SUR LES FAMILLES DE FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

PAR

GASTON JULIA

à PARIS.

Introduction.

1. C'est un fait bien connu que l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes est beaucoup moins avancée que celle des fonctions d'une seule variable à cause des difficultés beaucoup plus grandes qu'on y rencontre et d'un ordre tout à fait particulier: circonstances qui font que nombre de propositions vraies des fonctions d'une seule variable ne s'étendent pas ou s'étendent mal aux fonctions de plusieurs variables. Si l'on envisage notamment l'ensemble des points singuliers d'une fonction analytique d'une variable, on sait qu'il peut être absolument quelconque, contenir des points isolés, des continus linéaires ou superficiels, libres de toutes restrictions. Des théorèmes généraux comme celui de M. Mittag-Leffler par exemple ou celui qui concerne les développements en série de polynômes ou de fonctions rationnelles donnent en effet le moyen de construire des expressions analytiques représentant des fonctions holomorphes en tout point de certains domaines donnés à priori, les points frontières de ces domaines étant des points singuliers de ces fonctions. Il n'y a rien de pareil pour les fonctions uniformes de plusieurs variables. Les travaux de nombreux géomètres, depuis WEIERSTRASS jusqu' à M. M. F. HARTOGS[1] et E. E. LEVI[2], ont montré par exemple que les pôles ne pouvaient être isolés mais formaient des continus analytiques, que les points singuliers essentiels, jamais isolés, étaient

[1] Voir Acta Matematica, tome 32.

[2] Voir Annali di Matematica, tomes 17 et 18, série III.

assujettis, eux-aussi à de curieuses restrictions. Il s'en faut d'ailleurs que le sujet soit complètement élucidé.

2. Persuadé que l'on gagnerait quelque clarté à aborder par plusieurs côtés à la fois le domaine des fonctions de plusieurs variables j'ai eu l'idée de considérer les familles formées de fonctions de cette nature. On sait que dans le domaine des fonctions d'une seule variable, l'étude d'une fonction autour d'un point singulier essentiel peut se ramener à celle d'une famille de fonctions holomorphes ou méromorphes dans une aire entourant ce point singulier, et d'autre part que les points singuliers peuvent apparaître comme les points où une certaine expression analytique ou bien une suite de fonctions holomorphes (polynômes par exemple) cesse de converger uniformément. Plus généralement, on sait le parti que M. MONTEL et de nombreux auteurs ont tiré de la considération des *familles normales de fonctions.*[1] D'une façon plus précise si on considère une famille de fonctions d'une variable, holomorphes ou méromorphes dans un certain domaine, et normale dans une partie de ce domaine, l'étude des *points où la famille cesse d'être normale* est étroitement liée à celle des points singuliers essentiels des fonctions limites de la famille. J'ai considéré à plusieurs reprises de tels points, notamment dans des travaux sur l'itération des fractions rationnelles,[2] et sur les fonctions entières ou méromorphes.[3] Il m'a semblé que l'étude des *points où une famille de fonctions de plusieurs variables, holomorphes dans un domaine D cessait d'être normale,* devait donner des résultats analogues à ceux qu'ont obtenus M. M. Hartogs et E. E. Levi, l'ensemble de ces points devant jouir de toutes les propriétés des points singuliers essentiels que ces deux auteurs ont établies. C'est à prouver ce fait que le présent mémoire est destiné. On s'est borné aux familles de fonctions holomorphes pour éviter la complication des points d'indétermination[4] que la considération des familles de fonctions méromorphes eût pu introduire. On verra de suite que tout ce qui sera dit ici des familles de fonctions holomorphes s'appliquera aux familles de fonctions méromorphes n'admettant pas de point d'indétermination dans le domaine où on les considère. On s'est borné aussi aux fonc-

---

[1] On précisera cette definition dans la suite.

[2] Journal de Jordan 1918.

[3] Annales de l'Ecole Normale Supérieure 1919, 1920—1921.

[4] Un point $x_1^0 \ldots x_n^0$ est »point d'indétermination» de $f(x_1, \ldots x_n)$, si, *au voisinage de ce point* on peut écrire $f = \frac{P(x_1, x_2, \ldots x_n)}{Q(x_1, x_2, \ldots x_n)}$, P et Q étant holomorphes autour de ce point, et s'annulant simultanément en ce point sans que les continus définis au voisinage du point par les équations $P=0$ et $Q=0$ soient identiques.

tions de deux variables (x, y) pour la simplicité de l'exposition, ce qu'on en dira pouvant immédiatement s'étendre aux fonctions de n variables complexes.

3. Le chapître I est consacré au rappel ou à l'introduction des notions qui doivent être utilisées au cours du mémoire, et à l'exposition de la notion de famille normale de fonctions de 2 variables. On donne quelques propriétés fondamentales de ces familles quant à la convergence et aux moyens de reconnaître qu'une famille est normale. Lorsque les démonstrations sont absolument identiques à celles qui intéressent les fonctions d'une variable, on s'est contenté de renvoyer le lecteur à un ouvrage de l'auteur »Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé» paru à la librairie Gauthier-Villars dans la collection Borel; chaque fois que c'était nécessaire on est entré dans le détail des démonstrations.

Le chapître II expose le théorème fondamental sur lequel repose tout le mémoire. On ne sera pas surpris de noter qu'il est absolument analogue aux théorèmes sur lesquels M. M. Hartogs et E. E. Levi ont respectivement fondé leurs travaux propres. En gros, ce théorème dit que les points où une famille cesse d'être normale ne peuvent être isolés. Les énoncés précis que ce fait peut revêtir sont donnés dans le chapitre II. La forme la plus utile de ce théorème est celle qu'on donne au No. 27. Le chapître III expose les propriétés de E auxquelles on parvient en appliquant le théorème fondamental à l'ensemble E des points où la famille n'est pas normale. Dans le § 1 on a des propriétés d'ordre général. Dans le § 2 et le § 3 on a des propriétés métriques relatives respectivement au cas où E est un continu à 2 ou 3 dimensions assez simple. On voit qu'alors E a des propriétés différentielles remarquables. Il m'a semblé que la propriété exposée au § 3 (cas où E est une hypersurface $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)=0$) était la mère de toutes les autres et j'ai tâché de le prouver au chapître 5 (§ 1 et 2). Ni E. E. Levi, ni M. Hartogs ne me paraissent avoir fait cette remarque qui me semble importante car elle subordonne en fait les propriétés exposées dans le § 2 du chapître III à celle qui est exposée au § 3 du même chapître. Le chapître 4 montre que les propriétés de E établies dans les § 2 et 3 du chapître précédent sont *caractéristiques:* C'est à dire que si un ensemble E les possède, on peut former une famille de fonctions telle que E soit le lieu des points où la famille n'est pas normale.

Au chapître 5, l'étude ainsi faite est appliquée à plusieurs questions. Par exemple à l'étude des points où une *série de fonctions holomorphes cesse de converger uniformément*, et plus particulièrement une *série de puissances* (§ 1). On retrouve par ce moyen notamment la condition imposée à la relation $r' = \varphi(r)$ entre rayons de convergence associés d'une série entière en x et y et il me semble qu'on en voit mieux la raison. On peut s'en servir aussi pour retrouver certains résultats de M. Hartogs (§ 2). D'autre part on verra aussi que l'étude faite permettra d'avoir quelques renseignements généraux sur *l'ensemble des points limites des continus* $f_n(x, y) = 0$ définissant les zéros d'une suite de fonctions holomorphes de 2 variables et par là d'énoncer quelques théorèmes très simples sur les *fonctions limites de fonctions algébroïdes uniformes ou non uniformes dont la convergence est uniforme dans un certain domaine (§ 3).*

CHAPITRE I.

Définitions. Préliminaires.

4. Soit $f(x, y)$ une fonction analytique des 2 variables complexes $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$. On peut dire qu'elle est *holomorphe en un point* (x_0, y_0) si elle est égale à une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$ absolument convergente lorsque $|x - x_0|$ et $|y - y_0|$ sont $< \varrho$, ϱ étant un certain nombre positif. On dit aussi que (x_0, y_0) est un point régulier pour $f(x, y)$. Considérant un certain domaine V de l'espace à 4 dimensions (x_1, x_2, y_1, y_2), $f(x, y)$ sera dite holomorphe dans ce domaine si elle y est uniforme, et si elle est holomorphe au voisinage de tout point intérieur au domaine V.

En (x_0, y_0) $f(x, y)$ est *méromorphe* si l'on peut l'écrire sous la forme $f = \dfrac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ les 2 fonctions f_1 et f_2 étant holomorphes en (x_0, y_0). Si $f_2(x_0, y_0) = 0$ avec $f_1(x_0, y_0) \neq 0$, le point (x_0, y_0) est un pôle. Si $f_2(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0) = 0$ sans que f_1 et f_2 aient un diviseur commun[1] (nul en x_0, y_0), (x_0, y_0) est un *point d'indétermination.* Les pôles et les points d'indétermination sont les *points singuliers non essentiels.* Tout point non régulier, qui n'est ni pôle ni point d'indétermination est un point singulier essentiel.

5. On appellera *surface caractéristique* la variété à 2 dimensions que déterminera dans l'espace $(x_1\, x_2\, y_1\, y_2)$ une équation $f(x, y) = 0$ où $f(x, y)$ est une fonction analytique de (x, y). Un point (x_0, y_0) est un *point ordinaire ou régulier de la surface caractéristique* $f(x, y) = 0$ si, au voisinage de ce point, la surface carac-

[1] Une fonction $F(x, y)$, holomorphe en (x_0, y_0) est dite divisible par $F_1(x, y)$, holomorphe en x_0, y_0, si on a l'identité $F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y)$, $F_2(x, y)$ étant holomorphe en (x_0, y_0).

téristique peut être représentée par une équation $y-y_0=\varphi(x-x_0)$, φ étant une fonction holomorphe de $(x-x_0)$ pour $|x-x_0|<\varrho$, $\varphi(0)=0$, ou par une équation $x-x_0=\psi(y-y_0)$, ψ étant holomorphe en $y-y_0$ pour $|y-y_0|<\varrho'$, $\psi(0)=0$. Le point (x_0, y_0) est un *point critique algébrique de la surface caractéristique,* si la représentation de cette surface au voisinage de (x_0, y_0) peut se faire par une relation $y-y_0=\varphi\left[(x-x_0)^{\frac{1}{p}}\right]$ où $\varphi\left[(x-x_0)^{\frac{1}{p}}\right]$ sera une série entière en $(x-x_0)^{\frac{1}{p}}$, p étant un entier positif, convergente pour $|x-x_0|<\varrho$. Le point (x_0, y_0) est un point *singulier* de la surface caractéristique si c'est un point *singulier de la fonction $f(x, y)$, limite de points réguliers où $f(x, y)=0$.*

6. Considérons une famille de fonctions $f(x, y)$ holomorphes dans un domaine V de l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2). Elle sera dite *normale*[1] *dans* V si, de toute suite infinie formée de fonctions de la famille, on peut extraire une suite partielle qui, dans tout domaine fermé[2] V' intérieur à V, *converge uniformément vers une fonction limite* qui peut être une constante finie ou infinie. A cause de la convergence uniforme, la fonction limite, lorsqu'elle existera, sera holomorphe dans V. Si la famille est normale dans une certaine hypersphère de centre (x_0, y_0) on dit qu'elle est *normale au point* (x_0, y_0). Une famille normale en tout point intérieur au domaine V sera normale dans ce domaine. En effet tout domaine fermé V', intérieur à V, peut être considéré comme intérieur au domaine engendré par un nombre fini des hypersphères précédentes. Ceci résulte du lemme classique de Borel-Lebesgue relatif aux domaines fermés et grâce à ce lemme la démonstration s'opère comme pour les fonctions d'une variable, les hypersphères remplaçant les cercles. Il suffira de se reporter aux leçons citées dans la note (8) pages 56, 57 et 58.

7. Il y a toute une série de propriétés des familles normales de fonctions holomorphes de 2 variables (x, y) qui correspondent à celles des familles normales de fonctions d'une variable z et qui se démontrent de même, en remplaçant aux besoin les cercles tels que $|z-z_0|<\varrho$ par les hypersphères de centre (x_0, y_0) ou les hypercylindres $|x-x_0|<\varrho$, $|y-y_0|<\varrho'$. Par exemple:

1°. *Etant donné une suite infinie $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots f_n(x, y), \ldots$ dont les termes appartiennent à une famille de fonctions holomorphes normale dans V, si la*

[1] Voir pour les *familles normales de fonctions d'une variable* le livre »Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé» par G. JULIA (Gauthier-Villars, Paris 1924), où on trouvera, Chapître 3, une bibliographie detaillée; l'introduction de ces familles normales est due, comme on sait, à M. MONTEL. Dans la suite, l'ouvrage précédent sera désigné par les lettres F. U.

[2] Un domaine fermé est un domaine qui contient tous ses points-frontière.

suite converge en une infinité de points ayant au moins un point limite intérieur à V, elle converge uniformément dans tout domaine fermé V' intérieur à V (voir F. U. N° 37, pages 58, 59, 60.)

2°. Si les fonctions holomorphes appartenant à une famille normale dans un domaine V sont bornées en module en un point intérieur au domaine V, elles sont *bornées dans leur ensemble à l'intérieur de V* (voir F. U. N° 39, page 65). Cela veut dire qu' à tout domaine fermé V' intérieur à V, correspond un nombre positif M tel que *toute fonction de la famille satisfasse en tout point de V à l'inégalité* $|f(x, y)| < M$.

3°. Etant donné une famille de fonctions holomorphes normale dans V, si ces fonctions sont bornées en un point intérieur à V, elles sont *également continues à l'intérieur de V*. Cela veut dire que, V' étant un domaine fermé quelconque intérieur à V, il est possible de faire correspondre à tout nombre ε positif donné a priori un nombre η tel que: $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$ dès que la distance des 2 points (x, y) et (x', y') du domaine V' est inférieure à η, cela quel que soit la fonction f de la famille et la position des 2 points de V' pourvu que leur distance soit $< \eta$. (La condition de distance peut être remplaçée par une condition équivalente, à savoir que l'on ait l'ensemble des 2 inégalités $|x - x'| < \eta$ et $|y - y'| < \eta$) (voir F. U. No. 40, pages 66—68 pour la démonstration).

8. *Critériums de familles normales.* Les critériums permettant d'affirmer qu'une famille de fonctions d'une variable est normale dans un domaine, sont valables pour les fonctions de plusieurs variables.

1^er Critérium. Si des fonctions holomorphes dans un domaine V ont leurs *modules bornés dans leur ensemble*[1] *à l'intérieur de V elles forment une famille normale dans V* (voir F. U. N° 38, pages 60 à 64). La démonstration peut se calquer sur celle qui est donnée dans l'ouvrage cité pour des familles de fonctions d'une variable. On substituera simplement au cercle $|z| \leq R$ un ensemble de 2 cercles $|x| \leq R$, $|y| \leq R$. Il suffit évidemment de prouver que la famille est normale en tout point (x_0, y_0) intérieur à V, c'est à dire dans une certaine hypersphère ou dans un hypercylindre $(|x - x_0| < \varrho, |y - y_0| < \varrho')$ entourant ce point et il est clair qu'on pourra supposer $\varrho = \varrho' < R$ et $x_0 = y_0 = 0$ pour la facilité de l'écriture sans restreindre la généralité.

Toute fonction de la famille sera développée en série de Taylor

$$f(x, y) = \Sigma a_{pq} x^p y^q = a_{00} + a_{10} x + a_{01} y + a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 + \cdots$$

[1] Pour le sens de cette expression, voir No. 7 (2°).

et si on a $|f(x, y)| < M$ pour $|x| \leq R$ et $|y| \leq R$, on aura $|a_{pq}| < \frac{M}{R^p R^q}$. Etant donné une suite infinie quelconque de fonctions de la famille, les coefficients a_{00} de ces fonctions seront bornés par M, on pourra donc extraire de la suite une suite partielle telle que les a_{00} des fonctions choisies aient une limite A_{00} pour laquelle $|A_{00}| < M$. Soit

$$(1) \qquad f_1^1(x, y),\ f_2^1(x, y),\ f_3^1(x, y),\ \ldots$$

cette suite.

Les $|a_{10}|$ et $|a_{01}|$ des fonctions de cette suite sont tous $< \frac{M}{R}$. Les points correspondants, de coordonnées (a_{10}, a_{01}) sont tous dans un espace borné; d'après le lemme de Bolzano-Weierstrass on pourra extraire de la suite (1) une suite (2) $f_1^2(x, y), f_2^2(x, y), f_3^2(x, y), \ldots$ pour laquelle les a_{10}, les a_{01} et les a_{00} auront respectivement des limites A_{10}, A_{01}, A_{00}, $\left[|A_{10}| \leq \frac{M}{R},\ |A_{01}| \leq \frac{M}{R}\right]$. En raisonnant de même on extraira de (2) une suite (3) $f_1^3(x, y), f_2^3(x, y), f_3^3(x, y), \ldots$ pour laquelle les a_{20}, a_{11}, a_{02} auront respectivement des limites A_{20}, A_{11}, A_{02}, $\left[|A_{pq}| \leq \frac{M}{R^2}\right.$ pour $\left.p+q=2\right]$. La suite (3) étant extraite de (2) les a_{pq} ont pour limite A_{pq} lorsque $p+q<2$; en continuant on en a une suite $(r+1)$: $f_1^{r+1}(x, y), f_2^{r+1}(x, y), f_3^{r+1}(x, y), \ldots$ extraite de la suite (r) et pour laquelle les a_{pq} ont une limite A_{pq} toutes les fois que $p+q \leq r$. Le processus sera continué indéfiniment et $|A_{pq}| \leq \frac{M}{R^{p+q}}$. Considérant la suite diagonale

$$(S) \qquad f_1^1(x, y),\ f_2^2(x, y),\ \ldots f_r^r(x, y),\ \ldots,$$

à partir du rang $(r+1)$, toutes les fonctions de (S) figurent dans la suite $(r+1)$, donc les a_{pq} de cette suite pour lesquels $p+q \leq r$ ont une limite A_{pq} et $|A_{pq}| \leq \frac{M}{R^{p+q}}$.

La série $F(x, y) = \Sigma A_{pq} x^p y^q$ est majorée par $\Sigma M \left(\frac{x}{R}\right)^p \left(\frac{y}{R}\right)^q$. $F(x, y)$ est holomorphe pour $|x| < R$, $|y| < R$, et $|F(x, y)| < \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{y}{R}\right)}$.

On prouve aisément que la suite (S) converge uniformément vers $F(x, y)$ dans tout domaine $|x| \leq \varrho < R$, $|y| \leq \varrho < R$.

En effet on a

$$F(x, y)-f_r^r(x, y)=\sum_{p+q\leq k}[A_{pq}-a_{pq}^{(r)}]\,x^p y^q+\sum_{p+q>k}A_{pq}\,x^p y^q-\sum_{p+q>k}a_{pq}^{(r)}\,x^p y^q.^{1}$$

A cause des majorations indiquées ci-dessus pour A_{pq} et $a_{pq}^{(r)}$, l'ensemble des termes de degré $p+q$ dans $F(x, y)$ ou dans $f_r^r(x, y)$ sera, pour $|x|\leq \varrho$, $|y|\leq \varrho$ inférieur en module à $M(p+q+1)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{p+q}$; donc

$$\left|\sum_{p+q>k}A_{pq}\,x^p y^q\right|<M\sum_{\lambda=k+1}^{\infty}(\lambda+1)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\lambda}$$

et

$$\left|\sum_{p+q>k}a_{pq}^{(r)}\,x^p y^q\right|<M\sum_{\lambda=k+1}^{\infty}(\lambda+1)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\lambda}.$$

La série du 2ième membre est convergente pour $\varrho<R$; on a donc pu choisir k assez grand pour que, ε étant donné à priori

$$M\sum_{\lambda=k+1}^{\infty}(\lambda+1)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\lambda}<\varepsilon.$$

Cela étant, on choisira r assez grand pour que

$$\left|\sum_{p+q\leq k}(A_{pq}-a_{pq}^{(r)})\,x^p y^q\right|<\varepsilon,$$

ce qui est possible puisque la somme dont il s'agit ne compte qu'un nombre fini de termes dont chacun tend vers zéro quand r augmente indéfiniment.

On aura alors $|F(x, y)-f_r^r(x, y)|<3\varepsilon$, ce qui prouve que $f_r^r(x, y)$ converge uniformément vers $F(x, y)$ dans $|x|\leq\varrho$ et $|y|\leq\varrho$. La propriété est donc démontrée.

9. 2ième *Critérium.* Une famille de fonctions *holomorphes dans un domaine V, également continues dans ce domaine, est une famille normale dans V.*

Il suffit de prouver qu'elle est normale en tout point intérieur à V ou encore dans toute hypersphère S intérieure à V. Soit $P_0(x_0, y_0)$ le centre d'une telle hypersphère S, $P(x, y)$ un point quelconque intérieur à S ou sur sa surface.

---

[1] On désigne par $a_{pq}^{(r)}$ le coefficient de $x^p y^q$ dans $f_r^r(x, y)$.

Le segment rectiligne $P_0 P$ aura toujours une longueur au plus égale au rayon R de S. Les fonctions $f(x, y)$ de la famille étant également continues dans S, cela veut dire que pour 2 points quelconques (x, y) et (x', y') *distants de moins de* η et appartenant à S, on aura $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$, [$\varepsilon$ donné a priori, η choisi convenablement en fonction de ε] pour toute fonction de la famille. Entre P_0 et P, sur le segment rectiligne $P_0 P$ on intercale k points consécutifs P_1, $P_2, \ldots P_k$ à des intervalles $\leq \eta$; cela est possible pourvu que $(k+1)\eta \geq R$; on prendra donc pour $(k+1)$ le plus petit entier $\geq \frac{R}{\eta}$, on aura:

$$|f(P_1) - f(P_0)| < \varepsilon, \ldots |f(P_i) - f(P_{i-1})| < \varepsilon, \ldots, |f(P) - f(P_k)| < \varepsilon;$$

d'où on déduit[1]

$$|f(P_0)| - (k+1)\varepsilon < |f(P)| < |f(P_0)| + (k+1)\varepsilon.$$

Si les $f(P_0)$ sont bornés quel que soit la fonction f de la famille, il en est de même de $f(P)$ quel que soit P; par suite d'après le N° 8, la famille est bien normale dans S. Si les $f(P_0)$ ne sont pas bornés, considérons une suite infinie quelconque de fonctions de la famille: $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ Si les $f_n(P_0)$ de cette suite sont bornés, les $f_n(P)$ le sont, et on pourra d'après ce qui précède extraire de la suite f_n une suite partielle convergeant uniformément dans S vers une fonction holomorphe. Si les $f_n(P_0)$ ne sont pas bornés on pourra en extraire une suite $f_{n_1}(P_0), f_{n_2}(P_0), \ldots f_{n_p}(P_0), \ldots$ qui tendra vers l'infini avec n_p. Il est clair à cause de

$$|f_{n_p}(P)| > |f_{n_p}(P_0)| - (k+1)\varepsilon,$$

que $f_{n_p}(P)$ tendra vers l'infini avec n_p et uniformément dans S. La suite extraite convergera donc uniformément vers l'infini dans S. Dans tous les cas on voit que la famille f est normale dans S et par suite dans V.

10. *3ième Critérium. Si les valeurs prises par les fonctions holomorphes $f(x, y)$ dans le domaine V ne recouvrent pas une certaine région du plan complexe f, ces fonctions forment une famille normale dans V* (F. U. N° 44, pages 72—73).

Si a est le centre, ε le rayon d'un cercle du plan f intérieur à la région non recouverte par les valeurs des f dans V on aura, dans V $|f(x, y) - a| > \varepsilon$ quel que soit la fonction f de la famille. Pour démontrer ce théorème on s'appuiera sur le lemme suivant.

[1] P étant le point de coordonnées (x, y), on écrira souvent, pour abréger, $f(P)$ au lieu de $f(x, y)$.

11. *Lemme.* Si une suite de fonctions $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots f_n(x, y), \ldots$ holomorphes dans V, converge vers une fonction $F(x, y)$ holomorphe dans V et non identiquement nulle par hypothèse, uniformément dans tout domaine fermé V' intérieur à V, si de plus $F(x, y)$ s'annule dans V', tout point du continu $F(x, y)=0$ appartenant à V' (continu qui traverse le domaine V'), est limite pour les continus $f_n(x, y)=0$.[1] Sans restreindre la généralité on peut supposer que V' contient l'origine et que $F(0, 0)=0$. Envisageons le voisinage de l'origine. Dans ce voisinage on peut écrire $F(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k f_k(y)$, les $f_k(y)$ étant holomorphes pour $y=0$ et la série précédente absolument et uniformément convergente dans un certain domaine $|x|<\varrho, |y|<\varrho'$. Il est clair que toutes les fonctions $f_k(y)$ ne sont pas identiquement nulles sans quoi F le serait. Soit f_p la première de ces fonctions non identiquement nulle, on aura

$$F(x, y)=x^p [f_p(y)+x f_{p+1}(y)+\cdots]=x^p F_p(x, y),$$

$F_p(0, y)$ n'est pas identiquement nulle puisque $F_p(0, y)=f_p(y)$. Il peut arriver que $F_p(0, 0)$ soit $\neq 0$ on a alors $F(x, y)=x^p \Phi(x, y)$, $\Phi(x, y)$ étant $\neq 0$ au voisinage de l'origine. Si au contraire, $F_p(0, 0)=0$, on peut, d'après le théorème de Weierstrass bien connu,[2] et en supposant que $F_p(0, y)$ admette $y=0$ pour zéro d'ordre m, écrire, au voisinage de l'origine:

$$F_p(x, y)=[y^m+\varphi_1(x) \,.\, y^{m-1}+\cdots+\varphi_m(x)] \,.\, \Phi(x, y),$$

$\Phi(x, y)$, comme précédemment, ne s'annulant plus pour $x=y=0$ et par conséquent étant $\neq 0$ dans un certain voisinage de l'origine. En définitive, on pourra écrire $F(x, y)=x^p [y^m+\varphi_1(x) y^{m-1}+\cdots+\varphi_m(x)] \,.\, \Phi(x, y)$, *l'entier p pouvant être nul, dans le cas où $F(0, y)$ ne serait pas identiquement nul, et le polynôme en y écrit entre parenthèses pouvant se réduire à une constante lorsque $p\neq 0$, la fonction $\Phi(x, y)$, dans tous les cas, holomorphe autour de $x=y=0$, ne s'annulant pas autour de l'origine.* Cela étant:

1° si $F(x, y)=x^p \Phi(x, y)$, soit $|x|<\varrho$ $|y|<\varrho'$ la région considérée, où $\Phi(x, y)\neq 0$. Soit y_0 tel que $|y_0|<\varrho'$. La fonction $F(x, y_0)$ admet le seul zéro

[1] Cela veut dire qu'au voisinage de tout point P de $F(x, y)=0$, il y aura, dès que n surpasse un certain rang, des points de tous les continus $f_n(x, y)=0$; pour préciser, dans toute hypersphère de centre P, de rayon ε suffisamment petit, il y aura, pour $n\geq N(\varepsilon)$, des points de tous les continus $f_n(x, y)=0$.

[2] Voir p. ex. E. Picard, Traité d'Analyse, tome 2, p. 261—265 de la 2e édition.

$x=0$ à l'ordre p dans la région $|x|<\varrho$. Les $f_n(x, y_0)$ tendant uniformément vers $F(x, y_0)$ dans la région $|x|\leq\varrho$, il suit d'un théorème connu sur les fonctions d'une variable[1] que les zéros de $F(x, y_0)$ situés dans $|x|\leq\varrho$ sont limites de zéros de $f_n(x, y_0)$ lorsque n devient infini, un zéro d'ordre p de $F(x, y_0)$ étant limite de p zéros des $f_n(x, y_0)$. On voit donc que pour $n\geq N$, $f_n(x, y_0)$ aura p zéros dans $|x|\leq\varrho$ et ces zéros tendront vers l'origine quand n devient infini, c'est à dire que pour $n\geq N$ il y aura p zéros dans $|x|\leq\varepsilon$. Comme d'ailleurs ε, ϱ et ϱ' sont arbitrairement petits, on voit que l'origine, point du continu $F(x, y)=0$ est point limite pour les continus $f_n(x, y)=0$ et le lemme est démontré dans ce cas.

2° si

$$F(x, y)=x^p\,[y^m+y^{m-1}\varphi_1(x)+\cdots+\varphi_m(x)]\,.\,\Phi(x, y),$$

l'entier p pouvant être nul on se place encore dans $|x|\leq\varrho$, $|y|\leq\varrho'$, où $\Phi\neq 0$ et où les φ_i sont holomorphes ($\varphi_k(0)=0$, $k=1, 2, \ldots m$).

Alors, lorsque ϱ est assez petit, ce qu'on peut toujours supposer, pour x_0 arbitraire $\neq 0$, mais tel que $|x_0|\leq\varrho$, le polynôme entre parenthèses a m racines toutes inférieures en module à ϱ'. Ces racines sont les seuls zéros que la fonction de y, $F(x_0, y)$ possède dans $|y|\leq\varrho'$, et en vertu du théorème rappelé précédemment, la fonction $f_n(x_0, y)$ aura aussi m zéros inférieurs en module à ϱ' dès que n surpassera un certain nombre N et le lemme est encore démontré dans ce cas puisque pour $n\geq N$, $f_n(x, y)=0$ aura des points à l'intérieur du domaine $|x|\leq\varrho$ $|y|\leq\varrho'$ arbitrairement petit, contenant le point $x=y=0$ du continu $F(x, y)=0$.

12. *Corollaire du lemme.* Une conséquence de ce lemme, importante pour la suite, est la suivante.

Si la suite $f_n(x, y)$ converge uniformément vers $F(x, y)$ dans un domaine $|x|\leq\varrho$, $|y|\leq\varrho'$ et si aucune des fonctions f_n, à partir d'un certain rang, ne s'annule dans le domaine précédent, la fonction $F(x, y)$ ne pourra s'annuler dans le domaine $|x|\leq\varrho$, $|y|\leq\varrho'$ *que si elle est identiquement nulle dans ce domaine.*

On peut encore dire:

Si dans un domaine fermé, une suite $f_n(x, y)$ converge uniformément, et si aucune fonction de la suite (à partir d'un certain rang) ne prend la valeur a dans ce domaine, la fonction limite $F(x, y)$ ne pourra prendre cette valeur a dans le domaine que si elle est identique à la constante a.

---

[1] Voir, pour la démonstration, le livre déja cité, F. U. pages 69 et 70, et, spécialement, la remarque 1° de la page 70.

13. A l'aide du lemme et de son corollaire il est aisé de démontrer la validité du $3^{\text{ième}}$ Critérium.

Soit $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\ldots f_n(x, y)$, $\ldots$ une suite infinie quelconque de fonctions de la famille; on a

$$|f_n(x, y)-a|>\varepsilon, \text{ dans } V.$$

Faisons correspondre à la suite f_n, la suite φ_n dont les fonctions sont définies par

$$\varphi_n(x, y)=\frac{1}{f_n(x, y)-a}.$$

On aura, dans V

$$|\varphi_n(x, y)|<\frac{1}{\varepsilon}.$$

Les φ_n sont bornés dans V, on peut donc, en vertu du 1^{er} critérium, (N° 8) extraire de la suite φ_n une suite $\varphi_{n_1}(x, y)$, $\varphi_{n_2}(x, y)$, $\ldots$ $\varphi_{n_k}(x, y)$, $\ldots$ qui converge uniformément dans tout domaine fermé V' intérieur à V vers une fonction limite $\Phi(x, y)$ holomorphe dans V, et qui peut se réduire à une constante finie. Les f_n étant holomorphes dans V, aucune fonction φ_n ne s'annule dans V. Donc, *la fonction $\Phi(x, y)$ ne peut s'annuler dans V que si elle se réduit à la constante zéro* (corollaire, N° 12).

1^{er} Cas. *$\Phi(x, y)$ ne s'annule pas dans V.* Alors la fonction $F(x, y)$ définie par

$$\Phi(x, y)=\frac{1}{F(x, y)-a},$$

c'est-à-dire

$$F(x, y)=a+\frac{1}{\Phi(x, y)}$$

est holomorphe dans V. On prouve aisément que la suite f_{n_k} converge uniformément vers $F(x, y)$ dans tout domaine fermé V' intérieur à V. En effet

$$F(x, y)-f_{n_k}(x, y)=\frac{1}{\Phi(x, y)}-\frac{1}{\varphi_{n_k}(x, y)}=\frac{\varphi_{n_k}-\Phi}{\Phi \cdot \varphi_{n_k}},$$

Φ et φ_{n_k} ne s'annulant pas dans V', on aura $|\Phi|>\lambda$ dans V'; φ_{n_k} convergeant vers Φ, on aura dans V': $|\varphi_{n_k}-\Phi|<\varepsilon$ dès que $k>k_0$ convenablement choisi; c'est-à-dire $|\varphi_{n_k}|>\lambda-\varepsilon$.

Par suite, dans V', on aura, pour $k > k_0$,

$$|F(x, y) - f_{n_k}(x, y)| < \frac{\varepsilon}{\lambda(\lambda - \varepsilon)}$$

et cela exprime la convergence uniforme de f_{n_k} vers F dans V'.

$2^{\text{ième}}$ Cas. *$\Phi(x, y)$ est identiquement nulle.* On aura alors, pour $k > k_0$, dans V':

$$|\varphi_{n_k}(x, y)| < \varepsilon.$$

Donc, puisque

$$f_{n_k} = a + \frac{1}{\varphi_{n_k}},$$

$$|f_{n_k}(x, y)| > \frac{1}{\varepsilon} - |a|.$$

ε étant arbitrairement petit, on voit que f_{n_k} converge uniformément vers l'infini dans tout domaine fermé V' intérieur à V. Dans les 2 cas on a extrait de la suite f_n une suite uniformément convergente. La famille des f est bien normale dans V.

14. *$4^{\text{ième}}$ Critérium.* Le $3^{\text{ième}}$ critérium permet d'établir très rapidement un $4^{\text{ième}}$ critérium qui comprend comme cas particuliers le 1^{er} et le 3^{e}. *Si les fonctions holomorphes $f(x, y)$ ne prennent dans un domaine V ni la valeur zéro, ni la valeur un, elles forment une famille normale dans V.*

Il suffit de prouver qu'elle est normale en tout point P_0 intérieur à V c'est-à-dire dans une hypersphère quelconque σ intérieure à V (on envisage ici σ comme un domaine fermé). Soit $t = \nu(z)$ la fonction inverse de la fonction modulaire $z = \lambda(t)$ (voir F. U., p. 14 à 29). A chaque fonction f de la famille nous faisons correspondre une fonction $\varphi(x, y) = \nu[f(x, y)]$, en choisissant au point $P_0(x_0, y_0)$, la *détermination principale* $\nu[f(x_0, y_0)]$ intérieure au quadrilatère fondamental B_0 de la division modulaire du demi plan: $I(t) > 0$ (partie imaginaire de t positive). On voit aisément que φ est uniforme et holomorphe dans σ puisque f ne prend pas les valeurs 0 et 1 qui sont les seules valeurs critiques finies de $\nu(f)$. Les fonctions $\varphi(x, y)$ sont holomorphes dans σ, de plus on a $I(\varphi) > 0$ dans σ, les valeurs des φ dans σ laissent à découvert le demi plan inférieur. D'après le $3^{\text{ième}}$ critérium la famille des φ est normale.

Soit $f_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots \infty$ une suite infinie quelconque (S) de fonctions f. Considérons leurs valeurs au point $P_0(x_0, y_0)$.

1^{er} Cas. Les valeurs $f_n(x_0, y_0) = f_n(P_0)$ admettent un point limite au moins différent de $0, 1, \infty$. C'est le cas général. Soit α un tel point limite. Il existe une suite:

$$(S')\, f_{n'_1}(P_0), f_{n'_2}(P_0), \ldots f_{n'_k}(P_0), \ldots$$

convergeant vers α.

Considérons les φ correspondantes:

$$(\Sigma')\, \varphi_{n'_1}(x, y), \varphi_{n'_2}(x, y), \ldots \varphi_{n'_k}(x, y), \ldots$$

On peut, de cette suite, extraire une suite $(\Sigma)\, \varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots \varphi_{n_k}, \ldots$ qui converge uniformément dans l'hypersphère σ, domaine fermé, vers une fonction limite $\Phi(x, y)$ ou vers l'infini.

La suite $f_{n_1}(P_0), f_{n_2}(P_0), \ldots f_{n_k}(P_0), \ldots$ extraite de (S') converge vers α; donc la suite $\varphi_{n_1}(P_0), \varphi_{n_2}(P_0), \ldots, \varphi_{n_k}(P_0), \ldots$ converge vers $\nu(\alpha)$, détermination principale, puisque, α étant différent de $0, 1, \infty$, $\nu(z)$ est régulière au point $z = \alpha$. Il en résulte que la suite (Σ) ne peut converger vers l'infini, et que la fonction limite $\Phi(x, y)$ ne peut se réduire à une constante réelle (puisque cela n'a pas lieu au point P_0). Il est clair que les φ_{n_k} satisfaisant dans l'hypersphère σ à $I[\varphi_{n_k}(x, y)] > 0$, on aura à la limite $I[\Phi(x, y)] \geq 0$ en tout point de l'hypersphère σ. Mais les φ_{n_k} ne prenant dans σ aucune valeur réelle, Φ ne pourra prendre de valeur réelle en un point de σ que si elle est identique à une constante réelle, (corollaire, N° 12) et cela, on vient de le voir, est impossible. Donc $I[\Phi(x, y)] > 0$ dans σ.

Lorsque le point $P(x, y)$ décrira σ, le point $t = \Phi(x, y)$ restera au dessus de l'axe réel et décrira un domaine θ qui est à une certaine distance de cet axe. On pourra donc faire l'inversion et considérer la fonction $F(x, y) = \lambda[\Phi(x, y)]$ qui sera holomorphe en Φ lorsque Φ décrit θ dans les conditions précédentes, donc holomorphe en (x, y) dans σ. Lorsque k devient infini φ_{n_k} tend vers Φ uniformément das σ; on en déduit que dans les conditions précédentes $\lambda[\varphi_{n_k}]$ tend vers $\lambda[\Phi]$ uniformément dans σ. Or précisément, $f_{n_k} = \lambda[\varphi_{n_k}]$. La suite $f_{n_1}(x, y)$, $f_{n_2}(x, y), \ldots f_{n_k}(x, y), \ldots$ extraite de (S) converge donc vers la fonction holomorphe $F(x, y)$ uniformément dans σ.

2^{ième} Cas. Les seuls points limites de la suite $f_n(P_0)$ sont $0, 1, \infty$. Il existe donc, si par exemple 1 est point limite, une suite S extraite de la suite $f_n(P_0)$:

$$(S')\, f_{n'_1}(P_0), f_{n'_2}(P_0), \ldots f_{n'_k}(P_0), \ldots$$

convergeant vers 1. Aucune des $f_{n'_k}$ ne prend la valeur zéro dans σ. Donc

$\log f_{n'_k}(x, y)$ est une fonction holomorphe dans σ. *On choisira en P_0 la détermination dont la partie imaginaire est entre $-\pi$ et $+\pi$, détermination principale.* On formera

$$g_{n'_k}(x, y) = \frac{2\pi i + \log f_{n'_k}(x, y)}{4\pi i}.$$

$g_{n'_k}(x, y)$ est holomorphe dans σ; $f_{n'_k}$ n'étant jamais égale à 1, son logarithme ne prend donc jamais la valeur $2p\pi i$ (p, entier quelconque). Par suite $g_{n'_k}$ ne prend aucune des valeurs $\frac{p+1}{2}$ où p est un entier quelconque. En P_0, $f_{n'_k}(P_0)$ tend vers 1, donc $\log f_{n'_k}(P_0)$ tend vers zéro. Donc $g_{n'_k}(P_0)$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand k devient infini. La suite des $g_{n'_k}(x, y)$ jouit de propriétés semblables à celles des $f_{n'_k}$ *du* 1^{er} *cas*; elle admet les valeurs exeptionnelles 0 et 1 et elle converge vers une limite $\frac{1}{2}$ distincte de 0, 1, ∞. On peut donc en extraire une suite $(\Sigma)\, g_{n_1}$, $g_{n_2}, \ldots g_{n_k}, \ldots$ convergeant uniformément dans σ vers une fonction holomorphe $G(x, y)$. Aucune des g ne prend la valeur $\frac{1}{2}$ dans σ, alors qu'au contraire $G(P_0) = \frac{1}{2}$. Donc $G(x, y)$ *se réduit à la constante* $\frac{1}{2}$. A cause de $f_{n_k}(x, y) = e^{2\pi i[2g_{n_k}-1]} = e^{4\pi i g_{n_k}}$, il est visible que la suite $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots f_{n_k}, \ldots$ extraite de la suite f_n *convergera uniformément vers l'unité dans* σ.

Si la suite f_n n'admet pas 1 comme point limite, mais admet zéro on ramène à ce qui précède en considérant la suite $1-f_n$, et on extraira de la suite f_n une suite partielle convergeant uniformément vers *zéro*.

Si la suite f_n n'admet que l'∞ pour point limite, on considérera la suite des $\frac{1}{f_n}$ et cela permettra d'extraire de la suite f_n une suite convergeant uniformément *vers l'infini* dans σ.

15. *Critérium général. S'il existe deux valeurs finies distinctes a et b qu'aucune fonction de la famille $f(x, y)$ ne prenne dans le domaine V, cette famille est normale dans V.*

On ramène à ce qui précède en considérant $\varphi = \frac{f-a}{b-a}$; les φ ne prenant ni la valeur *zéro*, ni la valeur *un*, forment une famille normale et il en est de même des f.

Remarque. 1°. A l'aide du critérium général ou des critériums particuliers énoncés précédemment, combinés avec l'énoncé donné au No 7 (1°) du présent mémoire on aura des théorèmes sur la *convergence uniforme des suites de fonctions holomorphes.*

2°. Grâce aux critériums précédents il serait facile d'établir pour les fonctions de 2 ou plusieurs variables des théorèmes anlogues à ceux de M. Picard ou de M. M. Landau, Carathéodory, Schottky pour les fonctions d'une variable. Ces théorèmes sont étudiés dans le livre déja cité (F. U.) par la méthode des familles normales. On pourra en faire aisément l'extension aux fonctions de 2 ou plusieurs variables. Et nous ne nous y attarderons pas spécialement dans le présent mémoire.

CHAPITRE II.

Propriété fondamentale de l'ensemble E des points où une famille de fonctions holomorphes cesse d'être normale.[1]

16. *Théorème fondamental: Si une famille de fonctions holomorphes autour du point* $x=y=0$ *est normale en tout point* $x=0$, y *voisin de* $0\,[0<|y|<r]$, *mais cesse d'être normale au point* $x=y=0$, *on peut toujours, quelque petit que soit le nombre positif* η *donné à priori, trouver un nombre positif* ε, *de façon que à tout* x_0 *de module* $<\varepsilon$ *on puisse faire correspondre un* y_0 *au moins de module* $<\eta$, *tel que la famille ne soit pas normale au point* (x_0, y_0).

En abrégé, cela veut dire que les points de E *ne sont pas isolés.* On supposera la famille formée de fonctions holomorphes dans $|x|<R$, $|y|<R'$ et on se placera toujours dans cet hypercylindre $|x|<R$, $|y|<R'$.

17. 1°. Soit C' un cercle de centre O' de rayon $r'<r$ dans le plan des y. (O' est l'origine du plan y). La famille est normale en tout point $(0, y')$, y' étant un point quelconque de C'; donc elle l'est dans un certain domaine hypercylindrique $|x|\leq\varrho$, $|y-y'|\leq\varrho'$, les nombres ϱ et ϱ' dépendant évidemment de y'. Chaque point y' de la circonférence C' est centre d'un cercle $\gamma_{y'}$ défini par $|y-y'|\leq\varrho'$ du type précédent: il est clair, en vertu du lemme de Borel-Lebesgue qu'on pourra recouvrir la circonférence du cercle C' à l'aide *d'un nombre fini de ces cercles*; on

[1] Le lecteur qui se reportera au Mémoire de E. E. LEVI inséré aux Annali di Matematica, tome 17, série 2, constatera un parallélisme absolu entre les théorèmes de ce chapitre et ceux que E. E. Levi met à la base de son mémoire, *les points de E remplaçant ici les points singuliers essentiels du mémoire de E. E. Levi.*

pourra même, à l'aide de ces cercles en nombre fini, recouvrir tout un anneau circulaire de centre O', limité par des cercles de rayon η_1 et η_2 $(\eta_1 < r' < \eta_2 < r)$ assez voisins de r'. A chacun de ces cercles $\gamma_{y'}$ en nombre fini, dont on s'est servi pour recouvrir la circonférence C', correspondait dans le plan x un cercle $|x| \leq \varrho$; choisissons le plus petit de ces cercles, soit ξ son rayon. On pourra dire que la famille f est normale en tout point tel que $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$,[1] et il est clair que r' ayant pu être pris arbitrairement petit, il en sera de même de η_2. On supposera, à partir de maintenant, que $\eta_2 \leq \eta$, donné à priori $< r$.

18. Traçons dans le plan x un cercle C de centre O, de rayon $< \xi$, et dans le plan y un cercle Γ de centre O', de rayon compris entre η_1 et η_2. La famille étant normale quand $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$, on pourra, de toute suite infinie formée de fonctions f de la famille extraire une suite partielle $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots f_n(x, y), \ldots$ qui convergera uniformément vers une fonction limite ou vers l' ∞ quand $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$ et en particulier pour x sur C et y sur Γ. Or, à cause du théorème de Cauchy on a pour x intérieur à C et y intérieur à Γ

$$f_n(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_\Gamma \frac{f_n(z, z')\, dz\, dz'}{(z - x)(z' - y)}$$

puisque f_n est holomorphe dans (C, Γ). Si la suite $f_n(x, y)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe ou vers une constante finie pour $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$ et en particulier pour x sur C et y sur Γ, il résulte de l'expression précédente et du lemme bien connu de Weierstrass que la convergence sera aussi uniforme dans le domaine hypercylindrique (C, Γ). En effet $f_n(z, z')$ a pour limite, uniformément sur C et Γ, une expression $S(z, z')$ continue en (z, z') sur C et Γ, donc intégrable. L'expression

$$F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_\Gamma \frac{S(z, z')\, dz\, dz'}{(z - x)(z' - y)}$$

[1] Le raisonnement qu'on vient de faire peut se répéter mot pour mot si on remplace la circonférence C' par un anneau circulaire *quelconque* $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$, de centre O', et intérieur au cercle $|y| < r$. Chaque point y' de l'anneau (domaine fermé) est le centre d'un petit cercle $\gamma_{y'}$, $[|y - y'| \leq \varrho']$ auquel correspond un cerle $|x| \leq \varrho$ de façon que la famille soit normale dans $|x| \leq \varrho$, $|y - y'| \leq \varrho'$; ϱ et ϱ' dependent de y'. L'anneau considéré pourra être recouvert à l'aide d'un *nombre fini* de cercles $\gamma_{y'}$; considérant les cercles $|x| \leq \varrho$, en nombre fini, qui correspondent à ces $\gamma_{y'}$, on prendra le plus petit d'entre eux, soit ξ son rayon. On pourra alors dire qu' à tout anneau $\eta_1 \leq y \leq \eta_2$ intérieur à $|y| < r$, correspond un rayon ξ tel que la famille f soit normale dans le domaine $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$.

représente une fonction $F(x, y)$ holomorphe quand x est dans C et y dans Γ. De l'expression

$$f_n(x, y) - F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_\Gamma \frac{[f_n(z, z') - S(z, z')]\,dz\,dz'}{(z-x)(z'-y)}$$

résulte que, si x reste intérieur à un cercle C_1, contenu dans C dont le rayon r_1 diffère de celui de C de moins de ε_1, et y reste dans un cercle Γ_1, dont le rayon ϱ_1 diffère de celui de Γ de moins de ε_2, on aura

$$|f_n(x, y) - F(x, y)| < \frac{\text{Max de } |f_n(z, z') - S(z, z')| \text{ sur } C, \Gamma}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2} \cdot r_1 \varrho_1,$$

ce qui prouve que f_n converge uniformément vers $F(x, y)$ dans (C_1, Γ_1). Comme on a pu remplacer au début C et Γ par des cercles de rayon un peu plus grand on voit que si la suite f_n converge vers une fonction holomorphe $F(x, y)$ dans $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$, elle converge aussi au point $(x=0, y=0)$ et la convergence est uniforme dans $|x| \leq \xi$, $|y| \leq \eta_2$.

19. *Si le phénomène précédent se produisait pour toute suite infinie convergente extraite de la famille des f, la famille des f serait normale même au point* $(x=0, y=0)$.

Il faut donc qu'il existe au moins une suite de fonctions de la famille f qui converge uniformément vers l'infini dans le domaine $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$, sans converger vers l'infini au point $x=y=0$, c'est-à-dire qui reste bornée pour $x=y=0$. On peut, sans ambiguïté, appeler $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots f_n(x, y), \ldots$ les fonctions de cette suite. On aura $|f_n(0, 0)| < A$, A étant un nombre fixe; tandis que l'on aura, pour $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$ et dès que $n > N_M$, $|f_n(x, y)| > M$ quelque grand que soit M, à condition que N_M soit choisi assez grand. En particulier on aura $|f_n(0, y)| > A$, pour $n > N_A$, lorsque y sera choisi sur Γ.

La fonction $f_n(0, y)$ est en module $> A$ sur Γ, et en un point $y=0$ intérieur à Γ elle est en module $< A$; le module $|f_n(0, y)|$ est une fonction continue de y qui atteint son minimum en au moins un point y_n^0 *intérieur à* Γ; et en un tel point il est bien connu que $f_n(0, y_n^0) = 0$ (c'est ainsi par exemple qu'on démontre l'existence des zéros d'un polynôme). Il est ainsi prouvé que *pour $n > N_A$, l'équation $f_n(0, y) = 0$ admet au moins une racine y_n^0 dans Γ.* Elle n'en a d'ailleurs qu'un nombre fini dans Γ, car f_n est holomorphe. J'appellerai par exemple y_n^0 celle qui a le plus petit module.

20. Il est clair que, *pour n infini, les y_n^0 n'ont pas d'autre point limite que* $y=0$. Car, soit Y_0 un tel point limite $\neq 0$. En vertu du raisonnement de la note (17) on peut toujours supposer que Y_0 appartient à l'anneau (η_1, η_2) $(\eta_1 \leq |Y_0| \leq \eta_2)$, tel que la famille f soit normale pour $|x| \leq \xi$, $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$.

Par conséquent, d'une part dans l'anneau $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$, $f_n(0, y)$ devient infini avec n en vertu de ce qui précède (N° 19). D'autre part, il existe une infinité de points choisis parmi les y_n^0 qui tendent vers Y_0 et par suite qui tombent dans l'anneau (η_1, η_2) à partir d'un certain rang. Soit $y_{n_1}^0, y_{n_2}^0, \ldots y_{n_k}^0, \ldots$ une suite de tels points. Au point $y_{n_k}^0$ on a $f_{n_k}(0, y_{n_k}^0)=0$. On tombe ici sur une contradiction, $f_n(0, y)$ devant devenir infini avec n pour $\eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$, on devrait avoir à partir d'un certain rang k_0, $|f_{n_k}(0, y_{n_k}^0)| > M$.

21. On peut supposer que c'est à partir de $n=1$ que toutes les fonctions $f_n(0, y)$ de la suite envisagée au N° 19 ont une racine y_n^0 dans Γ. Considérons alors l'équation $f_n(x, y)=0$.

f_n est holomorphe dans le domaine (C, Γ). Choisissons pour y_n^0 comme on l'a dit une racine de $f_n(0, y)=0$, et à partir de $x=0$, faisons le prolongement analytique de la fonction algébroïde $y_n(x)$ prenant pour $x=0$ la valeur y_n^0 et satisfaisant à l'équation $f_n(x, y)=0$.

Faisons décrire à x le cercle C; 2 cas seulement sont possibles.

1°. *Ou bien on peut atteindre tout point de C sans que $y_n(x)$ sorte de Γ, et cela pour tout indice n.*

Si cela ne se produit pas pour C, il est du moins possible de trouver un cercle C_1, de centre 0, intérieur à C, tel, que lorsque x décrit ce cercle, $y_n(x)$ ne sort pas de Γ[1] et cela pour tout indice n, du moins à partir d'un certain rang qu'on peut supposer être le rang $n=1$ sans restreindre la généralité.

2°. Ou bien, si petit qu'on choisisse le rayon δ_p du cercle C_p de centre 0, il se rencontrera un indice n_p tel que $y_{n_p}(x)$ sorte de Γ quand x décrit C_p. En particulier il sera possible de trouver un point x_{n_p} intérieur à C_p et un point y_{n_p} *situé sur Γ*, satisfaisant à $f_{n_p}[x_{n_p}, y_{n_p}]=0$.

On va prouver que cette 2ième hypothèse est impossible. Considérant en effet une suite de nombres δ_p qui tend vers zéro quand p devient infini, il correspondrait à chacun d'eux un indice n_p et un point (x_{n_p}, y_{n_p}) au moins, satisfaisant aux conditions précédentes; n_p tend évidemment vers l'infini avec p. A cause de $|x_{n_p}| < \delta_p$ les x_{n_p} tendent vers zéro. Sur Γ les points y_{n_p} ont au moins un point

[1] Cela implique que $y_n(x)$ n'a dans C, que des points critiques algébriques comme points singuliers.

limite Y en sorte que les points (x_{n_p}, y_{n_p}) ont au moins un point limite $(0, Y)$ pour lequel $|Y|$=rayon de Γ.

En ce point $(0, Y)$, la famille f est normale et la suite f_n que nous considérons converge vers l'infini (N° 19). C'est-à-dire que lorsque x décrit un certain cercle c de centre O et y un certain cercle γ de centre Y, on aura $|f_n(x, y)| > M$ dès que n dépasse un certain rang. Or cela est contradictoire avec le fait qu'il existe une suite infinie de points (x_{n_p}, y_{n_p}) pour lesquels x_{n_p} est dans c, y_{n_p} dans γ et pour lesquels $f_{n_p}(x_{n_p}, y_{n_p})=0$. La 2ième hypothèse est donc à rejeter.

22. Il existe donc toujours un cercle de centre O, de rayon ε, dans le plan x, que nous pouvons maintenant appeler le cercle C, tel que, pour tout indice n, la fonction $y_n(x)$ définie par $f_n[x, y_n(x)]=0$ à partir de $y_n(0)=y_n^0$ reste, à l'intérieur de C, inférieure en module au rayon du cercle Γ qui est lui-même $\leq\eta$ donné à priori. Soit x_0 un point quelconque intérieur à C; les valeurs $y_n(x_0)$ étant toutes intérieures à Γ ont au moins un point limite intérieur à Γ. Soit Y_0 un tel point et $n_1, n_2, \ldots n_p, \ldots$ la suite d'indices tels que $y_{n_p}(x_0)$ tende vers Y_0 lorsque p devient infini.

Joignons Y_0 au cercle Γ, par exemple par un segment de rayon $Y_0 Y'_0$, Y'_0 situé sur Γ. La suite des f_n est normale au point (x_0, Y'_0) et en ce point elle tend vers l'infini avec n. Considérons-la en tous les points (x_0, y), y étant un point quelconque du segment $Y_0 Y'_0$; 2 cas seulement sont possibles.

1°. Ou bien elle est normale en tous les points (x_0, y) lorsque y décrit $Y_0 Y'_0$ et puisqu'en (x_0, Y'_0) cette suite tend vers l'infini, elle tendra uniformément vers l'infini dans un petit domaine $|x-x_0|<\varrho$, $|y-Y_0|<\varrho'$. Mais cela est contradictoire avec le résultat qu'on vient de trouver précédemment, à savoir qu'il existe une suite d'indices n_p tels que $y_{n_p}(x_0)$ tende vers Y_0, ces y_{n_p} étant tels que $f_{n_p}[x_0, y_{n_p}(x_0)]=0$. A partir d'un certain rang les $y_{n_p}(x_0)$ tombent dans le domaine $|y-Y_0|<\varrho'$ il est donc impossible que $f_{n_p}[x_0, y_{n_p}(x_0)]$ devienne infini avec p comme cela devrait être si l'hypothèse faite était acceptable.

2°. L'hypothèse 1° conduisant à une impossibilité, *il existe donc un point au moins y_0 sur le segment $(Y_0 Y'_0)$ tel que la suite f_n et par suite la famille f cesse d'être normale au point (x_0, y_0).* On a ainsi prouvé le théorème fondamental puisque, le cercle Γ de rayon $\leq\eta$ étant donné à priori on peut lui faire correspondre un cercle C de rayon ε tel qu'à tout x_0 intérieur à C corresponde au moins un y_0 intérieur à Γ de façon que la famille f cesse d'être normale au point (x_0, y_0).

23. *Remarques.* I. On peut remplacer dans la démonstration précédente (N° 22) le point Y'_0 par tout autre point de Γ. Cela prouve que sur toute ligne

$Y_0 Y'_0$ unissant Y_0 à un point Y'_0 de Γ éxiste un point y_0 au moins tel que la famille des f_n cesse d'être normale en (x_0, y_0). Il peut arriver que ce point y_0 coïncide toujours avec Y_0. Il peut arriver aussi qu'à x_0 corresponde une ou plusieurs séries de valeurs y_0 formant un ou plusieurs continus intérieurs au cercle Γ. Cela arrivera par exemple si l'on a une famille f qui cesse d'être normale aux points d'une hypersurface $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)=0$. A un point $x_0=x_1^0+ix_2^0$ correspondra la ligne du plan y ayant pour équation $\varphi(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)=0$; pour $x=x_0$ et y sur cette ligne la famille f cessera d'être normale.

II. On a, chemin faisant, prouvé que si, dans le plan $x=0$ et au voisinage $|y|<r$ de l'origine O' c'est seulement en $y=0$ que la famille f cesse d'être normale, le point $(x=0, y=0)$ est limite de points $(0, y_n^0)$ pour lesquels $f_n(0, y_n^0)=0$, les f_n appartenant à la famille. En abrégé, *le point $x=0$, $y=0$ est un point limite pour les continus $f(x, y)=0$, en ce sens qu'il y à une infinité de ces continus qui traversent une hypersphère arbitrairement petite de centre $x=0$, $y=0$.*

24. *Corollaire. L'ensemble E des points où une famille de fonctions $f(x, y)$ holomorphes dans un domaine V cesse d'être normale est parfait.* Car, 1° il est fermé: en un point limite de points où une famille n'est pas normale, cette famille ne saurait être normale; 2° il ne contient pas de point isolé: en effet, ou bien tout point (ξ, η) de E est limite de points de E situés sur le même plan $x=\xi$, ou bien, en vertu du théorème fondamental, un tel point est limite de points de E correspondant à toutes les valeurs de x intérieures à un certain cercle $|x-\xi|<\varepsilon$.

25. *Généralisation du théorème fondamental.* On rend ce théorème plus maniable dans les applications en le généralisant de la façon suivante.

On substituera à la famille des surfaces caractéristiques planes $x=\alpha$ dépendant du paramètre complexe α, telle que sur la caractéristique $x=0$ la famille de fonctions considérée ne cesse d'être normale au voisinage de $y=0$ qu'au seul point $y=0$, une famille quelconque de caractéristiques régulières au voisinage d'un point (ξ, η), dépendant analytiquement d'un paramètre α de telle façon que: 1° par tout point d'un certain voisinage de (ξ, η) ne passe qu'une caractéristique de la famille. 2° Sur la caractéristique passant par (ξ, η) et au voisinage de (ξ, η) la famille de fonctions considérée ne cesse d'être normale qu'au seul point (ξ, η).

Si $\varphi(x, y, \alpha)=0$ où φ est analytique en x, y, α représente l'équation d'une telle famille de caractéristiques, que nous appellerons pour abréger une famille de caractéristiques *analytique et régulière au voisinage de* (ξ, η), 1°. on devra avoir pour une certaine valeur α_0 de α

$$\varphi(\xi, \eta, \alpha_0)=0.$$

2°. Par tout point (x, y) voisin de (ξ, η) devant passer une seule surface de la famille: il faudra que l'équation en α: $\varphi(x, y, \alpha)=0$ ait une racine et une seule voisine de α_0 et par conséquent il faut et il suffit que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\xi, \eta, \alpha_0)\neq 0.$$

3°. Cette surface devant être régulière au voisinage de (ξ, η) on devra pouvoir résoudre l'équation $\varphi(x, y, \alpha)=0$ soit par rapport à y et exprimer en puissances entières de x, soit par rapport à x qu'on exprimerait en puissances entières de y; il faudra donc que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi, \eta, \alpha_0)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\xi, \eta, \alpha_0)$ ne soient pas nuls simultanément.

26. Cela étant, on pourra toujours ramener l'équation de la famille de caractéristiques à la forme $\psi(x, y)=\alpha$, l'une des dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ou $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ étant $\neq 0$ pour (ξ, η). Soit par exemple $\frac{\partial \psi}{\partial x}(\xi, \eta)\neq 0$. On transforme la famille des caractéristiques en plans $x=$constante et le point (ξ, η) en l'origine par la transformation

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1=\psi(x, y)-\alpha_0 \\ y_1=y-\eta. \end{cases}$$

Cette transformation est biunivoque au voisinage de (ξ, η) auquel correspond $x_1=0$, $y_1=0$ car le déterminant fonctionnel se réduit à $\frac{\partial \psi}{\partial x}(\xi, \eta)\neq 0$. On peut donc tirer des équations précédentes

$$(2) \qquad \left.\begin{cases} x=A(x_1, y_1) \\ y=B(x_1, y_1)=y_1+\eta \end{cases}\right\} A \text{ et } B \text{ étant régulières autour de } x_1=0,\ y_1=0.$$

A la caractéristique $\psi=\alpha$ correspond le plan $x_1=\alpha-\alpha_0$, et inversement, à tout plan $x_1=\beta$, β voisin de zéro, correspond la caractéristique $\psi=\alpha_0+\beta$. Dans les fonctions $f(x, y)$ de la famille donnée, holomorphes autour du point (ξ, η) on fait la substitution (2). Elles fournissent une famille de fonctions $F(x_1, y_1)$ holomorphes autour de $x_1=y_1=0$. A toute suite infinie de fonctions f convergeant uniformément dans un petit domaine autour d'un point voisin de (ξ, η) correspond une suite infinie de fonctions F convergeant uniformément dans un petit domaine voisin de $x_1=y_1=0$. A tout point (x, y) où la famille f est normale correspond un point (x_1, y_1) où la famille F l'est, et inversement. L'ensemble E des points voisins de (ξ, η) où la famille des f cesse d'être normale se transforme par (1) dans l'ensemble E_1 des points voisins de $(0, 0)$ où la famille des F cesse d'être normale et réciproquement. La famille F est normale en tout point de $x_1=0$ voisin de $y_1=0$ et distinct de $y_1=0$; $x_1=y_1=0$ est le seul point de E_1, situé dans $x_1=0$ au voisinage de $y_1=0$. En vertu du théorème fondamental il existe sur tout plan $x_1=\beta$ voisin de zéro un point de E_1 au moins voisin de $y_1=0$. On conclut que sur toute caractéristique $\psi(x, y)=\alpha$, α voisin de α_0, existe un point au moins, voisin de (ξ, η) appartenant à E, c'est-à-dire où la famille des $f(x, y)$ cesse d'être normale. On a donc le théorème suivant.

27. *Théorème général. Si une famille de fonctions $f(x, y)$ holomorphes autour du point $(x=\xi, y=\eta)$ n'est pas normale en ce point (ξ, η), si de plus il existe une famille de surfaces caractéristiques analytique et régulière au voisinage de (ξ, η), telle que sur la surface de la famille qui passe en (ξ, η) la famille des fonctions f soit normale en tout point voisin de (ξ, η) excepté au point (ξ, η) lui-même, alors, sur toute surface caractéristique de la famille voisine de celle-là il existe un point au moins, voisin de (ξ, η) où la famille des $f(x, y)$ cesse d'être normale.*

Grâce à ce théorème, on va voir que l'ensemble des points où une famille de fonctions cesse d'être normale est assujetti à des restrictions très intéressantes tenant toutes à ce que cet ensemble doit satisfaire au théorème général précédent. Toute la question consistera à obtenir des familles régulières simples et intéressantes de surfaces caractéristiques. L'une d'entre elles, signalée par E. E. Lévi est donnée par le théorème suivant.

28. *Soit $\varphi_1(x, y)=0$ une surface caractéristique σ régulière au point (ξ, η) et soit un plan caractéristique P passant par (ξ, η) mais non tangent à la surface en ce point; les caractéristiques obtenues en assujettissant σ à toutes les translations qui amènent (ξ, η) en un point arbitraire de P voisin de (ξ, η), forment une famille analytique régulière au voisinage de (ξ, η).* En effet, on peut toujours écrire l'équation d'un tel plan $x-\xi-p(y-\eta)=0$. Les composantes d'une translation amenant (ξ, η) en un point quelconque $y=\eta+\alpha$, $x=\xi+p\alpha$ de P (où α est un nombre complexe arbitraire voisin de zéro) sont $p\alpha$ et α. L'équation de la famille sera donc

$$\varphi_1(x-p\alpha, y-\alpha)=0$$

où, puisque α est arbitraire, on peut changer α en $-\alpha$ et écrire

$$\varphi(x, y, \alpha)=\varphi_1(x+p\alpha, y+\alpha)=0$$

1°) pour $\alpha=0$ on a

$$\varphi_1(\xi, \eta)=\varphi(\xi, \eta, 0)=0,$$

2°) $$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}=p\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\xi, \eta, 0)=p\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\xi, \eta)+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\xi, \eta).$$

Le plan P n'étant pas tangent à la surface σ en (ξ, η) on aura

$$p\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\xi, \eta)+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\xi, \eta)\neq 0.$$

Donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\xi, \eta, 0)\neq 0.$$

3°) φ_1 étant régulière au voisinage de (ξ, η) on aura

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\xi, \eta)\neq 0 \text{ ou bien } \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\xi, \eta)\neq 0.$$

Or

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x+p\alpha, y+\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x+p\alpha, y+\alpha);$$

par suite il sera impossible que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi, \eta, 0)=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\xi, \eta, 0)=\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\xi, \eta)$$

soient nuls simultanément. Les 3 conditions classiques étant remplies, la famille de caractéristiques envisagée $\varphi(x, y, \alpha)=\varphi_1(x+p\alpha, y+\alpha)$ est analytique et régulière autour de (ξ, η).

CHAPITRE III.

Propriétés diverses, descriptives et métriques de l'ensemble E.

On va les obtenir en appliquant de diverses façons le théorème général du N° 27 à l'aide de familles analytiques et régulières de surfaces caractéristiques du type du N° 28.

§ 1.

29. O étant un point fixe arbitraire de l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2), soit E l'ensemble parfait des points où une famille de fonctions $f(x, y)$ cesse d'être normale; *il est impossible que E contienne un point P_0 où la distance OP de O à un point P quelconque de E passe par un maximum relatif.* C'est-à-dire tel que pour tout point P de E situé dans une petite hypersphère de centre P_0, on ait distance $\overline{OP} \leq$ distance $\overline{OP_0}$. On peut donc affirmer qu'un ensemble parfait E contenant un point P_0 jouissant de cette propriété ne saurait constituer à lui seul l'ensemble des points où une famille cesse d'être normale.

Je suivrai en le simplifiant l'exposé de E. E. Lévi, qui a énoncé cette propriété pour l'ensemble des points singuliers essentiels d'une fonction méromorphe. On supposera que O est l'origine, que le point P_0, à supposer qu'il existe, a pour coordonnées (ξ, η) et que $|\xi| \neq 0$. [Ce sera le point (ξ, η) du théorème général, vis à vis d'une certaine famille de caractéristiques qu'on va définir maintenant.]

30. Montrons d'abord qu'on peut construire une caractéristique régulière σ, tangente en P_0 à l'hypersphère de centre O de rayon $\overline{OP_0}$, n'ayant en commun avec la surface de cette hypersphère que le point P_0 dans le voisinage de P_0. Il est naturel de penser à une caractéristique *plane*.

Soit (1) $x-\xi=a(y-\eta)$ l'équation de cette caractéristique σ.[1] Elle passe par $\xi=\xi_1+i\xi_2$, $\eta=\eta_1+i\eta_2$. Prouvons qu'on peut choisir $a=a_1+ia_2$, de façon que pour $|x-\xi|<\varrho$, $|y-\eta|<\varrho'$, on ait $|x|^2+|y|^2 \geq |\xi|^2+|\eta|^2$, *l'égalité n'ayant lieu que pour* $x=\xi, y=\eta$. De (1) on tire

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1=\xi_1+[a_1(y_1-\eta_1)-a_2(y_2-\eta_2)] \\ x_2=\xi_2+[a_2(y_1-\eta_1)+a_1(y_2-\eta_2)]. \end{cases}$$

La distance OP est donnée par $\overline{OP}^2=x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2=F(y_1, y_2)$.

Il faut prouver que F passe par un minimum relatif isolé pour $y_1=\eta_1$, $y_2=\eta_2$ lorsque a est bien choisi

$$F(y_1, y_2)=y_1^2+y_2^2+[\xi_1+a_1(y_1-\eta_1)-a_2(y_2-\eta_2)]^2+[\xi_2+a_2(y_1-\eta_1)+a_1(y_2-\eta_2)]^2.$$

---

[1] On suppose ici la résolution faite en fonction de y, ce qui est possible car $\xi \neq 0$. Si on avait $\xi=0$, $\eta \neq 0$, il faudrait prendre σ sous la forme $y-\eta=a(x-\xi)$ et on trouverait $a=0$, parce qu'alors la caractéristique plane tangente en P_0 à l'hypersphère OP_0 serait $y=\eta$.

On a[1]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)_{P_0}=\eta_1+\xi_1 a_1+\xi_2 a_2;\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)_{P_0}=\eta_2+\xi_2 a_1-\xi_1 a_2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\right)_{P_0}=1+|a|^2=1+a_1^2+a_2^2,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}\right)_{P_0}=1+|a|^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\,\partial y_2}\right)_{P_0}=0.$$

Les dérivées d'ordre supérieur sont identiquement nulles.

Pour que F passe par un maximum relatif pour P_0 il faut d'abord

$$\begin{aligned}&\eta_1+\xi_1 a_1+\xi_2 a_2=0\\ &\eta_2+\xi_2 a_1-\xi_1 a_2=0.\end{aligned}\tag{3}$$

On a 2 équations linéaires en a_1, a_2 dont le déterminant est $\xi_1^2+\xi_2^2=|\xi|^2$; il est $\neq 0$ par hypothèse (on s'explique ainsi la note (1), page 77). On déterminera ainsi a d'une manière unique et on obtiendra la *caractéristique plane unique* tangente en P_0 à l'hypersphère de centre O de rayon OP_0. a étant ainsi choisi on peut écrire [en posant par exemple dans les 2 premiers termes $y_1=(y_1-\eta_1)+\eta_1$, $y_2=(y_2-\eta_2)+\eta_2$]

$$F(y_1,y_2)=\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_1^2+\eta_2^2+[1+|a|^2]\,[(y_1-\eta_1)^2+(y_2-\eta_2)^2]$$

et l'on voit que, sauf pour $y_1-\eta_1=y_2-\eta_2=0$, on a toujours

$$F(y_1,y_2)>\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_1^2+\eta_2^2.$$

La caractéristique[2] plane σ n'a *dans tout l'espace* que le point $P_0(\xi,\eta)$ de commun avec l'hypersphère OP_0.

31. Cela étant, le plan caractéristique $\pi:\dfrac{x}{\xi}=\dfrac{y}{\eta}$ contenant OP_0 *n'est pas*

---

[1] Par $\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)_{P_0}$ on désigne, en abrégé, l'expression $\frac{\partial F}{\partial y_1}(\eta_1,\eta_2)$.

[2] E. E. Lévi prend une caractéristique plus générale $x-\xi=a(y-\eta)+b(y-\eta)^2+\cdots$ et montre qu'on peut choisir a et b de façon *qu'au voisinage de* P_0, elle ait le seul point P_0 commun avec l'hypersphère; le calcul ne diffère du précédent que par une inégalité à laquelle doit satisfaire $|b|$. Ici on a pris $b=0$.

tangent en P_0 *à* σ.[1] Donc, d'après le N° 28, si l'on assujettit σ à toutes les translations qui transportent P_0 en un point quelconque de π, on déduit de σ une famille de caractéristiques *analytique et régulière* au voisinage de P_0. Cette famille est même régulière dans tout l'espace car son équation générale sera

$$x - \xi + \lambda\xi = a(y - \eta + \lambda\eta),$$

où λ est une constante complexe quelconque, et l'on n'a pas $\xi - a\eta = 0$,[2] car σ ne passe pas par l'origine. Donc on peut résoudre en λ l'équation précédente et la famille est bien régulière dans tout l'espace.

La caractéristique σ n'a, dans le voisinage de P_0, que le point P_0 de commun avec l'ensemble E puisque, par hypothèse tous les points de E, au voisinage de P_0, sont intérieurs à l'hypersphère OP_0 ou sur sa surface. Quant aux caractéristiques déduites de σ par une translation assez petite dirigée suivant OP_0, de O vers P_0, c'est à dire de composantes $(\theta\xi_1, \theta\xi_2, \theta\eta_1, \theta\eta_2)$ $(\theta > 0)$ il est clair que tous leurs points sont à une distance de O supérieure ou égale à $(1+\theta) \times$ distance $\overline{OP_0}$ et par conséquent elles n'auront aucun point commun avec E au voisinage de P_0. Il y aurait donc une infinité de surfaces caractéristiques de la famille n'ayant au voisinage de P_0 aucun point commun avec E. Ceci contredit le théorème général N° 27.

32. *Corollaires.*

I. *L'ensemble E des points où une famille de fonctions holomorphes $f(x, y)$ cesse d'être normale ne peut contenir un ensemble parfait isolé tout entier à distance finie.*

Car évidemment, si cela était, on pourrait trouver dans cette partie de E isolée à distance finie un point tel que P_0 du théorème précédent.

II. *Si une famille de fonctions holomorphes $f(x, y)$ est normale en tous les*

---

[1] C'est visible, car σ est contenue dans l'hyperplan

$$\xi_1(x_1 - \xi_1) + \xi_2(x_2 - \xi_2) + \eta_1(y_1 - \eta_1) + \eta_2(y_2 - \eta_2) = 0,$$

tangent en P_0 à l'hypersphère, et cet hyperplan est normal au vecteur $\overline{OP_0}$, tandis que π contient le vecteur $\overline{OP_0}$.

[2] En effet, les équations (3) qui déterminent a_1 et a_2 s'ecrivent en une seule:

$$\eta + \xi a' = 0, \quad a' = a_1 - i a_2 \text{ valeur conjuguée de } a.$$

Si l'on avait $\xi = a\eta$, on tirerait de là $\eta[1 + |a|^2] = 0$, par conséquent $\eta = 0$, et par suite $\xi = a\eta = 0$ ce qui est impossible.

points d'une hypersurface fermée, elle est normale en tous les points intérieurs à cette hypersurface.[1]

33. Du théorème du N° 29 on peut encore déduire le théorème suivant. *Soit dans le plan x le domaine circulaire Δ, $|x| \leq r$, dans le plan y un domaine borné Δ' limité par un contour C' qu'on suppose intérieur au cercle $|y| < r'$. Si une famille de fonctions $f(x, y)$, holomorphes dans le domaine (Δ, Δ') et sur sa frontière, est normale:*

1°) *en tout point $(0, y)$ de ce domaine, pour lequel y est intérieur à Δ' ou sur C',*

2°) *en tout point (x, y) de ce domaine, pour lequel $|x| < r$ et y est sur C', alors la famille est normale en tout point (x, y) pour lequel $|x| < r$ et y dans Δ', c'est-à-dire en tout point intérieur au domaine (Δ, Δ').*

En effet si le théorème n'est pas vrai il existe au moins un point $P(\xi, \eta)$, $|\xi| < r$ et η dans Δ' où la famille n'est pas normale; posons $|\xi| = \varrho$; $P(\xi, \eta)$ appartient à l'ensemble appelé E.

La famille étant normale en $(0, y)$ lorsque y est dans Δ' et sur C', est aussi normale dans un certain domaine $[|x| \leq \varrho_1$, y dans Δ' et sur $C']$, à condition que ϱ_1 soit pris assez petit. Soit C_1 ce cercle de centre 0, de rayon ϱ_1, dans le plan x. L'hypothèse est qu'il existe un point (ξ, η) de l'ensemble E pour lequel $\varrho_1 < |\xi| < r$, η dans Δ'; E n'a aucun point dans le domaine (C_1, Δ') et sur sa frontière, tous les points de E sont donc dans le domaine (Δ_1, Δ') [en appelant Δ_1 l'anneau compris entre les 2 cercles C et C_1], ou sur sa frontière, mais seulement sur la partie de la frontière pour laquelle $|x| = r$ et y dans Δ' ou sur C'. Il n'y a pas de point de E sur la partie de la frontière pour laquelle $|x| = \varrho_1$, y dans Δ' ou sur C', à cause du choix de ϱ_1, et il n'y en a pas sur la partie pour laquelle $|x| < r$, y sur C', à cause de l'hypothèse 2°. On va faire une transformation $X = \frac{k}{x}$, $Y = y$, k étant une constante positive que l'on choisira de manière à produire une contradiction avec le théorème N° 29.

34. Les fonctions $f(x, y)$ étant holomorphes dans le domaine (Δ_1, Δ') deviennent des fonctions $f\left(\frac{k}{X}, Y\right) = F(x, y)$ holomorphes dans le domaine (δ_1, Δ') et sur sa frontière, où δ_1 est l'anneau du plan X défini par $\frac{k}{r} \leq |X| \leq \frac{k}{\varrho_1}$. De plus

[1] Par là les familles de fonctions de 2 variables se distinguent des familles de fonctions d'une variable: on sait en effet qu'une famille de fonctions de z peut être normale en tout point intérieur à un cercle, sauf au centre, à condition de contenir une suite qui tende vers l'infini en tout point distinct du centre, tout en restant bornée au centre.

elles forment une famille normale en tout point $\left[|X|=\frac{k}{\varrho_1}, Y \text{ dans } \Delta' \text{ ou sur } C'\right]$ et en tout point $\left[\frac{k}{r}<|X|<\frac{k}{\varrho_1}, Y \text{ sur } C'\right]$. Si $\mathfrak{E}$ est l'ensemble des points où la famille des F n'est pas normale, on sait que, d'une part $\mathfrak{E}$ contient le point $\mathfrak{P}\left[\Xi=\frac{k}{\xi}, Y=\eta\right]$ intérieur à (δ_1, Δ') et d'autre part, les seuls points de $\mathfrak{E}$ qui soient sur la frontière de (δ_1, Δ') sont des points pour lesquels $|X|=\frac{k}{r}$ et Y dans Δ' ou sur C'. La distance à l'origine d'un point quelconque de cette partie de la frontière sur laquelle peuvent se trouver des points de $\mathfrak{E}$, sera donc inférieure à $\sqrt{\frac{k^2}{r^2}+r'^2}$ puisque C' est intérieur au cercle de rayon r'. La distance à l'origine du point $\mathfrak{P}$ est

$$\sqrt{\frac{k^2}{\varrho^2}+|\eta|^2} \geq \frac{k}{\varrho}.$$

Si on a choisi

$$\frac{k}{\varrho} \geq \sqrt{\frac{k^2}{r^2}+r'^2}$$

c'est-à-dire

$$k \geq \frac{r' r \varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}$$

il s'en suit que *la distance du point $\mathfrak{P}$ à l'origine surpasse la distance à l'origine de tout point de $\mathfrak{E}$ situé sur la frontière du domaine* (δ_1, Δ').

35. Ceci étant, envisageons tous les points de $\mathfrak{E}$ intérieurs au domaine (δ_1, Δ') ou sur sa frontière. Ils forment un ensemble $\mathfrak{E}_1$ fermé comme $\mathfrak{E}$ lui-même, et borné comme le domaine (δ_1, Δ'); il y a donc un point de $\mathfrak{E}_1$, dont la distance à l'origine est maximum et ce point n'est pas sur la frontière de (δ_1, Δ') puisque $\mathfrak{P}$, point de $\mathfrak{E}_1$ intérieur au domaine, est à une distance de l'origine surpassant celle des points de $\mathfrak{E}_1$ situés sur la frontière. Soit $\mathfrak{P}_0$ ce point, il est *intérieur au domaine* (δ_1, Δ'). L'ensemble $\mathfrak{E}$ ne comprend donc, au voisinage de $\mathfrak{P}_0$ que les points de $\mathfrak{E}_1$, et par suite $\mathfrak{P}_0$ est dans les conditions d'application du théorème du N° 29, car c'est un point de $\mathfrak{E}$ où la distance à l'origine passe par un maximum relatif. Il y a donc contradiction à supposer l'existence du point P, d'où suit l'exactitude du théorème du N° 33.

36. On peut encore énoncer ce théorème de la façon suivante. *Si la famille des fonctions f est normale pour $|x| < r$ et y sur C' et si pour un certain point x_0 ($|x_0| < r$) il existe un point y_0 intérieur à Δ' tel que la famille des f cesse d'être normale au point (x_0, y_0), alors, à toute valeur ξ intérieure à $|\xi| < r$, correspond au moins une valeur η située dans Δ' ou sur C', telle que la famille des f cesse d'être normale au point (ξ, η).*

37. Au lieu de considérer dans le plan x un cercle C, $|x| = r$, on pourra considérer un domaine quelconque Δ borné ou non, limité par un ou plusieurs continus de nature quelconque et on aura le théorème tout à fait général:

Si la famille des $f(x, y)$ holomorphes pour x dans Δ et y dans Δ' ou sur C', est normale:

1°. *En tout point (x, y) où x est intérieur à Δ et y sur C'.*

2°. *En tout point (a, y) où a est une certaine valeur intérieure à Δ et y une valeur quelconque intérieure à Δ' ou située sur C', la famille est normale en tout point (x, y) où x est intérieur à Δ et y dans Δ' ou sur C'.*

En effet tout point x_0 intérieur à Δ peut être uni à a par une ligne brisée intérieure à Δ. Par le procédé classique usité en prolongement analytique on pourra décrire un nombre fini de cercles $C_1, C_2, \ldots C_n$, tels que C_i empiète sur C_{i-1} et sur C_{i+1}, le centre de C_{i+1} étant par exemple dans C_i, C_1 contenant a et C_n contenant x_0, enfin le chemin brisé $(a x_0)$ étant intérieur à l'aire couverte par les cercles.

En vertu de l'hypothèse et du théorème N° 33 la famille sera normale pour (x, y) x dans C_1 et y dans Δ' ou sur C', et par conséquent en un certain point (x_2, y), où x_2 est à la fois dans C_1 et dans C_2, x_2 étant par exemple le centre de C_2. Une nouvelle application du même théorème prouvera que la famille est normale pour (x, y) x dans C_2 et y dans Δ' ou sur C' et en particulier pour x_3, centre de C_3 intérieur à C_2. De proche en proche on verra que la famille est normale en (x_0, y), y étant quelconque dans Δ' ou sur C'.

§ 2.

38. Les propriétés précédentes de l'ensemble E sont d'un ordre très géneral. On peut les préciser davantage en suivant une marche analogue à celle qu'a suivie M. F. Hartogs dans ses 2 mémoires des Math. Annalen tome 62, et des Acta Mathematica tome 32 pour explorer l'ensemble des *points singuliers* d'une fonction analytique; les résultats obtenus ont été, et par une marche toute parallèle, étendus par E. E. Lévi à l'ensemble des points singuliers essentiels de ces fonctions. Une fois que le théorème général N° 27 est établi, en le maniant

comme les 2 auteurs précédents le font de leur théorème fondamental qui est tout à fait analogue à ce théorème général (voir E. E. LÉVI, Annali di Matématica tome 17, série 3. N[os] 4 et 5) on parvient à des propriétés métriques de E tout à fait remarquables. Je me contenterai ici de les énoncer, les démonstrations étant absolument les mêmes que celles que donnent les auteurs précédents pour les propriétés correspondantes des ensembles qu'ils ont considérés. Pour certaines d'entre elles, je montrerai d'ailleurs par la suite qu'elles sont liées ensemble, et qu'elles entrainent comme conséquences les propriétés correspondantes des ensembles considérés par M. M. Hartogs et Lévi. Je suivrai par exemple l'ordre d'exposition adopté par E. E. Lévi.

39. Si une famille de fonctions holomorphes $f(x, y)$ est normale en tout point $(0, y)$ pour lequel y est intérieur à un domaine borné Δ' ou situé sur sa frontière C', il est clair qu'à tout point y_0 de Δ' ou de C' correspondra un *rayon maximum* R_{y_0} tel que la famille des f soit normale en tout point $(|x|<R_{y_0}, y=y_0)$ mais cesse d'être normale en un certain point au moins (x_0, y_0) pour lequel $|x_0|=R_{y_0}$. Si on considère les points de E situés dans le plan $y=y_0$, ils forment un ensemble fermé et R_{y_0} *est la plus courte distance de* $y=0$ *aux points de cet ensemble.*

1°. On voit d'abord que R_{y_0} est une fonction positive de y_0 *semicontinue inférieurement* dans Δ'. C'est-à-dire que, ε étant donné, arbitrairement petit, on peut déterminer η tel que l'on ait $R_y \geq R_{y_0}-\varepsilon$[1] pour tout y satisfaisant à $|y-y_0|<\eta$.

2°. *Si l'on peut trouver une fonction réelle* p_y *de* y_1 *et* y_2 $(y=y_1+iy_2)$, *satisfaisant aux conditions suivantes:*

a) Sur la frontière C' *de* Δ'

$$0<p_y \leq R_y$$

b) à l'intérieur de Δ'

$$\frac{\partial^2 \log p_y}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 \log p_y}{\partial y_2^2}=0,$$

alors on aura dans Δ' *et sur* C'

$$p_y \leq R_y.$$

[1] En ce qui concerne les discontinuités possibles de la fonction R_y, on pourra se reporter au mémoire de M. HARTOGS (Math. Annalen t. 62, § 7) dont les résultats s'appliquent immédiatement ici en considérant la famille des $S_n(x, y)=\sum_{k=0}^{n} f_k(y) \cdot x^k$, associée au développement $S(x, y)=\sum_{0}^{\infty} f_k(y) \cdot x^k$, que M. Hartogs considère dans son mémoire.

Pour la démonstration de ces 2 propriétés voir E. E. Lévi N° 10 du mémoire cité, en remplaçant simplement les mots »point singulier essentiel d'une fonction $f(x, y)$» par les mots »point où une famille de fonctions $f(x, y)$ cesse d'être normale» et les mots »point où une fonction $f(x, y)$ est holomorphe ou méromorphe» par les mots »point où une famille de fonctions $f(x, y)$ est normale». On ramène ainsi aisément le théorème 2°. au théorème du N° 33 ci-dessus.

3°. *Si, dans les hypothèses du 2°, l'égalité $R_y = p_y$ est réalisée pour un point au moins $y = y_0$ dans Δ', on aura partout dans Δ' $R_y = p_y$.*

4°. *Si R_y admet des dérivées des deux premiers ordres par rapport à y_1 et y_2, ces dérivées satisfont à la condition*

$$\frac{\partial^2 \log R_y}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \log R_y}{\partial y_2^2} \leq 0.$$

Pour la démonstration de 3° et 4°, voir P. Hartogs Math. Annalen tome 62, § 8 avec les modifications de mots déjà indiqués pour les théorèmes 1° et 2°. Je montrerai d'ailleurs, (voir chapitre 5, § 2) après l'étude des restrictions auxquelles est soumise une hypersurface $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$, lorsqu'elle constitue l'ensemble E, que *le théorème* 4° *est en réalité une conséquence de ces restrictions*, ce que ni M. Hartogs, ni E. E. Lévi ne pouvaient voir, l'un, E. E. Lévi puisqu'il s'attachait uniquement aux *points singuliers essentiels* des fonctions, sans se préoccuper des points singuliers *de leurs représentations*, c'est-à-dire des points où les représentations usuelles (par exemple la représentation $f(x, y) = \sum_{K=0}^{\infty} f_K(y) \cdot x^K$) cessent d'être valables; l'autre, M. Hartogs, parcequ'il ne connaissait pas les restrictions aux hypersurfaces $\varphi = 0$, frontières de régions où une fonction $f(x, y)$ est holomorphe ou méromorphe, cette découverte étant l'oeuvre propre de E. E. Lévi.

40. A l'aide des théorèmes énoncés au N° 39 (2° et 3°), et du théorème général N° 27, en raisonnant comme le fait M. Hartogs dans son mémoire des Acta Matématica tome 32, avec les modifications de language indiquées au N° 39 (2°), on obtiendra les 2 théorèmes suivants qui précisent d'une manière très intéressante la nature de l'ensemble E sous des restrictions simples.

1° *Si $(x = 0, y = 0)$ est un point de E, et si, de plus, dans un certain voisinage de l'origine $(|x| < r, |y| < r')$, il n'existe qu'un point de E au plus $(y = \eta)$ dans chaque plan $x = \xi$, la famille considérée étant normale aux points $(x = \xi, y \neq \eta)$ dans le voisinage indiqué, alors à tout point $x = \xi$ suffisamment voisin de $\xi = 0$ correspond* *certainement une valeur et une seule* $y=\varphi(\xi)$, *telle que la famille cesse d'être normale au point* $[\xi, \varphi(\xi)]$ *et la fonction* $\varphi(\xi)$ *est analytique et holomorphe au voisinage de l'origine.*

En d'autre termes le *continu* E *sera une caractéristique régulière* dans le voisinage de l'origine s'il n'est coupé qu'en un point au plus par tout plan caractéristique $x=\xi$ assez voisin de l'origine (voir F. Hartogs, Acta Math. tome 32 page 70).

2° *Dans les conditions du* 1° *c'est-à-dire si* $(x=0, y=0)$ *appartient à* E *et si c'est le seul point de* E *situé dans le plan* $x=0$ *pour lequel* $|y|<r'$, *s'il correspond à* $x=\xi\,[|\xi|<r]$ *exactement* n *valeurs* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n\,[|\eta_i|<r']$, *telles que la famille considérée cesse d'être normale aux points* (ξ, η_i) *du plan* $x=\xi$, *tout en restant normale au voisinage de ces points dans le plan* $x=\xi$, *les fonctions symétriques élémentaires des* η_i *seront fonctions analytiques holomorphes de* ξ *pour* $|\xi|<r$ *et s'annulant pour* $\xi=0$; *les fonctions* $\eta_i(\xi)$ *seront analytiques autour de* $\xi=0$ *et auront, en* $\xi=0$ *un point critique algébrique au plus.* (Voir Hartogs Acta Math. t. 32 p. 76.) Le continu E sera, ici encore, (au voisinage de l'origine) une caractéristique régulière qu'on pourra représenter dans le domaine $[|x|<r, |y|<r']$ par une équation

$$y^n + a_1(x)\,y^{n-1} + a_2(x)\,y^{n-2} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

les a_n étant holomorphes pour $|x|<r$.

§ 3.

41. On va maintenant examiner à quelles conditions une nappe d'hypersurface S représentée par une équation $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)=0$ peut appartenir à l'ensemble E et d'une façon précise examiner le problème suivant:

Dans un domaine de l'espace $x_1, x_2, y_1, y_2\,[x=x_1+ix_2, y=y_1+iy_2]$, traversé par la nappe d'hypersurface $S(\varphi=0)$ et au voisinage d'un point $P(\xi, \eta)$ de cette nappe (problème local) une hypersphère de centre P est partagée par la nappe considérée en 2 régions, chacune d'un seul tenant, l'une définie par $\varphi>0$, l'autre par $\varphi<0$, si l'on suppose, ce que nous ferons pour ne pas introduire de complication étrangère au sujet, que le point P est un point régulier de l'hypersurface (on supposera que φ admet des dérivées des 2 premiers ordres, continues autour de P, et en outre, au point P, les quatre dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}$ ne sont pas nulles à la fois.) Existe-t-il dans chacune des 2 régions précédentes, une famille de fonctions $f(x, y)$ holomorphes dans l'hypersphère considérée, normale dans la région considérée et cessant d'être normale en tout point de l'hypersurface $\varphi=0$ qui appartient à la frontière de la région considérée? On va voir *que ce n'est pas possible en général et qu'une telle famille ne peut exister que dans l'une seulement des 2 régions précédentes.*

42. Cherchons d'abord les conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire $\varphi=0$, à supposer que la famille est normale dans la région $\varphi>0$ et cesse d'être normale en tout point de $\varphi=0$ frontière de la région considérée. On va appliquer le théorème général N° 27. Supposons qu'on puisse construire une surface caractéristique Σ passant par P, régulière en P, touchant en P l'hypersurface $S[\varphi=0]$ et n'ayant, au voisinage de P[1] d'autre point commun avec S que le point P lui-même. Elle sera au voisinage de P, dans l'une ou l'autre des 2 régions $\varphi>0$ ou $\varphi<0$: prouvons que *si la famille f est normale dans $\varphi>0$ et cesse d'être normale en tout point de S* la surface Σ doit appartenir à la région $\varphi<0$.

En effet, de Σ on déduit une famille, régulière autour de P, de caractéristiques régulières, en assujettissant Σ à toutes les translations qui amènent P en tout point voisin de P qui appartient au plan caractéristique passant par la normale à S en P (on a vu plus haut, N° 28, qu'une telle famille est régulière). Si la translation précédente est assez petite et dirigée suivant la normale à S *du côté de la région à laquelle appartient* Σ, il est clair que la surface caractéristique obtenue n'a aucun point commun avec S au voisinage de P. Par suite, si Σ appartenait à la région $\varphi>0$ où la famille des f est normale, il existerait des surfaces caractéristiques de la famille envisagée (precisément les dernières dont on vient de parler) voisines de Σ et *n'ayant aucun point commun avec S.* Sur ces caractéristiques particulières, la famille serait au voisinage de P, normale en tout point, puisque les seuls points de la région considérée où cette famille cesse d'être normale sont les points frontières appartenant à S. Or cela est impossible en vertu du théorème N° 27. Car, sur Σ, la famille des f étant, au voisinage de P, normale en tout point sauf en P il devrait exister sur toute caractéristique de la famille considérée voisine de Σ un point au moins voisin de P où la famille cesse d'être normale. Il faut donc bien que Σ appartienne à la région $\varphi<0$.

43. Or, construire une surface caractéristique Σ, tangente en P à S, n'ayant au voisinage de P en commun avec S que le point P, c'est un problème que

[1] L'expression, »voisin de P» ou »au voisinage de P», qu'on va souvent employer dans la suite, veut dire »dans une certaine hypersphère de centre P, de rayon assez petit convenablement choisi», ou encore »dans un certain hypercylindre de centre P défini par $|x-\xi|<\varrho$, $|y-\eta|<\varrho'$, ϱ et ϱ' assez petits».

E. E. Lévi a résolu dans son Mémoire déjà cité du tome 17 série 3, des Annali di Matematica. Je me contenterai ici de rappeler les résultats du § 3 de ce mémoire, renvoyant le lecteur à ce mémoire pour leur démonstration.

Supposons, pour fixer les idées, qu'au point P, l'une au moins des dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ soit $\neq 0$. Il en résulte qu'en ce point l'expression $\Delta_1' \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2$ sera $\neq 0$. Posons, suivant les notations de E. E. Lévi:

$$\Delta_2'' \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2, \quad \Delta_2' \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \quad \text{et} \quad \Delta_2'' \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}.$$

Σ est alors définie par une équation développée en série de Taylor

$$(1) \quad x - \xi = a(y - \eta) + b(y - \eta)^2 + \cdots \quad a = a_1 + i a_2,\ b = b_1 + i b_2,\ \xi = \xi_1 + i \xi_2,\ \eta = \eta_1 + i \eta_2,$$

et les termes non écrits étant d'ordre >2; on en déduit en décomposant

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 - \xi_1 = a_1(y_1 - \eta_1) - a_2(y_2 - \eta_2) + b_1(y_1 - \eta_1)^2 - b_1(y_2 - \eta_2)^2 - 2 b_2 (y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \cdots \\ x_2 - \xi_2 = a_2(y_1 - \eta_1) + a_1(y_2 - \eta_2) + b_2(y_1 - \eta_1)^2 - b_2(y_2 - \eta_2)^2 + 2 b_1 (y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \cdots \end{cases}$$

Pour connaître le signe de φ sur la caractéristique Σ, signe qui doit être le même en tout point de Σ, distinct de P, voisin de P, on substitue dans $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ à x_1 et x_2 leurs expressions déduites de (2) en fonctions de y_1 et y_2 variables réelles indépendantes. Le résultat de substitution sera alors développé par la formule de Taylor en $(y_1 - \eta_1)$ et $(y_2 - \eta_2)$ et le terme constant sera $\varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 0$; ce développement est, en n'écrivant que les termes d'ordre ≤ 2,

$$(3) \quad \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \lambda_1 (y_1 - \eta_1) + \lambda_2 (y_2 - \eta_2) + \mu_1 (y_1 - \eta_1)^2 + \\ + 2 \mu_2 (y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \mu_3 (y_2 - \eta_2)^2 + \cdots$$

où les expressions de λ_1, λ_2 dépendent de a_1, a_2 et des dérivées premières de φ au point P et μ_1, μ_2, μ_3 dépendent de a_1, a_2, b_1, b_2 et des dérivées 1$^{\text{ères}}$ et 2$^{\text{es}}$ de φ au point P. Ces expressions sont assez compliquées. Nous ne les écrirons pas.

Pour que Σ soit toute entière dans une des 2 régions $\varphi > 0$ ou $\varphi < 0$ sauf le point P il faut que le développement (3) conserve dans la région $|y_1 - \eta_1| < \varepsilon$, $|y_2 - \eta_2| < \varepsilon'$, un signe constant. Pour cela il faut que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et ensuite que la forme quadratique $\mu_1 Y_1^2 + 2 \mu_2 Y_1 Y_2 + \mu_3 Y_2^2$ ait un signe constant et ne s'annule que pour $Y_1 = Y_2 = 0$, en d'autres termes que cette forme soit définie.

Les conditions $\lambda_1=\lambda_2=0$ donnent

$$\left.\begin{aligned} a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0\\ a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}-a_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0\end{aligned}\right\}\text{ on sous-entend que les dérivées sont prises au point } P.$$

Le déterminant de ces équations en a_1, a_2 est $\Delta'_1\varphi\neq 0$; on en tire a_1 et a_2 et l'on voit que le plan caractéristique tangent en P à Σ doit être situé tout entier dans l'hyperplan tangent en P à S

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned} a_1&=-\frac{1}{\Delta'_1\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right]\\ a_2&=-\frac{1}{\Delta'_1\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right]\end{aligned}\right.$$

Il faut en outre et il suffit que la forme (μ_1, μ_2, μ_3) soit définie, et pour qu'elle appartienne à la région $\varphi<0$, que cette forme soit *définie négative*; cela exige que $\mu_2^2-\mu_1\mu_3<0$, et que les 2 termes μ_1 et μ_3 soient négatifs. Il revient au même d'exiger

$$\mu_2^2-\mu_1\mu_3<0 \text{ avec } \mu_1+\mu_3<0.$$

Or on a

$$\mu_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_2+A_1$$

$$\mu_2=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_1-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_2+B_1 \quad\text{où } A_1,\ B_1,\ C_1 \text{ ne dépendent pas de } b_1 \text{ et } b_2$$

$$\mu_3=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_1-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_2+C_1$$

donc

$$\mu_1+\mu_3=A_1+C_1.$$

La forme sera donc positive si $A_1+C_1>0$ et négative si $A_1+C_1<0$. La condition pour que la forme soit définie pourra s'écrire

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_1-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_2+B_1\right]^2+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_2+A_1\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_2-C_1\right]<0.$$

Si b_1 et b_2 sont regardées comme les coordonnées cartésiennes d'un point, le 1^{ier} membre égalé à zéro représente une ellipse, car l'ensemble des termes du $2^{ième}$ degré est une somme de 2 carrés

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_1-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_2\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_2\right)^2$$

A l'infini l'inégalité n'est pas satisfaite. L'ellipse est tangente aux 2 droites parallèles $\mu_1=0$, $\mu_3=0$ aux points où $\mu_2=0$ les coupe. A l'extérieur de l'ellipse le 1^{ier} membre est >0. Pour que l'inégalité soit possible il faudra qu' à l'intérieur, sur la corde des contacts $\mu_2=0$, elle soit satisfaite. D'abord les 2 droites $\mu_1=0$ et $\mu_3=0$ doivent être distinctes car si les 2 droites sont confondues on a $A_1+C_1=0$ et le 1^{ier} membre devenant une somme de carrés ne peut être <0. Les 2 droites étant distinctes, c'est-à-dire $A_1+C_1\neq 0$ *entre ces 2 droites sur la corde des contacts, les 2 facteurs* μ_1 *et* $-\mu_3$ *ont des signes opposés* et l'inégalité est vérifiée.

Il faut donc et il suffit que $A_1+C_1\neq 0$. Si $A_1+C_1>0$ la forme sera définie positive, si $A_1+C_1<0$ la forme sera définie négative. Pour qu'il soit impossible que Σ tombe dans la région $\varphi>0$ il faudra donc supposer $A_1+C_1<0$ au point P et, à cause de la continuité des dérivées secondes de φ, dans une petite région de S autour de P, pour qu'il en soit de même si on remplace P par tout point de S voisin de P.

En détaillant A_1+C_1 on a

$$A_1+C_1=\frac{1}{2\,\Delta'_1\varphi}\Bigg\{\Delta'_2\varphi\,.\,\Delta''_1\varphi+\Delta''_2\varphi\,.\,\Delta'_1\varphi-$$
$$-2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right]\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right]$$
$$-2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right]\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right]\Bigg\}$$

Or $\Delta_1'\varphi\neq 0$. Donc la condition sera équivalente à $C[\varphi]=2\,.\,\Delta'_1\varphi\,.\,(A_1+C_1)\leq 0$. La condition nécessaire à laquelle on aboutit est donc $C[\varphi]\leq 0$, elle est symétrique en x et y et on a le théorème général suivant.

44. *Théorème.* 1°. *Pour qu'il existe, dans l'une des deux régions* $\varphi>0$ *ou* $\varphi<0$, *une famille de fonctions* $f(x, y)$ *normale en tout point intérieur à la région, et cessant d'être normale en tout point de l'hypersurface* $\varphi=0$ *qui appartient à la*

frontière de la région considérée, il est nécessaire que l'expression $C[\varphi]$ *conserve un signe constant sur toute la partie de l'hypersurface* $\varphi=0$ *que l'on considère. Si l'on a constamment* $C[\varphi]\leq 0$, *la famille des fonctions* $f(x, y)$ *ne pourra exister que dans la région* $\varphi>0$; *si l'on a* $C[\varphi]\geq 0$ *la famille ne pourra exister que dans la région* $\varphi<0$. *On a pour* $C[\varphi]$ *l'expression suivante:*

$$C[\varphi]=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

$$-2\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right)\\ +\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_2}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2}-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right)\end{array}\right\}$$

2°. *Pour qu'il existe une famille* $f(x, y)$ *dans chacune des régions* $\varphi>0$ *et* $\varphi<0$, *il faudra que* φ *satisfasse à l'équation aux dérivées partielles* $C[\varphi]=0$.

CHAPITRE IV.

Quelques réciproques aux propositions précédentes.

On va examiner maintenant dans quelle mesure les propriétés de E précédemment établies sont caractéristiques en étudiant les réciproques des théorèmes énoncés.

§ 1.

45. On a vu en établissant le théorème fondamental N° 16 que si une famille de fonctions $f(x, y)$ est normale en tout point du plan $x=0$ voisin de $y=0$ sauf au point $y=0$ lui-même, on peut extraire de la famille une suite partielle de fonctions $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots f_n(x, y), \ldots$ pour lesquelles les équations $f_n(0, y)=0$ admettent dans un petit cercle Γ de centre $y=0$, à partir d'un certain rang, une ou plusieurs racines y_n^0 dont le seul point-limite pour $n=\infty$ est le point $y=0$. Cette propriété s'étend aussitôt au cas où la famille f est normale en tout point voisin d'un point particulier P d'une surface caractéristique régulière passant par P, excepté au point P lui même: P sera limite de points $P_n(x_n, y_n)$ où $f_n(x_n, y_n)=0$ et situés sur la caractéristique, et ce sera le seul point-limite de pareils points situé sur la caractéristique considérée dans une petite région entourant

P. A cet égard *les points de E apparaissent comme points-limites de l'ensemble des continus* $f(x, y)=0$. On va démontrer la réciproque de cette propriété.

46. *Soit une suite infinie de fonctions $f_n(x, y)$, holomorphes dans un domaine V de l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2) telles que les continus $f_n(x, y)=0$ aient une infinité de points-limites P intérieurs à V (et formant un continu), on peut former une famille de fonctions φ_n holomorphes dans V, ayant mêmes zéros que les f_n, et qui ne cessera d'être normale dans V qu'aux points P, limites d'une infinité de continus $f_n(x, y)=0$.*

D'abord il est clair que si les continus $f_n=0$ ont un point-limite P_0 intérieur à V, ils en auront une infinité formant un continu passant par P_0.

En effet envisageons une hypersphère S, intérieure à V, de centre P_0 de rayon r. Il existe une infinité de continus $f_n=0$ qui ont des points intérieurs à S, à savoir les continus $f_{n_i}(x, y)=0$ $(i=1, 2, \ldots \infty)$ qui admettent P_0 pour point-limite. Chacun de ces continus devra couper la surface de S en au moins un point, car, dans le cas contraire, la fonction $\frac{1}{f_{n_i}(x, y)} = F_{n_i}(x, y)$ analytique dans V, holomorphe sur S, serait holomorphe *dans* S en vertu d'un théorème connu de M. Hartogs.[1] Or F_{n_i} est certainement infinie aux points intérieurs à S où $f_{n_i}(x, y)=0$. Sur chaque hypersphère de rayon r intérieure à V et de centre P_0, il y a une infinité de points $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots P_{n_i}, \ldots$, P_{n_i} étant zéro de f_{n_i}. Ces points ont au moins un point-limite. On voit donc que les continus $f_{n_i}(x, y)=0$ ont un point-limite au moins sur chaque hypersphère de rayon r ayant pour centre un de leurs points-limites particuliers. L'ensemble des points-limites comprend donc bien un continu passant par P_0.

47. A chaque point (x, y) du continu $C_n, f_n(x, y)=0$ on associe une hypersphère $|X-x|^2+|Y-y|^2=r_n^2$ de rayon r_n[2] de centre (x, y) et on envisage l'espace V_n balayé par cette hypersphère lorsque (x, y) décrit le continu C_n. Si on suppose V borné ou si on n'envisage qu'une partie bornée de V, cet espace balayé V_n a un volume borné qui tend vers zéro avec r_n: On peut le définir comme l'ensemble des points qui sont à une distance de C_n inférieure ou égale à r_n et cet ensemble se réduit à C_n quand r_n tend vers zéro. Les points de *V extérieurs à V_n ou situés sur la frontière de V_n* forment un ensemble fermé en tous les points duquel $f_n(x, y)\neq 0$. Sur cet ensemble $|f_n|$ a un minimum certainement >0 que l'on peut

[1] Sitzungsberichte der M. P. Klasse der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften Bd. 36, 1906, Heft 1: »Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen» von F. Hartogs Page 231, § 3.

[2] Les r_n seront des nombres positifs choisis arbitrairement sous la seule condition qu'ils tendent vers zéro quand n devient infini.

appeler a_n. Donc en tout point de cet ensemble $|f_n(x, y)| > a_n$. On forme la famille des $\varphi_n(x, y)$ définies par $\varphi_n(x, y) = n \cdot \frac{f_n(x, y)}{a_n}$.

Ces fonctions sont, comme les f_n, holomorphes dans V, et elles y admettent les mêmes zéros. On va prouver que les seuls points où la famille des φ_n n'est pas normale, sont les points-limites des continus C_n définis par $f_n(x, y) = 0$. En effet

48. 1°. Soit R un point de V qui n'est pas point-limite pour les continus C_n. Cela veut dire qu'il existe une hypersphère de centre Q de rayon δ à l'intérieur de laquelle ne pénètre aucun continu C_n dès que $n \geq n_0$. Par conséquent Q est à l'extérieur de tous les espaces V_n pour lesquels $r_n < \delta$; comme r_n tend vers zéro pour $n = \infty$ on voit que Q et une petite hypersphère σ de centre Q de rayon $\frac{\delta}{2}$ sont à l'extérieur de tous les V_n dès que n surpasse une certaine limite n_1. On a donc au point Q et dans toute l'hypersphère σ, $|f_n(x, y)| > a_n$ dès que $n > n_1$ et par suite dans σ, $|\varphi_n(x, y)| > n$. Dans σ la suite des φ_n converge donc uniformément vers l'infini: c'est une suite normale dans σ.

49. 2°. Soit $P(x_0, y_0)$ un point-limite de continus $f_n = 0$. Il existe donc une suite d'indices $n_1, n_2, \ldots n_p, \ldots$ tels que la plus courte distance de P au continu C_{n_p} défini par $f_{n_p}(x, y) = 0$ soit un nombre ϱ_{n_p} qui tend vers zéro quand p devient infini.

Si la famille des φ_n était normale en P, de la suite infinie $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots \varphi_{n_p}, \ldots$ on pourrait extraire une suite $\varphi_{n'_1}, \varphi_{n'_2}, \ldots \varphi_{n'_p}, \ldots$ qui convergerait uniformément vers une fonction limite ou vers l'infini dans une hypersphère σ_0 assez petite, de centre P. Or les indices n'_p étant choisis parmi les indices n_p: les continus $C_{n'_p}$ traversent tous σ_0 dès que $p > p_0$. Cela arrivera dès que $\varrho_{n'_p} < \varrho_0$, ϱ_0 rayon de σ_0. Sur $C_{n'_p}$ on a $\varphi_{n'_p} = 0$. Il est donc impossible que la limite de $\varphi_{n'_p}$ soit l'infini quand p devient infini, puisque pour $p > p_0$ il y a dans σ_0 des points où $\varphi_{n'_p} = 0$. La limite de $\varphi_{n'_p}$ est donc une fonction $\varphi(x, y)$ holomorphe dans σ_0 et *dont la valeur en P ne peut différer de zéro.* Car si en P on avait $\varphi = a \neq 0$, on aurait dans une certaine hypersphère σ'_0 de centre P, $|\varphi - a| < \varepsilon$, ε étant arbitraire. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$ on aurait dans σ'_0 $|\varphi| > \frac{1}{2}|a|$. Comme $\varphi_{n'_p}$ converge vers φ dans σ'_0, on aurait à partir d'un certain indice p, $|\varphi_{n'_p} - \varphi| < \varepsilon_1$, ε_1 arbitraire. Prenons $\varepsilon_1 = \frac{|a|}{4}$. On aurait donc dans σ'_0 à partir d'un certain indice p_1, $|\varphi_{n'_p}| > \frac{|a|}{4}$ et ceci est impossible puisque, $\varrho_{n'_p}$ tendant vers zéro, il arrivera qu'à partir d'un certain indice p_2 les $C_{n'_p}$ traverseront σ'_0 et par conséquent il y aura dans σ'_0 des points où $\varphi_{n'_p}=0$. On devrait donc avoir $\varphi(x_0, y_0)=0$. Par conséquent dans une certaine hypersphère σ''_0 de centre P on devrait avoir $|\varphi(x, y)| < \varepsilon$, ε étant arbitrairement petit. Et comme $\varphi_{n'_p}$ tend uniformément vers φ dans σ''_0 on devrait avoir dans σ''_0 $|\varphi_{n'_p}(x, y)| < 2\varepsilon$ dès que p surpasse une certaine valeur. *Or ceci est impossible.*

En effet, si on désigne ϱ''_0 le rayon de σ''_0, dès que l'on aura $\varrho_{n'_p} < \varrho''_0$ (et cela se réalisera à partir d'un certain indice p_1) le continu $C_{n'_p}$ pénétrera dans σ''_0. La partie intérieure à σ''_0 du volume $V_{n'_p}$ correspondant tend vers zéro quand p devient infini; il s'en suit que dès que p surpasse une certaine valeur on pourra, pour chaque indice p, trouver un point au moins (x_p, y_p), intérieur à σ''_0, et extérieur à $V_{n'_p}$. En ce point on a $|\varphi_{n'_p}(x_p, y_p)| > n'_p$, et comme n'_p devient infini avec p il en résulte une contradiction avec l'inégalité $|\varphi_{n'_p}(x, y)| < 2\varepsilon$ dans tout σ''_0 obtenue précédemment. L'hypothèse que la famille des φ_n est normale en Q conduit à une contradiction, donc la famille des φ_n n'est pas normale en Q. L'ensemble E, relatif à la famille des φ_n est donc bien l'ensemble des points-limites des continus C_n définis par $f_n(x, y)=0$. Le théorème du N° 46 est démontré; j'en donnerai plus loin quelques applications.

§ 2.

50. Envisageons maintenant les propriétés établies au § 2 du chapitre précédent pour la fonction R_y, plus courte distance à l'origine des points de E situés dans le plan caractéristique $Y=y$ et plus spécialement les propriétés énoncées au N° 39 (2°, 3°, 4°). On va prouver qu'elles peuvent être considérées comme caractéristiques; d'une façon précise, *si on considère une fonction V de y_1 et y_2 $(y=y_1+iy_2)$ qui soit réelle, finie, qui ait des dérivées premières et secondes finies et continues satisfaisant à la condition* $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\leq 0$ *dans un certain domaine Δ' du plan complexe y, il est possible de déterminer une famille de fonctions holomorphes $f(x, y)$ pour laquelle l'ensemble E des points où la famille cesse d'être normale donne naissance à une fonction R_y qui soit précisément égale à e^V dans le domaine Δ'.*

En effet, au § 10 de son mémoire de Math. Annalen, dans les hypothèses précédentes, et en outre, en supposant par exemple que la quantité $K(y_1, y_2)$ définie par

$$K(y_1, y_2) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right]$$

possède dans Δ' des dérivées premières continues en y_1 et y_2, M. HARTOGS construit une série (1) $\varphi(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(y) \cdot x^\nu$ satisfaisant aux conditions suivantes.

1°. Les coefficients $f_\nu(y)$ sont holomorphes dans Δ'.

2°. Pour chaque valeur de $y_0 = y_1 + iy_2$ intérieure à Δ', il existe un nombre R_{y_0} jouissant de la propriété suivante: à tout nombre positif $\varrho < R_{y_0}$ on peut associer un nombre ϱ' tel que *la série* (1) *converge uniformément pour* $|x| \leq \varrho$, $|y - y_0| \leq \varrho'$ et lorsque ϱ tend vers R_{y_0}, ϱ' tend vers zéro; c'est-à-dire que la fonc tion représentée par la série (1) est holomorphe en tout point $y = y_0$, $|x| < R_{y_0}$ et possède au moins un point singulier pour lequel $y = y_0$, $|x| = R_{y_0}$.

3°. Le nombre R_{y_0} est précisément égal à $e^{V(y_1, y_2)}$.

Ceci étant, considérons la famille de fonctions

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(y) \cdot x^\nu.$$

A) Les φ_n sont holomorphes en tout point (x, y) pour lequel x est quelconque et y intérieur à Δ'.

B) La famille des φ_n est normale en tout point $[y = y_0, |x| < R_{y_0}]$, y_0 étant un point quelconque intérieur à Δ', et dans une petite hypersphère entourant ce point, elle converge vers $\varphi(x, y)$.

C) Elle n'est normale en aucun point (x, y) pour lequel $y = y_0$ et $|x| = R_{y_0}$. Supposons en effet qu'elle soit normale au point (x_0, y_0), $|x_0| = R_{y_0}$; elle l'est alors dans un certain hypercylindre $|x - x_0| \leq \varepsilon$, $|y - y_0| \leq \varepsilon'$, et dans une partie de ce volume, à savoir la partie pour laquelle $|x| \leq \varrho$, $|y - y_0| \leq \varrho'$ (ϱ et ϱ' étant les nombres définis ci-dessus au 2°) elle converge uniformément vers $\varphi(x, y)$. Elle converge donc uniformément dans tout le domaine $|x - x_0| \leq \varepsilon$, $|y - y_0| \leq \varepsilon'$ et sa limite $\varphi(x, y)$ est une fonction holomorphe dans tout ce domaine. On peut supposer $|y - y_0| \leq \varepsilon'$ intérieur à Δ et $\varepsilon' \leq \varrho'$. La série (1) est donc uniformément convergente dans le domaine $|x - x_0| \leq \varepsilon$, $|y - y_0| \leq \varepsilon'$ et ses coefficients $f_\nu(y)$ sont holomorphes dans Δ'. Or, au sujet des séries (1) M. HARTOGS a démontré au § 2 de son mémoire t. 62 des Math. Annalen le théorème suivant:

Si la série (1) *converge pour* $x = x_1$, *quel que soit* y *dans le domaine* $|y - y_0| \leq \varepsilon'$, *les* $f_\nu(y)$ *étant holomorphes dans ce domaine; si de plus il existe une valeur* $x_2 \neq 0$

telle que la série (1) *converge pour* $x=x_2$ *uniformément au voisinage de tout point du domaine* $|y-y_0|<\varepsilon'$, *alors, pour toute valeur de* x *telle que* $|x|<|x_1|$, *la série* (1) *convergera uniformément au voisinage de tout point du domaine* $|y-y_0|<\varepsilon'$.

51. Choisissons alors une valeur x_1, telle que $|x_1|>R_{y_0}$ et $|x_1-x_0|\leq\varepsilon$; pour cette valeur x_1, la série (1) converge uniformément au voisinage de tout point du domaine $|y-y_0|\leq\varepsilon'$ et d'autre part on sait que pour $x=x_2$ tel que $|x_2|<\varrho$ (puisqu'on suppose $\varepsilon'\leq\varrho'$), elle converge uniformément dans le domaine $|y-y_0|\leq\varepsilon'$ [d'après 2°]. Il en résulte que pour toute valeur x telle que $|x|<|x_1|$, la série (1) converge uniformément dans $|y-y_0|\leq\varepsilon'$. Prenons une valeur r entre R_{y_0} et $|x_1|$ $[R_{y_0}<r<|x_1|]$. On aura pour $\nu>\nu_0$ quelque soit y dans $|y-y_0|\leq\varepsilon'$ $|f_\nu(y)|\,r^\nu<\eta$ (η arbitrairement petit fixé à l'avance). Donc

$$|f_\nu(y)\,.\,x^\nu|<\eta\left|\frac{x}{r}\right|^\nu$$

et ceci prouve que la série (1) converge uniformément dans le domaine $|x|\leq r'<r$, $|y-y_0|\leq\varepsilon'$, r' étant choisi tel que

$$R_{y_0}<r'<r.$$

En définitive (1) converge uniformément dans le domaine

$$|x|\leq R_1, \qquad |y-y_0|\leq\varepsilon',$$

R_1 étant un nombre quelconque $>R_{y_0}$ et $<R_{y_0}+\varepsilon\;[R_{y_0}<R_1<R_{y_0}+\varepsilon]$; car à un tel R_1, on pourra toujours faire correspondre un x_1, tel que $|x_1|>R_{y_0}$ et $|x_1-x_0|<R_{y_0}+\varepsilon$ jouissant de la propriété précédemment supposée à x_1.

Mais alors la fonction $\varphi(x, y)$, limite de $\varphi_n(x, y)$, ou somme de la série (1) atteinte uniformément dans $|x-x_0|\leq\varepsilon$, $|y-y_0|\leq\varepsilon'$, serait aussi atteinte uniformément dans le domaine $|x|\leq R_1$, $|y-y_0|\leq\varepsilon'$; elle serait holomorphe dans ce domaine, ce qui contredit la propriété 2°; d'après laquelle $\varphi(x, y)$ admet au moins un point singulier pour lequel $y=y_0$, $|x|=R_{y_0}$.

La famille des $\varphi_n(x, y)$ n'est donc normale en aucun point (x, y) pour lequel $y=y_0$, $|x|=R_{y_0}$. Pour cette famille, la plus courte distance à l'origine $x=0$ de la partie de l'ensemble E située dans le plan $y=y_0$ est bien R_{y_0} puisqu'elle comprend toute la circonférence $|x|=R_{y_0}$. Et l'on a bien, d'après 3°, $R_{y_0}=e^V$.

50. *Remarque.* Chemin faisant, on a vu que pour la famille des fonctions $\varphi_n(x, y)=\sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu(y)\,.\,x^\nu$ le domaine dans lequel elles sont normales est engendré

par des cercles $|x| \leq R_{y_0}$, chaque cercle correspondant à une valeur de y_0 dans le domaine Δ' où les f_ν sont holomorphes. — Cette propriété résulte de l'étude, faite par M. Hartogs au § 2 de son mémoire cité plus haut, de la convergence uniforme des séries du type $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(y) \,.\, x^\nu$.

§ 3.

Envisageons maintenant les propriétés établies au § 3 du chapitre précédent et d'une façon précise le théorème du N° 44.

On a d'abord le théorème suivant, réciproque du théorème N° 44. (2°).

53. *Si une hypersurface S définie par $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)=0$, où φ a des dérivées partielles des 2 premiers ordres continues, satisfait à l'équation aux dérivées partielles $C[\varphi]=0$, on peut, en prenant comme centre un point quelconque régulier P de S (autour duquel S est régulière), décrire une petite hypersphère σ dont S partagera l'intérieur en 2 régions R_1 et R_2, la 1ière définie par $\varphi>0$, la 2ième par $\varphi<0$. On peut alors*

1°) déterminer une famille de fonctions $f(x, y)$ holomorphes dans σ et même un peu au-delà, qui soit normale en tout point intérieur à R_1, qui cesse d'être normale en tout point de la frontière de R_1 qui appartient à S et en ces points seulement,

2°) déterminer une famille de fonctions $F(x, y)$ holomorphes dans σ et un peu au-delà, qui soit normale en tout point intérieur à R_2, qui cesse d'être normale en tout point de la frontière de R_2 qui appartient à S, et en ces points seulement.

Le bout de surface S intérieur à σ apparait donc comme l'ensemble E de 2 familles l'une normale dans R_1 l'autre normale dans R_2.

Rappelons ici l'expression de $C[\varphi]$

$$C[\varphi]=\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right]+\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]-$$
$$-2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right]\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right]-$$
$$-2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right]\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right].$$

54. En effet il résulte des recherches de E. E. Lévi et specialement des Nos 13, 14 de son mémoire du tome 17 série 3 des Annali di Matematica, auquel

nous renvoyons le lecteur pour les démonstrations, qu'une hypersurface S satisfaisant à $C[\varphi]=0$ peut être engendrée par une surface caractéristique régulière dépendant d'un paramètre réel, tout au moins au voisinage d'un de ses points. En supposant par exemple $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 \neq 0$ l'hypersurface S pourra être, au voisinage de P, engendrée par la caractéristique $x=\Phi(y, \alpha)$ lorsqu'on astreint α à prendre toutes les valeurs réelles d'un certain intervalle comprenant $\alpha=0$. On peut supposer que P est donné par $x=y=\alpha=0$; Φ est analytique en y autour de $y=0$, c'est une fonction dérivable de la variable réelle α.

Si on considère maintenant les surfaces caractéristiques $x=\Phi(y, \alpha)+K\beta$ où β est une variable réelle, K un nombre complexe $\neq 0$ et tel que le rapport $\frac{1}{K}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_{y=\alpha=0}$ *ne soit pas réel*, E. E. Lévi montre que toutes ces surfaces correspondant aux *valeurs positives de β inférieures à une certaine limite* appartiennent à la région où $\varphi>0$ et toutes celles qui correspondent aux valeurs négatives de β appartiennent à la région où $\varphi<0$. D'une façon précise, par tout point de R_1, $(|x|<\varrho,\ |y|<\varrho)$ passera une et une seule surface de la famille pour laquelle $\beta>0$ et $|\alpha|<\sigma$, $|\beta|<\sigma$. Par tout point de R_2 $[|x|<\varrho,\ |y|<\varrho]$ passera une et une seule de ces surfaces pour laquelle $\beta<0$, $|\alpha|<\sigma$, $|\beta|<\sigma$; et inversement celles des surfaces correspondant à $|\alpha|<\sigma$, $|\beta|<\sigma$ pour lesquelles $|x|<\varrho$, $|y|<\varrho$ donneront des points de R_1 lorsque $\beta>0$ et des points de R_2 lorsque $\beta<0$.

55. Ceci étant, soit un ensemble dénombrable de points (α_n, β_n) (tels que les β_n soient >0) et dont l'ensemble dérivé soit l'ensemble $|\alpha|\leq\sigma$, $\beta=0$. Il suffira de prendre $\beta_n=\frac{1}{n}$ et d'ordonner dans la suite α_n les nombres rationnels de l'intervalle $|\alpha|\leq\sigma$. Considérons les fonctions

$$\varphi_n(x, y)=x-\Phi(y, \alpha_n)-K\beta_n.$$

Les continus $\varphi_n(x, y)=0$ (C_n) sont précisément des surfaces caractéristiques envisagées ci-dessus. Ils traversent R_1, puisque $\beta_n>0$ dès que $\beta_n<\sigma$, ce qui se produit à partir d'un certain rang, et si l'on considère une partie de R_1, ne renfermant sur sa frontière aucun point de S il n'y a qu'un nombre fini de continus C_n qui la traversent. Les continus C_n ont dans R_1 pour points-limites tous les points de S appartenant à la frontière de R_1, et ils n'en ont pas d'autre. Ils n'ont aucun point-limite dans R_2. Leurs seuls points-limites dans σ sont donc les points de S intérieurs à σ. Il en résulte qu'on peut construire une famille de fonctions $f_n(x, y)$, holomorphes dans σ, en posant $f_n(x, y)=\lambda_n \varphi_n(x, y)$ et choisissant convenablement les constantes λ_n, de façon que la famille des f_n soit normale en tout point intérieur à R_1, et cesse d'être normale en tous les points de la frontière R_1, qui appartiennent à S et en ceux-là seulement. *L'ensemble E de la famille des f_n normale dans R_1 c'est S.*

De même si on choisit les (α_n, β'_n) où les $\beta'_n=-\beta_n$ les continus C'_n définis par $\Phi_n(x, y)=x-\Phi(y, \alpha_n)+K\beta_n=0$ traverseront R_2 dès que $\beta_n<\sigma$ et ils n'auront pour point-limites dans R_2 ou sur sa frontière que les points de S appartenant à la frontière de R_2.

La famille des fonctions $F_n(x, y)=A_n[x-\Phi(y, \alpha_n)+K\beta_n]$, pour un choix convenable des constantes A_n sera donc formée de fonctions holomorphes dans σ, elle sera normale en tout point de R_2 et cessera d'être normale en tous les points de S situés sur la frontière de R_2. *L'ensemble E de la famille des F_n, normale dans R_2, c'est encore S.* Le théorème du N° 53 est ainsi établi.

56. Supposons maintenant que l'expression $C[\varphi]$ ne s'annule plus identiquement sur $\varphi=0$, mais que sur une portion de S elle conserve un signe constant. Par exemple, soit $C[\varphi]<0$ sur la portion S_0 de S comprise à l'intérieur d'une petite hypersphère σ ayant pour centre un point P de S. On va prouver qu'il existe dans la région R_1, intérieure à σ, pour laquelle $\varphi>0$, une famille de fonctions $f(x, y)$ holomorphes dans σ, famille normale en tout point intérieur à R_1, cessant d'être normale en tous les points de la frontière de R_1, situés sur S, et en ceux-là seulement, c'est-à-dire en tous les points de S_0 (on sait d'après le théorème du N° 44 que cela est impossible dans la région R_2). Reportons-nous en effet au 2[ième] mémoire de E. E. Lévi tome 18, série 3 des Annali di Matematica. Ayant prouvé qu'en chaque point (ξ, η) de S_0, à supposer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} \neq 0$ sur S_0 (ce qu'on peut toujours faire), on peut construire une caractéristique définie par (Γ) $x-\xi=a(y-\eta)+b(y-\eta)^2$ tangente en (ξ, η) à S_0, et dont tous les points situés à l'intérieur de σ sont intérieurs à la région R_2 sauf le point (ξ, η) lui-même qui est sur S_0, on choisit un ensemble dénombrable de points $P_n(\xi_n, \eta_n)$ *partout dense sur S_0*, on prendra par exemple, en les ordonnant en suite linéaire tous les points de S_0 *dont les coordonnées x_2, y_1, y_2, sont rationnelles.* A chaque point P_n on associe une caractéristique C_n définie par

---

[1] Si l'on avait $C[\varphi]>0$ sur S_0, la famille serait normale *dans* R_2, la démonstration étant tout à fait analogue à celle qui précède.

$$x-\xi_n=a_n(y-\eta_n)+b_n(y-\eta_n)^2+\frac{1}{n}$$

qui se déduit de la caractéristique ci-dessus, tangente en (ξ_n, η_n) à S_0 par une translation parallèle à l'axe des $x_1>0$ et d'amplitude $\frac{1}{n}$ (dans l'expression qui définit C_n, a_n et b_n désignent les valeurs de a et b relatives au point P_n). C_n pénétrera dans la région R_1 si l'on suppose que la parallèle à l'axe positif ox_1 menée par un point arbitraire de S_0 traverse la région R_1, (s'il n'en était pas ainsi on remplacerait $\frac{1}{n}$ par $-\frac{1}{n}$ dans l'équation de C_n, car le point $\left[\xi_n-\frac{1}{n}, \eta_n\right]$ serait alors dans R_1). En effet C_n est émanée du point $\left(\xi_n+\frac{1}{n}, \eta_n\right)$ qui à partir d'un certain indice n est intérieur à R_1. On montre aisément que *les C_n, qui à partir d'un certain indice traversent tous R_1, n'ont pas de point limite intérieur à R_1, et admettent pour point limite tout point de S_0.* Cela résulte aussitôt de ce que l'écart entre les points correspondants des 2 caractéristiques C_n et Γ_n (Γ_n) $x-\xi_n=$ $=a_n(y-y_n)+b_n(y-\eta_n)^2$, étant $\frac{1}{n}$ parallèlement à ox_1, tend vers zéro quand n devient infini. Les Γ_n n'ont pas de point-limite dans R_1, et admettent pour point-limite tout point de S_0. On pourra alors, d'après le théorème du N° 46 du présent mémoire, associer aux C_n des constantes λ_n de manière que les fonctions

$$f_n(x,y)=\lambda_n\left[x-\xi_n-a_n(y-\eta_n)-b_n(y-\eta_n)^2-\frac{1}{n}\right]$$

qui sont *holomorphes dans σ, qui s'annulent respectivement sur les C_n, forment une famille normale en tout point intérieur à R_1 cessant d'être normale en tous les points de S_0.* Ainsi se trouve démontrée la réciproque du théorème du N° 44 (1°).

57. On peut se demander comment se comportent les f_n dans R_2. D'abord tout point intérieur à R_2 est point-limite pour les continus Γ_n définis par $x-\xi_n=a_n(y-\eta_n)+b_n(y-\eta_n)^2$; cela résulte de ce que les P_n sont partout denses sur S_0 et de ce que les a_n, b_n *dépendent continuement du point P_n.* D'autre part l'écart entre C_n et Γ_n étant $\frac{1}{n}$ parallèlement à ox_1, tout point intérieur à R_2 sera point-limite pour les continus C_n eux-mêmes. Il en résulte, d'après le théorème du N° 46, que *la famille $f_n(x, y)$ n'est normale en aucun point de R_2.*

CHAPITRE V.

Applications diverses des résultats précédents.

§ 1.

Rayons de convergence associés d'une série double (1) $\sum_{p,q} a_{pq} x^p y^q$.

58. Si l'on considère la série des modules des termes de la série double proposée, (2) $\sum_{p,q} A_{p,q} X^p Y^q$, on sait qu'à chaque nombre r correspond un nombre r' dépendant de r, $r'=f(r)$ tel que la série (2) soit convergente pour $0<X<r$ $0<Y<r'$, et divergente lorsque $X\geq r$, $Y\geq r'$, l'une au moins de ces 2 dernières conditions n'étant pas une égalité. Le point de coordonnées (r, r') décrit une courbe continue d'équation $r'=f(r)$ qui, avec les parties positives des axes $0r$ et $0r'$, délimite une région R. La série (2) sera convergente pour tout point intérieur à R, elle diverge pour tout point extérieur à R. Il y a doute lorsque le point est situé sur la séparatrice $r'=f(r)$.

59. Considérons les 2 cercles $|x|<r$, $|y|<r'$ des plans x et y respectivement. Ils définissent dans l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2) le volume intérieur à un hypercylindre et lorsqu'on fait varier r, le volume balaie un certain volume V de l'espace tel que tout point intérieur à V soit intérieur, pour une certaine valeur de r, à l'hypercylindre $[|x|<r, |y|<r']$ où $r'=f(r)$. Le volume V est limité par une hypersurface dont l'équation est $r'=f(r)$ ou:

$$\sqrt{y_1^2+y_2^2}=f(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$$

et tout point intérieur au volume V a des coordonnées (x_1, x_2, y_1, y_2) telles que

$$\sqrt{y_1^2+y_2^2}<f(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$$

c'est-à-dire telles que

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)=f(\sqrt{x_1^2+x_2^2})-\sqrt{y_1^2+y_2^2}>0.$$

Tout point intérieur à V étant, pour une certaine valeur de r $(r>\sqrt{x_1^2+x_2^2})$ intérieur à l'hypercylindre $[|x|<r, |y|<r']$ où $r'=f(r)$, rendra la série (1) absolument convergente et par conséquent en ce point le terme $a_{pq} x^p y^q$ tend vers zéro lorsque p ou q devient infini.

60. Considérons la famille des fonctions $f_{pq}(x, y)=a_{pq}x^p y^q$.

1°) Elles sont holomorphes dans V et au de là, dans tout l'espace (x, y).

2°) Soit une suite infinie quelconque de fonctions f_{pq}, l'un des 2 indices devant croître indéfiniment, *la limite de cette suite sera zéro en tout point intérieur à V.*

La famille des f_{pq} est normale en tout point intérieur à V car il est bien évident que la limite précédente est atteinte uniformément dans tout volume intérieur, frontière comprise, à V.

3°) Soit (x_0, y_0) un point de la frontière de V. Si $r_0=|x_0|$ et $r'_0=|y_0|$ on a $r'_0=f(r_0)$.

Envisageons les 2 cercles $|x|\leq r_0$, $|y|\leq r'_0$. Traçons autour de x_0 et y_0 respectivement les petits cercles $|x-x_0|<\varepsilon$, $|y-y_0|<\varepsilon'$, ε et ε' étant arbitrairement petits. Il y a dans l'hypercylindre $|x-x_0|<\varepsilon$, $|y-y_0|<\varepsilon'$ une partie du volume où la famille des f_{pq} est normale, à savoir toute la partie pour laquelle $|x|<r_0$, $|y|<r'_0$. Mais il y a aussi dans l'hypercylindre précédent des points (x', y') pour lesquels $|x'|>r_0$, $|y'|>r'_0$. La série (2) est divergente pour $X=|x'|$, $Y=|y'|$ donc, *le terme général de cette série ne peut être borné pour* $X=|x'|$, $Y=|y'|$ en vertu d'un théorème bien connu. C'est dire qu'il existe une infinité de termes $a_{p_1 q_1}x^{p_1}y^{q_1}$, $a_{p_2 q_2}x^{p_2}y^{q_2}$, ... $a_{p_n q_n}x^{p_n}y^{q_n}$, ... où l'un au moins des indices p_n et q_n devient infini, et pour lesquels on a quelque soit n

$$|a_{p_n q_n}x^{p_n}y^{q_n}|>A,$$

A étant un nombre arbitrairement grand donné à l'avance, pour $x=x'$, $y=y'$. La suite formée des $a_{p_n q_n}x^{p_n}y^{q_n}$ n'est donc certainement pas normale dans l'hypercylindre $|x-x_0|<\varepsilon$, $|y-y_0|<\varepsilon'$ puisqu'elle converge uniformément vers zéro dans une partie de ce domaine, sans converger vers zéro au point (x', y') de ce domaine. La famille initiale

$$f_{pq}=a_{pq}x^p y^q$$

n'est donc pas normale dans l'hypercylindre précédent, et comme ε et ε' sont arbitrairement petits, cette famille n'est certainement pas normale au point (x_0, y_0).

61. La famille des f_{pq} cesse donc d'être normale en tout point de l'hypersurface S frontière du volume V.

L'équation de S est

$$\varphi = f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 0$$

et la famille est normale dans la région $\varphi > 0$.

Il en résulte *qu'en admettant l'existence et la continuité des dérivées première et seconde de f*, f satisfera à une inégalité différentielle obtenue en écrivant que φ satisfait à la condition $C[\varphi] \leq 0$ établie au N° 44 du présent mémoire. On a ici

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = f' \cdot \frac{x_1}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = f' \cdot \frac{x_2}{r}, \quad \Delta'_1 = f'^2 \text{ en posant } r = |x|,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = -\frac{y_1}{r'}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = -\frac{y_2}{r'}, \quad \Delta''_1 = 1 \text{ en posant } r' = |y|,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = f'' \cdot \frac{x_1^2}{r^2} + f' \cdot \frac{1}{r} - f' \cdot \frac{x_1^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = f'' \cdot \frac{x_2^2}{r^2} + f' \cdot \frac{1}{r} - f' \cdot \frac{x_2^2}{r^3}, \quad \Delta'_2 = f'' + \frac{f'}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = -\frac{1}{r'} + \frac{y_1^2}{r'^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} = -\frac{1}{r'} + \frac{y_2^2}{r'^3}, \quad \Delta''_2 = -\frac{1}{r'},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial y_k} = 0 \text{ pour } i = 1, 2; \ k = 1, 2.$$

Il vient donc

$$C[\varphi] = -\frac{f'^2}{r'} + f'' + \frac{f'}{r} = \frac{1}{rr'}\left[r'(rf'' + f') - rf'^2\right].$$

Il faudra donc que l'on ait $C[\varphi] \leq 0$ sur la surface $\varphi = 0$. La condition équivaut à

$$r'[rf'' + f'] - rf'^2 \leq 0 \text{ pour } \varphi = 0.$$

Or, sur $\varphi = 0$ on a

$$r' = f(r).$$

La condition est donc

$$(1) \qquad f(r)\left[rf''(r) + f'^2(r)\right] - rf'^2(r) \leq 0.$$

62. On reconnait là la condition qui exprime que *la fonction* $\log f(r)$ *est une fonction concave de* $\log r$*;* en posant

$$\log r = \varrho, \qquad \log f(r) = F(r) = \Phi(\varrho)$$

cette condition exprime

$$\frac{d^2\,\Phi(\varrho)}{d\varrho^2} \leq 0.$$

On a en effet $r = e^\varrho$

$$f(r) = e^{\Phi(\varrho)},$$

$$\frac{d}{d\varrho}[\Phi(\varrho)] = \frac{d}{d\varrho}[\log f(r)] = \frac{d}{dr}[\log f(r)] \cdot \frac{dr}{d\varrho} = r \cdot \frac{f'(r)}{f(r)},$$

$$\frac{d^2}{d\varrho^2}[\Phi(\varrho)] = \frac{d}{d\varrho}\left[r\,\frac{f'(r)}{f(r)}\right] = \frac{d}{dr}\left[r\,\frac{f'(r)}{f(r)}\right] \cdot \frac{dr}{d\varrho} = \frac{[rf'' + f']f - rf'^2}{f^2} \cdot r.$$

Et la condition $\frac{d^2}{d\varrho^2}[\Phi(\varrho)] \leq 0$ se traduit bien par la condition

$$(1) \qquad f[rf'' + f'] - rf'^2 \leq 0$$

qui est précisément celle qui exprime $C[\varphi] \leq 0$.

La courbe $\varrho' = \Phi(\varrho)$ étant concave vers le bas, si $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sont 3 valeurs positives $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$ le point $A_2[\varrho_2, \Phi(\varrho_2)]$ sera *audessus de la corde* joignant les 2 points A_1 et A_3 de la courbe ayant pour abscisses ϱ_1 et ϱ_3.

On aura ainsi

$$\Phi(\varrho_2) \geq \frac{\Phi(\varrho_3) - \Phi(\varrho_1)}{\varrho_3 - \varrho_1}(\varrho_2 - \varrho_1) + \Phi(\varrho_1).$$

Ceci s'écrit encore, en remarquant que le sens $A_1 A_3 A_2$ est le sens positif du triangle $A_1 A_3 A_2$

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & \Phi(\varrho_1) & 1 \\ \varrho_2 & \Phi(\varrho_2) & 1 \\ \varrho_3 & \Phi(\varrho_3) & 1 \end{vmatrix} \leq 0$$

ou enfin

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \log r_1 & \log r'_1 & 1 \\ \log r_2 & \log r'_2 & 1 \\ \log r_3 & \log r'_3 & 1 \end{vmatrix} \leq 0 \text{ pour } r_1 < r_2 < r_3.$$

On retrouve ainsi une propriété des rayons de convergence associés qui a été donnée par divers auteurs; et en premier lieu par M. E. Fabry (C. R. Acad. Sc. de Paris 1902, tome 134, page 1190. *Sur les rayons de convergence d'une* *série double*). On trouvera dans le mémoire de M. HARTOGS inséré au tome 62 des Math. Annalen une bibliographie complète des travaux de ces auteurs ainsi que des démonstrations nouvelles. Notre but a été surtout de montrer que cette propriété se rattache de la manière la plus naturelle aux propriétés des hypersurfaces sur lesquelles une famille cesse d'être normale.

63. Il faut remarquer que l'inégalité (1) a été obtenue en supposant l'existence et la continuité des dérivées premières et seconde de $f(r)$, tandis que la condition (2), qui en résulte, ne fait pas intervenir ces dérivées. Mais il résulte d'un très intéressant mémoire publié par M. G. FABER au tome 61 des Math. Annalen page 289: »Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen» que la fonction continue $r'=f(r)$, si elle n'a pas une dérivée unique en chaque point, possède du moins une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Envisageant ensuite la dérivée à droite $\left(\frac{df}{dr}\right)_+$, et si l'on désigne par $\overline{\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right)}_+$ la limite supérieure, lorsque h tend vers zéro, de l'expression

$$\frac{1}{h}\left[\left(\frac{df(r+h)}{dr}\right)_+ - \left(\frac{df(r)}{dr}\right)_+\right],$$

M. Faber démontre (v. p. 300 de son mémoire) l'inégalité

$$\overline{\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right)}_+ \leq \frac{1}{f}\left(\frac{df}{dr}\right)_+^2 - \frac{1}{r}\left(\frac{df}{dr}\right)_+ \tag{3}$$

qui n'est autre que (1) lorsque $\frac{df}{dr}$ et $\frac{d^2f}{dr^2}$ existent.

64. Dans son mémoire, M. Faber considère des courbes W dont l'équation est

$$x^{\theta_1} y^{\theta_2} = r^{\theta_1} r'^{\theta_2}, \tag{4}$$

θ_1 et θ_1 étant 2 nombres positifs, de somme égale à l'unité, nombres qui sont dits appartenir au couple (r, r') de rayons de convergence associés lorsque, pour une suite infinie au moins de doubles indices (μ, ν) on a

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r^\mu r'^\nu} = 1,$$

et à condition que la suite des $\frac{\mu}{\nu}$ admette pour valeur-limite le nombre $\frac{\theta_1}{\theta_2}$.

Il prouve que la courbe $r'=f(r)$ et la courbe (4) étant rapportées aux mêmes axes rectangulaires or, or', *la courbe* $r'=f(r)$ *n'admet aucun point au dessus de la courbe* (4). La courbe $r'=f(r)$ détermine avec les 2 axes or, or' une région R telle que pour tout point intérieur à cette région la série double proposée converge absolument. Toute courbe W sera donc extérieure à la région R, elle pourra avoir des points communs avec la frontière de R.

65. Dans l'espace des variables complexes (x, y) il correspond à R l'hypervolume V dans lequel la famille des $a_{pq} x^p y^q$ est normale et sur la frontière duquel la famille cesse d'être normale. Tout point intérieur à V a des coordonnées x et y satisfaisant à $|x|<r$, $|y|<r'$, r et r' étant des rayons de convergence associés. On peut encore dire que si (x, y) est intérieur à V, le point $(|x|, |y|)$ sera un point intérieur à R. L'équation

$$x^{\theta_1} y^{\theta_2} = r^{\theta_1} r'^{\theta_2} \tag{4}$$

définit dans l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2) une caractéristique W et il est visible que cette caractéristique, qui a en commun avec la frontière de V la multiplicité $[|x|=r,\ |y|=r']$ *n'a aucun point intérieur à* V. En effet à un pareil point (x_0, y_0), il devrait nécessairement correspondre un point $[|x|, |y|]$ intérieur à R, et la courbe (4) dans le plan (r, r') devrait avoir un point intérieur à R, ce qui est impossible.

Les W *sont donc des caractéristiques satisfaisant à la condition nécessaire et suffisante établie d'une façon générale au N° 42 du présent mémoire.*

A cet égard *la recherche de M. Faber apparait comme l'application aux séries doubles de puissances, de la théorie générale établie au § 3 du chapitre III du présent mémoire.* — Il serait intéressant de voir dans le détail le parallélisme entre la manière dont M. Faber établit l'inégalité différentielle (3) à partir de son théorème fondamental (page 292 de son mémoire), et la manière dont, au § 3 chapitre 3 du présent mémoire nous avons établi l'inégalité différentielle plus générale $C[\varphi]\leq 0$ à partir de la proposition du N° 42. On constatera que l'analogie est très étroite; et il n'en pouvait être autrement puisque nos résultats comprennent ceux de M. Faber rappelés ci-dessus; nous avons cependant fait ici des hypothèses supplémentaires (existence et continuité des dérivées secondes) à cause de la plus grande généralité de la question traitée au § 3, chapitre 3, du présent mémoire. Nous n'insisterons pas davantage ici sur cette analogie, notre but étant surtout de montrer rapidement comment les recherches de nos prédécesseurs se rattachent aux recherches présentes.

14—25280. *Acta mathematica.* 47. Imprimé le 26 septembre 1925.

§ 2.

Points singuliers des fonctions analytiques de 2 variables complexes.

66. Considérant une fonction analytique $f(x, y)$, M. Hartogs introduit pour chaque valeur $y=y_0$ un nombre positif R_{y_0} tel que 1°) la fonction soit holomorphe en tout point (x, y) pour lequel $|x|<R_{y_0}$ $y=y_0$, 2°) il existe au moins un point (x_0, y_0) tel que $|x_0|=R_{y_0}$ et qui soit un point singulier de $f(x, y)$. On peut dire que la distance minima à l'origine des points singuliers de $f(x, y)$ situés dans le plan $y=y_0$ est R_{y_0}.

Cette fonction R_{y_0} est douée d'intéressantes propriétés que M. Hartogs étudie au § 8 de son mémoire du tome 62 des Math. Annalen. On peut montrer que *ces propriétés se rattachent encore à la propriété générale établie au § 3 du chapitre 3 du présent mémoire.* Je le montrerai d'une façon explicite pour la propriété suivante dont l'importance a été mise en évidence par M. Hartogs.

Si $\log R_y$ *est une fonction continue de* y_1 *et* y_2 $[y=y_1+iy_2]$ *dans un certain domaine* Δ' *du plan* y, *admettant des dérivées continues des deux premiers ordres par rapport à* y_1 *et* y_2 *on a*

$$\frac{\partial^2 \log R_y}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 \log R_y}{\partial y_2^2}\leq 0. \tag{1}$$

(Cet énoncé est à rapprocher de celui qu'on a donné au 4° du N° 39 du présent mémoire).

67. On va raisonner comme au N° 50 du présent mémoire. En tout point $[x=x_0, y=y_0]$, la fonction $f(x, y)$ est holomorphe si $|x_0|<R_{y_0}$; y_0 est un point quelconque de Δ'. Elle est donc holomorphe dans un certain domaine $[|y-y_0|\leq\varrho'$, $|x|\leq\varrho]$, ϱ et ϱ' étant convenablement choisis, $\varrho<R_{y_0}$. Dans ce domaine on peut la développer en série double de puissances de x et de $y-y_0$, ordonner la série double en puissances de x et écrire

$$f(x, y)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(y) \,.\, x^\nu, \tag{2}$$

la série convergeant uniformément pour $|x|\leq\varrho$, $|y-y_0|\leq\varrho'$. Les $f_\nu(y)$ sont holomorphes dans $|y-y_0|\leq\varrho'$.[1] On peut même dire qu'à chaque nombre $\varrho<R_{y_0}$ on

[1] Comme on a évidemment $f_\nu(y)=\frac{1}{\nu!}\left[\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}f(x, y)\right]_{x=0}$, et comme, à cause des hypothèses faites, R_{y_0} reste supérieur à une certaine limite positive dans tout domaine intérieur à Δ', il est clair que $\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}f(x, y)$ est holomorphe pour $[x=0, y=y_0]$, y_0 intérieur à Δ', donc les $f_\nu(y)$ sont holomorphes dans tout domaine intérieur à Δ'.

peut faire correspondre un nombre $\varrho'>0$ tel que la propriété précédente ait lieu pour $|x|\leq\varrho$, $|y-y_0|\leq\varrho'$ et il est clair que si ϱ tend vers R_{y_0}, ϱ' tendra vers zéro.

68. Considérons la famille des $f_k(x, y)$ définies par

$$f_k(x, y)=\sum_{\nu=0}^{k} f_\nu(y) \cdot x^\nu.$$

1°) *Elle est normale en tout point* $[x=x_0, y=y_0]$ *pour lequel* $|x_0|<R_{y_0}$ *et* y_0 *dans* $\varDelta'$, et dans un certain domaine $|x-x_0|<\varrho_1$, $|y-y_0|<\varrho'$, elle converge uniformément vers $f(x, y)$ (on peut choisir $\varrho_1=\varrho-|x_0|-\varepsilon$, ε arbitrairement petit, ϱ étant le nombre envisagé précédemment).

2°) *En tout point* (x_0, y_0) *pour lequel* $|x_0|=R_{y_0}$ et y_0 *dans* $\varDelta'$ *elle cesse d'être normale.*

Supposons en effet qu'elle soit normale et prouvons qu'on aboutit à une impossibilité. Si la famille était normale en un tel point (x_0, y_0) elle serait normale dans un petit hypercylindre $|x-x_0|<r$, $|y-y_0|<r'$. On peut supposer r' inférieur au nombre ϱ' ci-dessus. Dans la partie de cet hypercylindre où l'on a $|x|<R_{y_0}$ la famille des $f_k(x, y)$ aurait pour limite $f(x, y)$ à cause de la convergence de la série (2). La famille étant supposée normale serait alors uniformément convergente dans $|x-x_0|\leq r_1<r$, $|y-y_0|\leq r'_1<r'$, puisqu'elle l'est dans une partie du domaine ($|x-x_0|<r$, $|y-y_0|<r'$). La série (2) devrait donc converger uniformément dans le domaine

$$|x-x_0|\leq r_1, \quad |y-y_0|\leq r'_1.$$

Choisissons dans ce domaine un point (x_1, y_1) tel que $|x_1|>R_{y_0}$. La série (2) convergerait uniformément pour $x=x_1$, $|y-y_0|\leq r'_1$. Les $f_\nu(y)$ sont holomorphes dans $|y-y_0|\leq r'_1$. Il résulte alors d'un théorème de M. Hartogs[1], déjà utilisé au N° 50 du présent mémoire, que la série (2), uniformément convergente pour $x=x_1$, $|y-y_0|\leq r'_1$ devrait converger uniformément pour $|x|\leq|x_1|-\varepsilon$, $|y-y_0|\leq r'_1$ quelque petit que soit ε positif. Cela revient à dire que la fonction $f(x, y)$ limite de (2) serait holomorphe dans le domaine $|x|<|x_1|$, $|y-y_0|\leq r'_1$, et cela est impossible puisque, dans ce domaine elle admet un point singulier au moins pour lequel

$$|x_0|=R_{y_0}<|x_1|.$$

[1] V. Hartogs, M. A., t. 62, § 2, ou bien la fin du n° 50 du présent mémoire et le n° 51.

69. Il en résulte que la famille des $f_k(x, y)$, normale dans l'hypervolume V engendré par l'intérieur des cercles $[|x|<R_{y_0}, y=y_0]$ cesse d'être normale en tout point de l'hypersurface S engendrée par le cercle $[|x|=R_{y_0}, y=y_0]$.

L'hypervolume V est limité par une hypersurface S dont l'équation est, en posant suivant l'usage $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$,

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}=R_y(y_1, y_2),$$

R_y étant la fonction positive correspondant au point $y=y_1+iy_2$.

On pose

$$\varphi=R_y-\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

L'intérieur de l'hypervolume V est alors défini par $\varphi>0$, et sa frontière par $\varphi=0$. Le théorème général du N° 44 du présent mémoire prouve que l'on doit avoir, sur la frontière $\varphi=0$, l'inégalité

$$C[\varphi]\leq 0.$$

Pour abréger posons $R_y=e^{U(y_1, y_2)}$ et on aura $U=\log R_y$. Posons aussi $r=|x|$. La frontière sera

$$\varphi=e^U-\sqrt{x_1^2+x_2^2}=0.$$

On a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=-\frac{x_1}{r};\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=-\frac{x_2}{r};\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=e^U\frac{\partial U}{\partial y_1};\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=e^U\frac{\partial U}{\partial y_2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=-\frac{1}{r}+\frac{x_1^2}{r^3};\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=-\frac{1}{r}+\frac{x_2^2}{r^3};\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}=e^U\left(\frac{\partial U}{\partial y_1}\right)^2+e^U\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}=e^U\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)^2+e^U\frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2}.$$

De plus

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial y_j}=0.$$

Alors

$$\Delta'_1=1;\ \Delta''_1=e^{2U}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)^2\right]$$

$$\Delta'_2=-\frac{1}{r};\ \Delta''_2=e^U\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)^2\right]+e^U\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2}\right].$$

On a:

$$C[\varphi] = -\frac{1}{r} e^{2U} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y_2} \right)^2 \right] + e^U \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y_2} \right)^2 \right] + e^U \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} \right].$$

Or, *sur* S, on a $\varphi = 0$ c'est-à-dire $r = e^U$. Donc, *sur* S, $C[\varphi]$ se réduit à $e^U \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} \right]$ et par la suite, la condition $C[\varphi] \leq 0$ entraine, e^U étant positif et non nul vu la continuité de U,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} \leq 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 \log R_y}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \log R_y}{\partial y_2^2} \leq 0$$

qui est bien l'inégalité (1) établie en premier lieu par M. Hartogs.

70. Nous n'insisterons pas sur la manière dont on démontrerait les autres propriétés établies par M. Hartogs pour R_y lorsqu'on ne suppose plus l'existence des dérivées, en comparant R_y à une fonction p_y telle que log p_y, harmonique dans $\varDelta'$, prenne sur la frontière de $\varDelta'$ des valeurs égales ou inférieures à celles de log R_y. C'est toujours la famille des $f_K(x, y)$ précédentes qu'on considérera. Mais on n'appliquera plus brutalement le résultat du N° 44. C'est plutôt sous la forme du théorème N° 37, comme on l'indique au N° 39 (2°) du présent mémoire qu'il faudra opérer.

71. On pourra également déduire des résultats du § 3 chapitre 3, les propriétés énoncées au N° 39 (2°, 3°, 4°) du présent mémoire pour la quantité R_y qu'on y a introduite. On associera pour cela à toute fonction de la famille $f(x, y)$ considérée son développement:

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(y) \, . \, x^\nu$$

et les sections de ce développement:

$$f_K(x, y) = \sum_{\nu=0}^{K} f_\nu(y) \, . \, x^\nu .$$

A la famille des f on associera celle des f_K.

La famille des f_K comprendra chacune des f initiales comme fonction-limite de suites partielles. La considération du domaine où la famille des f_K est normale, et de sa frontière, conduira à introduire le nombre R_{y_0}, minimum de la distance à l'origine du plan x, des points du plan $y=y_0$ où la famille des f cesse d'être normale. Les propriétés énoncées au N° 39 pour la famille des f seront des conséquences de propriétés telles que celles qu'on a étudié au § 3 du chapitre 3, relativement à la famille des f_K.

§ 3.

Application aux fonctions-limites de fonctions analytiques d'une variable uniformes ou multiformes.

72. On a démontré, au N° 46 du présent mémoire, le théorème suivant:

Soit une suite infinie de fonctions $f_n(x, y)$, holomorphes dans un domaine V de de l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2), telles que les continus $f_n(x, y)=0$ aient une infinité de points-limites P intérieurs à V (et formant par suite un continu), on peut former une famille de fonctions φ_n, holomorphes dans V, ayant mêmes zéros que les f_n et qui ne cessera d'être normale dans V qu'aux points P, limites d'une infinité de continus $f_n(x, y)=0$.

Il suit de là que toutes les propriétés établies dans les chapitres 2, 3 du présent mémoire s'appliquent, sans changer un mot, aux *ensembles E formés des points-limites, intérieurs à V, d'une famille de continus $f_n(x, y)=0$, les f_n étant des fonctions quelconques holomorphes dans V.* Rappelons brièvement les propriétés les plus remarquables.

Aucun point P de E situé dans V, n'est isolé; l'ensemble E est parfait. Si pour $x=x_0$ les y des points de E sont isolés et si y_0 est l'un d'eux, à toute valeur ξ voisine de x_0, correspondra au moins une valeur η voisine de y_0, telle que le point (ξ, η) soit un point de E. Aucune partie de E ne peut être isolée dans V; la distance OP d'un point O quelconque à un point de E ne peut être maximum pour un point particulier P_0 de E intérieur à V. Il en résulte que E ne peut jamais être un ensemble parfait partout discontinu.

73. *Si, au voisinage d'un point (x_0, y_0) de E, il n'y a dans chaque plan $x=\xi$ $[|\xi-x_0|<\varepsilon]$ qu'un seul point (ξ, η) de E $[|\xi-x_0|<\varepsilon, |\eta-y_0|<\varepsilon']$, η est une fonction holomorphe de ξ au voisinage de x_0.*

Si, au voisinage d'un point (x_0, y_0) de E, il n'y a dans chaque plan $x=\xi$ $[|\xi-x_0|<\varepsilon]$, que p points de E de coordonnées $x=\xi$, $y=\eta_i$ $(i=1, 2, \ldots p)$ avec

$|\xi - x_0| < \varepsilon$, $|\eta_i - y_0| < \varepsilon'$, *les fonctions symétriques élémentaires des* η_i *seront holomorphes en* ξ, *au voisinage de* x_0, *en sorte que les* $\eta_i(\xi)$ *seront des fonctions analytiques de* ξ *ayant au plus, en* $\xi = x_0$, *un point critique algébrique.*

74. Examinons de près l'énoncé du N° 72. Les fonctions $f_n(x, y)$ étant holomorphes dans V, envisageons les fonctions $y_n(\xi)$ définies par les équations (1) $f_n(\xi, y) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots \infty)$ au voisinage d'une valeur x_0 de ξ et prenant pour ξ voisin de x_0 une valeur voisine de y_0. Le point (x_0, y_0) est un point de E intérieur à V, point-limite des continus $f_n(x, y) = 0$ et on peut supposer, pour simplifier les notations (en remplaçant au besoin la suite f_n par une suite partielle f_{n_i}) que sur chaque continu $f_n(x, y) = 0$, on peut déterminer un point (x_n, y_n) tel que (x_n, y_n) tende vers (x_0, y_0) pour $n = \infty$. Alors, pour ξ voisin de x_0, chacune des équations (1) (du moins à partir d'un certain rang) définit une fonction $y_n(\xi)$ qui, dans le domaine $|\xi - x_0| < \varepsilon$ est analytique, algébroïde et telle que $|y_n(\xi) - y_0| < \varepsilon'$ (ε' et ε arbitrairement petits choisis à priori). *Elle n'est en général pas uniforme.* On va prouver que.

Supposer que l'ensemble E *des points-limites des* $f_n(x, y) = 0$ *n'a qu'un point* η *satisfaisant à* $|\eta - y_0| \leq \varepsilon'$ *dans chaque plan* $x = \xi$ *satisfaisant à* $|\xi - x_0| \leq \varepsilon$, *oblige les* $y_n(\xi)$ *à converger uniformement vers* $\eta(\xi)$ *dans le domaine* $|\xi - x_0| \leq \varepsilon$.

75. Supposons en effet que, dans le domaine $|\xi - x_0| \leq \varepsilon$, la convergence des $y_n(\xi)$ ne soit pas uniforme et montrons que E aurait plus d'un point dans un certain plan $x = \xi$. D'abord il est clair que $y_n(\xi)$ converge vers $\eta(\xi)$ pour $n = \infty$, car si cela n'avait pas lieu, la suite des $y_n(\xi)$ aurait au moins 2 points-limites η et η' dans le plan $x = \xi$ et pour lesquels $|\eta - y_0|$ et $|\eta' - y_0|$ seraient $\leq \varepsilon'$.

Si la convergence n'était pas uniforme on pourrait, λ étant un nombre arbitrairement petit qu'on peut supposer $< \varepsilon'$, trouver une suite infinie de couples d'indices $\begin{cases} n_1 \\ n'_1 \end{cases}, \begin{cases} n_2 \\ n'_2 \end{cases}, \ldots \begin{cases} n_i \\ n'_i \end{cases} \ldots$ grandissant indéfiniment, et des points correspondants $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_i, \ldots$ tous intérieurs à $|\xi - x_0| \leq \varepsilon$ et pour lesquels $|y_{n_i}(\xi_i) - y_{n'_i}(\xi_i)| \geq \lambda$ quel que soit i. C'est en effet ce qui résulte du critérium classique de convergence de Cauchy lorsqu'on le suppose non uniforme. Bien entendu $n'_i > n_i$. Les ξ_i ont au moins un point limite ξ_0 appartenant à $|\xi_0 - x_0| \leq \varepsilon$. Les $y_{n_i}(\xi_i)$ ont aussi au moins un point limite η_0 appartenant à $|\eta_0 - y_0| \leq \varepsilon'$. En ne conservant au besoin que les indices $\begin{cases} n_i \\ n'_i \end{cases}$ en nombre infini pour lesquels ξ_i tend vers ξ_0 et $y_{n_i}(\xi_i)$ tend vers η_0, on peut donc supposer que le point $[\xi_i, y_{n_i}(\xi_i)]$ tend vers le point (ξ_0, η_0) qui est un point de E appartenant au domaine $|x - x_0| \leq \varepsilon$, $|y - y_0| \leq \varepsilon'$. Les

$y_{n'_i}(\xi_i)$ auront au moins un point-limite η'_0, lorsque i devient infini, et ce point satisfera à $|\eta'_0-y_0|\leq\varepsilon'$. (ξ_0, η'_0) est encore un point de E. En définitive, on peut extraire de la suite des couples d'indices (n_i, n'_i) une suite partielle infinie (p_i, p'_i) telle que

1°) $[\xi_i, y_{p_i}(\xi_i)]$ ait un point limite (ξ_0, η_0).

2°) $[\xi_i, y_{p'_i}(\xi_i)]$ ait un point limite (ξ_0, η'_0) lorsque i devient infini, et on aura

$$|\xi_0-x_0|\leq\varepsilon, \qquad |\eta_0-y_0|\leq\varepsilon', \qquad |\eta'_0-y_0|\leq\varepsilon'.$$

Puisque l'on a, quel que soit i

$$|y_{n_i}(\xi_i)-y_{n'_i}(\xi_i)|\geq\lambda$$

on aura aussi

$$|y_{p_i}(\xi_i)-y_{p'_i}(\xi_i)|\geq\lambda$$

et, à la limite

$$|\eta_0-\eta'_0|\geq\lambda.$$

Il y aurait donc au moins 2 points *distincts* de $E, (\xi_0, \eta_0), (\xi_0, \eta'_0)$, appartenant au domaine $|x-x_0|\leq\varepsilon$, $|y-y_0|\leq\varepsilon'$ et situés dans le plan $x=\xi_0$. Cela est impossible. Donc les $y_n(\xi)$ convergent uniformément vers $\eta(\xi)$ dans $|x-x_0|\leq\varepsilon$.

76. Réciproquement, supposons que les $f_n(x, y)$, étant holomorphes dans un domaine $|x-x_0|\leq\varepsilon$, $|y-y_0|\leq\varepsilon'$, s'annulent dans ce domaine, et qu'on considère pour chaque équation $f_n(\xi, y)=0$ la ou les déterminations de la fonction $y_n(\xi)$ qu'elle définit dans $|\xi-x_0|\leq\varepsilon$ et pour lesquelles $|y_n(\xi)-y_0|\leq\varepsilon'$. $y_n(\xi)$ sera bornée, analytique et algébroïde dans le domaine considéré. Supposons de plus que, *pour chaque valeur de ξ, les diverses valeurs de $y_n(\xi)$ considérées aient un seul point-limite $\eta(\xi)$ pour lequel on aura $|\eta(\xi)-y_0|\leq\varepsilon'$ et supposons la convergence uniforme dans $|\xi-x_0|\leq\varepsilon$. Alors on peut affirmer que $\eta(\xi)$ sera une fonction holomorphe de ξ pour $|\xi-x_0|\leq\varepsilon$.* En effet, soit ξ_0 une valeur quelconque telle que $|\xi_0-x_0|\leq\varepsilon$. Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ une suite arbitraire de valeurs de ξ, intérieures à $|\xi-x_0|<\varepsilon$ et tendant vers ξ_0 pour n infini; on va montrer que *les diverses valeurs de $y_n(\xi_n)$ ont pour limite unique $\eta(\xi_0)$ lorsque n devient infini.*

1) $\eta(\xi)$ est une fonction continue de ξ.

En effet, soit η un nombre positif arbitrairement petit; On aura, pour une valeur assez grande de n, $|y_n(\xi)-\eta(\xi)|<\eta$ quelque soit ξ dans $|\xi-x_0|\leq\varepsilon$. Or $y_n(\xi)$ est continue, donc si ϱ est suffisamment petit on aura dans $|\xi-\xi_0|<\varrho$ l'inégalité

$|y_n(\xi)-y_n(\xi_0)|<\eta$ [η étant arbitrairement petit], en associant convenablement entre elles les valeurs en ξ et ξ_0 des déterminations considérées de y_n qui sont en nombre fini dans $|\xi-x_0|\leq\varepsilon$. On aura donc

$$|\eta(\xi)-\eta(\xi_0)|<|\eta(\xi)-y_n(\xi)|+|y_n(\xi)-y_n(\xi_0)|+|y_n(\xi_0)-\eta(\xi_0)|<3\,\eta$$

dans $|\xi-\xi_0|<\varrho$. Donc $\eta(\xi)$ est continue dans $|\xi-x_0|\leq\varepsilon$.

2°) Considérons les $y_n(\xi_n)$; dés que $n>n_0$, à cause de la convergence uniforme on aura $|y_n(\xi_n)-\eta(\xi_n)|<\eta'$, η' arbitrairement petit; et à cause de la continuité de $\eta(\xi)$ on aura aussi pour n assez grand $|\eta(\xi_n)-\eta(\xi_0)|<\eta'$, puisque ξ_n tend vers ξ_0. On aura donc, pour $n>n_0$ assez grand $|y_n(\xi_n)-\eta(\xi_0)|<2\,\eta'$; c'est dire que les diverses valeurs de $y_n(\xi_n)$ tendent vers $\eta(\xi_0)$ quand ξ_n tend vers ξ_0 comme on l'avait annoncé.

Si on considère les continus définis dans $|x-x_0|\leq\varepsilon$, $|y-y_0|\leq\varepsilon'$ par les équations $f_n(x, y)=0$, ou encore par $y=y_n(x)$, on voit que l'ensemble E formé des points limites de ces continus n'a qu'un point $y=\eta(\xi_0)$ dans chaque plan $x=\xi_0$ du domaine considéré. Il satisfait donc à la condition du théorème N° 73. Le continu E, représenté par $y=\eta(x)$, est donc tel que $\eta(x)$ est holomorphe dans le domaine $|x-x_0|<\varepsilon$ considéré. On peut dire, en résumé, que si des fonctions $y_n(x)$, algébroïdes et bornées dans un domaine $|x-x_0|\leq\varepsilon$, *convergent uniformément dans ce domaine vers une fonction uniforme* $\eta(x)$, *cette fonction* $\eta(x)$ *est holomorphe dans le domaine considéré.*[1]

77. On verra de même que, *si les* $y_n(\xi)$ *ont* p *points-limites* $\eta_i(\xi)$ $(i=1, 2, \ldots p)$ *dans* $|y-y_0|\leq\varepsilon'$, *la convergence étant uniforme dans* $|\xi-x_0|\leq\varepsilon$, $\eta_i(\xi)$ *sera une fonction analytique dans* $|\xi-x_0|<\varepsilon$, *algébroïde avec* p *branches et aura pour* $\xi=x_0$ *tout au plus un point critique algébrique.*

78. *Remarque.* Le résultat précédent contient évidemment le théorème classique relatif à la convergence uniforme de fonctions $\varphi_n(x)$ holomorphes dans un domaine. La limite $\varphi(x)$ est alors holomorphe dans le domaine. Il suffit en effet de considérer les continus $y-\varphi_n(x)=0$ qui joueront le rôle des $f_n(x, y)=0$ précédemment.

[1] Ce qui est intéressant ici, c'est que les y_n ne sont pas supposées uniformes et même que le nombre de leurs branches peut augmenter indéfiniment avec n. Posons, par exemple, $\varphi_n(x)=e^{-n^2}\psi_n(x)$, les $\psi_n(x)$ etant $<A$ et holomorphes dans $|x-x_0|\leq\varepsilon$ et considérons $f_n(x, y)=[y-\eta(x)]^n-\varphi_n(x)=0$, $\eta(x)$ étant holomorphe. On a $y_n(x)=\eta(x)+e^{-n}[\psi_n(x)]^{\frac{1}{n}}$. On voit que $[\psi_n]^{\frac{1}{n}}$ est uniformément bornée et que $y_n(x)$ tend uniformément vers $\eta(x)$. Si ψ_n a des zéros dans $|x-x|<\varepsilon$, on voit que y_n peut avoir des points critiques d'ordre n de plus en plus élevé.

15—25280. *Acta mathematica.* 47. Imprimé le 26 septembre 1925.

79. Lorsque les points-limites intérieurs à V de la famille des continus $f_n(x, y)=0$ forment des multiplicités à 3 dimensions, on pourra encore énoncer un théorème analogue à celui du N° 44 du présent mémoire.

Si une nappe d'hypersurface S, $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)=0$, intérieure à V, est telle que, dans une certaine hypersphère Σ ayant pour centre un point P de S et divisée par S en 2 régions R_1 et R_2 où respectivement $\varphi>0$ et $\varphi<0$ on ait les propriétés suivantes:

1°) *Aucun point intérieur à* R_1, *n'est point-limite des continus* $f_n(x, y)=0$.

2°) *Tout point de* S *appartenant à la frontière de* R_1, *est un point-limite de continus* $f_n(x, y)=0$ *et les seuls points-limites de continus* $f_n(x, y)=0$ *appartenant à la frontière de* R_1 *sont les points de* S, *on peut affirmer que la fonction* φ, *qu'on suppose avoir des dérivées continues des 2 premiers ordres satisfera, sur* S, *à l'inégalité* $C[\varphi]\leq 0$ *du N° 44.*

Si on remplace R_1 par R_2 dans l'énoncé des propriétés 1° et 2° φ satisfera à $C[\varphi]\geq 0$ sur S. Enfin si, *dans* V, *les seuls points-limites des continus* $f_n(x, y)=0$ *sont les points de* S *et eux seuls, on devra avoir* $C[\varphi]=0$ *sur l'hypersurface* $\varphi=0$.

80. *Remarque.* Toutes ces propriétés des ensembles de points-limites des continus $f_n(x, y)=0$ apparaissent comme des propriétés de points singuliers essentiels de fonctions de 2 variables si l'on peut, par un procédé analogue à celui qu'emploie M. Picard dans sa note »Sur la décomposition en facteurs primaires de fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels» (C. R. Acad. Sc. de Paris tome 92, page 690. 1881), construire un produit canonique convergent qui admette comme zéros tous les points où $f_n(x, y)=0$. Ce produit canonique représentera en tout point non limite de continus $f_n(x, y)=0$ une fonction holomorphe de (x, y) dont les points-limites signalés seront des points singuliers essentiels. E. E. Lévi a utilisé cette idée dans ses 2 mémoires sur les singularités essentielles de 2 variables, mais il ne l'a utilisée qu'avec des formes particulières de continus permettant une vérification aisée de la convergence.

§ 4.

81. On a, au § 1 de ce chapitre, appliqué les principes et les résultats de ce mémoire au domaine de convergence d'une série entière double $\sum a_{pq} x^p y^q$ et à sa frontière, qui est aussi la frontière du domaine où cette série donble cesse de converger uniformément. Les propriétés de cette frontière résultent du fait qu'elle est engendrée par des circonférences $|x|=r$, $|y|=r'$ associées par $r'=f(r)$

et l'application à ces frontières particulières de la propriété générale établie au § 3 du chapitre 3 du présent mémoire, nous a donné la propriété de concavité de $\log f(r)$ en $\log r$, établie au § 1 du chapitre présent.

Il est clair que, si on considère une série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y)$ convergeant uniformément dans un certain domaine intérieur au domaine V où les f_n sont holomorphes, *la frontière du domaine de convergence uniforme de cette série jouira de toutes les propriétés reconnues aux ensembles E du présent mémoire.* Suivant la forme particulière de cette frontière, due aux formes particulières adoptées pour les termes $f_n(x, y)$ de la série, les propriétés générales des ensembles E se traduiront par des relations d'inégalité variées qui étendront aux séries envisagées les relations de concavité de $\log f(r)$ en $\log r$ reconnues aux rayons de convergence associés des séries doubles. En variant la forme des $f_n(x, y)$ on obtiendra ces relations à partir des inégalités ou égalités-mères étudiées au chapitre III du présent mémoire. Nous n'insisterons pas ici sur ces applications.

82. Peut-on, des résultats établis dans le présent mémoire, déduire les résultats que M. M. Hartogs et E. E. Lévi ont obtenus sur les points singuliers ou singuliers essentiels d'une fonction $f(x, y)$. Oui, toutes les fois que la fonction sera susceptible d'un développment en série de fonctions holomorphes cessant de converger uniformément aux seuls points singuliers de la fonction. Cela est immédiat, mais ne se réalise presque jamais, car les développements usuels de Taylor ou de Laurent cessent en général de converger ailleurs qu'aux seuls points singuliers ou singuliers essentiels de la fonction génératrice. Les résultats actuels ne s'étendent donc pas immédiatement aux points singuliers ou singuliers essentiels des fonctions de plusieurs variables. Cette extension ne semble pas impossible, dès maintenant pour les points *singuliers.* (Recherches de M. Hartogs.) En ce qui concerne les points singuliers *essentiels* (Recherches de E. E. Lévi), il faudra au préalable, envisager les familles de fonctions *méromorphes* afin de pouvoir atteindre les points singuliers essentiels et eux seuls comme points frontière de domaines de convergence, les points singuliers polaires et les points d'indétermination étant insérés dans les domaines de convergence. J'ai dit dans l'introduction que je n'envisageais ici que les classes de fonctions holomorphes mais j'espère avoir l'occasion de revenir ailleurs sur les questions dont je viens de parler.