SUR QUELQUES ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES.

PAR

EMILE PICARD

à PARIS.

I.

1. J'ai indiqué autrefois[1] un exemple très simple d'équation intégrale singulière du type de l'équation de Fredholm, où la nature analytique de la solution par rapport au paramètre λ figurant dans l'équation dépend de la fonction placée dans le second membre. C'est l'équation

$$u(x) - \frac{1-\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) e^{-|x-\xi|} d\xi = f(x)$$

dont la solution est donnée par

$$u(x) = f(x) + \frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}} d\xi,$$

où l'on suppose que λ n'est pas une constante réelle négative, et où $\sqrt{\lambda}$ a sa partie réelle positive; suivant l'usage, $|a|$ représente la valeur absolue de a. J'indiquerai d'abord comment on peut obtenir très simplement le résultat précédent.

[1] *Sur un exemple simple d'une équation intégrale singulière de Fredholm, où la nature analytique de la solution dépend du second membre* [Annales de l'École Normale Supérieure, 3ième série, tome 28, page 313, 1911].

2. Cherchons d'abord l'intégrale générale de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2 U}{dx^2} - \lambda U = f(x),$$

où λ désigne une constante qui n'est pas un nombre réel négatif, et où $f(x)$ est une fonction *bornée* de la variable réelle x, quand celle-ci varie entre $-\infty$ et $+\infty$. En appliquant des méthodes élémentaires, on peut mettre facilement l'intégrale générale de (E) sous la forme

$$A e^{\sqrt{\lambda}.x} + B e^{-\sqrt{\lambda}.x},$$

en posant

$$A = \int_{+\infty}^{x} \frac{f(\xi)\, e^{-\sqrt{\lambda}.\xi}}{2\sqrt{\lambda}} d\xi + \alpha$$

$$B = -\int_{-\infty}^{x} \frac{f(\xi)\, e^{\sqrt{\lambda}.\xi}}{2\sqrt{\lambda}} d\xi + \beta$$

α et β étant des constantes arbitraires, étant entendu que le radical $\sqrt{\lambda}$ a sa partie réelle positive.

Les constantes α et β doivent être nulles, si l'on veut avoir la solution

$$U = A e^{\sqrt{\lambda}.x} + B e^{-\sqrt{\lambda}.x}$$

de l'équation (E), qui reste bornée pour toute valeur de x. On obtient ainsi pour la solution de (E) restant bornée entre $-\infty$ et $+\infty$

$$U = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}} d\xi.$$

3. Ceci dit, partons de

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} - \lambda v = f(x)$$

et soit v la solution bornée donnée par la formule précédente. Nous posons:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - v = u(x), \tag{2}$$

$u(x)$ sera bornée, et on aura

$$u(x) = f(x) - (1 - \lambda) v. \tag{3}$$

Nous pouvons donc écrire

$$u(x) = f(x) + \frac{1 - \lambda}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}} d\xi.$$

Mais, d'après (2), on a

$$v = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) e^{-|x-\xi|} d\xi.$$

Par suite, l'équation (3) devient

$$u(x) = f(x) + \frac{1 - \lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \cdot e^{-|x-\xi|} d\xi.$$

Ceci démontre que *l'équation intégrale*

$$u(x) - \frac{1 - \lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) e^{-|x-\xi|} d\xi = f(x) \tag{α}$$

est vérifiée par

$$u(x) = f(x) + \frac{1 - \lambda}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}} \cdot d\xi,$$

comme il a été énoncé au paragraphe 1. Dans tout ce calcul $f(x)$ a désigné une fonction bornée. De plus λ n'est pas réel et négatif, et $\sqrt{\lambda}$ désigne la racine carrée de λ ayant sa partie réelle positive.

4. J'ai montré dans le mémoire cité, que la nature de $u(x)$, regardée comme fonction de λ, dépendait essentiellement de $f(x)$. Ainsi, par exemple, prenons pour $f(x)$ la fonction

$$f(x) = \int_0^\infty \cos(hx)\,\varphi(h)\,dh,$$

où on suppose que l'intégrale

$$\int_0^\infty |\varphi(h)|\,dh$$

ait un sens. On a alors pour l'équation (α) la solution

$$u(x) = \int_0^\infty \frac{1 + h^2}{\lambda + h^2}\,\varphi(h)\cos(hx)\,dh,$$

la solution n'ayant de sens que si λ n'est pas une quantité réelle négative. On établit facilement que si la fonction $\varphi(h)$ n'est pas une fonction *analytique* de h entre 0 et $+\infty$, la solution $u(x)$ regardée comme fonction de λ, aura pour coupure *naturelle* toute la partie négative de l'axe réel.

Nous avons donc avec l'équation (α) des circonstances bien différentes de celles qui sont classiques pour l'équation habituelle de Fredholm.

II.

5. Indiquons un autre exemple d'*équation intégrale singulière*, où vont se présenter des particularités très différentes.

J'envisage l'équation fonctionnelle

$$f(x) + \lambda \int_0^\infty \cos(xy) f(y)\,dy = \varphi(x). \tag{4}$$

On obtient facilement sa solution. Rappelons à cet effet un résultat bien connue. De l'équation

$$f(x) = \int_0^\infty \cos(xy)\varphi(y)\,dy,$$

on peut déduire, d'après des formules classiques de Fourier,

$$\varphi(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(xy)\,dx.$$

Ceci dit, de l'équation (4), on tire

$$\int_0^\infty \cos(xy)f(y)\,dy = \frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda},$$

et par suite

$$f(x) = \frac{2}{\pi\lambda}\int_0^\infty \cos(xy)\,.\,[\varphi(y) - f(y)]\,dy. \tag{5}$$

L'élimination de $\int_0^\infty \cos(xy)f(y)dy$ entre (4) et (5) donne

$$f(x) = \frac{2\lambda\int_0^\infty \cos(xy)\varphi(y)\,dy - 2\varphi(x)}{\pi\lambda^2 - 2}$$

et cette fonction est la solution de (4).

Comme dans le cas classique de Fredholm, $f(x)$ *est méromorphe en* λ. Mais nous allons voir que aux deux pôles

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

correspondent une *infinité de solutions distinctes de l'équation sans second membre.*

Prenons $\lambda = +\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. On va obtenir des solutions de l'équation sans second membre:

$$f(x)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xy)f(y)\,dy=0. \tag{6}$$

Partons de la formule

$$\int_0^\infty \cos(xy)\,e^{-ay}\,dy=\frac{a}{x^2+a^2} \qquad (a>0).$$

Or, considérons la fonction

$$e^{-ax}-\frac{a}{x^2+a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{7}$$

On a

$$\int_0^\infty \cos(xy)\left[e^{-ay}-\frac{a}{y^2+a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]dy=\frac{a}{x^2+a^2}-a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos(xy)}{a^2+y^2}\,dy$$
$$=\frac{a}{x^2+a^2}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax}$$
$$=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[e^{-ax}-\frac{a}{x^2+a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right].$$

L'expression (7), renfermant la constante arbitraire a ($a>0$), est donc une solution de (6). Il y en a évidemment bien d'autres. Ainsi on a la solution

$$\int_A^B\left[e^{-ax}-\frac{a}{x^2+a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]\psi(a)\,da$$

a désignant une variable positive; A et B sont deux constantes positives quelconques, et $\psi(a)$ est une fonction arbitraire.

Une circonstance analogue se présente pour la seconde valeur singulière $\lambda=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Les exemples ci-dessus montrent combien des équations intégrales singulières très simples peuvent présenter *des particularités différentes de celles qui sont classiques pour les équations auxquelles est attaché le nom de Fredholm.*