BEWEIS EINES SATZES

AUS DER MANNIGFALTIGKEITSLEHRE

VON

EDVARD PHRAGMÉN
in STOCKHOLM.

Hr. BENDIXSON hat im zweiten Bande der Acta Mathematica unter anderen auf die Theorie der Punktmengen sich beziehenden Sätzen auch den folgenden gegeben:

Ist P eine beliebige Punktmenge und Ω die erste Zahl der dritten Zahlenklasse des Hrn. CANTOR, *so hat die Menge $P' - P^{(\Omega)}$ die erste Mächtigkeit.*

Den Beweis giebt er daselbst nur für den speciellen Fall einer linearen Punktmenge, deutet aber an, es könne derselbe auch im allgemeinen Falle in analoger Weise geführt werden. Wie dies geschehen kann, will ich hier zeigen — nach einer Methode, die einfacher zu sein scheint als die, welche Hr. BENDIXSON selbst gebraucht.

In der That, man nehme eine unendliche Folge positiver Grössen

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

im Übrigen willkürlich, jedoch so an, dass immer $\delta_n > \delta_{n+1}$ und dass

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$$

ist. Ferner definire man die Punktmengen

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

durch die Bestimmung, dass Q_n die Gesammtheit derjenigen Punkte von $P' - P^{(\Omega)}$ sein soll, die der Bedingung entsprechen, dass die untere Grenze ihrer Entfernungen von den Punkten der Menge $P^{(\Omega)}$ grösser als δ_n, aber, wenn $n > 1$, kleiner oder gleich δ_{n-1} ist. Mit der Entfernung eines Punktes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von einem Punkte $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ ist hier wie gewöhnlich der Ausdruck

$$\sqrt{|x_1 - x'_1|^2 + |x_2 - x'_2|^2 + \cdots + |x_n - x'_n|^2}$$

gemeint, jedoch mit der Modifikation, dass wenn eine der Grössen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ den Werth ∞ hat, die entsprechende Differenz $x_r - x_r'$ gegen $\frac{1}{x_r}$ ausgetauscht werden soll.

Es muss dann

$$Q_n^{(\Omega)} \equiv 0$$

sein, denn ein Punkt von $Q_n^{(\Omega)}$ müsste auch zu $P^{(\Omega)}$ gehören und es müsste die untere Grenze der Entfernungen der Punkte von Q_n von diesem zu $P^{(\Omega)}$ gehörigen Punkte gleich Null sein, was nach der Definition von Q_n nicht sein kann. Die Menge Q_n ist also eine abzählbare und dies ist somit auch mit der Menge

$$Q \equiv Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$$

der Fall.

Nun ist aber

$$Q \equiv P' - P^{(\Omega)}.$$

Für jeden Punkt der Menge $P' - P^{(\Omega)}$ muss nämlich — da jeder Grenzpunkt von $P^{(\Omega)}$ auch ein Punkt dieser Menge ist — die untere Grenze seiner Entfernungen von den Punkten der Menge $P^{(\Omega)}$ einen von Null verschiedenen Werth haben, und er muss daher zu einer gewissen Menge Q_n und somit auch zu Q gehören. Jeder Punkt von Q aber gehört nach der Definition dieser Punktmenge nothwendig auch zu $P' - P^{(\Omega)}$.

Es ist also

$$P' - P^{(\Omega)}$$

eine abzählbare Punktmenge. w. z. b. w.

Der obige Beweis gilt auch noch für den Fall ungeändert, wo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ komplexe Veränderliche bezeichnen.