) = R_\nu(0)$ *zu wählen, damit jeder Quotient* R_ν/S_ν *den Wert* 1 *für* $x=0$ *annimmt, ferner auch den zu* $R_{-1}=1$ *gehörigen Nenner* S_{-1} *ebenfalls gleich* 1 *und* $S_{-2}=0$ *zu wählen.* Der Wert $R_\nu(0)$ ist bei $\mathrm{L}_0(0)=0$ sofort angebbar

(10) $$R_\nu(0) = (-1)^{\nu+1}\beta_{\nu+1}, \quad \beta_\nu = \mathrm{L}_{01}(0)\,\mathrm{L}_{11}(0)\ldots\mathrm{L}_{\nu-1,1}(0)$$

weil sich für $x=0$ die Rekursion der R auf $R_\nu(0) + \mathrm{L}_{\nu 1}(0)\,R_{\nu-1}(0) = 0$ reduziert. Von dem Ausnahmsfall, dass eine der Konstanten β_ν verschwindet, ist dabei abgesehen.

Eine andere Wahl der S *wäre im Hinblick auf den integrabeln Fall* $\mathrm{L}_2(x) = \mathrm{L}'_1(x) - \mathrm{L}''_0(x)$ *oder* $\mathrm{L}_0 y' + (\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}'_0)y = Const.$ *zu treffen.* Es haben nämlich die in (1) auftretenden Funktionen A_ν, B_ν lineare Rekursionen, die bei $A = K/\mathrm{L}$, $B = -M/\mathrm{L}$, vgl. (16a) und (30) § 1, lauten

(11) $$\sum_{i=0}^{\nu} A_{\nu-i} M_{\nu-1,i} = K^{(\nu-1)}, \quad \sum_{i=0}^{\nu} B_{\nu-i} M_{\nu-1,i} = 0, \quad M_{\nu i} = \binom{\nu}{i}\mathrm{L}^{(i)} + \binom{\nu}{i-1} M^{(i-1)}$$

und für die Funktionen $\varrho_\nu = A_{\nu+1}\mathrm{L}^{\nu+1}$, $\sigma_\nu = B_{\nu+1}\mathrm{L}^{\nu+1}$ übergehen in

(12) $$K^{(\nu-1)} = \varrho_\nu + M_{\nu 1}\varrho_{\nu-1} + M_{\nu 2}\mathrm{L}\varrho_{\nu-2} + M_{\nu 3}\mathrm{L}^2\varrho_{\nu-3} + \cdots, \quad \varrho_0 = K, \; \varrho_{-1} = 0$$

(12a) $$0 = \sigma_\nu + M_{\nu 1}\sigma_{\nu-1} + M_{\nu 2}\mathrm{L}\sigma_{\nu-2} + M_{\nu 3}\mathrm{L}^2\sigma_{\nu-3} + \cdots, \quad \sigma_0 = -M, \; \sigma_{-1} = 1.$$

Betrachtet man aber speziell die Differentialgleichung, welche für $L_2 = L'_1 - L''_0$ als erstes Integral von (1 a) auftritt

$$(13) \qquad L = L_0, \quad M = L_1 - L'_0, \quad K = 1,$$

so wird der Wert von $M_{\nu i}$ demjenigen gleich, welchen $L_{\nu-1, i}$ für $L_2 = L'_1 - L''_0$ annimmt und $\varrho_{\nu+1}$ nichts anderes, als der dann für R_ν resultierende Wert, da R_ν durch die Rekursion

$$0 = R_\nu + L_{\nu 1} R_{\nu-1} + L_{\nu 2} L_0 R_{\nu-2} + \cdots, \quad R_{-1} = 1, \quad R_{-2} = 0$$

bestimmt ist. Wenn also die Lösung y in dem Spezialfall $L_2 = L'_1 - L''_0$ durch die nach (12), (12 a) definierten Quotienten $-\varrho_\nu/\sigma_\nu$ dargestellt werden soll, erscheint die Forderung motiviert, dass R_ν/S_ν für $L_2(x) = L'_1(x) - L''_0(x)$ den Wert $-\varrho_{\nu+1}/\sigma_{\nu+1}$ oder S_ν den Wert $-\sigma_{\nu+1}(x)$ annimmt. *Dies wird durch die Wahl der Konstanten*

$$(14) \qquad S_\nu(0) = -\sigma_{\nu+1}(0) = (-1)^{\nu+1} L_{-1,1}(0)\, \beta_{\nu+1}$$

und von $S_{-2} = -\sigma_{-1} = -1$ *erreicht*, $L_0(0) = 0$ und $L_{-1,1}(0) \neq 0$ vorausgesetzt.

Zu bemerken ist noch, dass eine zu (9) analoge Rekursion sowohl für die Nenner σ besteht

$$(15) \qquad \sigma'_{\nu-1} = -[M_{\nu 2}\, \sigma_{\nu-2} + M_{\nu 3} L_0\, \sigma_{\nu-3} + \cdots]$$

wie aus der Kombination von (12 a) mit der aus (1) folgenden Gleichung $\sigma_\nu = L_0 \sigma'_{\nu-1} - M_{\nu 1} \sigma_{\nu-1}$ ersichtlich, als auch, bezüglich der Unabhängigen v, für die Funktion $F_{\nu+2}$ der Quadraturdarstellung, vgl. (19) § 4, wenn dort sämtliche $\mathfrak{F}$ gleich Null gewählt werden.

Auf beide der besprochenen Arten sind für die Differentialgleichung $L_0(\overset{2}{x}) y'' + L_1(\overset{1}{x}) y + L_2 y = 0$ die Nenner S_ν leicht zu ermitteln, da sich für dieselben die Rekursion (9) auf $S'_\nu = -L_{\nu+1,2} S_{\nu-1}$ reduziert, so dass sie Glieder einer Halphenschen Reihe werden.

Bei der ersten Bestimmungsweise, $S_\nu(0) = R_\nu(0)$ und $S_{-1} = 1$ *sind die Nenner* S_ν *durch die independente Formel*

$$(16) \qquad S_\nu = (-1)^{\nu+1} \sum_{\varkappa=0}^{\nu+1} \beta_{\nu+1-\varkappa}\, L_{[\varkappa]\, \nu+1, 2} \frac{x^\varkappa}{\varkappa!}$$

nach der Bezeichnung in (7) § 3, *gegeben und haben eine inhomogene Rekursion welche der homogenen für die R korrespondiert*

$$(17) \qquad S_\nu + \mathrm{L}_{\nu 1} S_{\nu-1} + \mathrm{L}_{\nu 2} \mathrm{L}_0 S_{\nu-2} = \alpha_{\nu+1} \frac{(-x)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}, \quad \alpha_\nu = \mathrm{L}_{02} \mathrm{L}_{12} \ldots \mathrm{L}_{\nu-1,2}.$$

Zum Beweis von (17) substituiert man in die linke Seite die expliziten Werte (16) für die Polynome S und auch für $\mathrm{L}_{\nu 1}(x)$, $\mathrm{L}_0(x)$ ihre Werte

$$\mathrm{L}_{\nu 1}(x) = \mathrm{L}_{\nu 1}(0) + x \mathrm{L}'_{\nu 1}, \quad \mathrm{L}_0(x) = x \mathrm{L}'_0(0) + \frac{x^2}{2} \mathrm{L}''_0,$$

so ergibt die Ordnung der linken Seite nach Potenzen von x als Koeffizienten von $(-1)^{\nu+1} x^\varkappa / \varkappa!$

$$(18) \qquad \beta_{\nu+1-\varkappa} \mathrm{L}_{[\varkappa]\nu+1,2} - [\mathrm{L}_{\nu 1}(0) \beta_{\nu-\varkappa} \mathrm{L}_{[\varkappa]\nu 2} + \mathrm{L}'_{\nu 1} \beta_{\nu+1-\varkappa} \mathrm{L}_{[\varkappa-1]\nu 2}] + \\ + \left[\varkappa \mathrm{L}'_0(0) \beta_{\nu-\varkappa} \mathrm{L}_{[\varkappa]\nu 2} + \binom{\varkappa}{2} \mathrm{L}''_0 \beta_{\nu+1-\varkappa} \mathrm{L}_{[\varkappa-1]\nu 2}\right].$$

Während die beiden Terme mit $\beta_{\nu-\varkappa}$ bei $\varkappa = \nu + 1$ entfallen, liefern sie bei $\varkappa \leqq \nu$ den Beitrag

$$-[\mathrm{L}_{\nu 1}(0) - \varkappa \mathrm{L}'_0(0)] \beta_{\nu-\varkappa} \mathrm{L}_{[\varkappa]\nu 2} = -\beta_{\nu+1-\varkappa} \mathrm{L}_{[\varkappa]\nu 2},$$

hienach wird bei $\varkappa \leqq \nu$ der Koeffizient (18) gleich Null, bei $\varkappa = \nu + 1$ gleich $\alpha_{\nu+1}$ wie in (17) behauptet.

Ferner erhält man aus (17) und der korrespondierenden Gleichung $R_\nu + {}$ ${} + \mathrm{L}_{\nu 1} R_{\nu-1} + \mathrm{L}_{\nu 2} \mathrm{L}_0 R_{\nu-2} = 0$ für die R eine Rekursion

$$R_\nu S_{\nu-1} - R_{\nu-1} S_\nu = \mathrm{L}_{\nu 2} \mathrm{L}_0 (R_{\nu-1} S_{\nu-2} - R_{\nu-2} S_{\nu-1}) - \alpha_{\nu+1} R_{\nu-1} \frac{(-x)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$$

und nach Ausrechnung von $R_0 S_{-1} - R_{-1} S_0 = \alpha_1 x$ *eine Formel für die Determinanten*

$$(19) \qquad R_\nu S_{\nu-1} - R_{\nu-1} S_\nu = \alpha_{\nu+1} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} (-1)^\varkappa \mathrm{L}_0^{\nu-\varkappa} R_{\varkappa-1} \frac{x^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)!}.$$

Bei der anderen Bestimmungsweise (14) ist der zu R_ν gehörige Nenner, welcher zum Unterschied mit $\bar{S}_\nu$ bezeichnet sei, gleich jenem Polynom zu wählen, das aus $S_{\nu+1}$ ensteht, wenn dort L_1, L_2 durch $L_{-1,1}$, $L_{-1,2}$ ersetzt werden, sodass sich $L_{\nu 1}$, $L_{\nu 2}$, α_ν, β_ν in

$$L_{\nu-1,1},\quad L_{\nu-1,2},\quad \bar{\alpha}_\nu = L_{-1,2}\,\alpha_{\nu-1},\quad \bar{\beta}_\nu = -L_{-1,1}(0)\,\beta_{\nu-1}$$

verwandeln. Aus (16), dort $\nu+1$ statt ν geschrieben, *folgt die Gestalt und die Rekursion der* $\bar{S}_\nu$

$$(20)\qquad \begin{cases} \bar{S}_\nu = (-1)^{\nu+1} \sum\limits_{\varkappa=0}^{\nu+2} \bar{\beta}_{\nu+2-\varkappa}\, L_{[\varkappa]\,\nu+1,2} \dfrac{x^\varkappa}{\varkappa!} \\ \bar{S}_\nu + L_{\nu 1}\, \bar{S}_{\nu-1} + L_{\nu 2}\, L_0\, \bar{S}_{\nu-2} = \bar{\alpha}_{\nu+2} \dfrac{(-x)^{\nu+2}}{(\nu+2)!}, \end{cases}$$

die letztere wird homogen für $L_{-1,2}=0$. Eine analog wie (19) abzuleitende Formel gibt die Determinanten

$$(21)\qquad R_\nu\, \bar{S}_{\nu-1} - R_{\nu-1}\, \bar{S}_\nu = \alpha_{\nu+1}\, L_0^{\nu+1} + \bar{\alpha}_{\nu+2} \sum_{\varkappa=1}^{\nu+1} (-1)^\varkappa\, L_0^{\nu+1-\varkappa}\, R_{\varkappa-2} \frac{x^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)!}.$$

Als ein weiterer Weg zur Gewinnung eines Kettenbruches für die Lösung y irgend einer linearen Differentialgleichung (nicht bloss bei $m=2$) steht noch offen, vorerst eine formale oder wirkliche Potenzreihe für y aufzustellen und alsdann dieselbe in einen Kettenbruch zu transformieren. Unter anderem wäre es auch möglich, diese Transformation auf Lösungen von der Form

$$(22)\qquad Y = (-1)^{m-1}\, L_0(x)^{m-2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \omega_\mu(x) \frac{t^{\mu+m-1}}{(\mu+m-1)!},\quad t = \frac{x-c}{L_0(x)}$$

vgl. (9) § 2, als Potenzreihen von t betrachtet, in Anwendung zu bringen.

Bezüglich derartiger Umwandlungen einer Potenzreihe *ist eine independente Form der Näherungsbrüche zu erwähnen.* Nach bekannten Regeln korrespondiert die Reihe $\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots$ mit dem Kettenbruch

$$(23)\qquad \frac{a_0}{|\,1} - \frac{a_1 t\,|}{|\,1} - \frac{a_2 t\,|}{|\,1} - \frac{a_3 t\,|}{|\,1} - \cdots,$$

wenn dessen Teilzähler mittels der Determinanten

$$(24)\qquad W_{2\nu}=\begin{vmatrix}\gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_\nu\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{\nu+1}\\ \gamma_\nu & \gamma_{\nu+1} & \dots & \gamma_{2\nu}\end{vmatrix},\qquad W_{2\nu+1}=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{\nu+1}\\ \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{\nu+2}\\ \gamma_{\nu+1} & \gamma_{\nu+2} & \dots & \gamma_{2\nu+1}\end{vmatrix}$$

durch die Formel $a_\mu = W_\mu W_{\mu-3}/W_{\mu-1} W_{\mu-2}$ bestimmt werden (damit diese auch für $\mu=0, 1, 2$ gilt, muss man $W_{-1}=W_{-2}=W_{-3}=1$ definieren). Nun lässt sich aus den Rekursionen für die Näherungsbrüche des Kettenbruches (23)

$$(25)\qquad \begin{aligned} &A_{\mu+1}=A_\mu-a_\mu t A_{\mu-1}, \quad A_1=a_0, \quad A_2=a_0\\ &B_{\mu+1}=B_\mu-a_\mu t B_{\mu-1}, \quad B_1=1, \quad B_2=1-a_1 t\end{aligned}$$

durch Schluss von μ auf $\mu+1$ der Satz beweisen:

(26) *Das Produkt $W_{\mu-2} B_\mu$ resp. $W_{\mu-2} A_\mu$ entsteht aus der Determinante W_μ, wenn man in deren letzten Zeile das* $(\lambda+1)$-te *Element, von rechts, durch t^λ resp. $t^\lambda(\gamma_0+\gamma_1 t+\cdots+\gamma_{\nu-\lambda} t^{\nu-\lambda})$, $\nu=E\left(\frac{\mu}{2}\right)$, ersetzt.*

Bei geradem μ ist noch eine Vereinfachung für $W_{\mu-2}A_\mu$ möglich, indem man die erste Zeile, mit t^ν multipliziert, von der letzten subtrahiert.

Eine andere Form erteilt man dem Satz (26) durch Einführung der in W_μ zu dem eben genannten Elemente gehörigen Unterdeterminante $(-1)^\lambda V_{\mu\lambda}$

$$(26\,\text{a})\qquad W_\mu=\sum_{\lambda=0}^{\nu}(-1)^\lambda \gamma_{\mu-\lambda} V_{\mu\lambda}, \quad W_{\mu-2}B_\mu=\sum_{\lambda=0}^{\nu}(-1)^\lambda V_{\mu\lambda} t^\lambda,$$

$$W_{\mu-2}A_\mu=\sum_{\lambda=0}^{\nu}(-1)^\lambda V_{\mu\lambda} t^\lambda g_{\nu-\lambda}(t),$$

wobei $g_\lambda(t)$ das Polynom $\gamma_0+\gamma_1 t+\cdots+\gamma_\lambda t^\lambda$ bedeutet. Dann erfordern die Rekursionen (25), mit Rücksicht auf den Wert von $a_\mu = W_\mu W_{\mu-3}/W_{\mu-1} W_{\mu-2}$, dass für jedes λ die Bedingung

$$(27)\qquad W_{\mu-2} V_{\mu+1,\lambda+1}=W_{\mu-1} V_{\mu,\lambda+1}+W_\mu V_{\mu-1,\lambda}$$

erfüllt sei. *Bei geradem* $\mu=2\nu$ wird aber, wenn man zur Abkürzung $W_{2\nu}$ mit Δ und die zum $(\varkappa+1)$-ten Elemente (von links) der $(i+1)$-ten Zeile von $W_{2\nu}$ gehörige Unterdeterminante mit $\Delta_{i\varkappa}$ bezeichnet, woraus

$$W_{2\nu-2}=\Delta_{\nu\nu},\quad W_{2\nu-1}=(-1)^{\nu}\Delta_{0\nu},\quad V_{2\nu,\lambda+1}=(-1)^{\lambda+1}\Delta_{\nu,\nu-\lambda-1},$$
$$V_{2\nu+1,\lambda+1}=(-1)^{\nu-\lambda-1}\Delta_{0,\nu-\lambda-1}$$

folgt, *die Bedingung* (27) *identisch mit der, nach dem Minorensatz, geltenden Gleichung*

$$\Delta_{\nu\nu}\Delta_{0,\nu-\lambda-1}-\Delta_{0\nu}\Delta_{\nu,\nu-\lambda-1}=(-1)^{\nu-\lambda-1}V_{2\nu-1,\lambda}\Delta. \tag{28}$$

Anderseits werde *bei ungeradem* $\mu=2\nu+1$ zu Abkürzung Δ', $\Delta'_{i\varkappa}$ für $W_{2\nu+2,\lambda+1}$ resp. die zum $(\varkappa+1)$-ten Elemente (von links) der $(i+1)$-ten Zeile von $W_{2\nu+2,\lambda+1}$ gehörige Unterdeterminante geschrieben, und ausserdem jede der drei Determinanten $W_{2\nu+1}$, $W_{2\nu}$, $W_{2\nu-1}$ nach der Kolonne mit dem Kopfelement $\gamma_{\nu-\lambda}$ entwickelt. Die beiden ersteren erhält man auf diese Weise

$$W_{2\nu+1}=(-1)^{\nu-\lambda-1}\sum_{n=0}^{\nu}\gamma_{\nu-\lambda+n}\Delta'_{n0},\qquad W_{2\nu}=(-1)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\nu}\gamma_{\nu-\lambda+n}\Delta'_{n\nu} \tag{29}$$

durch die $\Delta'_{i\varkappa}$ ausgedrückt, während für $W_{2\nu-1}$ der Ansatz

$$W_{2\nu-1}=(-1)^{\nu-\lambda-1}\sum_{n=0}^{\nu-1}(-1)^{n}\gamma_{\nu-\lambda+n}\delta_n \tag{29 a}$$

verwendet worden soll. Die Übertragung dieser Werte (29) und (29 a) sowie von $V_{2\nu+1,\lambda+1}=(-1)^{\nu}\Delta'_{\nu0}$, $V_{2\nu,\lambda}=\Delta'_{\nu\nu}$ in die zu beweisende Gleichung (27) zeigt durch den Vergleich der Koeffizienten von $\gamma_{\nu-\lambda+n}$ deren Richtigkeit, und zwar wieder nach dem Minorensatz

$$\Delta'_{n0}\Delta'_{\nu\nu}-\Delta'_{\nu0}\Delta'_{n\nu}=(-1)^{n}\delta_n\Delta'.$$

Sonach sind die Näherungsbrüche $A_\mu/B_\mu=W_{\mu-2}A_\mu/W_{\mu-2}B_\mu$ als Quotienten zweier Determinanten gegeben, deren Gestalt, wenigstens für die Nenner, kaum komplizierter als diejenige der a_μ zu nennen ist.

Wien 19 März 1929.

Notis über den sogenannten Fatouschen Satz.

Der von P. FATOU in den Acta mathematica (Bd. 30. S. 360, 1906) veröffentliche Satz wurde elf Jahre früher von mir bewiesen (Monatshefte für Math. und Physik, 6 Jahrg. S. 109, 302). Vorher erfolgte die Formulierung des Satzes im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung (Bd. 4. S. 115).

Alfred Tauber.