ZUR THEORIE DER FAST PERIODISCHEN FUNKTIONEN.

I.

Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen.

Von

HARALD BOHR

in KOPENHAGEN.

Meinem Lehrer und Freund Professor EDMUND LANDAU zu seinem 25-jährigen Doktorjubiläum gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

In zwei Abhandlungen unter dem gemeinsamen obigen Titel, von denen ich hier die erste vorlege, werde ich die Theorie einer gewissen Klasse von Funktionen einer reellen Variabeln entwickeln.[1] Obwohl die beiden Abhandlungen innerlich mit einander verbunden sind und die zweite auf den Resultaten der ersten basiert, wird jede der Abhandlungen doch insoferne ein Ganzes bilden, als sie ihre besondere Problemstellung behandelt.

1°. Es sei $f(x)$ eine Funktion der reellen Variabeln x, die *im ganzen Intervalle* $-\infty < x < \infty$ *definiert und stetig ist.* Der bequemeren Formulierung halber werde ich die Funktion $f(x)$ nicht als reell voraussetzen, sondern zulassen, dass $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ ist, wo $u(x)$ und $v(x)$ stetige reelle Funktionen der reellen Variabeln x bedeuten. Wenn, bei einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$, die reelle Zahl $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ für alle x der Ungleichung

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

genügt, werde ich τ eine *zu der gegebenen Zahl* ε *gehörige Verschiebungszahl der Funktion* $f(x)$ nennen. Die Definition unserer Funktionenklasse lautet nun folgendermassen:

Eine (für $-\infty < x < \infty$ *stetige) Funktion* $f(x)$ *soll* **fast periodisch** *heissen, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Länge* $l = l(\varepsilon) > 0$ *derart gibt, dass jedes Intervall* $\alpha < x < \beta$ *der Länge* $\beta - \alpha = l$ *mindestens eine Verschiebungszahl* $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ *enthält.*

Mit anderen Worten: zu jedem festen ε soll es unendlich viele Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ geben, und die Menge dieser Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ soll nirgends beliebig grosse Lücken aufweisen. Ich füge gleich hinzu, dass es diese letzte Forderung (also die Forderung der Existenz der Zahlen $l(\varepsilon)$) ist, welche erst die ganze Theorie ermöglicht. In dem ersten der Zusätze, welche dieser Abhandlung hinzugefügt sind, will ich auf diese Frage näher eingehen.

Es ist klar, dass die (stetigen) rein periodischen Funktionen in der Klasse der fast periodischen Funktionen enthalten sind; denn es können ja, falls $f(x)$ rein periodisch mit der Periode p ist, für jedes ε die sämtlichen Perioden np ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) als Verschiebungszahlen verwendet werden, und es kann also hier die Länge $l = l(\varepsilon)$ sogar von ε unabhängig (etwa $l = 2p$) gewählt werden.

---

[1] Eine kurze Mitteilung über einige der wesentlichsten Resultate habe ich in zwei Noten in den Comptes rendus der Pariser Akademie »Sur les fonctions presque périodiques» (22. Okt. 1923) und »Sur l'approximation des fonctions presque périodiques par des sommes trigonométriques» (26. Nov. 1923) gegeben.

2°. Das Hauptresultat unserer Untersuchungen besteht in dem Nachweis, dass — allgemein gesprochen — die fast periodischen Funktionen mit denjenigen Funktionen übereinstimmen, welche *in eine abzählbare (oder endliche) Anzahl von periodischen Schwingungen* $a_n e^{i\lambda_n x}$ *aufgelöst werden können,* wobei die Exponenten λ_n ganz beliebige reelle Zahlen sind. Ebenso wie die rein periodischen Funktionen als diejenigen Funktionen charakterisiert werden können, welche in eine harmonische Folge von Schwingungen, d. h. in Schwingungen $a_n e^{inkx}$, zerlegt werden können, ergibt uns also die Klasse der fast periodischen Funktionen $f(x)$ die Klasse derjenigen Funktionen, welche in eine beliebige (harmonische oder unharmonische) Folge von Schwingungen $a_n e^{i\lambda_n x}$ aufgelöst werden können.

3°. Die vorliegende erste Abhandlung bringt eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen rein periodischer Funktionen. Als Hauptsatz dieser letzteren Theorie mag der folgende bekannte Satz bezeichnet werden:

Zu jeder rein periodischen (stetigen) Funktion $f(x)$ mit der Periode $p=\frac{2\pi}{k}$ gehört eine bestimmte Reihe der Form $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inkx}$, die Fourierreihe der Funktion, welche ihrerseits die Funktion $f(x)$ eindeutig bestimmt, und die im Mittel gegen $f(x)$ konvergiert in dem Sinne, dass der Ausdruck

$$S_N=\frac{1}{p}\int_0^p \left|f(x)-\sum_{-N}^{N} a_n e^{inkx}\right|^2 dx$$

für $N\to\infty$ gegen 0 konvergiert.

Das Ziel dieser ersten Abhandlung ist vor allem die Herleitung des folgenden Satzes über fast periodische Funktionen, welcher das vollständige Analogon des eben erwähnten Satzes über rein periodische Funktionen bildet.

Zu jeder fast periodischen Funktion $f(x)$ gehört eine eindeutig bestimmte Folge von reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ und eine Reihe der Form $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$, die »Fourierreihe» der Funktion $f(x)$. Diese Fourierreihe bestimmt ihrerseits die Funktion $f(x)$ in eindeutiger Weise und konvergiert im Mittel gegen $f(x)$ in dem Sinne, dass der Ausdruck

$$S_N=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left|f(x)-\sum_{1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}\right|^2 dx$$

für $N\to\infty$ gegen 0 konvergiert.

Dagegen braucht die zu einer fast periodischen Funktion $f(x)$ gehörige Fourierreihe nicht im gewöhnlichen Sinne zu konvergieren; es gibt ja schon unter den stetigen rein periodischen Funktionen $f(x)$ Beispiele von Funktionen, deren Fourierreihe nicht überall konvergiert. Es scheint mir aber von einem gewissen Interesse zu sein, dass in der allgemeinen Klasse der fast periodischen Funktionen — im Gegensatze zu der spezielleren Klasse der rein periodischen — die Nichtkonvergenz einer Fourierreihe doch gewissermassen als ein »Ausnahmefall» betrachtet werden kann; in der Tat kann, wenn $f(x)$ eine »ganz beliebige» fast periodische Funktion und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ihre zugehörige Exponentenfolge ist, »im Allgemeinen» erwartet werden, dass keinerlei lineare Verknüpfungen zwischen den λ bestehen, d. h. dass die Grössen λ_n *linear unabhängig* sind, und in diesem Falle werden wir beweisen, *dass die Fourierreihe* $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ *im gewöhnlichen Sinne gegen* $f(x)$ *konvergiert, sogar gleichmässig im ganzen Intervalle* $-\infty < x < \infty$.

4°. Wenn es sich bei einer Untersuchung über rein periodische Funktionen, etwa mit der Periode $p=\frac{2\pi}{k}$, speziell darum handelt die überall stetigen Funktionen $f(x)$ herauszugreifen und zu charakterisieren, ist die Betrachtung der Fourierreihe bekanntlich kein besonders geeignetes Mittel, weil man ja keine einfache notwendige und hinreichende Bedingung kennt, welche eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ erfüllen muss um die Folge der Fourierkonstanten einer stetigen Funktion zu sein. Hier ist ein wesentlich andersartiges Verfahren bequemer, nämlich dasjenige, bei dem man die Funktion $f(x)$ nicht gerade durch die Abschnitte $\sum_{-N}^{N} a_n e^{inkx}$ ihrer Fourierreihe, sondern durch ganz beliebige trigonometrische Polynome $\sum_{-N}^{N} b_n e^{inkx}$ zu approximieren sucht und dabei die Güte der Approximation nicht durch die Grösse des mittleren Fehlers

$$\frac{1}{p}\int_0^p \left| f(x) - \sum_{-N}^{N} b_n e^{inkx} \right|^2 dx,$$

sondern einfach durch die obere Grenze des absoluten Wertes der Differenz

$$f(x) - \sum_{-N}^{N} b_n e^{inkx}$$

beurteilt. Es gilt nämlich nach WEIERSTRASS der Satz, *dass eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Funktion* $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *eine überall stetige rein periodische Funktion der Periode* $\frac{2\pi}{k}$ *ist, darin besteht, dass* $f(x)$ *durch eine Folge von trigonometrischen Polynomen der Form* $\sum_{-N}^{N} b_n e^{inkx}$ *gleichmässig approximiert werden kann.*

Eine Verallgemeinerung dieses letzten Satzes wurde von BOHL in seiner sehr interessanten Magisterdissertation[1] gegeben. BOHL stellt sich dort die folgende Aufgabe: *Es sei eine endliche Anzahl von positiven Grössen* $k_1, k_2, \ldots, k_q$ *gegeben; dann soll die Klasse derjenigen stetigen Funktionen* $f(x)$ *charakterisiert werden, welche sich durch eine Folge von trigonometrischen Summen der Form*

$$\sum b_n e^{i(n_1 k_1 + \cdots + n_q k_q)x}$$

gleichmässig approximieren lassen.

Diese Aufgabe wurde von BOHL dadurch gelöst, dass er die folgende Antwort gab:

Dafür, dass die Funktion $f(x)$ *der erwähnten Forderung genüge, ist notwendig und hinreichend, dass sie die folgende »quasi-periodische» Eigenschaft besitzt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *soll es ein* $\delta > 0$ *geben, derart, dass die Ungleichung*

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty)$$

bei jedem τ *besteht, für welches sich die* q *Grössen* $k_1\tau, k_2\tau, \ldots, k_q\tau$ *von ganzen Multipla von* 2π *um weniger als* δ *unterscheiden.* Mit anderen Worten, es soll jedes τ mit der erwähnten Eigenschaft eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ sein.

Man sieht somit, dass schon in den Untersuchungen von BOHL die Idee der Einführung der Verschiebungszahlen den Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung des Begriffes der reinen Periodizität bildet. Aber ganz abgesehen davon, dass die Exponenten λ_n in den von BOHL betrachteten trigonometrischen Summen nicht, wie bei uns, beliebige reelle Zahlen sind, sondern Zahlen der speziellen Art, als lineare Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten einer endlichen Anzahl von Grössen $k_1, \ldots, k_q$ darstellbar zu sein, besteht ein prinzipieller

[1] P. BOHL, Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten (Dorpat, 1893). Ich verdanke es einer freundlichen Mitteilung von Herrn HADAMARD, auf die schönen Untersuchungen von BOHL (und die später zu erwähnenden von ESCLANGON) aufmerksam geworden zu sein, welche mir bei der Einsendung meiner ersten Comptes rendus Note unbekannt geblieben waren.

Unterschied zwischen den Problemstellungen der BOHL'schen Theorie und der hier zu entwickelnden. Bei BOHL werden nämlich die Exponenten λ_n (d. h. bei ihm die Grössen $k_1, \ldots, k_q$) als im voraus gegebene Zahlen angesehen, in dem Sinne, dass diese Zahlen in der oben angeführten quasiperiodischen Charakterisierung seiner Funktionen explizite auftreten, während in unserer Definition einer fast periodischen Funktion von den Exponenten λ_n gar nicht die Rede ist, und es bei uns vielmehr eine Hauptaufgabe ist zu zeigen, dass zu jeder fast periodischen Funktion $f(x)$ eine bestimmte Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ gehört.

Die vorliegende erste Abhandlung, wo es sich um die Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen handelt, hat fast gar keine Berührungspunkte mit der BOHL'schen Untersuchung. Ganz anders verhält es sich mit den Untersuchungen, welche wir in der zweiten Abhandlung bringen werden, wo es sich darum handeln wird, eine fast periodische Funktion $f(x)$ durch beliebige trigonometrische Summen der Form $\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$, und nicht gerade durch die Abschnitte der Fourierreihe der Funktion, zu approximieren, und wo wir u. a. den folgenden allgemeinen Satz beweisen werden:

Für die Fastperiodizität einer Funktion $f(x)$ ist notwendig und hinreichend, dass sie sich durch irgend eine Folge von trigonometrischen Summen $\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$ (wo den reellen Exponenten λ_n gar keine Bedingungen auferlegt sind) gleichmässig approximieren lässt.

Es wird daher zweckmässig sein, bis zu der zweiten Abhandlung damit zu warten, auf die Untersuchung von BOHL — und einige damit eng zusammenhängende Untersuchungen von ESCLANGON — näher einzugehen, und zu zeigen, wie das oben erwähnte BOHL'sche Resultat sich von selbst in den Rahmen der allgemeinen Theorie der fast periodischen Funktionen einordnet.

5°. Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Theorie der fast periodischen Funktionen wichtige Anwendungen auf die Theorie der Dirichlet'schen Reihen erlaubt und vor allem dazu dienen kann, Licht über die bisher nur sehr ungenügend aufgeklärte Frage zu werfen, welche Eigenschaften eine analytische Funktion besitzen muss um in eine Dirichlet'sche Reihe entwickelbar zu sein. Von dieser Anwendung — wie auch von etwaigen Anwendungen auf Probleme der Mechanik — werde ich aber in diesen beiden Abhandlungen ganz absehen, hoffe aber bei einer späteren Gelegenheit ausführlich darauf eingehen zu können.

KAPITEL I.

Die allgemeine Theorie der Fourierreihen fast periodischer Funktionen.

§ 1. Die Invarianz der Fastperiodizität gegenüber einfachen Rechenoperationen.

Wir werden zunächst zwei Sätze beweisen, welche zeigen, dass gewisse Eigenschaften von Funktionen die in einem endlichen (abgeschlossenen) Intervall stetig sind, also auch von stetigen rein periodischen Funktionen, ebenfalls unseren fast periodischen Funktionen zukommen. Die sehr einfachen Beweise beruhen auf der in der Definition einer fast periodischen Funktion geforderten Existenz der Länge $l=l(\varepsilon)$; aus der Eigenschaft dieser Zahl $l=l(\varepsilon)$ folgt nämlich sofort, dass wir, falls wir ein festes Intervall I der Länge l betrachten, z. B. das Intervall $-\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}$, im Stande sind (siehe Fig. 1) zu jeder beliebig gegebenen Zahl x_0 eine Verschiebungszahl $\tau=\tau(\varepsilon)=\tau(\varepsilon, x_0)$ so zu finden, dass x_0 bei einer Verschiebung

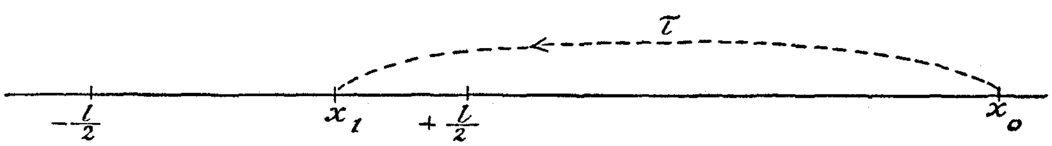


Fig. 1.

um τ in einen Punkt $x_1=x_0+\tau$ dieses Intervalles I übergeht — wir haben ja nur die Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ so zu wählen, dass sie dem Intervalle $-x_0-\frac{l}{2}<x<-x_0+\frac{l}{2}$ der Länge l angehört — wodurch es bei den Beweisen ermöglicht wird die Betrachtungen so zu sagen auf ein festes endliches Intervall zu beschränken.

Satz I. *Jede fast periodische Funktion $f(x)$ ist beschränkt*, d. h. es gibt eine Konstante $G=G(f)$ derart, dass die Ungleichung $|f(x)|\leqq G$ für alle x besteht.

Beweis. Es sei ε etwa gleich 1 gewählt und $l=l(1)$ die zugehörige Länge. Es bezeichne ferner g das Maximum der stetigen Funktion $|f(x)|$ im endlichen (abgeschlossenen) Intervall $-\frac{l}{2}\leqq x\leqq\frac{l}{2}$. Dann hat offenbar die Zahl $G=g+1$ die erwünschte Eigenschaft; denn zu jedem beliebig gegebenen x_0 lässt sich ja (siehe

Fig. 1) eine Verschiebungszahl $\tau=\tau(1)$ so bestimmen, dass die Zahl $x_1=x_0+\tau$ im Intervalle $-\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}$ gelegen ist und daher

$$|f(x_0)|\leqq|f(x_1)|+|f(x_0)-f(x_1)|\leqq g+1=G.$$

Satz II. *Jede fast periodische Funktion $f(x)$ ist gleichmässig stetig im ganzen Intervalle* $-\infty<x<\infty$, d. h. zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ derart, dass für jedes Punktepaar x', x'' mit $|x'-x''|<\delta$ die Ungleichung $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ besteht.

Beweis. Zu der gegebenen Zahl $\frac{\varepsilon}{3}$ bestimmen wir die Länge $l=l\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, betrachten das abgeschlossene Intervall $-\frac{l}{2}-1\leqq x\leqq\frac{l}{2}+1$ und bestimmen eine Zahl $\delta<1$ derart, dass für jedes Punktepaar y', y'' mit einem Abstand $|y'-y''|<\delta$, welches in dem festen Intervalle $\left(-\frac{l}{2}-1, \frac{l}{2}+1\right)$ gelegen ist, die Ungleichung $|f(y')-f(y'')|<\frac{\varepsilon}{3}$ besteht. Dann genügt dieses δ offenbar der Bedingung des Satzes. Denn für ein beliebiges Punktepaar x', x'' mit $|x'-x''|<\delta$ können wir eine zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl $\tau=\tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ so wählen, dass die Zahl $y'=x'+\tau$ in das Intervall $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$ fällt; dann liegt (wegen $|x'-x''|<1$) die Zahl $y''=x''+\tau$ gewiss im Intervall $\left(-\frac{l}{2}-1, \frac{l}{2}+1\right)$, und es ist

$$|f(x')-f(x'')|\leqq|f(x')-f(y')|+|f(x'')-f(y'')|+|f(y')-f(y'')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Aus dem Satze II folgt sofort das in der Folge sehr oft zu benutzende

Corollar. *Es sei $f(x)$ eine fast periodische Funktion und $\varepsilon_1>0$ sowie $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $\delta=\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)>0$ derart, dass, falls τ_1 irgend eine zu ε_1 gehörige Verschiebungszahl unserer Funktion $f(x)$ ist, jede Zahl τ_2, deren Abstand von τ_1 kleiner als δ ist, eine zu ε_2 gehörige Verschiebungszahl sein muss.*

In der Tat brauchen wir nur (mit Hilfe des Satzes II) die Zahl $\delta>0$ so zu wählen, dass für jedes Punktepaar x', x'' mit $|x'-x''|<\delta$ die Ungleichung $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_2-\varepsilon_1$ besteht. Falls nämlich τ_1 eine zu ε_1 gehörige Verschiebungszahl ist, gilt ja für jedes τ_2 mit $|\tau_2-\tau_1|<\delta$ (und alle x) die Ungleichung

$$|f(x+\tau_2)-f(x)| \leqq |f(x+\tau_2)-f(x+\tau_1)| + |f(x+\tau_1)-f(x)| < (\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Nach den obigen vorbereitenden Sätzen gehen wir nunmehr zum Beweise des folgenden ersten Hauptsatzes über.[1]

Satz III. *Die Summe zweier fast periodischer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist wieder eine fast periodische Funktion.*

Beweis. Der Satz wird offenbar bewiesen sein, falls wir zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ eine Länge $l=l\,(f,\,g,\,\varepsilon)$ derart angeben können, dass jedes Intervall $\alpha<x<\beta$ der Länge l mindestens einen Punkt τ^* enthält, welcher gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist; denn ein solches τ^* wird ja, wegen der für alle x giltigen Ungleichung

$$|\{f(x+\tau^*)+g(x+\tau^*)\}-\{f(x)+g(x)\}| \leqq |f(x+\tau^*)-f(x)|+|g(x+\tau^*)-g(x)|,$$

gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Summe $f(x)+g(x)$ sein. Um die Existenz solcher gemeinsamer Verschiebungszahlen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zu beweisen, werden wir natürlich gewisse charakteristische Eigenschaften der von den Verschiebungszahlen einer fast periodischen Funktion gebildeten Menge heranziehen müssen; die wesentlichste Eigenschaft (neben der im obigen Corollar ausgesprochenen »Unbestimmtheit» der Verschiebungszahlen), die wir zu benutzen haben, ist die folgende: sind τ_1 und τ_2 zwei beliebige zu einer Zahl ε_0 gehörige Verschiebungszahlen einer fast periodischen Funktion $f(x)$, so wird die Summe $\tau_1+\tau_2$ und daher auch (da mit τ_2 auch $-\tau_2$ eine Verschiebungszahl ist) die Differenz $\tau_1-\tau_2$ wiederum eine Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ sein, die zwar nicht zu ε_0 zu gehören braucht, wohl aber zu $2\,\varepsilon_0$.

Der Beweis verläuft nun folgendermassen: Nach dem Corollar des Satzes II wird die Zahl δ so bestimmt, dass, falls τ eine beliebige zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist, jede Zahl $\tau+\delta'$ mit $|\delta'|<\delta$ eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl dieser Funktion $f(x)$ darstellt. Und es wird ferner — was nach der Definition der fast periodischen Funktionen möglich ist — die Länge $l_0=l_0(f,g,\varepsilon)$ so bestimmt, dass jedes Intervall der Länge l_0 sowohl eine zu $\frac{\varepsilon}{8}$

[1] Es sei ausdrücklich bemerkt, dass die Richtigkeit dieses Satzes wesentlich durch die, in der Definition geforderte, Existenz einer Länge $l=l(\varepsilon)$ bedingt ist (vgl. Zusatz 1).

gehörige Verschiebungszahl $\tau_f = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$ der Funktion $f(x)$ als auch eine zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehörige Verschiebungszahl $\tau_g = \tau_g\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ der Funktion $g(x)$ enthält.

Wir betrachten nunmehr (siehe Fig. 2) die sämtlichen Intervalle I_n der Form $n l_0 < x < (n+1) l_0$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ und bestimmen in jedem dieser Intervalle I_n zwei Verschiebungszahlen $\tau_f = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$ und $\tau_g = \tau_g\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$, die wir mit $\tau_f^{(n)}$ und $\tau_g^{(n)}$ bezeichnen. Wir bilden die Differenzen $d^{(n)} = \tau_f^{(n)} - \tau_g^{(n)}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, welche

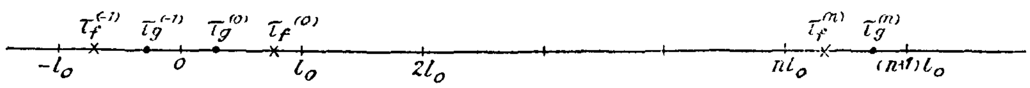


Fig. 2.

sämtlich numerisch kleiner als l_0 sind, d. h. im Intervalle $-l_0 < x < l_0$ liegen. Das Intervall $-l_0 < x < l_0$ teilen wir in eine endliche Anzahl, M, gleiche Teile, wobei M so gross gewählt ist, dass die Teillänge $\frac{2 l_0}{M}$ kleiner als die obige Zahl δ ist, und sehen bei jeder der unendlich vielen Differenzen $d^{(n)}$ nach, in welches der M Teilintervalle $i_1, i_2, \ldots, i_M$ der Form $\alpha_m \leqq x < \alpha_m + \frac{2 l_0}{M}$ sie fällt. Es seien $i_{m_1}, i_{m_2}, \ldots, i_{m_P}$ (wo $1 \leqq P \leqq M$ ist) diejenigen der Teilintervalle i_m, in welche überhaupt eine der unendlich vielen Differenzen $d^{(n)}$ zu liegen kommt, und es sei die Zahl $X > l_0$ so gross gewählt, dass unter den im Intervalle $(-X, X)$ enthaltenen Intervallen I_n gewiss P solche existieren, deren entsprechende Differenzen $d^{(n)}$ je in eines der obigen P Teilintervalle $i_{m_1}, i_{m_2}, \ldots, i_{m_P}$ fallen, also dass jede überhaupt mögliche Differenz $d^{(n)}$ bereits im Intervalle $(-X, X)$ »vertreten» ist.

Ich behaupte alsdann, dass die Länge $l = 4X$ die gewünschte Eigenschaft besitzt, d. h. dass in einem beliebigen Intervall dieser Länge, etwa dem Intervalle $(\alpha - 2X, \alpha + 2X)$, eine Zahl τ^* existiert, welche eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige gemeinsame Verschiebungszahl der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist. Wir betrachten das mittlere Intervall $(\alpha - X, \alpha + X)$ der Länge $2X$; dies enthält gewiss (da seine Länge $> 2 l_0$ ist) eines der Intervalle I_n, etwa das Intervall I_p (siehe Fig. 3).

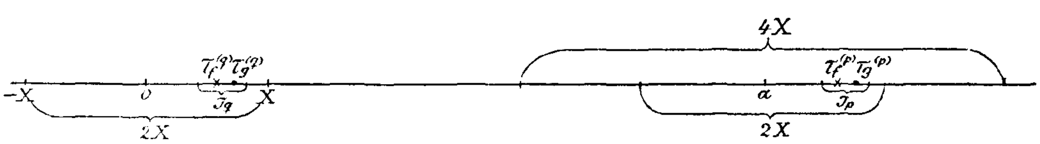


Fig. 3.

Danach wählen wir, was nach dem obigen möglich ist, in dem festen Intervalle $(-X, X)$ ein solches Intervall I_n, etwa I_q, dass die zu I_q gehörige Differenz $d^{(q)}=\tau_f^{(q)}-\tau_g^{(q)}$ demselben Teilintervalle i_{m_r} angehört wie die zu I_p gehörige Differenz $d^{(p)}=\tau_f^{(p)}-\tau_g^{(p)}$. Dann ist $|d^{(p)}-d^{(q)}|<\delta$ und somit

$$|(\tau_f^{(p)}-\tau_f^{(q)})-(\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)})|=|d^{(p)}-d^{(q)}|<\delta.$$

Ich werde zeigen, dass die Zahl $\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)}=\tau^*$ von der gewünschten Art ist. In der Tat:

1) Diese Zahl $\tau^*=\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)}$ liegt im Intervalle $(-\alpha+2X, \alpha+2X)$, weil $\tau_g^{(p)}$ im Intervalle $(\alpha-X, \alpha+X)$ und $\tau_g^{(q)}$ im Intervalle $(-X, X)$ gelegen sind.

2) Es ist $\tau^*=\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)}$ eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $g(x)$, weil $\tau_g^{(p)}$ und $\tau_g^{(q)}$ beide Verschiebungszahlen dieser Funktion $g(x)$ sind, welche zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehören.

3) Es ist aber τ^* auch eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$; denn die Zahl $\tau_f^{(p)}-\tau_f^{(q)}$ ist eine zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$, weil sowohl $\tau_f^{(p)}$ wie $\tau_f^{(q)}$ Verschiebungszahlen dieser Funktion sind, welche zu $\frac{\varepsilon}{8}$ gehören, und es wird daher nach der Bestimmung von δ, da die Zahl $\tau^*=\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)}$ von der Zahl $\tau_f^{(p)}-\tau_f^{(q)}$ um weniger als δ abweicht, die Zahl τ^* eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ sein.

Aus dem Satze III folgt sofort, dass die Summe einer beliebigen endlichen Anzahl von fast periodischen Funktionen wieder eine fast periodische Funktion ist. Da eine rein periodische stetige Funktion einen Spezialfall einer fast periodischen Funktion darstellt, ist hierin das Corollar enthalten:

Corollar. *Die Summe einer endlichen Anzahl von stetigen rein periodischen Funktionen — also speziell jede Summe* $\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$, *wo die* λ_n *beliebige reelle Zahlen sind — ist eine fast periodische Funktion.*

Dieses Corollar hat eine interessante Beziehung zur Theorie der diophantischen Approximationen, indem man zeigen kann, dass es seinem eigentlichen Inhalte nach mit einem bekannten Dirichlet-Kronecker'schen Satze dieser Theorie — in einer von Bohl und Wennberg verschärften Form — übereinstimmt. Um den Gang der Entwicklung nicht zu unterbrechen, werde ich aber erst in Zusatz 2 am Ende der Abhandlung auf diese Beziehung näher eingehen.

Mit Hilfe des Satzes III beweist man leicht, unter Benutzung eines bekannten Kunstgriffes, den folgenden

Satz IV. *Das Produkt zweier fast periodischer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist wieder fast periodisch.*

Beweis: In dem Spezialfall, wo der eine Faktor eine Konstante ist, ist der Satz trivial. Es ist also mit $g(x)$ auch $-g(x)$ eine fast periodische Funktion, und nach dem Satze III daher auch jede der beiden Funktionen $f(x)+g(x)$ und $f(x)-g(x)$. Nun gilt aber die Identität

$$f(x)\,g(x)=\frac{1}{4}\{(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\},$$

und es genügt daher zu beweisen, dass das Quadrat einer beliebigen fast periodischen Funktion $\varphi(x)$ wieder fast periodisch ist. Dies ist aber sofort klar; denn nach dem Satze I ist $\varphi(x)$ beschränkt, etwa $|\varphi(x)|\leqq G$, und es ist daher bei jedem τ

$$|\{\varphi(x+\tau)\}^2-\{\varphi(x)\}^2|=|\varphi(x+\tau)+\varphi(x)|\cdot|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|\leqq 2\,G\,|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|,$$

aus welcher Ungleichung hervorgeht, dass die Zahl τ gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\{\varphi(x)\}^2$ ist, falls sie eine zu $\frac{\varepsilon}{2G}$ gehörige Verschiebungszahl der ursprünglichen Funktion $\varphi(x)$ ist, womit die Fastperiodizität von $\{\varphi(x)\}^2$ offenbar bewiesen ist.

Corollar. *Mit $f(x)$ ist auch $|f(x)|^2$ fast periodisch.*

Denn aus der Ungleichung $||f(x+\tau)|-|f(x)||\leqq|f(x+\tau)-f(x)|$ folgt sofort, dass mit $f(x)$ auch $|f(x)|$ und daher, nach dem Satze IV, auch das Quadrat $|f(x)|^2$ fast periodisch ist. Wir hätten natürlich auch so schliessen können: Es ist $|f(x)|^2=f(x)\bar{f}(x)$, wo $\bar{f}(x)$ die zu der Funktion $f(x)=u(x)+i\,v(x)$ konjugierte Funktion $u(x) - i\,v(x)$ bezeichnet, welche offenbar gleichzeitig mit $f(x)$ fast periodisch ist.

Satz V. *Ist $f(x)$ fast periodisch und die untere Grenze g von $|f(x)|$ grösser als* 0, *so ist auch $\frac{1}{f(x)}$ fast periodisch.*

Beweis. Bei jedem τ ist

$$\left|\frac{1}{f(x+\tau)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x+\tau) - f(x)}{f(x) f(x+\tau)}\right| \leqq \frac{1}{g^2}\,|f(x+\tau) - f(x)|,$$

und es ist somit die Zahl τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\frac{1}{f(x)}$, falls sie eine zu $g^2\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der ursprünglichen Funktion $f(x)$ ist.

Aus den Sätzen III, IV und V folgt, *dass jede rationale Operation mit fast periodischen Funktionen immer wieder zu fast periodischen Funktionen führt, wenn nur nicht durch Funktionen, die beliebig nahe an Null kommen, dividiert wird.*

Wir beweisen schliesslich den

Satz VI. *Die Grenzfunktion $F(x)$ einer im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$ gleichmässig konvergenten Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, deren einzelne Funktionen $f_n(x)$ fast periodisch sind, ist wieder eine fast periodische Funktion.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass, wegen der Stetigkeit der Funktionen $f_n(x)$, die Grenzfunktion $F(x)$ gewiss auch stetig ist. Es sei nunmehr $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir wählen die Zahl $N = N(\varepsilon)$ so gross, dass für alle x die Ungleichung $|F(x) - f_N(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ besteht. Dann gilt offenbar für jedes τ die Ungleichung

$$|F(x+\tau) - F(x)| \leqq |f_N(x+\tau) - f_N(x)| + \frac{2\varepsilon}{3} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Es ist daher jede zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f_N(x)$ gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl unserer Funktion $F(x)$; und weil $f_N(x)$ fast periodisch ist, gibt es also eine Länge $l = l(\varepsilon)$ derart, dass jedes Intervall dieser Länge eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(x)$ enthält.

Corollar. *Jede für $-\infty < x < \infty$ gleichmässig konvergente Reihe der Form*

$\sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n x}$, *wo die Exponenten* λ_n *beliebige reelle Zahlen sind, stellt durch ihre Summe* $F(x)$ *eine fast periodische Funktion dar.*

Denn die Abschnitte $f_n(x)$ der Reihe sind ja nach dem Corollar des Satzes III fast periodische Funktionen, und nach Voraussetzung konvergiert $f_n(x)$ für $n \to \infty$ gleichmässig gegen $F(x)$.

§ 2.

Der Mittelwertsatz.

Wir beweisen nunmehr den folgenden Satz, welcher uns (zusammen mit dem Satze IV) den Schlüssel zu der Auflösung einer fast periodischen Funktion in rein periodische Schwingungen gibt.

Satz VII. (Mittelwertsatz.) *Für jede fast periodische Funktion* $f(x)$ *existiert der »Mittelwert«*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx,$$

d. h. der Ausdruck $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$ *strebt für* $T\to\infty$ *gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert, den wir mit* $M\{f(x)\}$ *bezeichnen werden.*

Beweis. Wir wenden das allgemeine Konvergenzprinzip an. Es sei also $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; wir haben die Existenz einer Zahl $T_0 = T_0(\varepsilon)$ derart zu zeigen, dass für $T_1 > T_0$, $T_2 > T_0$ die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)\,dx - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

besteht.

Zunächst bestimmen wir die Länge $l_0 = l_0(\varepsilon)$ derart, dass jedes Intervall dieser Länge eine zu $\frac{\varepsilon}{10}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ enthält. Nachdem l_0 festgelegt ist, bestimmen wir die positive Zahl X so gross, dass

$$\frac{l_0\, G}{X} < \frac{\varepsilon}{10}$$

ist, wo G die obere Grenze der (beschränkten) Funktion $|f(x)|$ bezeichnet. Und schliesslich sei $T_0 > X$ so gewählt, dass auch

$$\frac{X G}{T_0} < \frac{\varepsilon}{10}$$

ist. Ich behaupte, dass T_0 die gewünschte Eigenschaft besitzt; dies wird offenbar nachgewiesen sein, falls wir gezeigt haben, dass bei jedem $T > T_0$ der Ausdruck $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$ von der (von T unabhängigen) Zahl

$$\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx = U$$

um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ abweicht.

Es sei also $T > T_0$. Wir bestimmen (durch successive Wahl) eine Folge $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ von zu $\frac{\varepsilon}{10}$ gehörigen Verschiebungszahlen der Funktion $f(x)$ derart, dass $\tau_0 = 0$ ist und $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ respektive in den Intervallen der Länge l_0

$$(X, X + l_0), \qquad (\tau_1 + X, \tau_1 + X + l_0), \qquad (\tau_2 + X, \tau_2 + X + l_0), \ldots$$

liegen (siehe Fig. 4),

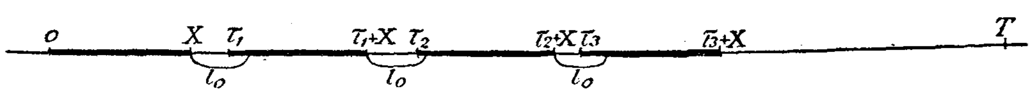


Fig. 4.

und schreiben

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_0^X + \int_X^{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_1+X} + \int_{\tau_1+X}^{\tau_2} + \int_{\tau_2}^{\tau_2+X} + \cdots + \int^T f(x)\,dx.$$

Es bezeichne M die Anzahl der Intervalle der Länge X, d. h. der Intervalle $(0, X)$, $(\tau_1, \tau_1 + X), \ldots,$ so dass $(\tau_{M-1}, \tau_{M-1} + X)$ das letzte dieser Intervalle ist. Dann ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{T}\left\{\int_0^X + \int_{\tau_1}^{\tau_1+X} + \int_{\tau_2}^{\tau_2+X} + \cdots + \int_{\tau_{M-1}}^{\tau_{M-1}+X} f(x)\,dx\right\} + R_1,$$

wo das Restglied — weil die Gesamtlänge der »Restintervalle» offenbar kleiner als $M l_0 + X$ ist — der Ungleichung

$$|R_1| \leqq \frac{1}{T}\cdot G(Ml_0+X) \leqq \frac{1}{MX}\cdot G\,M l_0 + \frac{1}{T_0}\cdot GX < \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{5}$$

genügt. Ferner ist

$$\frac{1}{T}\left\{\int_0^X + \int_{\tau_1}^{\tau_1+X} + \cdots + \int_{\tau_{M-1}}^{\tau_{M-1}+X} f(x)\,dx\right\} = \frac{1}{T}\int_0^X \{f(x)+f(x+\tau_1)+\cdots+f(x+\tau_{M-1})\}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^X M f(x)\,dx + R_2,$$

wo

$$|R_2| \leqq \frac{1}{T}\cdot X\cdot(M-1)\frac{\varepsilon}{10} < \frac{MX}{T}\cdot\frac{\varepsilon}{10} < \frac{\varepsilon}{10}$$

ist, und schliesslich haben wir

$$\frac{1}{T}\int_0^X M f(x)\,dx = \frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx + R_3,$$

mit

$$|R_3| = \left|\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\left\{\frac{MX}{T}-1\right\}dx\right| \leqq G\cdot\left(1-\frac{MX}{T}\right) = G\,\frac{T-MX}{T}$$

$$\leqq G\,\frac{M l_0 + X}{T} \leqq G\,\frac{M l_0}{MX} + G\,\frac{X}{T_0} < \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Es ist also, indem wir die obigen Ungleichungen zusammenfassen,

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx - \frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx\right| \leqq |R_1| + |R_2| + |R_3| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

In dem Satze VII war, bei dem Grenzübergang $T \to \infty$, der Mittelwert gerade über das Intervall $0 < x < T$ genommen; es ist aber, weil $f(x)$ beschränkt ist, unmittelbar klar, dass wir ebensogut den Mittelwert über das Intervall $\alpha < x < \alpha + T$ hätten nehmen können, wo α eine beliebige Konstante bedeutet. Für eine spätere Anwendung (beim Beweise des Hilfsatzes 2 in § 7) ist es aber von wesentlicher Bedeutung, dass die Limesgleichung $\lim \frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx = M\{f(x)\}$ auch gilt, wenn α, statt einer Konstanten, eine ganz beliebige Funktion von T ist; oder anders ausgedrückt:

Satz VIII. (Verschärfter Mittelwertsatz.) *Die bei jedem festen α gültige Limesgleichung*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx = M\{f(x)\}$$

gilt gleichmässig in α.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; die Aufgabe besteht darin die Existenz einer solchen Zahl $T_0 = T_0(\varepsilon)$ zu beweisen, dass für $T > T_0$ und jedes α die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx - M\{f(x)\} \right| < \varepsilon$$

besteht, wo $M\{f(x)\}$ die Zahl $\lim \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} f(x)\, dx$ des Satzes VII bezeichnet. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Zahl T_1 derart, dass für $T > T_1$

$$\left| \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} f(x)\, dx - M\{f(x)\} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist, und ferner die Zahl $l_0 = l_0(\varepsilon)$ so, dass jedes Intervall der Länge l_0 eine zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ enthält. Ich behaupte, dass eine Zahl T_0, welche $> T_1$ und $> l_0$ ist und der Ungleichung

$$T_0 > \frac{6\, l_0 G}{\varepsilon}$$

genügt, wo G die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet, die gewünschte Eigenschaft besitzt. In der Tat, es sei α eine beliebige Zahl und $T > T_0$. Wir wählen eine Verschiebungszahl $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ im Intervalle $(\alpha, \alpha + l_0)$ und finden zunächst

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(x)\,dx + R_1,$$

wo

$$|R_1| = \left|\frac{1}{T}\left\{\int_{\alpha}^{\tau} f(x)\,dx - \int_{\alpha+T}^{\tau+T} f(x)\,dx\right\}\right| \leqq \frac{1}{T_0}(l_0 G + l_0 G) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx + R_2$$

mit

$$|R_2| = \left|\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\{f(x+\tau) - f(x)\}\,dx\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

und, wegen $T > T_1$,

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx = M\{f(x)\} + R_3$$

mit $|R_3| < \frac{\varepsilon}{3}$. Durch Zusammenfassung erhalten wir nun sofort die gesuchte Ungleichung

$$\left|\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx - M\{f(x)\}\right| \leqq |R_1| + |R_2| + |R_3| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Corollar. *Es ist*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(x)\,dx = M\{f(x)\} \quad \textit{und} \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = M\{f(x)\}.$$

§ 3.

Herleitung der Fourierreihe und Aufstellung des Fundamentalsatzes.

Es sei $f(x)$ eine gegebene fast periodische Funktion; dann ist, bei jedem reellen λ, die Funktion $g(x) = f(x)\, e^{-i\lambda x}$ als Produkt der fast periodischen Funktion $f(x)$ und der rein periodischen Funktion $e^{-i\lambda x}$ wieder eine fast periodische Funktion (Satz IV); es existiert somit (Satz VII) der Mittelwert

$$M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, d x.$$

Wir bezeichnen diese Zahl $M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}$ mit $a(\lambda)$, wodurch also *eine zu der gegebenen fast periodischen Funktion $f(x)$ gehörige Funktion $a(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ definiert wird.*

Aus der bekannten Limesgleichung (wo μ eine reelle Zahl bedeutet)

$$M\{e^{i\mu x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\mu x}\, d x = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad \mu = 0 \end{cases}$$

ergibt sich sofort, nach einer in der Theorie der orthogonalen Funktionen geläufigen Schlussweise, der

Satz IX. *Es sei $f(x)$ eine fast periodische Funktion, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ beliebige untereinander verschiedene reelle Zahlen und $b_1, \ldots, b_N$ beliebige komplexe Zahlen. Dann ist*

$$(1) \qquad M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 + \sum_1^N |b_n - a(\lambda_n)|^2,$$

wobei $a(\lambda)$ die obige Bedeutung $a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}$ hat.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die in der Formel (1) vorkommenden beiden Mittelwerte einen Sinn haben; denn die beiden Funktionen $f(x)$ und $f(x) - \sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$, und daher auch (nach dem Corollar des Satzes IV) die Quadrate ihrer absoluten Beträge, sind ja fast periodische Funktionen. Es folgt nunmehr durch eine einfache Rechnung, in welcher das Überstreichen einer Grösse den Übergang zu der konjugierten Grösse bedeutet,

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}=M\left\{\left(f(x)-\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right)\left(\bar f(x)-\sum_1^N \bar b_n e^{-i\lambda_n x}\right)\right\}$$

$$=M\{f(x)\bar f(x)\}-\sum_1^N \bar b_n M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}-\sum_1^N b_n M\{\bar f(x)e^{i\lambda_n x}\}$$

$$+\sum_{n_1=1}^N\sum_{n_2=1}^N b_{n_1}\bar b_{n_2} M\{e^{i(\lambda_{n_1}-\lambda_{n_2})x}\},$$

also, wegen

$$M\{e^{i(\lambda_{n_1}-\lambda_{n_2})x}\}=\begin{cases}0 & \text{für}\quad n_1\neq n_2\\ 1 & \text{für}\quad n_1=n_2\end{cases},$$

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N \bar b_n a(\lambda_n)-\sum_1^N b_n \bar a(\lambda_n)+\sum_{n=1}^N b_n\bar b_n$$

$$=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N a(\lambda_n)\bar a(\lambda_n)+\sum_1^N (b_n-a(\lambda_n))(\bar b_n-\bar a(\lambda_n))$$

$$=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N |a(\lambda_n)|^2+\sum_1^N |b_n-a(\lambda_n)|^2.$$

Werden in der Formel (1) die Konstanten b_n speziell gleich den Zahlen $a(\lambda_n)$ gewählt, geht (1) in die Formel

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N a(\lambda_n)e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 \tag{2}$$

über.

Da die auf der linken Seite der Formel (2) stehende Grösse — als Mittelwert einer reellen, nicht negativen Funktion — offenbar ein reelle, nicht negative Zahl ist, ergibt uns die Formel (2) sofort die Ungleichung

$$\sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 \leqq M\{|f(x)|^2\}, \tag{3}$$

und aus dieser Ungleichung, in welcher die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ ganz beliebige (unter einander verschiedene) reelle Zahlen in beliebiger Anzahl sind, folgt weiter, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens eine endliche Anzahl von Zahlen λ geben kann, für die $|a(\lambda)| > \varepsilon$ ist, nämlich höchstens $\frac{1}{\varepsilon^2} M\{|f(x)|^2\}$. Hieraus schliessen wir, indem ε successiv etwa gleich $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ gewählt wird, das folgende fundamentale Resultat:

Satz X. *Zu jeder fast periodischen Funktion $f(x)$ gibt es höchstens eine* **abzählbar** *unendliche Anzahl von Zahlen λ, für welche der Mittelwert*

$$a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}$$

von 0 verschieden ist.

Wir bezeichnen diese λ (in einer beliebigen Reihenfolge) mit

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$$

und die zugehörigen Mittelwerte $a(\Lambda_1), a(\Lambda_2), \ldots, a(\Lambda_n), \ldots$ mit

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots.$$

Die mittels dieser Zahlen Λ_n und A_n gebildete Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ werden wir *die zu $f(x)$ gehörige »Fourierreihe»* nennen; wir schreiben (nach dem Vorgang von Hurwitz für gewöhnliche Fourierreihen)

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

Ferner werden wir die Grössen Λ_n und A_n als die *»Fourierexponenten»* bzw. *»Fourierkoeffizienten»* der fast periodischen Funktion $f(x)$ bezeichnen.

Um den Gebrauch des Wortes »Fourierreihe» für unsere Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ zu rechtfertigen haben wir vor allem den folgenden Satz zu beweisen.

Satz XI. *In dem Spezialfalle, wo die gegebene fast periodische Funktion $f(x)$ rein periodisch ist, etwa mit der Periode $p = \frac{2\pi}{k}$, stimmt unsere »Fourierreihe» $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ mit der gewöhnlichen Fourierreihe*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inkx}$$

dieser Funktion überein (wenn in dieser letzteren Reihe eventuelle Glieder $\alpha_n\, e^{inkx}$ mit $\alpha_n = 0$ weggelassen werden[1]).

Beweis. Es handelt sich darum zu zeigen, dass

$$a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} \alpha_n & \text{für } \lambda = nk \\ 0 & \text{für } \lambda \neq nk \end{cases}$$

ist. Dass $a(\lambda) = \alpha_n$ ist für $\lambda = nk$, folgt sofort aus der Definition der Fourierkonstanten α_n:

$$\alpha_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(x)\, e^{-inkx}\, dx;$$

denn aus der Periodizität von $f(x)\, e^{-inkx}$ ergibt sich ja:

$$a(nk) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, e^{-inkx}\, dx = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{mp} \int_0^{mp} f(x)\, e^{-inkx}\, dx = \frac{1}{p} \int_0^p f(x)\, e^{-inkx}\, dx = \alpha_n.$$

Und dass andererseits $a(\lambda) = 0$ ist für jedes λ, welches kein ganzzahliges Multiplum von k ist, folgt z. B. daraus, dass die rein periodische (stetige) Funktion $f(x)$ bekanntlich mit beliebiger Genauigkeit durch ein trigonometrisches Polynom der Form $\sum_{-N}^{N} \beta_n\, e^{inkx}$ approximiert werden kann; d. h. bei einem vorgegebenen ε lässt sich ein Polynom so wählen, dass

$$f(x) = \sum_{-N}^{N} \beta_n\, e^{inkx} + R(x)$$

ist, wo $|R(x)| < \varepsilon$ ist für alle x. Denn hieraus folgt ja, dass bei festem $\lambda \neq nk$

$$a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} = \sum_{-N}^{N} \beta_n\, M\{e^{i(nk-\lambda)x}\} + M\{R(x)\, e^{-i\lambda x}\} = M\{R(x)\, e^{-i\lambda x}\}$$

ist, also dass $|a(\lambda)| \leqq \varepsilon$, d. h. $a(\lambda) = 0$ ist.

Zur weiteren Verdeutlichung des Begriffes der Fourierreihe einer fast periodischen Funktion schieben wir hier den folgenden Satz ein.

---

[1] Der Grund, weshalb wir in unseren »allgemeinen« Fourierreihen, im Gegensatz zu den »gewöhnlichen« Fourierreihen, Glieder mit Nullkoeffizienten nicht zulassen, ist ein prinzipieller. Weil nämlich hier die Menge der grundsätzlich möglichen Exponenten aus dem Kontinuum sämtlicher reellen Zahlen besteht und somit nicht abzählbar ist, können sie nicht alle als »Fourierexponenten« herangezogen werden, während zu einer bestimmten Auswahl natürlich kein Grund vorliegt.

Satz XII. *Es sei die Reihe* $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$, *wo die (reellen) Exponenten* λ_n *alle unter einander verschieden und die Koeffizienten* a_n *alle* $\neq 0$ *sind, im Intervalle* $-\infty < x < \infty$ *gleichmässig konvergent (oder sie bestehe aus nur endlich vielen Gliedern), und also ihre Summe* $f(x)$ *(nach den Corollaren der Sätze III und VI) eine fast periodische Funktion. Dann ist die Fourierreihe* $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ *dieser Funktion* $f(x)$ *mit der gegebenen Reihe* $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ *identisch.*

Beweis. Die Behauptung lautet, dass

$$a(\lambda) = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} a_n & \text{für } \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{für } \lambda \neq \lambda_n \end{cases}$$

ist. Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt aber sofort aus der Voraussetzung, dass die Reihe $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$, falls sie unendlich viele Glieder enthält, im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$ gleichmässig gegen $f(x)$ konvergiert. In der Tat folgt offenbar aus dieser Annahme, dass der Prozess $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T$ für die Reihe $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ gliedweise ausgeführt werden darf, dass also — da die Hinzufügung eines Faktors $e^{-i\lambda x}$ die gleichmässige Konvergenz nicht stört — bei jedem festen λ gilt:

$$a(\lambda) = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x} \sum a_n e^{i\lambda_n x} dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sum a_n e^{i(\lambda_n - \lambda)x} dx$$

$$= \sum a_n \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_n-\lambda)x} dx = \begin{cases} a_n & \text{für } \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{für } \lambda \neq \lambda_n. \end{cases}$$

Corollar. *Die Fourierexponenten* Λ_n *einer fast periodischen Funktion sind keinerlei Bedingungen unterworfen, in dem Sinne, dass wir jede beliebig gegebene (endliche oder abzählbare) Folge von reellen unter einander verschiedeaen Zahlen* λ_n *als Fourierexponenten einer passend gewählten fast periodischen Funktion erhalten können.* (Es kann also z. B. die Exponentenfolge $\{\Lambda_n\}$ sehr wohl Häufungspunkte im Endlichen besitzen, oder sogar im ganzen Intervalle $-\infty < \lambda < \infty$ überall dicht liegen.)

Falls nämlich zu den beliebig gegebenen Exponenten λ_n die Koeffizienten $a_n \neq 0$ so gewählt werden, dass $\Sigma |a_n|$ konvergiert, wird ja die Reihe $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ gewiss eine »Fourierreihe» sein, nämlich (nach dem Satze XII) die Fourierreihe ihrer Summe $f(x)=\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$.

Nach dieser Einschaltung nehmen wir den Faden der Entwicklung wieder auf, d. h. wir betrachten nunmehr wieder eine beliebige fast periodische Funktion $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$. Wir wenden die Ungleichung (3) an und finden, bei der Wahl $\lambda_n=\Lambda_n$, dass bei jedem N

$$\sum_{n=1}^{N}|A_n|^2 \leqq M\{|f(x)|^2\}$$

ist, also

Satz XIII. *Die aus den Quadraten der absoluten Beträge der Fourierkoeffizienten A_n einer fast periodischen Funktion $f(x)$ gebildete Reihe $\Sigma|A_n|^2$ ist konvergent*[1] *— falls sie überhaupt unendlich viele Glieder besitzt — und ihre Summe ist $\leqq M\{|f(x)|^2\}$.*

In dem speziellen Fall, wo die fast periodische Funktion $f(x)$ rein periodisch ist, etwa mit der Periode p, besagt ein Fundamentalsatz aus der Theorie der gewöhnlichen Fourierreihen (der PARSEVAL'sche Satz), dass $\Sigma|A_n|^2$ immer gleich dem Mittelwert $\frac{1}{p}\int_0^p |f(x)|^2\,dx$, also auch gleich unserem Mittelwert $M\{|f(x)|^2\}$ $=\lim\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx$ ist. Wir werden in Kapitel II den Beweis dafür erbringen, dass auch in dem allgemeinen Fall der fast periodischen Funktionen der analoge Satz besteht, d. h. wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz XIV. (Fundamentalsatz.) *Für jede fast periodische Funktion $f(x)$ mit der Fourierentwicklung $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ gilt die Gleichung*

$$\sum|A_n|^2=M\{|f(x)|^2\}.$$

Ganz wie bei den gewöhnlichen Fourierreihen rein periodischer Funktionen können wir auch hier bei den allgemeinen fast periodischen Funktionen dem Fundamentalsatz eine andersartige Formulierung geben, aus welcher seine zentrale Stellung in der Theorie deutlicher hervorgeht. In der Tat ersieht man aus der Formel

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N|A_n|^2,$$

---

[1] Hierin ist speziell enthalten, dass $A_n\to 0$ für $n\to\infty$.

welche aus der Formel (2) bei der Wahl $\lambda_n = \Lambda_n$ hervorgeht, dass der Inhalt des Fundamentalsatzes, d. h. die Relation $\Sigma |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}$, in dem speziellen Fall, wo die Fourierreihe nur endlich viele Glieder, etwa N_0 Glieder, enthält, mit der Gleichung

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_{1}^{N_0} A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} = 0,$$

und in dem allgemeinen Fall, wo die Fourierreihe unendlich viele Glieder enthält, mit der Limesgleichung

$$\lim_{N\to\infty} M\left\{\left|f(x) - \sum_{1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} = 0$$

gleichbedeutend ist, welch letztere besagt, dass die Abschnitte der Fourierreihe »im Mittel» gegen $f(x)$ konvergieren. Wir sprechen den Fundamentalsatz in dieser Formulierung so aus:

Satz XV. (Satz von der mittleren Konvergenz.) *Die zu einer fast periodischen Funktion $f(x)$ gehörige Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ konvergiert im Intervalle $-\infty < x < \infty$ im Mittel gegen die Funktion $f(x)$.*

Wir bemerken noch zur Orientierung, dass man — ganz unabhängig von dem tiefliegenden Fundamentalsatz, welcher die Frage erledigt, ob es möglich ist eine fast periodische Funktion mit beliebiger Genauigkeit durch die Abschnitte ihrer Fourierreihe im Mittel zu approximieren — aus der Formel (1) S. 47 sofort schliessen kann, *dass man, wenn man eine fast periodische Funktion $f(x)$ durch eine endliche trigonometrische Summe $\sum_{1}^{N} b_n e^{i\lambda_n x}$ im Mittel zu approximieren wünscht, die Glieder $b_n e^{i\lambda_n x}$ unter den Gliedern der Fourierreihe der Funktion wählen muss.* Denn einerseits zeigt ja die Formel (1), dass man die Exponenten λ_n unter den Fourierexponenten Λ_n wählen soll, weil man eine bessere Approximation, d. h. einen kleineren mittleren Fehler, erhält, wenn etwaige Glieder $b_n e^{i\lambda_n x}$, für welche λ_n keiner der Fourierexponenten ist, einfach aus der Summe weggelassen werden; und andererseits besagt sie, dass man, nachdem die Exponenten λ_n alle unter den Fourierexponenten Λ_n gewählt sind, die Koeffizenten b_n gleich den entsprechenden Fourierkoeffizienten A_n wählen soll, weil jede andere Wahl der Zahlen b_n offenbar ein schlechteres Approximationsresultat ergibt.

Ehe wir dazu übergehen den recht schwierigen Beweis des Fundamentalsatzes anzufangen, werden wir zunächst in den beiden folgenden Paragraphen über einige weitere Konsequenzen des Fundamentalsatzes berichten.

§ 4.

Der Eindeutigkeitssatz.

Bei der näheren Untersuchung des Zusammenhanges einer fast periodischen Funktion $f(x)$ mit ihrer Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ erhebt sich zunächst die fundamentale Frage, ob eine Funktion durch ihre Fourierreihe eindeutig bestimmt wird, d. h. *ob zu zwei verschiedenen fast periodischen Funktionen immer zwei verschiedene Fourierreihen gehören.* Da die Fourierreihe der Differenz $f(x)-g(x)$ zweier fast periodischer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, wegen der Gleichung

$$M\{(f(x)-g(x))\,e^{-i\lambda x}\}=M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}-M\{g(x)\,e^{-i\lambda x}\},$$

offenbar durch formale Subtraktion der beiden zu $f(x)$ und $g(x)$ gehörigen Fourierreihen entsteht, kann diese Frage auch so gestellt werden, *ob es eine nicht identisch verschwindende fast periodische Funktion gibt, deren Fourierreihe gar keine Glieder enthält.*

Im Gegensatz zu dem Spezialfall der rein periodischen (stetigen) Funktionen, wo diese Frage sehr leicht direkt zu lösen ist, scheint die Antwort für die allgemeine Klasse der fast periodischen Funktionen ziemlich tief zu liegen. Wenn wir aber den — erst im Kapitel II zu beweisenden — Fundamentalsatz heranziehen, können wir die Frage sofort erledigen, und zwar durch den folgenden

Satz XVI. (Eindeutigkeitssatz.) *Eine fast periodische Funktion* $f(x)$, *welche der Bedingung* $a(\lambda)=0$ *für alle* λ *genügt, muss für alle* x *gleich* 0 *sein.*

Beweis. In der Tat folgt aus dem Fundamentalsatz, dass $f(x)$ die Bedingung $M\{|f(x)|^2\}=0$ erfüllen muss, so dass es sich also nur darum handelt zu beweisen, dass eine fast periodische Funktion $f(x)$, für die $M\{|f(x)|^2\}=0$ ist, identisch (d. h. für alle x) verschwinden muss.

Wir führen den Beweis dadurch, dass wir zeigen, dass, falls $f(x)$ nicht identisch 0 ist, die Zahl $M\{|f(x)|^2\}$ gewiss grösser als 0 ist. Es existiere also ein Punkt x_0 mit $f(x_0)\neq 0$, und es sei die Zahl $f(x_0)$ mit c bezeichnet. Da $f(x)$ stetig ist, können wir ein Intervall (x_0-h, x_0+h) so wählen, dass $|f(x)|$ überall in diesem

Intervall $> \frac{1}{2}|c|$ ist. Wegen der Fastperiodizität von $f(x)$ können wir ferner eine Länge l_0 so bestimmen, dass jedes Intervall der Länge l_0 eine zu $\varepsilon = \frac{1}{4}|c|$

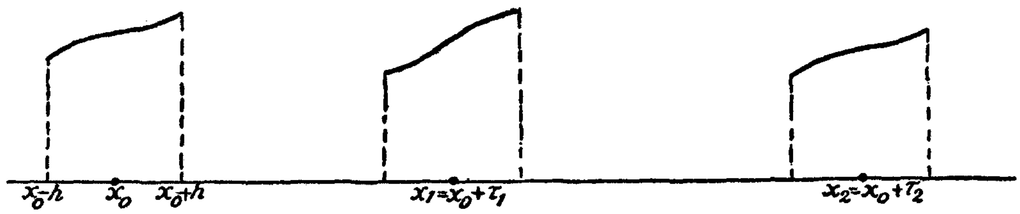


Fig. 5.

gehörige Verschiebungszahl $\tau=\tau(\varepsilon)$ der Funktion $f(x)$ enthält, so dass wir eine Folge von (zu ε gehörigen) Verschiebungszahlen $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n<\cdots$ successive so wählen können, dass, für alle $n\geqq 1$,

$$\tau_{n-1}+2h<\tau_n<\tau_{n-1}+2h+l_0$$

ist, d. h. (siehe Fig. 5) dass die Differenz x_n-x_{n-1} zweier aufeinander folgender Zahlen der Folge

$$x_0, \quad x_1=x_0+\tau_1, \quad x_2=x_0+\tau_2, \ldots, \quad x_n=x_0+\tau_n, \ldots$$

zwischen $2h$ und $2h+l_0$ liegt. Nun gilt aber bei jedem n im ganzen Intervalle (x_n-h, x_n+h) die Ungleichung

$$|f(x)| \geqq |f(x-\tau_n)| - |f(x)-f(x-\tau_n)| > \frac{|c|}{2} - \frac{|c|}{4} = \frac{|c|}{4};$$

da ferner die betrachteten Intervalle (x_n-h, x_n+h) der Länge $2h$ nicht über einander greifen, weil ja $x_n-x_{n-1}>2h$ ist, und der Abstand x_n-x_{n-1} zwischen den Mittelpunkten zweier auf einander folgender Intervalle kleiner als $2h+l_0$ ist, ergibt sich hieraus sofort, dass

$$M\{|f(x)|^2\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx \geqq \frac{2h}{2h+l_0}\cdot\frac{|c|^2}{16}$$

ist, also dass $M\{|f(x)|^2\}$ gewiss grösser als 0 ist.

Als eine unmittelbare Folge des Eindeutigkeitssatzes nennen wir das

Corollar. *Falls die zu einer gegebenen fast periodischen Funktion $f(x)$ gehörige Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ für alle x gleichmässig konvergiert (oder nur endlich viele Glieder enthält), ist $f(x)$ gleich der Summe $S(x)$ dieser Reihe.*

Denn nach dem Satze XII hat ja die Summe $S(x)$ dieselbe Fourierreihe, $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$, wie die gegebene Funktion $f(x)$, und es muss daher nach dem Eindeutigkeitssatz $S(x)$ mit $f(x)$ identisch sein.

Es seien die beiden folgenden Bemerkungen zur Ergänzung hinzugefügt.

1°. Aus dem Eindeutigkeitssatze folgt sofort — da man bei Bestimmung des Mittelwertes $a(\lambda) = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\}$ ein nur nach der einen Seite ins Unendliche reichendes Intervall, etwa $c < x < \infty$, zu betrachten braucht, und da die fast periodische Funktion $f(x)$ nach dem Eindeutigkeitssatz durch die Funktion $a(\lambda)$ eindeutig bestimmt ist — *dass zwei fast periodische Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die nur in einem nach der einen Seite ins Unendliche reichenden Intervall, etwa $c < x < \infty$, zusammenfallen, überhaupt identisch sind.* Die Richtigkeit dieser Bemerkung geht übrigens auch aus der Definition der Fastperiodizität in Verbindung mit dem Satze, dass die Differenz zweier fast periodischer Funktionen wieder eine solche ergibt, hervor; denn eine fast periodische Funktion $f(x)$ (in unserem Falle die Funktion $f_1(x) - f_2(x)$), welche im ganzen Intervalle $c < x < \infty$ gleich 0 ist, muss offenbar überall 0 sein, da ja zu jedem festen Punkte x_0 des Intervalles $-\infty < x \leqq c$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ bestimmt werden kann, für die $x_0 + \tau$ im Intervalle $c < x < \infty$ liegt, weshalb schliesslich $|f(x_0)| \leqq |f(x_0) - f(x_0 + \tau)| + |f(x_0 + \tau)| \leqq \varepsilon$ d. h. $f(x_0) = 0$ ist.

2°. Wenn $f(x)$ $(0 < x < \infty)$ eine beliebige (d. h. nicht notwendig fast periodische) stetige Funktion ist, *von der nur bekannt ist, dass bei jedem reellen λ der Mittelwert $M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} = \lim \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$ gleich 0 ist,* kann man natürlich nicht schliessen, dass $f(x)$ identisch 0 ist. In der Tat hat z. B. jede stetige Funktion $f(x)$, die für $x \to \infty$ gegen 0 strebt, die erwähnte Eigenschaft. Von grösserem Interesse mag vielleicht die Bemerkung sein, *dass man aus dieser Voraussetzung auch nicht schliessen darf, dass der Mittelwert $M\{|f(x)|^2\} = \lim \frac{1}{T}\int\limits_0^T |f(x)|^2\, dx$ gleich 0 ist.* So hat z. B., wie durch eine einfache Abschätzung einzusehen ist, jede der beiden Funktionen $f(x) = e^{i\sqrt{x}}$ und $f(x) = e^{ix^2}$

(von denen die erste »sehr langsame», die zweite »sehr schnelle» Schwingungen ausführt) die Eigenschaft, dass $M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ bei jedem reellen λ gleich 0 ist; und trotzdem ist $M\{|f(x)|^2\}=1$, da ja $|f(x)|$ überall gleich 1 ist.

§ 5.

Das Rechnen mit Fourierreihen.

Wir stellen zunächst einige Sätze zusammen, deren Beweise aus der Definition der Zahlen $a(\lambda)$, d. h. aus der Gleichung $a(\lambda)=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$, unmittelbar folgen.

Satz XVII. *Die Fourierreihe der Summe $f(x)+g(x)$ von zwei fast periodischen Funktionen entsteht durch formale Addition der beiden zu $f(x)$ und $g(x)$ gehörigen Fourierreihen.*

Satz XVIII. *Aus $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ folgt*

$$c\,f(x)\sim\sum c\,A_n e^{i\Lambda_n x},$$

wo c eine beliebige Konstante $\neq 0$ bedeutet.

Aus den Sätzen XVII und XVIII folgt z. B., was wir schon in § 4 erwähnt haben, dass die Fourierreihe der Differenz $f(x)-g(x)$ durch formale Subtraktion der Fourierreihen von $f(x)$ und $g(x)$ ensteht.

Satz XIX. *Aus $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ folgt*

$$e^{i\nu x}f(x)\sim\sum A_n e^{i(\Lambda_n+\nu)x},$$

wo ν eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

Satz XX. *Aus $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ folgt*

$$\overline{f}(x)\sim\sum\overline{A}_n e^{i(-\Lambda_n)x}.$$

Von diesen Sätzen behandeln zwei (XVIII und XIX) die Multiplikation einer beliebigen fast periodischen Funktion mit einer ganz speziellen solchen Funktion. Im Gegensatze zu diesen beiden Sätzen, die ja ganz auf der Oberfläche liegen, ist der folgende allgemeine Multiplikationssatz ein tiefliegender

Satz. In der Tat werden wir zeigen — durch eine bei den rein periodischen Funktionen bekannte Schlussweise — dass der Multiplikationssatz mit dem Fundamentalsatz inhaltlich ganz aequivalent ist.

Satz XXI. *Die zu dem Produkte $f(x)\,g(x)$ zweier fast periodischer Funktionen gehörige Fourierreihe $\Sigma\, C_n e^{i\,\mathrm{N}_n x}$ entsteht durch formale Multiplikation der zu den beiden Faktoren $f(x)$ und $g(x)$ gehörigen Fourierreihen $\Sigma\, A_n e^{i\,\Lambda_n x}$ und $\Sigma\, B_n e^{i\,\mathrm{M}_n x}$, d. h. der Exponent N_n durchläuft die Zahlen der Form $\Lambda_p+\mathrm{M}_q$, und der entsprechende Koeffizient C_n ist durch die Summe*

$$C_n=\sum_{\Lambda_p+\mathrm{M}_q=\mathrm{N}_n} A_p\, B_q$$

gegeben, wo die letzte Reihe, falls sie unendlich viele Glieder enthält, absolut konvergiert (und wo natürlich eventuelle Glieder $C_n e^{i\,\mathrm{N}_n x}$ mit $C_n=0$ weggelassen werden sollen).

Beweis. Der Satz besagt offenbar, dass bei jedem reellen ν die Gleichung

$$M\{f(x)\,g(x)\,e^{-i\nu x}\}=\sum_{\Lambda_p+\mathrm{M}_q=\nu} A_p\, B_q \tag{4}$$

besteht (wo die rechte Seite die Zahl 0 bedeutet, falls die Summe leer ist), und dass die Reihe rechts absolut konvergiert, falls sie unendlich viele Glieder enthält. Wir bemerken zunächst, dass es genügt die Gleichung (4) (und die absolute Konvergenz der rechten Seite) für den speziellen Wert $\nu=0$ zu beweisen, wo es sich um das konstante Glied der Fourierreihe $\Sigma\, C_n e^{i\,\mathrm{N}_n x}$ handelt; denn die allgemeine Gleichung (4) geht — unter Verwendung des Satzes XIX — offenbar aus der spezielleren Gleichung

$$M\{f(x)\,g(x)\}=\sum_{\Lambda_p+\mathrm{M}_q=0} A_p\, B_q \tag{5}$$

hervor, falls in (5) die Funktion $f(x)$ durch $f(x)\,e^{-i\nu x}$ ersetzt wird.

Mit Hilfe der Zerspaltungen

$$f(x)=\frac{f(x)+\bar{f}(x)}{2}+i\,\frac{f(x)-\bar{f}(x)}{2i},\qquad g(x)=\frac{g(x)+\bar{g}(x)}{2}+i\,\frac{g(x)-\bar{g}(x)}{2i}$$

ersieht man ferner durch eine einfache Betrachtung (unter Benutzung der obigen Sätze XVII, XVIII, XX), dass es genügt die Gleichung (5) für den Fall zu beweisen, wo $f(x)$ und $g(x)$ beide reelle Funktionen sind, und aus der schon früher benutzten Identität

$$f(x)\,g(x)=\frac{1}{4}\{(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\}$$

folgt weiter, ebenfalls durch eine triviale Betrachtung, dass man in (5), statt des Produktes zweier beliebiger fast periodischer Funktionen, nur das Quadrat einer solchen Funktion zu betrachten braucht. Wir dürften uns somit beim Beweise der Gleichung (5) auf den Fall beschränken, wo $f(x)$ und $g(x)$ beide reell wären, und $f(x)=g(x)$ wäre. Es ist aber bequemer den etwas allgemeineren Fall zu betrachten, wo $f(x)$ eine beliebige (also nicht reell angenommene) fast periodische Funktion ist, und $g(x)=\overline{f}(x)$ ist. Die zu beweisende Gleichung (5) nimmt hier, wegen

$$\overline{f}(x) \sim \sum \overline{A}_n e^{i(-\Lambda_n)x},$$

die Gestalt

$$M\{f(x)\,\overline{f}(x)\}=\sum_{\Lambda_p+(-\Lambda_q)=0} A_p\,\overline{A}_q$$

d. h. die Gestalt

$$M\{|f(x)|^2\}=\sum |A_n|^2$$

an, wo die letzte Summe über alle Fourierkoeffizienten A_n zu erstrecken ist (und wo absolute Konvergenz der Reihe mit gewöhnlicher Konvergenz gleichbedeutend ist, da die Glieder sämtlich positiv sind). Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung der Aequivalenz des Multiplikationssatzes mit dem Fundamentalsatz nachgewiesen, und somit — unter Annahme der Richtigkeit des Fundamentalsatzes — der Beweis des Multiplikationssatzes vollendet.

Wir erwähnen schliesslich noch einige Sätze über das formale Rechnen mit Fourierreihen, deren Beweise unmittelbar — ohne Gebrauch des Fundamentalsatzes — zu führen sind.

Satz XXII. *Es sei $f(x)$ eine fast periodische Funktion und $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ ihre Fourierentwicklung. Dann ist, bei jedem reellen c, die Funktion $f(x+c)$ ebenfalls fastperiodisch und ihre Fourierentwicklung lautet*

$$f(x+c) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n c}\cdot e^{i\Lambda_n x}.$$

Beweis. Dass $f(x+c)$ fast periodisch ist, ist klar; sie hat ja sogar, bei jedem ε, dieselben Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ wie die gegebene Funktion $f(x)$. Und dass $f(x+c)$ die angegebene Fourierentwicklung besitzt, ergibt sich sofort durch die folgende Rechnung (in welcher λ eine beliebige reelle Zahl bedeutet)

$$M\{f(x+c)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x+c)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x)e^{-i\lambda(x-c)}\,dx$$

$$= e^{i\lambda c}M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}.$$

Satz XXIII. *Aus* $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ *folgt, bei jedem reellen* $c \neq 0$, *die Relation*

$$f(cx) \sim \sum A_n e^{i(\Lambda_n c)x}.$$

Beweis. Die Funktion $g(x)=f(cx)$ ist offenbar wieder fast periodisch, und bei jedem reellen λ gilt die Gleichung

$$M\{g(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{cT}\int_0^{cT} f(x)e^{-i\frac{\lambda}{c}x}\,dx = M\{f(x)e^{-i\frac{\lambda}{c}x}\}.$$

Satz XXIV. *Es sei* $f(x)$ *fast periodisch und* $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$. *Dann ist bei jedem positiven* c *das Integral*

$$F(x) = \int_x^{x+c} f(y)\,dy$$

wieder eine fast periodische Funktion, und ihre Fourierentwicklung lautet

$$F(x) \sim \sum A_n \frac{e^{i\Lambda_n c}-1}{i\Lambda_n}\cdot e^{i\Lambda_n x},$$

wo, falls ein konstantes Glied Ae^{i0x} *in der Fourierreihe* $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ *vorkommt, der entsprechende Faktor* $\frac{e^{i0c}-1}{i0}$ *durch die Zahl* c *zu ersetzen ist* (und eventuelle sonstige Glieder, für welche der Faktor $(e^{i\Lambda_n c}-1)$ verschwindet, natürlich weggelassen werden sollen).

Beweis. Dass $F(x)$ fast periodisch ist, ist klar; denn $F(x)$ ist stetig, und es ist offenbar jede zu $\frac{\varepsilon}{c}$ gehörige Verschiebungszahl der ursprünglichen Funktion $f(x)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(x)$, wie aus der Ungleichung

$$|F(x+\tau)-F(x)|=\left|\int_{x+\tau}^{x+\tau+c} f(y)\,dy-\int_{x}^{x+c} f(y)\,dy\right|=\left|\int_{x}^{x+c}\{f(y+\tau)-f(y)\}\,dy\right|\leqq c\cdot\frac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$$

hervorgeht. Um nunmehr die Fourierreihe von $F(x)$ herzuleiten, haben wir bei jedem reellen λ die Zahl

$$b(\lambda)=M\{F(x)e^{-i\lambda x}\}$$

zu berechnen. Wir finden (siehe Fig. 6)

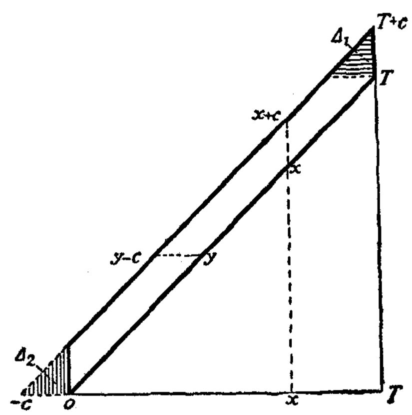


Fig. 6.

$$b(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(x)e^{-i\lambda x}\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x}\,dx\int_x^{x+c} f(y)\,dy$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{\int_0^T f(y)\,dy\int_{y-c}^{y} e^{-i\lambda x}\,dx+R_1-R_2\right\},$$

wo R_1 und R_2 die Doppelintegrale der Funktion $f(y)e^{-i\lambda x}$ über das Dreieck Δ_1 bzw. Δ_2 bezeichnen. Jedes dieser Doppelintegrale R_1 und R_2 ist aber numerisch kleiner als eine feste (d. h. von T unabhängige) Konstante, nämlich $\leqq\frac{1}{2}c^2 G$, wo G die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet; es dürfen daher die Restglieder R_1 und R_2 beim Grenzübergang $T \to \infty$ einfach vernachlässigt werden, d. h. es ist

$$b(\lambda) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(y)\,dy \int_{y-c}^{y} e^{-i\lambda x}\,dx.$$

Hieraus folgt für $\lambda \neq 0$

$$b(\lambda) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(y) \frac{e^{-i\lambda y}(1 - e^{i\lambda c})}{-i\lambda}\,dy = \frac{1 - e^{i\lambda c}}{-i\lambda} M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \frac{1 - e^{i\lambda c}}{-i\lambda} a(\lambda)$$

und für $\lambda = 0$

$$b(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c f(y)\,dy = cM\{f(x)\} = c a(0),$$

womit der Satz bewiesen ist. Es sei noch bemerkt, dass das »gewöhnliche» Integral $\int_c^x f(y)\,dy$ einer fast periodischen Funktion im Allgemeinen nicht wieder eine fast periodische Funktion ergibt; auf diese Frage werden wir in Zusatz 3 zurückkommen.

Wir betrachten zuletzt eine fast periodische Funktion $f(x)$, die als Grenzfunktion einer gleichmässig konvergenten Folge von fast periodischen Funktionen $f_m(x)$ entstanden ist (vgl. Satz VI), und fragen, wie ihre Fourierentwickelung aus denen der Funktionen $f_m(x)$ abgeleitet werden kann. Es lautet die Antwort:

Satz XXV. *Es sei eine Folge von fast periodischen Funktionen*

$$f_m(x) \sim \sum A_n^{(m)} e^{i\Lambda_n^{(m)} x} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

gegeben, die gleichmässig für alle x einer Grenzfunktion $f(x)$ zustrebt. Dann lässt sich die Fourierentwicklung $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ dieser Funktion $f(x)$ durch den formalen Grenzübergang

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n x} = \lim_{m \to \infty} \sum A_n^{(m)} e^{i\Lambda_n^{(m)} x}$$

ableiten, in dem Sinne, dass bei jedem festen λ die Limesgleichung

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{m\to\infty} M\{f_m(x)e^{-i\lambda x}\}$$

gilt (übrigens gleichmässig für alle λ).

Beweis. Es ist

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x}\lim_{m\to\infty} f_m(x)\,dx.$$

Hier dürfen aber, wegen der im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$ bestehenden gleichmässigen Konvergenz von $f_m(x)e^{-i\lambda x}$, die beiden Grenzübergänge vertauscht werden, d. h. es ist (sogar gleichmässig in λ)

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{m\to\infty}\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x} f_m(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} M\{f_m(x)e^{-i\lambda x}\}.$$

KAPITEL II.

Beweis des Fundamentalsatzes.

§ 6.

Angabe der Beweismethode und Einführung der rein periodischen Hilfsfunktionen $f_T(x)$.

Wir gehen jetzt zu dem schwierigeren Teil der Untersuchungen über, nämlich zu dem Beweis des Fundamentalsatzes:

$$\sum |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}.$$

Es seien zunächst zur Orientierung einige Worte vorausgeschickt über die Wege, welche, bei einem Versuch den Beweis dieses Satzes zu erbringen, einzuschlagen am naheliegendsten wäre. Es werde die Differenz

$$M\{|f(x)|^2\} - \sum |A_n|^2$$

mit D bezeichnet; wir wissen (Satz XIII), dass $D \geqq 0$; es handelt sich darum zu beweisen, dass $D = 0$ ist. Aus der Formel

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_1^N |A_n|^2$$

geht hervor, dass die Zahl D auch als die untere Grenze des Mittelwertes $M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\}$ charakterisiert werden kann, wenn $\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}$ alle Summen durchläuft, welche aus einer endlichen Anzahl von Gliedern der Fourierreihe bestehen. Von dieser Charakterisierung der Zahl D aus zu einem Beweis der Gleichung $D=0$ zu gelangen — d. h. direkt nachzuweisen, dass die Abschnitte der Fourierreihe im Mittel gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren — scheint aber ziemlich hoffnungslos zu sein; es ist ja bekanntlich selbst in dem Spezialfall der rein periodischen Funktionen nicht gelungen den Beweis des Fundamentalsatzes in dieser Weise zu führen. Ein etwas anderer Versuch könnte darauf basiert werden, dass, nach den Ergebnissen des § 3, die obige Differenz D auch als die untere Grenze des mittleren Fehlers $M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}$ charakterisiert werden kann, wenn $\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$ sämtliche trigonometrischen Summen überhaupt durchläuft, und nicht nur solche, die aus Gliedern der Fourierreihe besteht. Obwohl wir wissen, dass Summen dieser letzten spezielleren Art die »besten» Approximationen liefern, wäre es ja sehr wohl möglich, dass es bei gewissen anderen trigonometrischen Summen viel einfacher wäre zu beweisen, dass sie die Funktion $f(x)$ gut approximieren, weil sie z. B. nicht nur im Mittel, sondern in jedem Punkt gegen $f(x)$ konvergierten. Auf diesem Wege wird bekanntlich der Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der rein periodischen Funktionen geführt, indem man dort ziemlich leicht Folgen von trigonometrischen Polynomen $P_N(x)$ auffinden kann, die sogar gleichmässig gegen $f(x)$ konvergieren, woraus sofort folgt, dass der mittlere Fehler $M\{|f(x)-P_N(x)|^2\}$ gegen 0 strebt, und dass somit die Zahl D gleich 0 ist; als solche Polynome $P_N(x)$ kann man z. B., nach dem Fejér'schen Satze über die gleichmässige Césàro-Summabilität einer gewöhnlichen Fourierreihe, einfach die arithmetischen Mitteln der Abschnitte der Fourierreihe benutzen; oder man kann zunächst die Funktion $f(x)$ durch eine »einfache» Kurve (z. B. einen Polygonzug) annähern, und dann wieder diese einfache Kurve durch ein trigonometrisches Polynom approximieren. Wenn man in dem allgemeinen Fall der fast periodischen Funktionen versuchen wollte diesen Weg einzuschlagen, stösst man aber auf grosse Schwierigkeiten, die zu überwinden mir nicht gelungen ist. Einerseits haben wir nicht, wie bei den rein periodischen Funktionen, einen Summabilitätssatz wie den Fejér'schen zur Verfügung; und eine allgemeine Summationsmethode auszubilden — ohne den Fundamentalsatz zur Verfügung zu haben — scheint mir hier eine schwer anzugreifende Aufgabe. Andererseits treten auch grosse Hindernisse auf, wenn man versucht die beliebig gegebene fast periodische Funktion $f(x)$ durch eine »einfache» fast periodische Funktion $g(x)$ (d. h. eine solche, für welche man direkt trigonometrische Annäherungssummen auffinden könnte) derart zu approximieren, dass der mittlere Fehler $M\{|f(x)-g(x)|^2\}$ klein wird. Hierbei muss man nämlich vor allem bedenken, dass es, wegen der Relation $M\{|f(x)-g(x)|^2\} \geqq \Sigma |C_n|^2$ wo $\Sigma C_n e^{i\mathrm{N}_n x}$ die Fourierreihe der Differenz $f(x)-g(x)$ bedeutet, von vorneherein klar ist, dass die »einfache» Funktion $g(x)$ gewiss so gewählt werden muss, dass ihre Fourierreihe $\Sigma B_n e^{i\mathrm{M}_n x}$ (vielleicht abgesehen von belanglosen Gliedern) genau dieselben Exponenten wie die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ der gegebenen Funktion $f(x)$ besitzen muss, damit überhaupt die Möglichkeit eines kleinen mittleren Fehlers $M\{|f(x)-g(x)|^2\}$ besteht; und schon diese Bedingung macht das Aufsuchen solcher Funktionen $g(x)$ zu einem unangenehmen Unternehmen.[1]

Ich habe daher einen ganz anderen Weg einschlagen müssen, dessen Ausgangspunkt die folgende Überlegung ist. Für jede fast periodische Funktion $f(x)$ konvergiert die Quadratsumme $\Sigma |A_n|^2$ der absoluten Beträge ihrer Fourierkoeffizienten, so dass die Summe $S = \Sigma |A_n|^2$ eine für die Menge E aller fast periodischen Funktionen $f(x)$ definierte »Funktionenfunktion» (oder Funktional) ist, die wir mit $\Phi(f(x))$ bezeichnen. Es handelt sich darum zu beweisen, dass für die ganze Funktionenmenge E die Gleichung $\Phi(f(x)) = M\{|f(x)|^2\}$ besteht. Nun gibt es aber in der Funktionenmenge E eine spezielle Klasse

[1] Wie in der Einleitung erwähnt, werden wir uns in der Abhandlung II mit der Aufgabe beschäftigen, eine beliebige fast periodische Funktion $f(x)$ mit vorgegebener Genauigkeit (und zwar nicht nur im Mittel, sondern sogar gleichmässig für alle x) durch eine endliche trigonometrische Summe zu approximieren. Wir bemerken aber sogleich, dass uns die Lösung dieser Aufgabe nur dadurch gelingt, dass wir den Fundamentalsatz benutzen, und es somit unerlaubt wäre die Resultate der Abhandlung II zum Beweise des Fundamentalsatzes heranzuziehen.

von Funktionen $f(x)$, nämlich die Klasse E^* der rein periodischen (stetigen) Funktionen, für welche wir schon wissen, dass der Fundamentalsatz gilt, d. h. dass $\Phi(f(x))=M\{|f(x)|^2\}$ ist. Und es ist daher naheliegend zu fragen, ob nicht die genannte spezielle Funktionenklasse E^* vielleicht in einem gewissen (unserer Aufgabe entsprechenden) Sinne überall dicht in der Gesamtmenge E aller fast periodischen Funktionen liegt, d. h. ob man nicht die Richtigkeit der Gleichung $\Phi(f(x))=M\{|f(x)|^2\}$ für eine beliebige Funktion $f(x)$ der Menge E durch Stetigkeitsbetrachtungen aus ihrer bekannten Gültigkeit für die Funktionen der spezielleren Klasse E^* ableiten könnte. Es zeigt sich, dass es in der Tat so ist, dass man also den Fundamentalsatz für den allgemeinen Fall einer fast periodischen Funktion $f(x)$ dadurch beweisen kann, dass man sie durch rein periodische Funktionen annähert. Um Missverständnisse zu verhüten, sei aber sogleich hinzugefügt, dass der Begriff der »Annäherung» hierbei in einem ganz anderen (und viel weiteren) Sinne aufzufassen ist, als der, von welchem oben die Rede war; weil nämlich die Fourierexponenten einer rein periodischen Funktion $p(x)$ immer eine Differenzenreihe bilden, können wir prinzipiell nicht erreichen, dass sie mit den Fourierexponenten Λ_n der gegebenen fast periodischen Funktion $f(x)$ übereinstimmen, und es ist daher (nach einer obigen Bemerkung) von vorneherein ausgeschlossen, dass der Mittelwert $M\{|f(x)-p(x)|^2\}$ klein ausfällt.

Die rein periodischen Funktionen, mit welchen wir die gegebene fast periodische Funktion $f(x)$ annähern werden, hängen von einem Parameter $T>0$ ab, der die Periodenlänge angibt (und welcher nachher ins Unendliche wächst). Die zum Parameterwert T gehörige Funktion, $f_T(x)$, wird einfach so definiert, *dass* $f_T(x)$ *in dem Periodenintervall* $0<x<T$ *gleich der gegebenen Funktion* $f(x)$ *ist*, also:

$$f_T(x)=f(x) \quad \text{für } 0<x<T; \qquad f_T(x+T)=f_T(x).$$

Diese Funktionen $f_T(x)$ sind (abgesehen von gewissen speziellen Werten von T) nicht überall stetige, sondern nur streckenweise stetige Funktionen von x, weil sie ja in den »Periodenpunkten» $nT\,(n=0, \pm 1, \ldots)$ Sprünge aufweisen; dies schadet aber gar nicht, da der Fundamentalsatz ja auch für solche Funktionen (sowie überhaupt für alle im Lebesgue'schen Sinne quadratisch integrierbaren rein periodischen Funktionen) gültig ist.[1] Wir entwickeln, bei einem

[1] Man könnte übrigens die Benutzung von unstetigen rein periodischen Funktionen $f_T(x)$ leicht umgehen, was aber kein weiteres Interesse darbietet.

beliebigen $T > 0$, die rein periodische Funktion $f_T(x)$ in ihre (gewöhnliche) Fourierreihe:

$$f_T(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\mu_n x},$$

wo nicht nur die Exponenten

$$\mu_n = \frac{2\pi}{T} n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

sondern auch die Koeffizienten

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(x) e^{-i\mu_n x} dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\mu_n x} dx$$

von dem Parameter T abhängen. Hierbei gilt, weil $f_T(x)$ rein periodisch ist, die Relation

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f_T(x)|^2 dx = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx,$$

und wir sehen somit unmittelbar, weil ja die rechte Seite der letzten Gleichung für $T \to \infty$ gegen $M\{|f(x)|^2\}$ konvergiert, *dass die Summe* $\Sigma|\alpha_n|^2$ *für* $T \to \infty$ *einem bestimmten Grenzwert, nämlich dem Grenzwert* $M\{|f(x)|^2\}$ *zustrebt.* Es ist daher der Beweis des Fundamentalsatzes: $\Sigma|A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}$ damit gleichbedeutend zu zeigen, dass die Fourierreihe $\Sigma\alpha_n e^{i\mu_n x}$ der Funktion $f_T(x)$ für $T \to \infty$ in solcher Art in die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ von $f(x)$ »übergeht», *dass die Limesgleichung* $\lim\limits_{T\to\infty} \Sigma|\alpha_n|^2 = \Sigma|A_n|^2$ *besteht.* Nun wissen wir aber schon (Satz XIII), dass $\Sigma|A_n|^2 \leqq M\{|f(x)|^2\}$, also dass $\Sigma|A_n|^2 \leqq \lim\limits_{T\to\infty} \Sigma|\alpha_n|^2$ ist, und es genügt daher nachzuweisen, dass $\Sigma|A_n|^2 \geqq \lim\limits_{T\to\infty} \Sigma|\alpha_n|^2$ ist. Mit anderen Worten: *Unsere Aufgabe, den Fundamentalsatz zu beweisen, ist gelöst, wenn wir zeigen können, dass es zu jedem* $\delta_0 > 0$ *ein* $T_0 = T_0(\delta_0) > 0$ *derart gibt, dass für* $T > T_0$ *die Ungleichung*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \sum |A_n|^2 + \delta_0 \tag{6}$$

besteht.

§ 7.

Zurückführung des Fundamentalsatzes auf ein Lemma über $f_T(x)$ (Lemma I).

Es sei, wie überall in diesem Kapitel,

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$$

eine beliebig gegebene fast periodische Funktion, und

$$f_T(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\mu_n x} \qquad \left(\mu_n = \frac{2\pi}{T} n\right)$$

die »zugehörige» rein periodische Funktion der Periode T, welche durch die Gleichung

$$f_T(x) = f(x) \qquad \text{für } 0 < x < T$$

bestimmt ist. Wir haben (nach § 6) zu beweisen, dass für hinreichend grosse T die Ungleichung $\Sigma|\alpha_n|^2 < \Sigma|A_n|^2 + \delta_0$ besteht, und müssen also die Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$ nach oben abschätzen. Zu diesem Zwecke werden wir zunächst drei Hilfssätze beweisen:

Hilfssatz 1. *Zu jedem $\delta > 0$ lassen sich die Zahlen $\Omega > 0$ und $T_0 > 0$ so wählen, dass für $T > T_0$ die Ungleichung*

$$(7) \qquad \sum_{|\mu_n| \geq \Omega} |\alpha_n|^2 < \delta$$

besteht. Mit anderen Worten, bei jedem hinreichend grossen T geben diejenigen Glieder der Fourierentwicklung $f_T(x) \sim \Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$, welche den sehr grossen Werten von $|\mu_n|$ (d. h. den sehr schnellen Schwingungen) entsprechen, fast keinen Beitrag zur Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$.

Beweis. Wenn man den Beitrag der sehr schnellen Schwingungen abzuschätzen wünscht, liegt es nahe zunächst eine Differentiation vorzunehmen; denn durch eine (formale) Differentiation der Fourierreihe $\Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ treten ja die Faktoren $i\mu_n$ hinzu, so dass gerade diejenigen Glieder, welche den grossen Werten von $|\mu_n|$ entsprechen, bevorzugt werden. Nun ist es aber nicht erlaubt die Relation $f_T(x) \sim \Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ ohne weiteres formal zu differentieren; es braucht ja die Funktion $f_T(x)$ überhaupt nicht differentierbar zu sein. Wir müssen daher zunächst unsere Funktion $f_T(x)$ durch eine andere (ebenfalls mit der Periode T periodische) Funktion $\varphi(x)$ approximieren, die so beschaffen ist, dass ihre Fourierentwicklung $\varphi(x) \sim \Sigma \beta_n e^{i\mu_n x}$ formal differentiert werden darf; wir benutzen einen möglichst einfachen Typus einer solchen Funktion $\varphi(x)$, nämlich eine Funktion, welche überall stetig[1] ist (also nicht, wie $f_T(x)$, in den Punkten nT Sprünge aufweist) und im Periodeninterval $0 \leqq x \leqq T$ streckenweise linear ist.

Um den Kernpunkt des Beweises, nämlich die Benutzung der gleichmässigen Stetigkeit (vergl. Satz II) unserer fast periodischen Funktion $f(x)$, deutlich hervortreten zu lassen, werden wir zunächst die Funktion $f(x)$ selbst (und nicht die Funktion $f_T(x)$) durch eine überall stetige, streckenweise lineare Funktion $\psi(x)$ approximieren. Zu diesem Zwecke bestimmen wir, mit Hilfe der gleichmässigen Stetigkeit von $f(x)$, zu dem gegebenen δ eine positive Zahl $\gamma=\gamma(\delta)<1$ derart, dass für jedes Punktepaar x', x'' mit $|x'-x''| \leqq \gamma$ die Ungleichung

$$|f(x')-f(x'')| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{5}}$$

besteht, und definieren dann die Approximationsfunktion $\psi(x)$ dadurch, dass sie in den Punkten $x=n\gamma\,(n=0, \pm 1, \ldots)$ mit der Funktion $f(x)$ zusammenfällt, während

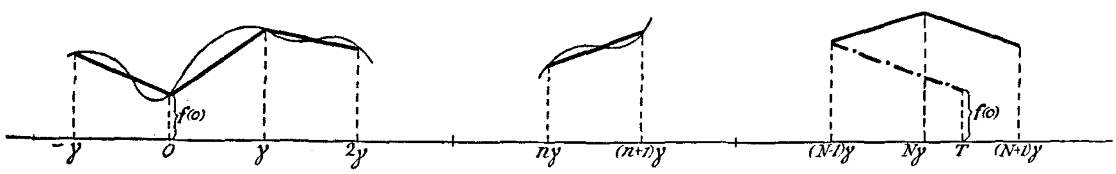


Fig. 7.

sie zwischen zwei Punkten $n\gamma$ und $(n+1)\gamma$ linear verläuft (siehe Fig. 7, wo $f(x)$ reell angenommen ist). Es ist klar, dass diese Funktion $\psi(x)$ für alle x numerisch $\leqq G$ ist, wo G (wie überall im Folgenden) die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet, und dass $\psi(x)$ unsere Funktion $f(x)$ bis auf $\sqrt{\frac{\delta}{5}}$ approximiert, d. h. dass in jedem Punkte x die Ungleichung

$$|f(x)-\psi(x)| < \sqrt{\frac{\delta}{5}}$$

besteht; denn, falls x im Intervalle $n\gamma < x < (n+1)\gamma$ liegt, ist ja

[1] Vergl. A. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, Math. Ann. Bd. 57, (1903), S. 425—446. (Siehe insbesondere S. 440.)

$$|f(x)-\psi(x)| \leqq |f(x)-f(n\gamma)| + |\psi(x)-f(n\gamma)| \leqq |f(x)-f(n\gamma)| + |f((n+1)\gamma)-f(n\gamma)|$$
$$< \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{5}} = \sqrt{\frac{\delta}{5}}.$$

Was ferner den (streckenweise konstanten) Differentialquotienten $\psi'(x)$ anbelangt, so erfüllt er offenbar für alle $x \neq n\gamma$ (d. h. abgesehen von den Ecken von $\psi(x)$) die Ungleichung

$$|\psi'(x)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{5}} : \gamma = \frac{\sqrt{\delta}}{2\gamma\sqrt{5}}.$$

Wir betrachten nunmehr, vorläufig bei einem beliebigen $T > 2$, die rein periodische Funktion $f_T(x)$ und definieren ihre approximierende (ebenfalls rein periodische) Funktion $\varphi(x)$ folgendermassen: Es sei $N(>2)$ die grösste ganze Zahl, für die $N\gamma < T$ ist (siehe Fig. 7); dann wird $\varphi(x)$ im Periodenintervall $0 \leqq x \leqq T$ dadurch bestimmt, dass sie im Intervalle $0 \leqq x \leqq (N-1)\gamma$ mit $\psi(x)$ zusammenfällt, im Punkte $x = T$ gleich $f(0)$ ist (damit die Gleichung $\varphi(T) = \varphi(0)$ bestehe) und zwischen $(N-1)\gamma$ und T linear verläuft. Diese Funktion $\varphi(x)$ genügt offenbar, wie die Funktion $\psi(x)$, der Ungleichung $|\varphi(x)| \leqq G$, und ihr Differentialquotient $\varphi'(x)$ ist im Intervalle $0 < x < (N-1)\gamma$ gleich $\psi'(x)$ und im »Restintervalle« $(N-1)\gamma < x < T$, wo $\varphi(x)$ linear verläuft, numerisch $\leqq \frac{2G}{T-(N-1)\gamma} \leqq \frac{2G}{\gamma}$, so dass $\varphi'(x)$ überall im Periodenintervall $(0, T)$, bis auf die Ecken, der Ungleichung

$$|\varphi'(x)| \leqq \operatorname{Max}\left\{\frac{\sqrt{\delta}}{2\gamma\sqrt{5}}, \frac{2G}{\gamma}\right\} = c \tag{8}$$

genügt, wo c nur von δ, d. h. nicht von T abhängt.

Wir vergleichen nun die beiden Fourierentwicklungen

$$f_T(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\mu_n x} \quad \text{und} \quad \varphi(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_n e^{i\mu_n x}$$

und finden

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n - \beta_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f_T(x)-\varphi(x)|^2\,dx = \frac{1}{T}\int_0^{(N-1)\gamma} |f(x)-\psi(x)|^2\,dx + \frac{1}{T}\int_{(N-1)\gamma}^T |f(x)-\varphi(x)|^2\,dx$$
$$< \frac{(N-1)\gamma}{T}\left(\sqrt{\frac{\delta}{5}}\right)^2 + \frac{T-(N-1)\gamma}{T}(2G)^2 < \frac{\delta}{5} + \frac{2\gamma}{T}4G^2;$$

und es gilt daher für jedes $T > T_0$, falls $T_0 (> 2)$ so gross gewählt wird, dass $\frac{8\gamma G^2}{T_0} < \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{5}$ ist, die Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^2 < \frac{\delta}{4}. \tag{9}$$

Wir benutzen nunmehr, dass die Fourierentwicklung des (streckenweise konstanten) Differentialquotienten $\varphi'(x)$ aus der Fourierentwicklung $\Sigma \beta_n e^{i\mu_n x}$ der Funktion $\varphi(x)$ selbst durch formale Differentiation hervorgeht, dass also

$$\varphi'(x) \sim \sum i\,\mu_n \beta_n e^{i\mu_n x}$$

ist, und dass somit, wegen (8),

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_n \beta_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\varphi'(x)|^2 dx \leqq c^2$$

ist. Hieraus folgt, falls $\Omega = \Omega(\delta)$ gleich $\sqrt{\frac{4c^2}{\delta}}$ gewählt wird, dass

$$\sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\beta_n|^2 \leqq \frac{1}{\Omega^2} \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\mu_n \beta_n|^2 \leqq \frac{1}{\Omega^2} \sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_n \beta_n|^2 \leqq \frac{\delta}{4c^2} \cdot c^2 = \frac{\delta}{4} \tag{10}$$

ist. Für dieses Ω und das obige T_0 ist dann offenbar die Ungleichung (7) für $T > T_0$ erfüllt; denn aus (9) und (10) ergibt sich sofort, nach der Ungleichung $|a + b|^2 \leqq 2(|a|^2 + |b|^2)$, dass

$$\sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\alpha_n|^2 \leqq 2 \left\{ \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\beta_n|^2 + \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\alpha_n - \beta_n|^2 \right\} \leqq 2 \left\{ \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\beta_n|^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^2 \right\}$$
$$< 2\left(\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4}\right) = \delta.$$

Hilfssatz 2. *Es sei λ_0 eine feste Zahl, die von den sämtlichen Fourierexponenten Λ_n der Funktion $f(x)$ verschieden ist, d. h. es sei $a(\lambda_0) = M\{f(x) e^{-i\lambda_0 x}\} = 0$.*

Dann lässt sich zu jedem $\delta > 0$ *ein* $\omega > 0$ *und ein* $T_0 > 0$ *derart finden, dass für* $T > T_0$ *die Ungleichung*

$$\sum_{|\mu_n - \lambda_0| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 < \delta \tag{11}$$

besteht.

Beweis. Wir teilen den Beweis in zwei Teile, indem wir zunächst den Spezialfall $\lambda_0 = 0$ betrachten, und dann den allgemeinen Fall auf diesen zurückführen.

I. Es sei $\lambda_0 = 0$ angenommen. Der Satz besagt hier, dass, falls die Fourierentwicklung $f(x) \backsim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ kein konstantes Glied enthält, für hinreichend grosse T diejenigen Glieder der Fourientwicklung $f_T(x) \backsim \Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$, welche den sehr kleinen Werten von $|\mu_n|$ (d. h. den sehr langsamen Schwingungen) entsprechen, fast keinen Beitrag zur Quadratsumme $\Sigma |\alpha_n|^2$ geben.

Während der Beweis des vorhergehenden Hilfssatzes (wo von den schnellen Schwingungen die Rede war) auf einer Differentiation beruhte, wird der jetzige Beweis auf einer Integration der Reihe $\Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ basieren; bei einer solchen wird ja das Gewicht, durch die hinzukommenden Faktoren $\frac{1}{i\mu_n}$, eben auf die langsamen Schwingungen gelegt. Diese Integration werden wir aber nicht in der Form $\int\limits_c^x$, sondern in der Form $\int\limits_x^{x+c}$ ansetzen, weil wir dabei die Voraussetzung: $a(\lambda_0) = a(0) = M\{f(x)\} = 0$ sofort ausnützen können; in der Tat folgt aus dem Satze VIII (verschärfter Mittelwertssatz), dass wir zu dem gegebenen δ eine feste, d. h. von x unabhängige, Zahl $c = c(\delta)$ so gross bestimmen können, dass die Funktion (der Mittelwert)

$$F(x) = \frac{1}{c} \int\limits_x^{x+c} f(y)\, dy$$

für alle x der Ungleichung

$$|F(x)| < \sqrt{\frac{\delta}{3}}$$

genügt. Es ist aber nicht die Funktion $f(x)$ selbst, sondern die Funktion $f_T(x)$, wo T vorläufig eine beliebige Zahl $>c$ bezeichne, auf welche wir die Integration anwenden sollen, weshalb wir die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{c}\int\limits_{x}^{x+c} f_T(y)\,dy \qquad (-\infty < x < \infty)$$

zu betrachten haben. Weil $f_T(x)$ periodisch mit der Periode T ist, wird $\Phi(x)$ offenbar wieder periodisch mit der Periode T sein (und $\Phi(x)$ wird sogar überall stetig, und nicht, wie $f_T(x)$, nur streckenweise stetig sein); wir bekommen nach einem bekannten Satz über die Integration einer gewöhnlichen Fourierreihe, die Fourierentwicklung von $\Phi(x)$ durch gliedweise Integration[1] der Fourierentwicklung $\Sigma a_n e^{i\mu_n x}$ des Integranden $f_T(x)$, d. h. es ist

$$\Phi(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{i\mu_n c}-1}{i\mu_n c} e^{i\mu_n x},$$

wo der Faktor $\dfrac{e^{i\mu_n c}-1}{i\mu_n c}$ für $n=0$ (d. h. $\mu_n=0$) die Zahl 1 bedeuten soll. Hieraus folgt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left| a_n \frac{e^{i\mu_n c}-1}{i\mu_n c}\right|^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T |\Phi(x)|^2\,dx. \tag{12}$$

Nun ist aber, wegen $f_T(x)=f(x)$ für $0<x<T$, die Funktion $\Phi(x)$ im Intervalle $0<x<T-c$ mit der Funktion $F(x)$ identisch, und daher $|\Phi(x)| < \sqrt{\frac{\delta}{3}}$ für $0<x<T-c$; weil ferner, wie sofort ersichtlich, die Funktion $|\Phi(x)|$ überall $\leqq G$ ist, ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T |\Phi(x)|^2 dx < \frac{1}{T}\left\{\int\limits_0^{T-c}\left(\sqrt{\frac{\delta}{3}}\right)^2 dx + \int\limits_{T-c}^{T} G^2\,dx\right\} < \frac{\delta}{3} + \frac{cG^2}{T};$$

somit ist nach (12) für jedes $T>T_0$, falls $T_0(>c)$ so gewählt wird, dass

[1] Vergl. Hurwitz, a. a. O. S. 438. Wäre $f_T(x)$ eine überall stetige — und nicht nur streckenweise stetige — Funktion, so könnten wir übrigens die Entwicklung von $\Phi(x)$ auch direkt aus dem Satze XXIV über die Integration von fast periodischen Funktionen entnehmen, weil ja dann $f_T(x)$ ein Spezialfall einer fast periodischen Funktion wäre.

$$\frac{c\,G^2}{T_0} < \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{3}$$

ist, die Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left|\frac{e^{i\mu_n c} - 1}{i\mu_n c}\right|^2 < \frac{\delta}{2}$$

erfüllt. Wir bestimmen nunmehr das $\omega = \omega(c) = \omega(\delta) > 0$ derart, dass für $|\mu| \leqq \omega$ die Ungleichung

$$\left|\frac{e^{i\mu c} - 1}{i\mu c}\right|^2 > \frac{1}{2}$$

besteht; dies ist möglich, denn für $\mu \to 0$ strebt die Zahl auf der linken Seite gegen den Grenzwert 1 (und für $\mu = 0$ bedeutet sie die Zahl 1 selbst). Für dieses ω und das obige T_0 ist dann die Ungleichung (11) für $T > T_0$ erfüllt; denn es ist

$$\sum_{|\mu_n| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 \leqq 2 \sum_{|\mu_n| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 \left|\frac{e^{i\mu_n c} - 1}{i\mu_n c}\right|^2 \leqq 2 \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left|\frac{e^{i\mu_n c} - 1}{i\mu_n c}\right|^2 < 2\,\frac{\delta}{2} = \delta.$$

II. Nachdem der Hilfssatz 2 für den Fall $\lambda_0 = 0$ bewiesen ist, betrachten wir nunmehr den Fall eines beliebigen $\lambda_0 \neq 0$. Wir setzen

$$f(x) = e^{i\lambda_0 x} g(x) \qquad \text{d. h.} \qquad g(x) = f(x)\, e^{-i\lambda_0 x}.$$

Dann erfüllt, nach Voraussetzung, die (fast periodische) Funktion $g(x)$ die Bedingung

$$M\{g(x)\} = M\{f(x)\, e^{-i\lambda_0 x}\} = 0,$$

und wir wissen daher (nach dem schon bewiesenen Fall $\lambda_0 = 0$), dass, falls die zu $g(x)$ »gehörige» rein periodische Funktion $g_T(x)$ in ihre Fourierreihe

$$g_T(x) \sim \sum \beta_n e^{i\mu_n x}$$

entwickelt wird, die Summe $\Sigma |\beta_n|^2$, erstreckt über die »sehr kleinen» μ_n, einen »sehr kleinen» Wert ergibt. Wir wollen die Entwicklung $f_T(x) \sim \Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ auf die von $g_T(x)$ zurückführen. Dazu muss zunächst die zu dem Faktor $e^{i\lambda_0 x}$ »gehörige», mit der Periode T periodische, Funktion $e_T^{i\lambda_0 x}$ in ihre Fourierreihe

$$e_T^{i\lambda_0 x} \sim \sum \gamma_n e^{i\mu_n x}$$

entwickelt werden; denn nach dem Multiplikationssatz der gewöhnlichen Fourierreihen (der auf streckenweise stetige Funktionen angewandt werden darf) erhalten wir, wegen der Identität $f_T(x) = g_T(x) e_T^{i\lambda_0 x}$, die gesuchte Entwicklung $\Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ von $f_T(x)$ durch formale Multiplikation der beiden Entwicklungen $\Sigma \beta_n e^{i\mu_n x}$ und $\Sigma \gamma_n e^{i\mu_n x}$ von $g_T(x)$ bzw. $e_T^{i\lambda_0 x}$. Was die Entwicklung $\Sigma \gamma_n e^{i\mu_n x}$ von $e_T^{i\lambda_0 x}$ betrifft, werden wir zeigen, dass nur endlich viele Glieder $\gamma_n e^{i\mu_n x}$, und zwar diejenigen für welche μ_n »sehr nahe» an λ_0 liegen, eine »merkbare» Rolle spielen. Dazu haben wir den Ausdruck

$$\gamma_n = \frac{1}{T}\int_0^T e_T^{i\lambda_0 x} e^{-i\mu_n x}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\lambda_0 x} e^{-i\mu_n x}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_0 - \mu_n)x}\, dx$$

abzuschätzen; wir finden, dass für $\mu_n \neq \lambda_0$

$$|\gamma_n| = \left|\frac{1}{T}\,\frac{e^{i(\lambda_0-\mu_n)T} - 1}{i(\lambda_0 - \mu_n)}\right| \leqq \frac{1}{T}\left|\frac{2}{\lambda_0 - \frac{2\pi}{T}n}\right| = \frac{\frac{1}{\pi}}{\left|\frac{T\lambda_0}{2\pi} - n\right|}$$

ist, woraus $\left(\text{wegen der Konvergenz der Reihe } \Sigma \frac{1}{n^2}\right)$ sofort erhellt, dass wir eine von T unabhängige ganze Zahl $N = N(\delta)$ so bestimmen können, dass, falls $n_0 = n_0(T)$ denjenigen Index bezeichnet, für welchen $\mu_{n_0} \leqq \lambda_0 < \mu_{n_0+1}$, d. h. $n_0 \leqq \frac{T\lambda_0}{2\pi} < n_0 + 1$ ist, die Ungleichung

$$\sum_{|n-n_0|>N} |\gamma_n|^2 < \frac{\delta}{4G^2}$$

besteht. Wir teilen daher die (übrigens konvergente) Fourierreihe $\Sigma \gamma_n e^{i\mu_n x}$ von $e_T^{i\lambda_0 x}$ in zwei Teile:

$$e_T^{i\lambda_0 x} = \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} \gamma_q e^{i\mu_q x} + \sum_{|n-n_0|>N} \gamma_n e^{i\mu_n x} = H(x) + R(x).$$

Hierbei ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T |R(x)|^2 dx = \sum_{|n-n_0|>N} |\gamma_n|^2 < \frac{\delta}{4G^2},$$

und, wegen

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |e^{i\lambda_0 x}|^2 dx = 1,$$

ist

$$\sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\gamma_q|^2 \leqq 1.$$

Wir bilden nun das Produkt

$$f_T(x) = g_T(x)\, e_T^{i\lambda_0 x} = g_T(x)\, H(x) + g_T(x)\, R(x)$$

$$\sim \sum \alpha'_n e^{i\mu_n x} + \sum \alpha''_n e^{i\mu_n x} \qquad (\alpha'_n + \alpha''_n = \alpha_n),$$

wo, wegen $|g(x)| = |f(x)| \leqq G$, die Fourierentwicklung des »Restes« $g_T(x) R(x)$ der Ungleichung

$$(13) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha''_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |g_T(x) R(x)|^2 dx \leqq G^2 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |R(x)|^2 dx < \frac{\delta}{4}$$

genügt. Die Koeffizienten α'_m der Entwicklung des »Hauptgliedes« $g_T(x) H(x)$ bestimmen wir direkt durch formale Multiplikation der Fourierreihe $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \beta_n e^{i\mu_n x}$ mit der endlichen Summe $\sum\limits_{n_0-N}^{n_0+N} \gamma_q e^{i\mu_q x}$; wir finden, unter Benutzung der Gleichung $\mu_n + \mu_q = \mu_{n+q}$, den Ausdruck

$$\alpha'_m = \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} \gamma_q \beta_{m-q},$$

und hieraus, mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung,

$$(14) \qquad |\alpha'_m|^2 \leqq \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\gamma_q|^2 \cdot \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\beta_{m-q}|^2 \leqq \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\beta_{m-q}|^2.$$

Wir wählen nun das $\omega = \omega(\delta)$ und $T_1 = T_1(\delta)$ derart, dass für $T > T_1$

$$\sum_{|\mu_n| \leqq 2\omega} |\beta_n|^2 < \frac{\delta}{4(2N+1)}$$

ist, und setzen $T_0 = \operatorname{Max}\left(T_1, \dfrac{2\pi(N+1)}{\omega}\right)$. Die letzte Forderung $T_0 \geqq \dfrac{2\pi(N+1)}{\omega}$ ist so gewählt, dass für $T > T_0$ jede der $2N+1$ Differenzen $|\mu_q - \lambda_0|$, die offenbar alle $\leqq (N+1)\frac{2\pi}{T}$ sind, kleiner als ω ausfällt; hieraus können wir nämlich schliessen, dass, falls μ_m im Intervalle $|\mu-\lambda_0|\leqq\omega$ liegt, die $2N+1$ Zahlen μ_{m-q} alle in das Intervall $|\mu|\leqq 2\omega$ fallen; in der Tat folgt ja aus $|\mu_q-\lambda_0|\leqq\omega$ und $|\mu_m-\lambda_0|\leqq\omega$, dass

$$|\mu_{m-q}| = |\mu_m-\mu_q| \leqq |\mu_m-\lambda_0| + |\mu_q-\lambda_0| \leqq 2\omega$$

ist. Aus der Ungleichung (14) folgt nunmehr durch Summation, dass

$$\sum_{|\mu_m-\lambda_0|\leqq\omega} |\alpha'_m|^2 \leqq \sum_{|\mu_m-\lambda_0|\leqq\omega}\ \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\beta_{m-q}|^2, \tag{15}$$

wo, nach der vorhergehenden Bemerkung, für jeden Index $m-q$ auf der rechten Seite die Ungleichung $|\mu_{m-q}|\leqq 2\omega$ gilt, falls $T>T_0$ gewählt ist. Da ferner ein Glied $|\beta_n|^2$ offenbar höchstens $(2N+1)$ Mal auf der rechten Seite auftritt, können wir aus (15) folgern, dass für $T>T_0$

$$\sum_{|\mu_m-\lambda_0|\leqq\omega} |\alpha'_m|^2 \leqq (2N+1)\sum_{|\mu_n|\leqq 2\omega} |\beta_n|^2 < (2N+1)\frac{\delta}{4(2N+1)} = \frac{\delta}{4} \tag{16}$$

ist. Hiermit sind wir am Ende des Beweises; denn aus (13) und (16) folgt, für jedes $T>T_0$,

$$\sum_{|\mu_n-\lambda_0|\leqq\omega} |\alpha_n|^2 = \sum_{|\mu_n-\lambda_0|\leqq\omega} |\alpha'_n+\alpha''_n|^2 \leqq 2\left\{\sum_{|\mu_n-\lambda_0|\leqq\omega}|\alpha'_n|^2 + \sum_{|\mu_n-\lambda_0|\leqq\omega}|\alpha''_n|^2\right\}$$

$$\leqq 2\left\{\sum_{|\mu_n-\lambda_0|\leqq\omega}|\alpha'_n|^2 + \sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha''_n|^2\right\} < 2\left\{\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}\right\} = \delta.$$

Hilfssatz 3. *Es sei Λ_m ein Fourierexponent der Funktion $f(x)$, also*

$$M\{f(x)e^{-i\Lambda_m x}\} = A_m \neq 0.$$

Dann gibt es zu jedem $\delta>0$ ein $\omega>0$ und ein $T_0>0$ derart, dass bei jedem $T>T_0$ die Ungleichung

$$\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega} |\alpha_n|^2 < |A_m|^2+\delta \tag{17}$$

besteht.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satz folgt leicht aus dem vorigen Hilfssatz. Wir setzen

$$f(x)=A_m e^{i\Lambda_m x}+g(x), \quad \text{also} \quad g(x)=f(x)-A_m e^{i\Lambda_m x},$$

und bilden, vorläufig bei einem beliebigen $T>0$, die Fourierentwicklungen der drei rein periodischen Funktionen mit der Periode T:

$$f_T(x)\sim\sum\alpha_n e^{i\mu_n x}, \quad g_T(x)\sim\sum\beta_n e^{i\mu_n x}, \quad (A_m e^{i\Lambda_m x})_T\sim\sum\gamma_n e^{i\mu_n x},$$

wo die erste Entwicklung durch formale Addition der beiden letzten entsteht, d. h. wo $\alpha_n=\beta_n+\gamma_n$ ist. Nun erfüllt aber die Funktion $g(x)$ für $\lambda_0=\Lambda_m$ die Bedingung des Hilfssatzes 2, d. h. es ist

$$M\{g(x)e^{-i\Lambda_m x}\}=M\{f(x)e^{-i\Lambda_m x}\}-A_m=0,$$

und es lässt sich daher zu dem gegebenen $\delta>0$ ein ω und ein T_0 so bestimmen, dass

$$\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega}|\beta_n|^2<\frac{\delta^2}{2\delta+4|A_m|^2}$$

ist. Ferner ist

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\gamma_n|^2=\frac{1}{T}\int_0^T|A_m e^{i\Lambda_m x}|^2dx=|A_m|^2.$$

Um bei der Abschätzung von $|\alpha_n|^2=|\beta_n+\gamma_n|^2$ den Faktor 2 zu vermeiden, der auftritt, wenn man die Ungleichung $|a+b|^2\leqq 2(|a|^2+|b|^2)$ verwendet, bedienen wir uns hier der etwas allgemeineren Ungleichung

$$|a+b|^2\leqq(1+c)|a|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|b|^2,$$

wo c eine beliebige Zahl >0 bedeutet. Wir setzen $c=\frac{2|A_m|^2}{\delta}$ und erhalten

$$\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega}|\alpha_n|^2=\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega}|\beta_n+\gamma_n|^2\leqq(1+c)\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega}|\beta_n|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega}|\gamma_n|^2$$

$$\leqq(1+c)\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega}|\beta_n|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)\sum_{-\infty}^{\infty}|\gamma_n|^2<$$

$$\left(1+\frac{2|A_m|^2}{\delta}\right)\frac{\delta^2}{2\delta+4|A_m|^2}+\left(1+\frac{\delta}{2|A_m|^2}\right)|A_m|^2=\frac{\delta}{2}+\left(|A_m|^2+\frac{\delta}{2}\right)=|A_m|^2+\delta.$$

Mit diesen drei Hilfssätzen sind wir offenbar ein Stück auf dem Wege nach unserem Ziel vorwärts gekommen: dem Beweis, dass für hinreichend grosse Werte von T die Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$ nicht »merkbar» grösser als $\Sigma|A_n|^2$ ist; wir haben ja durch diese Sätze erkannt, 1) dass die Glieder $\alpha_n e^{i\mu_n x}$ mit sehr grossen μ_n nichts wesentliches zur Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$ beitragen, 2) dass die Glieder $\alpha_n e^{i\mu_n x}$, für welche μ_n in der unmittelbaren Umgebung einer von den Fourierexponenten Λ_n verschiedenen Zahl λ_0 liegen, auch nichts wesentliches beitragen, und 3) dass die Glieder, für welche die zugehörigen μ_n in der unmittelbaren Umgebung eines Fourierexponenten Λ_m liegen, nicht mehr beitragen, als sie »dürfen», d. h. nicht wesentlich mehr als die Zahl $|A_m|^2$.

Der Inhalt dieser drei Hilfssätze reicht aber andererseits lange nicht aus um den Beweis unserer Behauptung, $\Sigma|\alpha_n|^2 < \Sigma|A_n|^2 + \delta$ (für $T > T_0$), streng zu führen. In der Tat wäre ja für alle grossen Werte von T, d. h. für enge aneinander liegende μ_n, z. B. das folgende Verhalten der Reihe $\Sigma\alpha e^{i\mu_n x}$ mit diesen drei Sätzen vereinbar: Für alle μ_n, die in einem gewissen Intervall, z. B. dem Intervalle $0 < \mu < 1$, liegen, in welches etwa gar keine Fourierexponenten Λ_m fallen, sei $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{N}}$, wo N die (mit T ins Unendliche wachsende) Anzahl der im betrachteten Intervalle gelegenen Exponenten μ_n bezeichnet. Dann gäben diejenigen μ_n, welche in einem Teilintervalle der Länge ω gelegen sind, einen Beitrag zur Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$, der asymptotisch (d. h. für $T\to\infty$) gleich $N\omega\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 = \omega$ wäre, so dass, in Übereinstimmung mit dem Hilfssatze 2, eine »unendliche kleine» Umgebung eines beliebigen Punktes λ_0 unseres Intervalles nur einen »unendlich kleinen» Beitrag zur Quadratsumme liefern würde; trotzdem gäbe aber das Gesamtintervall $0 < \mu < 1$, obwohl es gar keine Fourierexponenten Λ_m enthält, einen Beitrag, der nicht mit $T\to\infty$ unendlich klein würde, nämlich den konstanten Beitrag 1.

Was uns fehlt, ist offenbar ein Satz, welcher besagt, dass für grosse Werte von T der »wesentliche» Beitrag zur Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$ nur von Gliedern $\alpha_n e^{i\mu_n x}$ herrührt, deren Exponenten μ_n in der Umgebung gewisser einzelner Punkte liegen, und somit eine Möglichkeit wie die des obigen »Beispieles», wo ein wesentlicher Beitrag von einer ganzen Strecke kam, ausschliesst. Wir werden nun in der Tat (in den nächsten Paragraphen) einen solchen Satz beweisen nämlich das folgende

Lemma 1. (Lemma über $f_T(x)$.) *Zu jedem gegebenen $\delta^* > 0$ und $\Omega > 0$ gibt es in dem abgeschlossenen Intervalle $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ eine endliche Anzahl $M = M(\delta^*, \Omega)$*

von Punkten (Zahlen) $P_1, P_2, \ldots, P_M$, mit der folgenden Eigenschaft: Falls ω beliebig klein gewählt wird, gilt für alle hinreichend grossen T, d. h. für jedes $T > T_0 = T_0(\omega)$, die Ungleichung

$$\sum{}^{*} |a_n|^2 < \delta^*,$$

wo Σ^* bedeutet, dass nur über diejenigen n summiert werden soll, für welche die Exponenten μ_n innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$ gelegen sind.

Wir schliessen diesen Paragraph mit dem Nachweis, *dass der Beweis des Fundamentalsatzes, wenn wir das obige Lemma vorweg nehmen, unmittelbar zu Ende zu führen ist.* Es sei also $\delta_0 > 0$ beliebig gegeben; wir haben die Existenz eines T_0 derart zu beweisen, dass für $T > T_0$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \sum |A_n|^2 + \delta_0$$

ist. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst nach dem Hilfssatze 1 das $\Omega > 0$ derart, dass für $T > T_1$ die Ungleichung

$$\sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |a_n|^2 < \frac{\delta_0}{3}$$

besteht. Danach setzen wir $\delta^* = \frac{\delta_0}{3}$ und bestimmen zu diesem δ^* und dem obigen Ω eine endliche Anzahl von Punkten $P_1, \ldots, P_M$ im Sinne von Lemma I. Diese M Punkte teilen wir in zwei Klassen, indem wir in die erste Klasse diejenigen aufnehmen, welche Fourierexponenten der gegebenen Funktion $f(x)$ sind, etwa

$$P'_1 = \Lambda_{m_1}, P'_2 = \Lambda_{m_2}, \ldots, P'_R = \Lambda_{m_R},$$

und in die zweite Klasse diejenigen, welche nicht Fourierexponenten sind, etwa

$$P''_1 = \lambda_1, P''_2 = \lambda_2, \ldots, P''_S = \lambda_S \qquad (R + S = M).$$

Wir wählen nun, nach den Hilfssätzen 3 und 2, das ω so klein, dass für jedes $T > T_2 = T_2(\omega)$ die M Ungleichungen

$$\sum_{|\mu_n - A_{m_r}| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 < |A_{m_r}|^2 + \frac{\delta_0}{3M} \qquad (r = 1, 2, \ldots, R)$$

und

$$\sum_{|\mu_n - \lambda_s| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 < \frac{\delta_0}{3M} \qquad (s = 1, 2, \ldots, S)$$

bestehen, und wählen schliesslich zu diesem ω, nach dem Lemma, ein $T_0 (> T_1, T_2)$ derart, dass für $T > T_0$ die Ungleichung

$$\sum\nolimits^{*} |\alpha_n|^2 < \delta^{*} = \frac{\delta_0}{3}$$

besteht, wo Σ^{*} im Sinne von Lemma I bedeutet, dass über alle diejenigen n zu summieren ist, für welche μ_n innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ liegen. Hiermit ist der Beweis zu Ende; denn für jedes $T > T_0$ haben wir ja die Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leqq \sum\nolimits^{*} |\alpha_n|^2 + \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\alpha_n|^2 + \sum_{r=1}^{R} \sum_{|\mu_n - A_{m_r}| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 + \sum_{s=1}^{S} \sum_{|\mu_n - \lambda_s| \leqq \omega} |\alpha_n|^2$$

$$< \frac{\delta_0}{3} + \frac{\delta_0}{3} + \sum_{r=1}^{R} \left(|A_{m_r}|^2 + \frac{\delta_0}{3M} \right) + \sum_{s=1}^{S} \left(\frac{\delta_0}{3M} \right) = \delta_0 + \sum_{r=1}^{R} |A_{m_r}|^2 \leqq \delta_0 + \sum |A_n|^2.$$

§ 8.

Zurückführung von Lemma I auf ein Lemma über Verschiebungszahlen (Lemma II).

In den Beweisen der Hilfssätze des § 7 haben wir die Voraussetzung, dass $f(x)$ fast periodisch ist, nicht voll ausgenützt; z. B. haben wir beim Beweise des Hilfssatzes 1 nur benutzt, dass $f(x)$ beschränkt und gleichmässig stetig ist. Bei den folgenden Untersuchungen dagegen, wo es sich um die Herleitung des viel tiefer liegenden Lemma I handelt, werden wir die charakteristischen Eigenschaften der fast periodischen Funktionen, welche in ihrer Definition angegeben sind, direkt heranziehen müssen. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet der folgende Hilfssatz, welcher die leicht verständliche Tatsache ausspricht, dass die Fourierreihe $\Sigma\, \alpha_n e^{i\mu_n x}$ der, mit einer hinreichend grossen Periode T periodischen, Hilfsfunktion $f_T(x)$ nur eine »geringe Änderung» erfährt, wenn man x durch $x+\tau$ ersetzt, soferne τ eine Verschiebungszahl der ursprünglichen Funktion $f(x)$ ist.

Hilfssatz 4. *Zu jedem $\delta>0$ gibt es ein $\varepsilon>0$ derart, dass, falls $\tau>0$ eine beliebig gewählte zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist, für alle hinreichend grossen T, d. h. für $T>T_0=T_0(\delta,\ \varepsilon,\ \tau)$, die Ungleichung*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 |1-e^{i\mu_n\tau}|^2 < \delta$$

besteht.

Beweis. Es sei $\varepsilon=\sqrt{\frac{\delta}{2}}$ gesetzt; danach sei eine beliebige Verschiebungszahl $\tau=\tau(\varepsilon)>0$ gewählt, und schliesslich sei $T_0=\operatorname{Max}\left\{\tau,\ \frac{8G^2\tau}{\delta}\right\}$ gesetzt. Ich behaupte, dass dieses ε, das beliebig gewählte $\tau(\varepsilon)$ und dieses T_0 die Bedingungen des Satzes erfüllen. Es sei also $T>T_0$ und

$$p(x)=f_T(x)\sim\sum \alpha_n e^{i\mu_n x};$$

wir bilden die ebenfalls rein periodische und streckenweise stetige Funktion $p(x+\tau)$, welche — wie aus der Definition der Fourierkonstanten sofort folgt — die Fourierentwicklung

$$p(x+\tau)\sim\sum \alpha_n e^{i\mu_n\tau} e^{i\mu_n x}$$

besitzt. Es ist daher

$$\frac{1}{T}\int_0^T |p(x)-p(x+\tau)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n-\alpha_n e^{i\mu_n\tau}|^2=\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2\,|1-e^{i\mu_n\tau}|^2.$$

Nun ist aber $p(x)=f_T(x)=f(x)$ für $0<x<T$, also $p(x+\tau)=f(x+\tau)$ für $-\tau<x<T-\tau$, und wir erhalten somit die Ungleichung

$$\frac{1}{T}\int_0^T |p(x)-p(x+\tau)|^2\,dx=\frac{1}{T}\int_0^{T-\tau}|f(x)-f(x+\tau)|^2\,dx+\frac{1}{T}\int_{T-\tau}^{T}|p(x)-p(x+\tau)|^2\,dx$$

$$\leqq\frac{T-\tau}{T}\cdot\varepsilon^2+\frac{\tau}{T}(2G)^2<\varepsilon^2+\frac{\tau}{T_0}\cdot 4G^2\leqq\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta,$$

womit die Behauptung $\Sigma|\alpha_n|^2|1-e^{i\mu_n\tau}|^2<\delta$ bewiesen ist.

Bevor wir auf die Bedeutung dieses Verhaltens der Fourierreihe von $f_T(x)$ eingehen, müssen wir erst dem Hilfssatze 4 eine etwas erweiterte Fassung geben, bei der nicht nur eine, sondern beliebig viele (zu demselben ε gehörige) Verschiebungszahlen auftreten.

Hilfssatz 5. *Zu jedem $\delta>0$ gibt es ein $\varepsilon>0$ derart, dass, falls N eine beliebig gewählte Anzahl ist, und $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ beliebige zu ε gehörige positive Verschiebungszahlen der Funktion $f(x)$ sind, für $T>T_0=T_0(\delta, \varepsilon, \tau_1, \ldots, \tau_N)$ die Ungleichung*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \cdot \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2+|1-e^{i\mu_n\tau_2}|^2+\cdots+|1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N}<\delta$$

besteht.

Beweis. Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem vorigen Hilfssatze. In der Tat, es sei $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ eine Zahl ε im Sinne des Hilfssatzes 4; danach seien die N zu ε gehörigen positiven Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ beliebig gewählt, und schliesslich seien $T_0'=T_0'(\delta, \varepsilon, \tau_1)$, $T_0''=T_0''(\delta, \varepsilon, \tau_2), \ldots$, $T_0^{(N)}=T_0^{(N)}(\delta, \varepsilon, \tau_N)$ die zugehörigen Zahlen T_0 ebenfalls im Sinne des vorhergehenden Hilfssatzes. Dann hat die Zahl $T_0=\operatorname{Max}(T_0', T_0'', \ldots, T_0^{(N)})$ offenbar die erwünschte Eigenschaft; denn für $T>T_0$ ist ja

$$\sum |a_n|^2\,|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2<\delta,\ \sum |a_n|^2\,|1-e^{i\mu_n\tau_2}|^2<\delta, \ldots, \sum |a_n|^2\,|1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2<\delta$$

also auch

$$\sum |a_n|^2 \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2+|1-e^{i\mu_n\tau_2}|^2+\cdots+|1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N}<\delta.$$

Aus dem Hilfssatze 4 lässt sich offenbar folgern, dass höchstens diejenigen Glieder $a_n e^{i\mu_n x}$ einen »merkbaren» Beitrag zur Summe $\Sigma |a_n|^2$ liefern können, für welche der Faktor $|1-e^{i\mu_n\tau}|$ klein ist, d. h. für welche $\mu_n\tau$, mod. 2π betrachtet, klein ist, dass also diejenigen Glieder $a_n e^{i\mu_n x}$, für welche $\mu_n\tau$ (mod. 2π) nicht klein ist, »belanglos» sind; Hilfssatz 4 liefert also ein »Sieb», das uns erlaubt, mit Hilfe einer Verschiebungszahl τ, gewisse belanglose μ beiseite zu schaffen.[1] Leider dürfen wir dieses Siebverfahren nicht unter Hinzunahme von neuen τ successive

[1] Obwohl dadurch ein System von discreten Punkten $\frac{2\pi m}{\tau}$ herausgehoben wird, so dass die μ_n ausserhalb kleiner Umgebungen dieser Punkte belanglos sind, ist dies noch keineswegs die Behauptung von Lemma I. Die Lage jener Punkte ist nämlich von der gewünschten Feinheit der zugehörigen Umgebungen abhängig (weil ja das ε in Hilfssatz 4, und damit auch das τ, von δ abhängt), weshalb diese Punkte nicht als feste Punkte P_m im Sinne von Lemma I verwendet werden können. Dies ist der Grund, der uns im Folgenden nötigt, nicht nur mit einem τ sondern gleichzeitig mit vielen τ zu sieben.

fortsetzen, weil eine Summe vieler einzeln »belangloser» Grössen nicht wieder belanglos zu sein braucht; mit anderen Worten: man darf nicht schliessen, dass — wie gross auch N gewählt wird — alle diejenigen Glieder $a_n e^{i\mu_n x}$ belanglos sind, für welche unter den N Produkten $\mu_n \tau_1, \mu_n \tau_2, \ldots, \mu_n \tau_N$ mindestens eines (mod. 2π genommen) nicht klein ist. Dies geht auch aus dem Hilfssatz 5 hervor, wo ja der ganze Bruch unter dem Summationszeichen nicht »gross» auszufallen braucht, wenn nur ein einzelnes Glied im Zähler »gross» ist. Wir können offenbar nur so viel schliessen, dass solche Glieder belanglos sind, für welche ein gewisser fester Prozentsatz dieser N Produkte merkbar von 0 entfernt ist; dies geschieht durch den folgenden Satz (in welchem wir übrigens statt $\frac{1}{4}N$ und $\frac{\pi}{6}$ eben so gut $\delta_1 N$ und δ_2 mit beliebig kleinen δ_1 und δ_2 hätten schreiben können).

Hilfssatz 6. *Zu jedem $\delta' > 0$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\delta')$ derart, dass, falls $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ beliebige (und beliebig viele) zu ε gehörige positive Verschiebungszahlen der Funktion $f(x)$ sind, für alle hinreichend grossen T, d. h. für $T > T_0 = T_0(\delta', \varepsilon, \tau_1, \ldots, \tau_N)$, die Ungleichung*

$$\sum{}' |a_n|^2 < \delta'$$

besteht, wo Σ' bedeutet, dass die Summation nur über solche n zu erstrecken ist, für welche mehr als ein Viertel der N Zahlen

$$\mu_n \tau_1, \ \mu_n \tau_2, \ \ldots, \ \mu_n \tau_N$$

auf der Kreisperipherie (d. h. mod. 2π) *betrachtet numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ sind* (d. h. in Intervalle der Form $2p\pi + \frac{\pi}{6} < z < 2(p+1)\pi - \frac{\pi}{6}$ fallen).

Beweis. Für jede Zahl y, welche mod. 2π numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ ist, ist offenbar

$$|1 - e^{iy}|^2 > \left|1 - e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 > \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}.$$

Falls von N beliebigen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ mehr als $\frac{1}{4}N$ numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind, wird daher

$$\frac{|1 - e^{i\beta_1}|^2 + |1 - e^{i\beta_2}|^2 + \cdots + |1 - e^{i\beta_N}|^2}{N} > \frac{\frac{1}{4}N \cdot \frac{1}{4}}{N} = \frac{1}{16} \tag{18}$$

sein. Wir wählen nun nach dem Hilfssatze 5 $\left(\text{mit } \delta = \frac{\delta'}{16}\right)$ die Zahl ε so klein, dass, falls $\tau_1, \ldots, \tau_N$ eine beliebige Anzahl von positiven zu ε gehörigen Verschiebungszahlen sind, für hinreichend grosse T die Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 + \cdots + |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N} < \frac{\delta'}{16} \tag{19}$$

besteht. Hier ist aber, nach (18), der Bruch unter dem Summationszeichen grösser als $\frac{1}{16}$ für jedes n, das in der Σ' mitgenommen werden soll, und es folgt somit aus (19), dass

$$\sum{}' |a_n|^2 \leqq 16 \sum{}' |a_n|^2 \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 + \cdots + |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N}$$

$$\leqq 16 \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 + \cdots + |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N} < \delta'$$

ist.

Die Charakterisierung derjenigen n, über welche die Summation Σ' in dem Hilfssatze 6 zu erstrecken ist, nämlich »von den N Zahlen $\mu_n\tau_1, \mu_n\tau_2, \ldots, \mu_n\tau_N$ sollen mehr als $\frac{1}{4}N$ numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sein» ist keine besonders übersichtliche. Wir werden aber zeigen, dass es von diesem Satze aus möglich ist zu dem Lemma I hinüberzukommen, in welch letzterem die auftretende Summation Σ^* ja viel einfacher erklärt wurde. Der Übergang geschieht durch den folgenden Satz, der nicht — wie die früheren — von der rein periodischen Hilfsfunktion $f_T(x)$ und ihrer Fourierentwicklung handelt, sondern eine direkte Aussage über die Verschiebungszahlen τ enthält, und sich darauf bezieht, wie sich N Grössen der Form $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$, wo μ eine stetige reelle Variable ist, mod. 2π verteilen.

Lemma II. (Lemma über Verschiebungszahlen.) *Es sei $\varepsilon > 0$ und $\Omega > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es in dem abgeschlossenen Intervalle $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ eine endliche Anzahl $M = M(\varepsilon, \Omega)$ von festen Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_M$ mit der folgenden Eigenschaft: Falls $\omega > 0$ beliebig klein gewählt wird, lässt sich eine (von ω abhängige) Anzahl von zu ε gehörigen positiven Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ so bestimmen, dass für jede Zahl μ, welche innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ gelegen ist, mehr als ein Viertel der N Produkte*

$$\mu\tau_1,\ \mu\tau_2,\ \ldots,\ \mu\tau_N$$

numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) *sind.*

Den Beweis für dieses Lemma, welcher ein genaueres Studium der Eigenschaften der Verschiebungszahlen erfordert, werden wir erst im nächsten Paragraphen erbringen. Dagegen werden wir schon hier zeigen, *wie man mit Hilfe von Lemma II sofort im Stande ist das Lemma I aus dem Hilfssatze* 6 *abzuleiten.* Es sei also $\delta^* > 0$ und $\Omega > 0$ beliebig gegeben; wir haben die Existenz einer endlichen Anzahl solcher, im Intervalle $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ gelegener, Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_M$ nachzuweisen, dass, falls $\omega > 0$ beliebig klein gewählt wird, für alle hinreichend grossen T die Ungleichung

$$\sum\nolimits^* |\alpha_n|^2 < \delta^*$$

besteht, wo Σ^* bedeutet, dass nur über diejenigen n summiert werden soll, für welche die Exponenten μ_n innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega,\ P_m + \omega)$ gelegen sind. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst zu der gegebenen Zahl $\delta' = \delta^*$ ein ε im Sinne des Hilfssatzes 6, und danach zu diesem ε und der gegebenen Zahl Ω die Punkte P_1, $P_2, \ldots, P_M$ im Sinne von Lemma II. Ich behaupte, dass diese M Punkte der oben angegebenen Forderung von Lemma I genügen. In der Tat können wir nach dem Lemma II, falls ω beliebig klein gewählt wird, eine gewisse Anzahl von zu ε gehörigen positiven Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ so finden, dass für jede reelle Zahl μ, welche innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega,\ P_m + \omega)$ gelegen ist, mehr als ein Viertel der N Produkte

$$\mu\tau_1,\ \mu\tau_2,\ \ldots,\ \mu\tau_N$$

numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind; somit werden — falls wir in dem Hilfssatze 6 eben diese Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ benutzen — gewiss sämtliche Zahlen n, für welche μ_n innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der Intervalle $(P_m - \omega,\ P_m + \omega)$ liegen, in der Summation Σ' des Hilfssatzes 6 miteinbegriffen, d. h. es wird

$$\sum\nolimits^* |\alpha_n|^2 \leqq \sum\nolimits' |\alpha_n|^2.$$

Hiermit sind wir aber mit dem Beweise zu Ende; denn nach dem Hilfssatze 6 ist ja $\Sigma' |\alpha_n|^2 < \delta' = \delta^*$ für alle hinreichend grossen T, und diese Ungleichung gilt also a fortiori, wenn $\Sigma' |\alpha_n|^2$ durch $\Sigma^* |\alpha_n|^2$ ersetzt wird.

§ 9.

Beweis von Lemma II.

In dem vorhergehenden Paragraphen haben wir den Beweis von Lemma I — und damit den Beweis des Fundamentalsatzes — auf ein Lemma II zurückgeführt, das nichts mehr mit Fourierreihen zu tun hat, sondern lediglich von den Verschiebungszahlen einer fast periodischen Funktion handelt. Bevor wir aber dieses Lemma II beweisen können, müssen wir zunächst einige vorbereitende Bemerkungen und Hilfssätze über Verschiebungszahlen vorausschicken.

Falls τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl unserer Funktion $f(x)$ ist, d. h. falls die Ungleichung

$$|f(x+\tau)-f(x)| \leqq \varepsilon \tag{20}$$

für alle x besteht, wird τ natürlich a fortiori als Verschiebungszahl zu jedem ε_1 gehören, das $>\varepsilon$ ist. Im Folgenden wird es zweckmässig sein, bei einem gegebenen τ, von seinem »*Minimalfehler*» $e=e(\tau)$ zu sprechen, d. h. von *der unteren Grenze e aller Zahlen ε, zu welchen τ als Verschiebungszahl gehört;* weil wir in der Ungleichung (20) das Zeichen $\leqq$ (und nicht $<$) gewählt haben, wird diese untere Grenze offenbar selbst zur Menge der ε gehören, d. h. die Zahl e kann auch als die kleinste derjenigen Zahlen ε charakterisiert werden, zu welchen τ als Verschiebungszahl gehört. Weil $f(x)$ beschränkt ist, mit der oberen Grenze G, und daher bei jedem beliebig gegebenen reellen τ für alle x die Ungleichung $|f(x+\tau)-f(x)| \leqq 2G$ besteht, ist der obige Minimalfehler $e(\tau)$ für alle reellen τ definiert, und diese Funktion $e(\tau)$ genügt im ganzen Intervalle $-\infty<\tau<\infty$ der Ungleichung $0 \leqq e(\tau) \leqq 2G$.

Aus der — schon in § 1 gemachten — Bemerkung, dass, falls τ_1 und τ_2 Verschiebungszahlen sind, welche zu ε_1 bzw. ε_2 gehören, die Summe $\tau_1+\tau_2$ gewiss eine zu $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ gehörige Verschiebungszahl ist, folgt sofort, dass der Minimalfehler $e(\tau)$ für jedes Wertepaar τ_1, τ_2 der Ungleichung

$$e(\tau_1+\tau_2) \leqq e(\tau_1)+e(\tau_2) \tag{21 a}$$

genügt. Es ist also auch $e(\tau_1) \leqq e(-\tau_2)+e(\tau_1+\tau_2)$, und, weil $e(-\tau)=e(+\tau)$ ist, folgt hieraus weiter, dass

$$e(\tau_1+\tau_2) \geqq e(\tau_1)-e(\tau_2). \tag{21 b}$$

In unseren weiteren Überlegungen werden wir der Bequemlichkeit halber nicht mit beliebigen reellen τ, sondern nur mit ganzzahligen τ operieren. Dass es möglich ist mit den ganzzahligen τ allein auszukommen, rührt von dem folgenden, auch an sich ganz interessanten, Satz her:

Hilfssatz 7. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Länge $L = L(\varepsilon)$ derart, dass jedes Intervall dieser Länge L mindestens eine ganze Zahl n mit $e(n) \leqq \varepsilon$ enthält,* d. h. mindestens eine zu ε gehörige ganzzahlige Verschiebungszahl n enthält.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt sofort aus dem Satze III des § 1, dass die Summe zweier fast periodischer Funktionen wieder eine fast periodische Funktion ist, oder vielmehr aus der dort bemerkten Tatsache, mit welcher dieser Satz begründet wurde, dass es zu zwei fast periodischen Funktionen und einem beliebig gegebenen ε immer eine Länge L_0 derart gibt, dass jedes Intervall dieser Länge eine Zahl τ enthält, welche gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der beiden Funktionen darstellt. Wir wenden — indem wir die gegebene Zahl ε kleiner als 2 annehmen — diese Bemerkung auf unsere Funktion $f(x)$ und die in der Fig. 8 durch die voll ausgezogene Linie angegebene rein

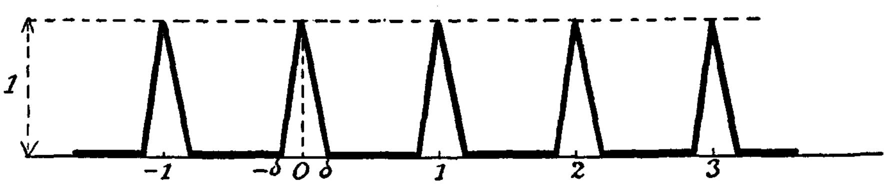


Fig. 8.

periodische Funktion $p(x)$ der Periode 1 an, wobei $\delta < \frac{1}{2}$ so klein gewählt ist (vergl. das Corollar des Satzes II), dass, falls τ eine beliebige zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$, und $|\delta'| < \delta$ ist, $\tau + \delta'$ gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist. Wegen $\frac{\varepsilon}{2} < 1$, muss offenbar (wie aus der Figur sofort erhellt) jede zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der rein periodischen Hilfsfunktion $p(x)$ von der Form $n + \delta'$ mit $|\delta'| < \delta$ sein. Wir bestimmen nunmehr die Länge $L_0 = L_0\ (f,\ p,\ \varepsilon)$ derart, dass jedes Intervall der Länge L_0 eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl τ^* der Funktion $f(x)$ enthält, die gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $p(x)$ ist, und also gewiss die Form $\tau^* = n^* + \delta^*$ besitzt, wo $|\delta^*| < \delta$ und daher, nach der Bestimmung von δ, die ganze Zahl n^* eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist. Hieraus folgt aber sofort, dass die Länge $L = L_0 + 1$ die erwünschte Eigenschaft hat; falls nämlich $\left(\alpha - \frac{L}{2}, \alpha + \frac{L}{2}\right)$ ein beliebiges Intervall dieser Länge L ist, können wir ja im kleineren Intervall $\left(\alpha - \frac{L_0}{2}, \alpha + \frac{L_0}{2}\right)$ der Länge L_0 eine der obigen gemeinsamen Verschiebungszahlen $\tau^* = n^* + \delta^*$ finden, und wegen $|\delta^*| < \delta < \frac{1}{2}$ wird hierbei die ganze Zahl n^* in das Intervall $\left(\alpha - \frac{L}{2}, \alpha + \frac{L}{2}\right)$ fallen.

Für einen späteren Zweck verallgemeinern wir diesen Hilfssatz 7 folgendermassen:

Hilfssatz 8. *Es sei ν eine reelle Zahl $\neq 0$, und $\varepsilon > 0$ sowie $\eta > 0$ beliebig gegeben. Dann lässt sich eine Länge $L' = L'(\nu, \varepsilon, \eta, f)$ derart bestimmen, dass jedes Intervall der Länge L' mindestens eine ganze Zahl n mit $e(n) \leqq \varepsilon$ enthält, deren Abstand von einem ganzen Multiplum von ν kleiner als η ist.*

Beweis. Es sei zunächst, wie oben, die Zahl $\delta < \frac{1}{2}$ so bestimmt, dass, falls τ eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist, jede Zahl $\tau + \delta'$ mit $|\delta'| < \delta$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ sein muss, und danach werde die Zahl $\alpha < \delta$ und $< \frac{\eta}{2}$ gewählt. Wir benutzen hier zwei rein periodische Hilfsfunktionen, $p_1(x)$ mit der Periode 1, und $p_2(x)$ mit der Periode $|\nu|$, welche durch die Figuren 9 a und 9 b definiert sind. Weil $p_1(0) + p_2(0) = 2$ ist,

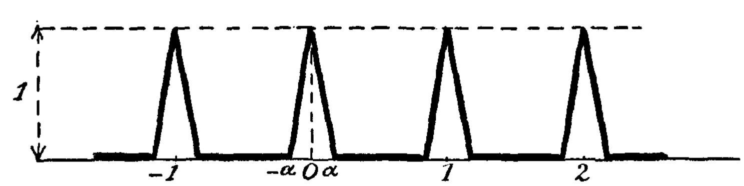


Fig. 9 a.

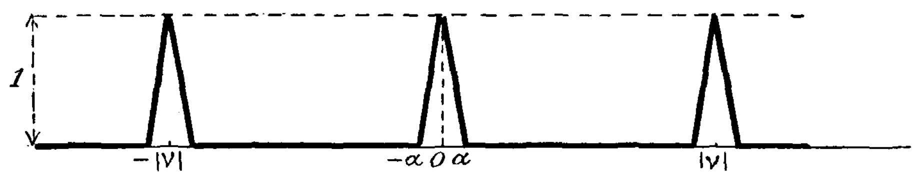


Fig. 9 b.

folgt sofort — falls die gegebene Zahl ε kleiner als 2 angenommen wird — dass jede zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der fast periodischen Funktion $p_1(x)+p_2(x)$ die Form $n_1+\delta_1=n_2\nu+\delta_2$ mit $|\delta_1|<\alpha$, $|\delta_2|<\alpha$ haben muss. Wir bestimmen nun die Länge L'_0 derart, dass jedes Intervall der Länge L'_0 mindestens eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl τ^* der gegebenen Funktion $f(x)$ enthält, welche gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der fast periodischen Hilfsfunktion $p_1(x)+p_2(x)$ ist und also, nach der vorhergehenden Bemerkung, gewiss die Form

$$\tau^*=n_1^*+\delta_1^*=n_2^*\nu+\delta_2^* \qquad \text{mit } |\delta_1^*|<\alpha,\ |\delta_2^*|<\alpha$$

besitzt. Dann ist offenbar n_1^* eine Zahl n im Sinne des Satzes, d. h. eine ganze Zahl mit $e(n)\leqq\varepsilon$, deren Abstand von einem ganzen Multiplum von ν kleiner als $2\alpha<\eta$ ist; und wegen $|n_1^* \quad \tau^*|<\frac{1}{2}$ wird daher die Länge $L'=L'_0+1$ die erwünschte Eigenschaft besitzen.

Im folgenden werden wir immer nur mit ganzzahligen Verschiebungszahlen τ operieren; zur Abkürzung nennen wir die Menge aller ganzzahligen Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$, welche zu einem gegebenen ε gehört, die *Verschiebungsmenge E_ε unserer Funktion $f(x)$*. Bevor wir zu der näheren Untersuchung dieser Verschiebungsmenge übergehen, fügen wir, um den innern Kern der Betrachtungen besser verständlich zu machen, die folgende Bemerkung ein.

Bemerkung. In dem speziellen Falle, wo die gegebene fast periodische Funktion rein periodisch mit der Periode 1 ist, besteht offenbar, bei jedem $\varepsilon>0$, die Menge E_ε aus sämtlichen ganzen Zahlen, d. h. sie ist einfach eine arithmetische Progression. Bei einer beliebigen fast periodischen Funktion wird die Menge E_ε natürlich nicht mehr diese Eigenschaft haben; *trotzdem hat sie aber gewisse Züge mit einer solchen Progression gemeinsam.* Nicht nur, dass sie niemals beliebig grosse Lücken aufweist[1], ist ihr eigentümlich, sondern auch von der besonders charakteristischen Eigenschaft der »Aequidistanz» hat sie etwas beibehalten. Bei einer streng aequidistanten Punktmenge geht diese in sich über, wenn man sie so verschiebt, dass ein beliebiger Punkt auf einen beliebigen anderen Punkt der Menge fällt; bei unserer Verschiebungsmenge E_ε werden wir mit Hilfe der Ungleichungen

$$e(n')-e(n'') \leqq e(n'+n'') \leqq e(n')+e(n'')$$

beweisen, dass sie, wenigstens bei passend gewähltem ε, doch »annäherungsweise» diese Eigenschaft besitzt, nämlich, dass sie bei gewissen Verschiebungen »fast» in sich übergeht.

Überhaupt beruht unsere ganze Untersuchung über die Verteilung der Zahlen $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$ (mod. 2π), in welche der Beweis von Lemma II ausmündet, im Prinzip auf dieser hier angedeuteten »Ähnlichkeit» zwischen der Folge der ganzzahligen Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ und den Zahlen einer arithmetischen Progression. Auch das Lemma II selbst — welches behauptet, dass nur für die μ aus gewissen spärlich verteilten kleinen Intervallen der μ-Achse die Grössen $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$ so unregelmässig auf der Kreisperipherie gelegen

[1] Diese Eigenschaft der Verschiebungsmenge hätte uns für den Übergang von Hilfssatz 4 zu Lemma I genügt, wenn es dafür ausreichend gewesen wäre (vgl. die Bemerkung von S. 83) statt unseres Lemma II einen etwas weniger aussagenden Satz zu besitzen, in welchem ein μ schon dann als »unschädlich» angesehen wird, wenn nur eines der N Produkte $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$, statt eines festen Prozentsatzes, mod. 2π nicht zu nahe an 0 kommt. Der Beweis eines solchen »vereinfachten» Lemma II wäre nämlich so zu führen: Zunächst wäre aus Stetigkeitsgründen sofort ersichtlich, dass, falls für ein bestimmtes μ das Produkt mit einem der τ, etwa τ_m, numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) ist, dasselbe, und zwar mit demselben τ_m, für eine gewisse Umgebung dieser Zahl μ gelten muss. Ferner ist auch klar, dass die Menge derjenigen μ, welche die Eigenschaft haben, dass die sämtlichen Produkte $\mu\tau_n$ numerisch $\leqq \frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind, keine Häufungspunkte haben kann — und dass somit im Intervalle $(-\Omega, \Omega)$ nur endlich viele solche μ, etwa $\mu = P_1, P_2, \ldots, P_M$, liegen können — denn, falls die unendlich vielen Zahlen $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots$ alle in das Intervall $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ fallen und h eine Grösse von hinreichend kleinem Betrage ist, müssen notwendig, wegen $\tau_{n+1}-\tau_n < c$, gewisse Zahlen der neuen Folge $(\mu+h)\tau_1, (\mu+h)\tau_2, \ldots$ aus diesem Intervall herauswandern. Aus diesen beiden Tatsachen erschliesst man nun leicht, dass sich, bei hinreichend grossem N, die »unangenehmen» μ nur in beliebig vorgeschriebenen Umgebungen der obigen Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_M$ befinden können.

Der Leser wird sehen, dass der Beweis des »wirklichen» Lemma II, nach Gewinnung von Hilfssatz 9, welcher auch eine Art von »Aequidistanz» der Verschiebungszahlen nachweist, wesentlich nach diesem Schema verläuft.

sind, dass ein unverhältnismässig grosser Bruchteil dieser Zahlen in eine feste Umgebung des Nullpunktes fallen — kann als eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes aus der Theorie der Verteilung der Zahlen $\mu, 2\mu, 3\mu, \ldots$ (mod. 2π) betrachtet werden, welcher besagt, dass, wenn nur μ von der Umgebung gewisser Punkte, nämlich der Punkte $2\pi r$ wo r eine rationale Zahl mit einem »kleinen» Nenner bedeutet, ausgeschlossen wird, bei jedem »grossen» N gilt, dass die N Zahlen $\mu, 2\mu, \ldots, N\mu$ sich »sehr» regelmässig auf der Kreisperipherie verteilen, d. h. so, dass die Anzahl derjenigen von ihnen, die in ein bestimmtes Intervall der Kreisperipherie fallen, einen Prozentsatz ausmacht, welcher annäherungsweise gleich der relativen Länge dieses Intervalles ist.

Wir gehen nun zur genaueren Formulierung der in der obigen Bemerkung angedeuteten Aequidistanzeigenschaft der Verschiebungsmenge E_ε über; um aber den diesbezüglichen Hilfssatz bequem aussprechen zu können, führen wir die folgende Definition ein:

Definition. *Die Verschiebungsmenge E_ε unserer Funktion $f(x)$ soll »fast periodisch bis auf $\frac{1}{Q}$» heissen (wo Q eine positive ganze Zahl ist), wenn es eine positive Grösse $\varrho<\varepsilon$ und eine Länge I_0 derart gibt, dass, falls t eine beliebige Zahl der Menge E_ϱ ist (und also gewiss auch eine Zahl der Menge E_ε), und wir alle Zahlen τ der Menge E_ε, welche in einem Intervalle $(0, I)$ mit $I>I_0$ gelegen sind, um t verschieben (d. h. die Zahlen $\tau+t$ bilden), mehr als $\left(1-\frac{1}{Q}\right)$ von den so verschobenen Zahlen wieder unserer Menge E_ε angehören.*

Es lautet dann der

Hilfssatz 9. *Es sei die positive Grösse ε_0 und die positive ganze Zahl Q beliebig gegeben. Dann lässt sich eine positive Grösse $\varepsilon\leqq\varepsilon_0$ so bestimmen, dass die Verschiebungsmenge E_ε fast periodisch bis auf $\frac{1}{Q}$ ist.* Mit andern Worten: obwohl die Summe zweier, zu ε gehörigen, Verschiebungszahlen nicht wieder zu ε sondern nur zu 2ε gehören muss, so kann man doch in der Verschiebungsmenge E_ε so »feine» (zu $\varrho<\varepsilon$ gehörige) Verschiebungszahlen auffinden, dass, wenn man nur um diese verschiebt, doch die »Gesamtheit» der Verschiebungszahlen »fast ganz» in sich übergeht, d. h. nur einen Verlust von $\frac{1}{Q}$ ihrer Anzahl erleidet.

Beweis. Die Idee des Beweises ist, ein ε so zu suchen (übrigens $>\frac{\varepsilon_0}{2}$, damit die sämtlichen Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ nicht zu dünn gesät liegen, nämlich, gemäss Hilfssatz 7, in jedem Intervall der festen Länge $L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ mindestens eine), dass bei jedem hinreichend grossen I nur ein sehr geringer Prozentsatz derjenigen τ der Menge E_ε, welche dem Intervalle (0, I) angehören, einen Minimalfehler $e(\tau)$ besitzen, welcher sehr nahe an ε heranreicht; denn für alle übrigen τ, für welche also $e(\tau)$ nicht sehr nahe an ε kommt, etwa $<\varepsilon-\varrho$ ist, wird ja, falls t eine beliebig gewählte Zahl der Menge E_ϱ bezeichnet, der Minimalfehler $e(\tau+t)\leqq e(\tau)+e(t)\leqq e(\tau)+\varrho$ kleiner als ε ausfallen, d. h. es wird die verschobene Zahl $\tau+t$ wieder der Menge E_ε angehören.

Wir haben im ganzen drei Zahlen ε, $\varrho<\varepsilon$ und I_0 zu bestimmen. Die Zahl ϱ schreiben wir in der Form

$$\varrho=\frac{\varepsilon_0}{2N},$$

wo N eine ganze Zahl >8 ist, über die wir später als Funktion von Q und ε_0 verfügen werden, und teilen das Intervall $\frac{\varepsilon_0}{2}<z\leqq\varepsilon_0$ in N gleichgrosse Teile der Länge ϱ (siehe Fig. 10). Zur Abkürzung werden wir von einer Zahl n mit $\frac{\varepsilon_0}{2}<e(n)\leqq\varepsilon_0$ sagen, dass sie in »die r^{te} Schublade» fällt (wo r eine der Zahlen 1, 2, ..., N ist), falls ihr Minimalfehler $e(n)$ dem r^{ten} Teilintervall

$$\frac{\varepsilon_0}{2}+(r-1)\varrho<z\leqq\frac{\varepsilon_0}{2}+r\varrho$$

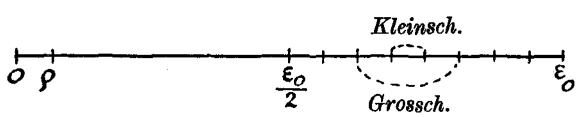


Fig. 10.

angehört. Wir werden bald im Beweise — wo es sich darum handelt, in ähnlichem Sinne wie beim Beweise des Mittelwertsatzes, die Untersuchung auf ein festes Intervall $0<x<I_0$ zurückzuführen — eine ganze Zahl τ, von der nur bekannt ist, dass sie in einer gewissen, sagen wir der r_0^{ten}, Schublade liegt (wo r_0 eine der Zahlen 2, ..., $N-1$ bedeutet) um eine ganze Zahl t verschieben müssen, von der wir nur wissen, dass sie der Verschiebungsmenge E_ϱ angehört. Über die

verschobene Zahl $\tau+t$ können wir dann offenbar nur so viel mit Sicherheit aussagen, dass ihr Minimalfehler $e(\tau+t)$ den Ungleichungen

$$\frac{\varepsilon_0}{2}+(r_0-2)\varrho < e(\tau)-e(t) \leqq e(\tau+t) \leqq e(\tau)+e(t) \leqq \frac{\varepsilon_0}{2}+(r_0+1)\varrho$$

genügt, dass also $\tau+t$ in der r_0^{ten}, $(r_0-1)^{\text{ten}}$ oder $(r_0+1)^{\text{ten}}$ Schublade liegt, weshalb es bequem sein wird, ausser von den N obigen Schubladen, den »Kleinschubladen», auch von $N-2$ »Grosschubladen», mit den Nummern $2, 3, \ldots, N-1$, zu sprechen, indem wir von einer Zahl n sagen, dass sie in die r^{te} Grosschublade fällt, falls ihr Minimalfehler $e(n)$ dem Intervall

$$\frac{\varepsilon_0}{2}+(r-2)\varrho < z \leqq \frac{\varepsilon_0}{2}+(r+1)\varrho$$

angehört (siehe Fig. 10).

Es sei nun $I_0 > 2\,L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ eine feste Länge über die wir ebenfalls später, und zwar als Funktion von Q, ε_0 und ϱ, verfügen werden. Bei jeder ganzen Zahl n im Intervalle $0 < x < I_0$, welche der Menge E_{ε_0} aber nicht der Menge $E_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ angehört, d. h. für welche $\frac{\varepsilon_0}{2} < e(n) \leqq \varepsilon_0$ ist, sehen wir nunmehr nach, in welcher der $N-2$ Grosschubladen sie liegt, und greifen diejenige Grosschublade, oder eine derjenigen von ihnen, heraus, welche die kleinste Anzahl solcher Zahlen n enthält. Es sei R ihr Nummer. Weil es offenbar zumindest $\frac{N-2}{3}\left(>\frac{N}{4}\right)$ Grosschubladen gibt, welche nicht übereinander greifen, wird unsere R^{te} Grosschublade gewiss weniger als $I_0 : \frac{N}{4} = \frac{4\,I_0}{N}$ von den erwähnten Zahlen n im Intervalle $(0, I_0)$ enthalten. Die Zahl ε des Satzes soll dann die Zahl

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} + R\,\varrho$$

sein, d. h. die grösste Zahl der R^{ten} Kleinschublade.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Beweis unschwer zu Ende führen. Es sei also I eine beliebige Zahl $> I_0$, und t eine beliebige Zahl der Menge E_ϱ; wir betrachten das Intervall $0 < x < I$ und werden die Anzahl A derjenigen, im Intervalle $(0, I)$ gelegenen, Zahlen τ der Menge E_ε abschätzen, welche bei einer Verschiebung um t nicht wieder in Zahlen der Menge

E_ε übergehen. Diese Zahlen τ sind offenbar unter denjenigen Zahlen der Menge E_ε zu suchen, die der R^{ten} Kleinschublade angehören; denn für jede Zahl τ der Menge E_ε, welche nicht in dieser »äussersten» Kleinschublade liegt, d. h. für welche $e(\tau) \leqq \frac{\varepsilon_0}{2} + (R-1)\varrho$ ist, wird ja $e(\tau+t) \leqq e(\tau)+\varrho \leqq \varepsilon$ sein, d. h. es wird $\tau+t$ wieder der Menge E_ε angehören. Wir teilen nun das Intervall $(0, I)$ in der in der Fig. 11 angedeuteten Weise, d. h. wir tragen zunächst die Länge I_0 vom

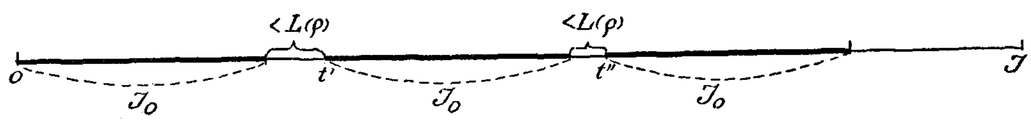


Fig. 11.

Punkte o ab, bestimmen danach (nach dem Hilfssatze 7) eine Zahl t' der Menge E_ϱ in einem Abstand $< L(\varrho)$ von dem Endpunkte $x=I_0$, danach tragen wir wieder, vom Punkte t' aus, die Länge I_0 bis zum Punkte $t'+I_0$ ab, bestimmen eine zu E_ϱ gehörige Zahl t'' in einem Abstand vom Endpunkte, welche kleiner als $L(\varrho)$ ist, usw. Wir betrachten zunächst ein beliebiges der Intervalle der Länge I_0, etwa das Intervall $(t^{(p)}, t^{(p)}+I_0)$. Falls τ eine darin gelegene ganze Zahl ist, welche der R^{ten} Kleinschublade angehört, muss — nach einer obigen Bemerkung — der »entsprechende» (d. h. um $-t^{(p)}$ verschobene) Punkt $\tau - t^{(p)}$ des Intervalles $(0, I_0)$ gewiss der R^{ten} Grosschublade angehören. Nun liegen aber im Intervalle $(0, I_0)$ weniger als $\frac{4 I_0}{N}$ Punkte der R^{ten} Grosschublade, und die Anzahl der Punkte τ unseres Intervalles $(t^{(p)}, t^{(p)}+I_0)$, welche der R^{ten} Kleinschublade angehören, wird daher a fortiori kleiner als $\frac{4 I_0}{N}$ sein. Da ferner die Anzahl P der betrachteten Intervalle der Form $(t^{(p)}, t^{(p)}+I_0)$ kleiner als $\frac{I}{I_0}$ ist, finden wir für die Anzahl A_1 der in diesen P Intervallen gelegenen τ der Menge E_ε, welche bei der Verschiebung um t nicht wieder in Punkte der Menge E_ε übergehen, die Ungleichung

$$A_1 < \frac{I}{I_0} \cdot \frac{4 I_0}{N} = \frac{4 I}{N}.$$

Was ferner die Anzahl A_2 derjenigen solcher τ betrifft, welche in den »Restintervallen» liegen, finden wir durch eine grobe Abschätzung — indem wir für die »Zwichenintervalle» mit Längen $< L(\varrho)$ einfach die Anzahl aller darin gelegenen ganzen Zahlen abschätzen, und für das eventuelle »Schlussintervall» die obige Abschätzung $\frac{4 I_0}{N}$ benutzen — dass

$$A_2 < P L(\varrho) + \frac{4 I_0}{N} < \frac{I}{I_0} L(\varrho) + \frac{4 I}{N}.$$

Die gesuchte Gesamtanzahl $A = A_1 + A_2$ genügt somit der Ungleichung

$$A < \frac{8 I}{N} + \frac{I}{I_0} L(\varrho) = I\left(\frac{8}{N} + \frac{L(\varrho)}{I_0}\right) \tag{22}$$

Andererseits ist die Anzahl B sämtlicher Zahlen τ der Menge E_ε, welche dem Intervalle $(0, I)$ angehören, offenbar $\left(\text{wegen } \varepsilon > \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ grösser als $\frac{I}{L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} - 1$, da ja in jedem Intervall der Länge $L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ mindestens eine solche Zahl τ liegt; wegen $I > I_0 > 2 L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ ist also

$$B > \frac{I - L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}{L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} > \frac{I}{2 L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}. \tag{23}$$

Wir erhalten somit, aus (22) und (23), die Ungleichung

$$\frac{A}{B} < \frac{I\left(\frac{8}{N} + \frac{L(\varrho)}{I_0}\right)}{\frac{I}{2 L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}} = 2 L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\left(\frac{8}{N} + \frac{L(\varrho)}{I_0}\right) = \frac{16 L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}{N} + \frac{2 L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) L(\varrho)}{I_0}.$$

Durch Wahl von N, also auch von $\varrho = \frac{\varepsilon_0}{2 N}$, und danach von I_0 können wir offenbar jeden der beiden Summanden $< \frac{1}{2 Q}$ machen, so dass die gewünschte Ungleichung

$$\frac{A}{B} < \frac{1}{Q}$$

gilt, womit der Satz bewiesen ist. Wir werden ihn im Folgenden übrigens nur mit $Q = 4$ verwenden.

Da uns nun dieser Satz über die »Fastperiodizität» der Verschiebungsmenge E_ε zur Verfügung steht, können wir unserem Ziele, dem Beweis von Lemma II, direkt zusteuern. Da dieses Lemma, falls es für ein gewisses ε bewiesen ist, a fortiori für jedes grössere ε gilt, dürfen wir offenbar beim Beweise annehmen, dass die gegebene Zahl ε aus dem Lemma die Bedingung des Hilfssatzes 9 (mit $Q=4$) erfüllt, d. h. dass die Verschiebungsmenge E_ε fast periodisch bis auf $\frac{1}{4}$ ist. Ferner werden wir, nachdem von hier ab für alles folgende ε festgelegt ist, unter $\varrho\,(<\varepsilon)$ und I_0 Zahlen ϱ und I_0 im Sinne dieses Hilfssatzes, d. h. im Sinne der Fastperiodizität von E_ε, verstehen, und mit $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ die der Menge E_ε angehörigen positiven (ganzen) Zahlen bezeichnen, wachsend geordnet.

In Lemma II dreht es sich darum, die Gesamtheit aller reellen μ mit Hilfe einer passend gewählten festen Anzahl N von Verschiebungszahlen $\tau_1, \ldots, \tau_N$ zu »sieben». Wir stellen zunächst die Frage etwas anders, indem wir eine beliebige feste Zahl μ und die Gesamtheit aller τ_n betrachten und fragen, wie dieses μ beschaffen sein muss, damit für jedes hinreichend grosse N, d. h. für $N > N_0 = N_0(\mu)$, mehr als ein Viertel der N Produkte

$$\mu\tau_1,\ \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$$

numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind.

Um unsere Antwort (die eine einfache hinreichende Bedingung liefert) bequem formulieren zu können, sei die folgende Ausdrucksweise eingeführt: Falls eine Zahl x mod. 2π numerisch $\leqq \frac{\pi}{6}$ ist, werden wir sagen, dass sie in der »0-Schublade» gelegen ist (siehe Fig. 12); falls x dagegen mod. 2π numerisch

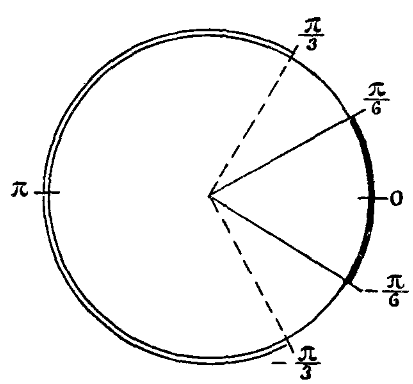


Fig. 12.

$> \frac{\pi}{6}$ ist, soll sie der »grossen π-Schublade» angehörig heissen, bzw. der »kleinen π-Schublade», falls x mod. 2π numerisch $> \frac{\pi}{3}$ ist. Es ist klar, *dass eine Summe* $x_1 + x_2$ *in die grosse* π*-Schublade fällt, wenn* x_1 *in der* o*-Schublade,* x_2 *in der kleinen* π*-Schublade liegt.* Wir geben nunmehr die folgende Antwort auf die oben gestellte Frage:

Hilfssatz 10. *Dafür, dass die reelle Zahl* μ *so beschaffen ist, dass für jedes* $N > N_0 = N_0(\mu)$ *mehr als ein Viertel der* N *Produkte* $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$ *numerisch grösser als* $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) *sind* (*d. h. in die grosse* π*-Schublade fallen*), *ist hinreichend, dass* μ *die folgende Eigenschaft besitzt:*

»**Eigenschaft** π.» *Es soll in der Verschiebungsmenge* E_ϱ (*wo* ϱ *die obige Zahl* $< \varepsilon$ *ist*) *eine positive Zahl* t *derart existieren, dass das Produkt* μt *in der kleinen* π*-Schublade liegt.*

Mit anderen Worten: falls es nur eine »feine» Verschiebungszahl t gibt, für die das Produkt μt in die kleine π-Schublade fällt, so wird es sehr viele von den »groben» Verschiebungszahlen τ geben, für welche $\mu\tau$ in die grosse π-Schublade fällt.

Beweis. Der Beweis basiert darauf, dass die Verschiebung um t einerseits die Menge der τ fast ganz in sich überführt, während sie andererseits ein Produkt $\mu\tau$ aus der o-Schublade in ein Produkt $\mu(\tau + t)$ der (komplementären) grossen π-Schublade verwandelt.

Es sei also μ eine Zahl mit der Eigenschaft π, und t eine positive Zahl in E_ϱ, für welche μt in der kleinen π-Schublade liegt. Wir wählen N_0 derart, dass

$$N_0 > 4t \quad \text{und} \quad N_0 > I_0$$

ist, wo I_0 die obige (von μ unabhängige) Zahl bedeutet, und behaupten, dass dieses N_0 unsere Forderung erfüllt. Es sei also $N > N_0$, und es bezeichne A die Anzahl derjenigen der N Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$, deren Produkte mit dem Faktor μ in die grosse π-Schublade fallen, dagegen $B = N - A$ die Anzahl der übrigen dieser N Zahlen, deren Produkte mit μ also in die o-Schublade fallen. Wir haben zu beweisen, dass

$$A > \frac{1}{4} N$$

ist. Es bezeichne hierzu B_1 die Anzahl derjenigen unter den obigen B Zahlen, welche im Intervalle $0 < x \leqq \tau_N - t$ liegen (wo $\tau_N - t$ wegen $\tau_N \geqq N$ positiv ist); dann ist $B_1 \geqq B - t$, weil ja das Intervall $\tau_N - t < x \leqq \tau_N$ überhaupt nur t ganze Zahlen enthält; also ist (wegen $N > N_0 > 4t$)

$$B_1 \geqq B - t > B - \frac{N}{4}.$$

Es sei nun τ irgend eine dieser B_1 Zahlen; wir verschieben sie um t, d. h. wir bilden die Zahl $\tau + t$. Diese Zahl $\tau + t$ wird dann im Intervalle $0 < x \leqq \tau_N$ liegen, und ihr Produkt mit μ wird in die grosse π-Schublade fallen (weil ja $\mu\tau$ in der o-Schublade und μt in der kleinen π-Schublade liegt), woraus folgt, dass $\tau + t$ gewiss eine der obigen A Zahlen sein wird, falls sie überhaupt zur Menge E_ε gehört. Nun wissen wir aber nach dem Hilfssatze 9, wegen $\tau_N \geqq N > N_0 > I_0$, dass von den sämtlichen N Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ (und also um so mehr von den B_1 Zahlen) weniger als $\frac{1}{4} N$ bei der Verschiebung um t nicht wieder in Zahlen der Menge E_ε übergehen, und erhalten somit

$$A > B_1 - \frac{N}{4} > B - \frac{N}{2}.$$

Hiermit ist aber der Satz bewiesen; denn aus $A > B - \frac{N}{2}$ und $A + B = N$ folgt ja, dass $A > \frac{N}{4}$ ist.

Wir werden nunmehr untersuchen, wie sich die Zahlen, welche die Eigenschaft π besitzen, auf die μ-Achse verteilen. Hierzu beweisen wir zunächst den folgenden Satz, der besagt, dass die Menge dieser Zahlen eine offene Punktmenge ist, und überdies eine wichtige Gleichmässigkeitseigenschaft behauptet:

Hilfssatz 11: *Falls die Zahl μ_0 die Eigenschaft π besitzt, können wir ein so kleines Intervall i_0 um μ_0 legen, dass*

1) *jede Zahl μ in diesem Intervalle i_0 ebenfalls die Eigenschaft π besitzt und somit für jedes hinreichend grosse N mehr als ein Viertel der N Produkte $\mu\tau_1, \ldots, \mu\tau_N$ numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ mod. 2π sind, und dass*

2) *in der letzten Aussage die Worte »für jedes hinreichend grosse N« gleichmässig in μ gelten, d. h. dass ein von μ unabhängiges $N_0 = N_0(i_0)$ derart existiert, dass es für jedes μ im Intervalle i_0 genügt, $N > N_0$ zu wählen.*

Beweis: Dass μ_0 die Eigenschaft π besitzt, bedeutet, dass wir in E_ϱ ein positives t, etwa $t = t_0$, so finden können, dass $\mu_0 t_0$ in der kleinen π-Schublade liegt. Nachdem t_0 festgelegt ist, wählen wir das Intervall i_0 so klein, dass für jedes μ in diesem Intervalle das Produkt μt_0, ebenso wie $\mu_0 t_0$, in der kleinen π-Schublade liegt, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, weil die kleine π-Schublade ein offenes Intervall ist. Dieses Intervall i_0 wird alsdann den Bedingungen des Satzes genügen; denn 1) besitzt jede Zahl μ in i_0 die Eigenschaft π, da ja ihr Produkt mit einer passend gewählten positiven Zahl t der Menge E_ϱ, nämlich mit der Zahl $t = t_0$, in die kleine π-Schublade fällt, und 2) gibt es ein von μ unabhängiges N_0 derart, dass für jedes μ in i_0 und jedes $N > N_0$ mehr als ein Viertel der N Zahlen $\mu\tau_1, \ldots, \mu\tau_N$ numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) ist; in der Tat wurde die Zahl N_0 im Beweise des obigen Hilfssatzes 10, ausser der von μ unabhängigen Bedingung $N_0 > I_0$, nur der einzigen Bedingung $N_0 > 4t$ unterworfen, und wir haben ja hier für alle μ in i_0 dasselbe t, nämlich $t = t_0$, verwenden können.

Wir betrachten danach die »unangenehmen« μ, d. h. die Zahlen μ, welche nicht die Eigenschaft π besitzen.[1] Wir beweisen den folgenden Satz, womit wir uns dem Lemma II sehr nähern:

Hilfssatz 12. *Die Menge der Zahlen μ, welche nicht die Eigenschaft π besitzen, hat keine Häufungspunkte, und es liegt somit in jedem endlichen Intervall nur eine endliche Anzahl von solchen Punkten.*

Beweis. Es sei μ_1 eine ganz beliebige reelle Zahl; wir sollen zeigen, dass sie nicht Häufungspunkt von Zahlen μ ist, welche nicht die Eigenschaft π besitzen, d. h. dass wir um den Punkt μ_1 ein kleines Intervall $(\mu_1 - h_1, \mu_1 + h_1)$ derart

[1] Es sei bemerkt, dass diese Menge gewiss alle Multipla von 2π enthält und also nicht leer ist; in der Tat wird, falls $\mu = 2\pi n$ ist, für jede Zahl t der Menge E_ϱ gelten — da t ja ganzzahlig ist — dass das Produkt μt kongruent 0 mod. 2π ist, so dass also keine Zahl t in E_ϱ existiert, für welche μt in die kleine π-Schublade fällt. Dass die Multipla von 2π diese besondere Rolle spielen, liegt übrigens nur daran, dass wir, aus Bequemlichkeitsgründen, eben mit den ganzzahligen Verschiebungszahlen operiert haben.

legen können, dass sämtliche Zahlen $\mu+\mu_1$ innerhalb dieses Intervalles die Eigenschaft π besitzen. Falls μ_1 selbst die Eigenschaft π besitzt, haben wir dies schon in dem Hilfssatze 11 bewiesen; wir dürfen daher (was übrigens keine Hilfe beim Beweise ist) annehmen, dass μ_1 selbst nicht die Eigenschaft π besitzt, also dass es keine positive Zahl t in E_ϱ gibt, für welche $\mu_1 t$ in der kleinen π-Schublade liegt. Dagegen gibt es gewiss Zahlen t in E_ϱ, für die $\mu_1 t$ in die 0-Schublade fällt, und zwar »ziemlich viele»; wir werden nämlich zeigen, dass es eine Länge $L'=L'(\mu_1)$ derart gibt, dass jedes Intervall dieser Länge L' mindestens ein solches t der Menge E_ϱ enthält. In der Tat:

1) Falls $\mu_1=0$ ist, ist dies sofort klar, weil hier für alle t in E_ϱ das Produkt $\mu_1 t$ gleich 0 ist und also in die 0-Schublade fällt, so dass wir daher als L' einfach eine Länge $L(\varrho)$ im Sinne des Hilfssatzes 7 verwenden können, d. h. eine Länge L mit der Eigenschaft, dass jedes Intervall dieser Länge mindestens eine Zahl der Menge E_ϱ enthält.

2) Falls $\mu_1 \neq 0$, lautet die Behauptung: Es gibt eine Länge L' derart, dass jedes Intervall dieser Länge eine Zahl t der Menge E_ϱ (also eine zu ϱ gehörige ganzzahlige Verschiebungszahl t) enthält, für welche das Produkt $\mu_1 t$ von einem ganzen Multiplum von 2π um weniger als $\frac{\pi}{6}$ abweicht, d. h. deren Abstand von einem ganzen Multiplum von $\nu=\frac{2\pi}{\mu_1}$ kleiner als $\frac{\pi}{6|\mu_1|}=\eta$ ist. Die Existenz einer solchen Länge L' haben wir aber, eben mit Hinblick auf diesen Beweis, in dem Hilfssatze 8 nachgewiesen.

Nachdem die Existenz dieser Länge L' festgestellt ist, können wir nun leicht den Beweis des Hilfssatzes 12 zu Ende führen. In der Tat können wir zeigen, dass die Zahl

$$h_1=\frac{\pi}{2L'}$$

von der erwünschten Art ist, dass also jede Zahl $\mu=\mu_1+h$ mit $0<|h|<h_1$ die Eigenschaft π besitzt, d. h. dass es zu jeder solchen Zahl $\mu=\mu_1+h$ eine positive Zahl t in E_ϱ gibt, für welche das Produkt μt in der kleinen π-Schublade liegt. Zu diesem Zwecke markieren wir in jedem der Intervalle $(0, L')$, $(L', 2L'), \ldots, ((n-1)L', nL'), \ldots$, eine Zahl t der Menge E_ϱ mit der vorher erwähnten Eigenschaft, d. h. eine solche Zahl t, für welche das Produkt $\mu_1 t$ in die 0-Schublade fällt, und bezeichnen diese t mit

$$t', t'', \ldots, t^{(n)}, \ldots;$$

ich behaupte, dass es unter diesen Zahlen eine gibt, deren Multiplum mit $\mu = \mu_1 + h$ in der kleinen π-Schublade liegt. Hierzu brauchen wir nur zu bedenken, dass wegen der Ungleichung

$$1 \leqq t^{(n+1)} - t^{(n)} < 2L'$$

die Folge $ht', ht'', \ldots, ht^{(n)}, \ldots$ monoton ist und der Ungleichung

$$0 < |h| \leqq |t^{(n+1)}h - t^{(n)}h| < 2L'|h| < \pi$$

genügt; denn hieraus folgt sofort die Existenz eines $t^{(n)}$, für welches $ht^{(n)}$ (mod. 2π) im Intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ liegt, und für dieses $t^{(n)}$ wird ja $(\mu_1 + h)t^{(n)} = \mu_1 t^{(n)} + ht^{(n)}$ in die kleine π-Schublade $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ fallen, weil $\mu_1 t^{(n)}$ in der 0-Schublade $\left(\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ gelegen ist.

Nunmehr sind wir im Stande das Lemma II, und damit den Fundamentalsatz, zu beweisen.

Beweis von Lemma II. Es sei also ausser unserem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\Omega > 0$ beliebig gegen. Wir markieren diejenigen Zahlen μ des abgeschlossenen Intervalles $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$, welche nicht die Eigenschaft π besitzen. Von solchen Zahlen μ gibt es, nach dem Hilfssatze 12, höchstens eine endliche Anzahl; wir bezeichnen sie mit $P_1, P_2, \ldots, P_M$ und behaupten, dass diese Zahlen P_m die Forderung des Lemma erfüllen. In der Tat werden wir zeigen, dass sich, falls ω beliebig klein gewählt ist, die Zahl $N = N(\omega)$ so gross bestimmen lässt, dass, wenn wir die N ersten positiven ganzzahligen Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ der Menge E_ε betrachten, für jedes μ, welches innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ liegt, mehr als ein Viertel der N Produkte

$$\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$$

numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir, nach dem Hilfssatze 11, zu jeder Zahl μ im abgeschlossenen Intervalle $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$, welche nicht eine der obigen M Zahlen P_m ist, d. h. welche die Eigenschaft π besitzt, ein kleines Intervall $i(\mu)$ um den Punkt μ herum und eine zugehörige ganze Zahl N_0 derart, dass für jedes $N > N_0$ mehr als ein Viertel der Produkte der N Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ mit einer beliebigen Zahl des Intervalles $i(\mu)$ numerisch $> \frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind. Dann »gehört» zu jedem Punkte μ des abgeschlossenen Intervalles $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ ein gewisses Intervall um den Punkt herum, nämlich, falls μ eine der M Zahlen P_m ist, das Intervall $(P_m - \omega, P_m + \omega)$, und falls $\mu \neq P_1, P_2, \ldots, P_M$ ist, das Intervall $i(\mu)$. Folglich gibt es nach dem HEINE-BOREL'schen Überdeckungssatz unter diesen Intervallen eine endliche Anzahl, welche schon für sich das ganze Intervall $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ überdecken. Von diesen letzten Intervallen lassen wir nun die (etwaigen) Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ weg; dann bleibt eine endliche Anzahl von Intervallen der Art $i(\mu)$ zurück, etwa

$$i(\mu_1), i(\mu_2), \ldots, i(\mu_R),$$

welche gewiss alle Punkte μ, welche innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ liegen, überdecken. Zu jedem dieser R Intervalle gehört aber ein Zahl N_0, etwa $N_0', N_0'', \ldots, N_0^{(R)}$, und es ist klar, dass eine Zahl N, welche grösser als diese R Zahlen ist, unserer Forderung genügt.

KAPITEL III.

Fourierreihen mit linear unabhängiger Exponentenfolge.

Es sei $f(x)$ eine fast periodische Funktion, deren Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ unendlich viele Glieder enthält. Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes:

Konvergenzsatz. *Falls die Fourierexponenten Λ_n der Funktion $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ linear unabhängig sind, d. h. falls bei keinem N eine Relation der Form*

$$C_1\Lambda_1 + C_2\Lambda_2 + \cdots + C_N\Lambda_N = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $C_1, C_2, \ldots, C_N$ besteht, wird nicht nur die Reihe $\Sigma |A_n|^2$, sondern auch die Reihe $\Sigma |A_n|$ selbst konvergieren.

Hieraus folgt sofort das

Corollar. *Für jede fast periodische Funktion $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ mit linear unabhängiger Exponentenfolge ist die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ im gewöhnlichen Sinne konvergent, und zwar gleichmässig für $-\infty < x < \infty$, mit der Summe $f(x)$.*

Denn die gleichmässige Konvergenz der Fourierreihe für $-\infty < x < \infty$ folgt sofort aus der Konvergenz der Majorantenreihe $\Sigma |A_n|$, und aus der gleichmässigen Konvergenz von $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ folgt weiter (nach dem Corollar des Eindeutigkeitssatzes), dass die Summe der Reihe mit der gegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt.

Der Beweis verläuft so, dass man aus der mittleren Konvergenz der Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$, also aus der Limesgleichung

$$\lim_{N \to \infty} M\{|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}|^2\} = 0 \tag{24}$$

auf die gewöhnliche Konvergenz, ja sogar auf absolute Konvergenz, schliesst. Der Grund für die Möglichkeit eines solchen Schlusses besteht darin, dass aus der Divergenz von $\sum |A_n|$ folgen würde, dass bei grossem N der Abschnitt $\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}$ nicht nur in gewissen Punkten der x-Achse numerisch sehr gross sein würde, sondern dass diese Punkte sogar Intervalle ausfüllen würden, deren relative Länge (im Vergleich zur ganzen x-Achse) für $N \to \infty$ nicht unendlich klein wäre; dies ist aber mit der Limesgleichung (24) nicht verträglich.[1]

Wir teilen den Beweis in drei Paragraphen ein.

§ 10.

Hilfssätze aus der Theorie der diophantischen Approximationen.

Neben dem Fundamentalsatz aus Kapitel II ist das wesentlichste Hilfsmittel beim Beweise des Konvergenzsatzes der berühmte Approximationssatz:

---

[1] Dieses Benehmen im Spezialfalle der linearen Unabhängigkeit der Exponenten steht in interessantem Gegensatz zu dem Verhalten in dem entgegengesetzten Sonderfalle, wo die Exponenten eine einfache arithmetische Progression bilden und also besonders stark linear verknüpft sind. In der Tat kann man hier nicht, wie aus der Theorie der gewöhnlichen Fourierreihen bekannt ist, aus der Divergenz der Reihe $\sum |a_n|$ schliessen, dass die Abschnitte $\sum_{-N}^{N} a_n e^{inkx}$ beliebig grosse Werte annehmen; und selbst wenn dies eintritt, lässt sich daraus nicht folgern, dass die relative Länge der entsprechenden Intervalle der x-Achse für $N \to \infty$ oberhalb einer festen positiven Schranke bleibt.

Kronecker'scher Satz. *Es seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *linear unabhängige reelle Zahlen, und* $\mu_1, \ldots, \mu_N$ *beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein reelles* x *und dazu gehörige ganze Zahlen* $g_1, \ldots, g_N$, *so dass die* N *Ungleichungen*

$$|x\lambda_n - \mu_n - g_n| < \varepsilon \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

sämtlich erfüllt sind.

Geometrisch sagt dieser Satz aus, dass im Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n=1, \ldots, N)$ des N-dimensionalen Raumes die Punkte Q_x, die aus den Punkten der Geraden

$$\eta_1 = x\lambda_1, \; \eta_2 = x\lambda_2, \ldots, \; \eta_N = x\lambda_N \qquad (-\infty < x < \infty)$$

durch Reduktion der Koordinaten modulo 1 entstehen, überall dicht liegen.

Um im folgenden eine den Rand des Einheitswürfels betreffende, im Wesen der Sache nicht liegende Schwierigkeit zu vermeiden, ziehen wir vor, mit WEYL, statt von dem gewöhnlichen N-dimensionalen euclidischen Raum E_N, lieber von dem »geschlossenen» N-dimensionalen euclidischen Raum G_N (der mit einem N-dimensionalen Torus homöomorph ist) zu sprechen, welcher aus E_N entsteht, wenn jedes System von unter einander modulo 1 kongruenten Punkten $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ als ein einziger »Punkt» aufgefasst wird, wenn also zwei Wertesysteme $(\eta'_1, \ldots, \eta'_N)$ und $(\eta''_1, \ldots, \eta''_N)$, für welche $\eta'_n \equiv \eta''_n$ (mod. 1) sind, identifiziert werden; dieser Raum G_N heisst »euclidisch», weil zu jedem Punkt desselben eine Umgebung gehört, wo die euclidische Geometrie gültig ist.

Wir brauchen den KRONECKER'schen Satz — dass die Punkte der obigen Geraden im geschlossenen Raum G_N überall dicht liegen — in einer von WEYL verschärften Form, wo er besagt, dass diese Punkte sogar überall gleich dicht liegen.[1] Für die spätere Anwendung wird es bequem sein, diesen verschärften Satz so zu formulieren, dass die betrachtete Gerade des N-dimensionalen Raumes nicht eben durch den Anfangspunkt $(0, 0, \ldots, 0)$, sondern durch einen beliebig gegebenen Punkt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ des Raumes gezogen wird.

Kronecker-Weyl'scher Satz. *Es seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *linear unabhängige, und* $\theta_1, \ldots, \theta_N$ *beliebige reelle Zahlen. Es sei ferner im geschlossenen Raum* G_N *ein parallel den Achsen orientiertes Parallelepiped* P *mit den Seitenlängen* $d_n < 1$ *und dem Raum-*

[1] H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. Bd. 77, (1916), S. 313—352.

inhalt $I = d_1 d_2 \cdots d_N$ *beliebig gegeben, und es bedeute* $\Omega = \Omega(P, T)$ *die Menge aller Werte* x *im Intervalle* $-T < x < T$, *für die der durch die Koordinaten* $(\theta_1 + x\lambda_1, \ldots, \theta_N + x\lambda_N)$ *bestimmte Punkt dem Parallelepiped* P *angehört. Dann besteht bei jedem* $T > 0$ *die Menge* Ω *aus den Punkten einer endlichen Anzahl von Intervallen, und es gilt, wenn* $L(T)$ *die Summe der Längen dieser Intervalle bezeichnet, die Limesgleichung*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} = I.$$

Mit anderen Worten: es ist die relative Länge der Intervalle der x-Achse, für welche der Punkt Q_x: $(\theta_1 + x\lambda_1, \ldots, \theta_N + x\lambda_N)$ dem Parallelepiped P angehört, gleich dem Inhalte I des Parallelepipedes, d. h. gleich der apriorischen Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich gewählter Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ in das Parallelepiped hineinfällt.

Was den Beweis dieser Verschärfung des Kronecker'schen Satzes anbelangt, sei bemerkt, dass die darin behauptete gleichmässig dichte Verteilung, wie vom Verfasser gezeigt[1], direkt aus dem Überalldichtliegen gefolgert werden kann. Es muss aber gleich hinzugefügt werden, dass sich bei vielen anderen Problemen über gleichmässige Verteilung die ursprüngliche Weyl'sche Beweismethode als die »einzig richtige» erwiesen hat.

§ II.

Ein Hilfssatz über geometrische Wahrscheinlichkeit.

Bevor wir den vorhergehenden Satz über diophantische Approximationen auf unser Problem anwenden können, müssen wir zunächst den folgenden Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz. *Es sei* $\sum_1^\infty r_n$ *eine divergente Reihe mit positiven Gliedern und die Zahl* $K > 0$ *beliebig gegeben. Dann gibt es eine positive Zahl* w *und eine positive ganze Zahl* N_0 *mit den folgenden Eigenschaften: Bei jedem* $N > N_0$ *lässt sich im geschlossenen euclidischen Raume* G_N *eine endliche Anzahl* $\nu = \nu(N)$ *von*

---

[1] Vergl. H. Bohr und R. Courant, Neue Anwendungen der Theorie der diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion, Crelles Journal, Bd. 144, (1914), S. 249—274.

nicht über einander greifenden, parallel den Achsen orientierten Parallelepipeden $p_1, \dots, p_\nu$ (mit Seitenlängen < 1) so finden, dass ihr Gesamtinhalt $> w$ ist, und für jeden Punkt $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ eines dieser Parallelepipede die Ungleichung

$$\left|\sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n}\right| > K \tag{25}$$

besteht. Mit anderen Worten: es ist bei jedem $N > N_0$ die Wahrscheinlichkeit, dass der absolute Wert der Summe

$$S(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) = \sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n}$$

die Zahl K übersteigt, grösser als w.

Beweis. Es werde die ganze Zahl N_0 so gewählt, dass

$$\sum_{n=1}^{N_0} r_n > K + \delta$$

ist, wo δ eine beliebige positive Zahl, etwa 1, bedeutet, und es sei dann, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, im N_0-dimensionalen Raum G_{N_0} ein kleiner, parallel den Achsen orientierter Würfel q' um den Punkt $(0, \dots, 0)$ so bestimmt, dass für jeden Punkt $(\eta_1, \dots, \eta_{N_0})$ dieses Würfels die Ungleichung

$$\Re\left(\sum_{n=1}^{N_0} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) > K + \delta$$

besteht. Es bezeichne $i_0 (< 1)$ den Rauminhalt dieses Würfels q'; ich behaupte, dass die obige Zahl N_0 und die Zahl

$$w = \frac{i_0}{3}$$

den Forderungen des Satzes genügen.

Es sei also N eine feste ganze Zahl $> N_0$. Wir betrachten zunächst einen beliebigen Punkt $(\eta_1, \dots, \eta_{N_0}, \eta_{N_0+1}, \dots, \eta_N)$ des Raumes G_N, für welchen die N_0 ersten Koordinaten $(\eta_1, \dots, \eta_{N_0})$ einen Punkt des Raumes G_{N_0} bestimmen, welcher im obigen Würfel q' gelegen ist. Dann gilt die Ungleichung

$$\left|\sum_{1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right| \geqq \Re\left(\sum_{1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) = \Re\left(\sum_{1}^{N_0} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) + \Re\left(\sum_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right)$$

$$> K + \delta + \Re\left(\sum_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right),$$

woraus sofort hervorgeht, dass die gewünschte Ungleichung

$$(25) \qquad \left|\sum_{1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right| > K$$

gewiss besteht, falls die $(N-N_0)$ letzten Koordinaten $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ so gewählt werden, dass sie die Ungleichung

$$(26) \qquad \Re\left(\sum_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) > -\delta$$

befriedigen.[1] Es ist daher unser Hilfssatz bewiesen, falls es gelingt die Existenz einer endlichen Anzahl $\nu = \nu(N)$ von nicht über einander greifenden, parallel den Achsen orientierten Würfeln $q_1'', \ldots, q_\nu''$ des $(N-N_0)$-dimensionalen Raumes G_{N-N_0} mit einem Gesamtinhalt $> \frac{1}{3}$ derart nachzuweisen, dass für jeden Punkt $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ eines dieser Würfel die obige Ungleichung (26) besteht; denn die ν Parallelepipede $p_1, \ldots, p_\nu$ des N-dimensionalen Raumes G_N, welche dadurch bestimmt werden, dass jedes von ihnen bei Projektion auf den Raum G_{N_0} den Würfel q' ergibt, während ihre Projek-

---

[1] Es mag zur Erläuterung bemerkt sein, dass es bei der folgenden Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Rest $\sum\limits_{N_0+1}^{N}$ den Anfang $\sum\limits_{1}^{N_0}$ nicht herunterdrückt, also dass etwa $\Re\left(\sum\limits_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) > 0$ ist, durchaus wesentlich ist, dass man die ganze Vektorsumme $\sum\limits_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}$ zusammenhält und nicht etwa so grob verfährt sie in ihre einzelnen Glieder aufzulösen und zu verlangen, dass jedes Glied für sich einen positiven Realteil haben solle. Denn hierbei würde bei Vergrösserung von N um eine Einheit offenbar jedesmal ein neuer Faktor $\frac{1}{2}$ hinzukommen — entsprechend der Wahrscheinlichkeit, dass der neue Vektor gerade in die positive Halbebene zeigt — und man bekäme also nicht für $N \to \infty$ eine feste positive untere Schranke für die gesuchte Gesamtwahrscheinlichkeit.

tionen auf den komplementären Raum G_{N-N_0} je auf einen der ν Würfel $q_1'', \ldots, q_\nu''$ fallen, werden ja alsdann von der im Satze erwünschten Art sein, d. h. ihr Gesamtinhalt ist $> i_0 \cdot \frac{1}{3} = w$ und in jedem Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ eines dieser Parallelepipede gilt die Ungleichung (25).

Um die Existenz solcher Würfel $q_1'', \ldots, q_\nu''$ des $(N - N_0)$-dimensionalen Raumes G_{N-N_0} zu beweisen, betrachten wir zunächst die Menge E der sämtlichen Punkte $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ des Raumes G_{N-N_0}, für welche die Ungleichung (26) besteht. Es ist diese Menge E offenbar (aus Stetigkeitsgründen) eine offene Menge, d. h. falls Q ein Punkt der Menge ist, wird eine gewisse Umgebung von Q ebenfalls der Menge angehören, und es ist daher die Menge E im Lebesgue'schen Sinne messbar, etwa mit dem Masse Γ. Um unsere Behauptung, dass die Menge E eine endliche Anzahl von nicht übereinander greifenden, parallel den Achsen orientierten Würfeln mit einem Gesamtinhalt $> \frac{1}{3}$ enthält, zu begründen, genügt es daher nachzuweisen, dass das Mass Γ der Menge E grösser als $\frac{1}{3}$ ist; denn aus jeder offenen Punktmenge mit einem Mass $> c$, lässt sich bekanntlich eine endliche Anzahl von Würfeln herausgreifen, deren Gesamtinhalt ebenfalls $> c$ ist.

Es ist hiermit der Beweis auf die Ungleichung $\Gamma > \frac{1}{3}$ zurückgeführt; wir werden übrigens zeigen, dass

$$\Gamma \geqq \frac{1}{2}$$

ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir gleichzeitig mit unserer Menge E, welche aus allen Punkten $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ des Raumes G_{N-N_0} besteht, für welche die Ungleichung

$$(26) \qquad \Re\left(\sum_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) > -\delta$$

gilt, die Punktmenge E^*, welche aus denjenigen Punkten $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ des Raumes G_{N-N_0} besteht, welche die Ungleichung

$$(26^*) \qquad \Re\left(\sum_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) < \delta$$

befriedigt. Es ist klar, dass die beiden Mengen E und E^* mit einander kongruent sind und daher dasselbe Mass besitzen; denn falls der Punkt $Q:(\eta_{N_0+1},\ldots,\eta_N)$ einer dieser beiden Mengen angehört, wird der Punkt $Q_1:\left(\eta_{N_0+1}+\frac{1}{2},\ldots,\eta_N+\frac{1}{2}\right)$, welcher aus Q entsteht, wenn alle Koordinaten um $\frac{1}{2}$ geändert werden, offenbar der anderen Menge angehören, so dass die eine Menge aus der anderen durch eine einfache »Parallelverschiebung» hervorgeht. Nun erfüllt aber jeder Punkt $(\eta_{N_0+1},\ldots,\eta_N)$ des Raumes mindestens eine der Ungleichungen (26) und (26*), d. h. die Vereinigungsmenge der beiden Punktmengen E und E^* gibt uns den ganzen Raum G_{N-N_0}. Hieraus folgt aber sofort, da E und E^* beide das Mass Γ haben und der ganze geschlossene Raum G_{N-N_0} vom Masse 1 ist, dass $2\Gamma \geqq 1$ sein muss, d. h. dass $\Gamma \geqq \frac{1}{2}$ ist.

§ 12.

Beweis des Konvergenzsatzes.

Es sei $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine fast periodische Funktion mit linear unabhängiger Exponentenfolge; wir haben die Konvergenz der Reihe $\Sigma|A_n|$ zu beweisen. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen also an, dass $\Sigma|A_n|$ divergiert. Es sei

$$A_n = r_n e^{2\pi i\theta_n} \qquad (r_n > 0) \qquad \text{und} \qquad \Lambda_n = 2\pi\lambda_n$$

gesetzt; wir betrachten gleichzeitig mit der Fourierreihe

$$\sum_1^\infty A_n e^{i\Lambda_n x} = \sum_1^\infty r_n e^{2\pi i(\theta_n+\lambda_n x)} \tag{27}$$

die Reihe

$$\sum_1^\infty r_n e^{2\pi i\eta_n}, \tag{28}$$

wo $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ von einander unabhängige Variable bedeuten. Wir setzen nunmehr $K = G+1$, wo G wie immer die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet, und wenden den Hilfssatz des § 11 auf die divergente Reihe mit positiven Gliedern Σr_n und die Zahl $K > 1$ an. Der Hilfssatz ergibt uns alsdann die Existenz einer positiven Grösse w und einer positiven ganzen Zahl N_0 derart, dass für jedes feste $N > N_0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abschnitt $\sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n}$ der Reihe (28) numerisch grösser als K ist, grösser als w ausfällt. Hieraus folgt aber weiter nach dem KRONECKER-WEYL'schen Satze, dass für jedes $N > N_0$ die relative Länge der Intervalle der x-Achse, für welche der Abschnitt $\sum_1^N r_n e^{2\pi i(\theta_n + \lambda_n x)}$ der Fourierreihe (27) numerisch grösser als K ist, ebenfalls grösser als w sein wird. Nun gilt aber in jedem Punkte x, in welchem

$$\left|\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right| > K$$

ist, die Ungleichung

$$\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right| \geqq \left|\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right| - |f(x)| > K - G = 1,$$

und es wäre somit für jedes $N > N_0$

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2 dx > w.$$

Dies verträgt sich aber nicht mit dem Fundamentalsatz, nach welchem für $N \to \infty$

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} \to 0.$$

Hiermit ist der Konvergenzsatz bewiesen.

Wir bemerken schliesslich noch, dass sich durch Kombination des Konvergenzsatzes mit dem Satze XII des § 3 das folgende Resultat ergibt: *Es sei $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ eine beliebig gegebene Folge von linear unabhängigen Zahlen; dann ist dafür, dass eine Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ als Fourierreihe zu einer fast periodischen Funktion gehört, notwendig und hinreichend, dass $\Sigma|A_n|$ konvergiert.* Denn einerseits wird, falls $\Sigma|A_n|$ konvergiert, (nach dem Satze XII) die Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ gewiss eine Fourierreihe sein, nämlich die Fourierreihe der Summe $f(x)=\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$; und andererseits ist, falls $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ die Fourierreihe einer fast periodischen Funktion bildet, (nach dem Konvergenzsatz) die Reihe $\Sigma|A_n|$ konvergent.

Diese Tatsache zeigt besonders deutlich, wie gross der Unterschied ist zwischen Fourierreihen mit linear unabhängigen Exponenten und den gewöhnlichen Fourierreihen rein periodischer Funktionen, wo die Exponenten eine arithmetische Progression bilden. Denn es scheint bekanntlich nicht möglich zu sein, einfache notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, welche eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ erfüllen muss, um die Folge der Fourierkonstanten einer rein periodischen stetigen Funktion zu sein.

ZUSÄTZE.

1. Zur Definition der Fastperiodizität.

Die Definition, durch welche wir aus der Gesamtheit aller (für $-\infty<x<\infty$ stetigen) Funktionen die Klasse unserer »fast periodischen» Funktionen herausgehoben haben, war die folgende: *Zu jedem $\varepsilon>0$ soll es eine Länge $l=l(\varepsilon)$ derart geben, dass jedes Intervall dieser Länge mindestens eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ enthält.* Es erhebt sich von selbst die Frage, ob man nicht vielleicht — unter Beibehaltung des Gedankens, die Existenz von »Verschiebungszahlen» zu fordern — andere und noch einfachere Definitionen hätte aufstellen können, die ebenfalls zu wichtigen und abgerundeten Klassen von Funktionen hätten führen können, welche auch als natürliche Verallgemeinerung der Klasse der rein periodischen Funktionen anzusehen wären. In diesem Zusatze sollen einige Bemerkungen zu dieser Frage gemacht werden, welche zeigen, dass die bei einem ersten Versuche etwa am naheliegendsten erscheinenden Definitionen nicht zu diesem Ziele führen.

I. Zunächst könnte man, um zu einer Verallgemeinerung der rein periodischen Funktionen zu kommen, von den zu betrachtenden Funktionen (die immer stetig gedacht sind) nur verlangen, *dass es überhaupt zu jedem $\varepsilon>0$ eine von Null verschiedene Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ geben soll.* Dass aber hierdurch keine Klasse von Funktionen abgegrenzt wird, welche auch nur irgend etwas Charakteristisches von den Eigenschaften rein periodischer Funktionen beibehalten haben, geht z. B.

daraus hervor, dass schon jede Funktion, die nur gleichmässig stetig ist, zu dieser Klasse gehört; in der Tat lässt sich ja zu jeder solchen Funktion $f(x)$, falls $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben wird, ein δ so klein bestimmen, dass für alle x die Ungleichung $|f(x+\delta)-f(x)| < \varepsilon$ besteht.

II. Es ist nach der obigen Bemerkung klar, dass man, um wirklich periodenartige Eigenschaften zu erhalten, dafür sorgen muss, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ existieren, die nicht mit ε gegen Null konvergieren. Es wäre demnach natürlich die folgende Definition aufzustellen: *Zu unserer Funktionenklasse sollen diejenigen Funktionen $f(x)$ gerechnet werden* — wir wollen sie zur Abkürzung »*periodenartig*» nennen — *für welche es eine absolute Konstante $c > 0$ derart gibt, dass bei jedem $\varepsilon > 0$ eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ existiert, die $> c$ ist.* Es sei sogleich die Bemerkung hinzugefügt, dass diese Definition von dem besonderen Werte von c unabhängig ist, weil die aufgestellte Forderung tatsächlich damit aequivalent ist, zu verlangen, dass es zu jedem ε unendlich viele Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ gibt und unter ihnen beliebig grosse. Falls nämlich T beliebig gross gegeben wird und $\tau_1 > c$ eine zu $\frac{\varepsilon}{N}$ gehörige Verschiebungszahl ist, wo die ganze Zahl N so gross gewählt ist, dass $Nc > T$ ausfällt, wird die Zahl $\tau = N\tau_1$ offenbar eine zu ε gehörige Verschiebungszahl sein, welche $> T$ ist.

Das Ziel dieses Zusatzes ist nun vor allem der Nachweis, dass auch diese Definition — im Gegensatz zu unserer Definition der fast periodischen Funktionen, wo ja »etwas» mehr verlangt wurde — nicht zu einer abgerundeten Klasse von Funktionen führt. In der Tat werden wir den folgenden, auch an sich ganz interessanten Satz beweisen:

Es braucht die Summe zweier periodenartiger Funktionen nicht wieder periodenartig zu sein.

Wir werden zunächst ein charakteristisches Beispiel einer periodenartigen (übrigens beschränkten und gleichmässig stetigen) Funktion konstruieren[1], aus dem wir dann den obigen Satz unmittelbar werden ableiten können.

Beispiel einer periodenartigen Funktion. Wir bemerken zunächst, dass es, um die »Periodenartigkeit» einer Funktion zu erkennen, offenbar genügt, an Stelle aller $\varepsilon > 0$, nur eine Folge von gegen Null abnehmenden Zahlen ε, etwa

[1] Nur aus Bequemlichkeitsgründen werden wir sie aus geradlinigen Stücken aufbauen; dass hierdurch ihre Ableitung unstetig wird, ist völlig belanglos.

die Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, ins Auge zu fassen; so werden wir in unserem Beispiel die Periodenartigkeit der angegebenen Funktion $f(x)$ dadurch nachweisen, dass wir eine Reihe von wachsenden positiven Zahlen $\tau_2 < \tau_3 < \cdots < \tau_n < \cdots$ derart angeben, dass τ_n eine zu $\frac{1}{n}$ gehörige Verschiebungszahl ist, d. h. dass bei jedem $n=2, 3, \ldots$ die Ungleichung

$$|f(x+\tau_n)-f(x)| \leqq \frac{1}{n} \tag{29}$$

für alle x besteht.

Wir gehen nun schrittweise vor.

1ter Schritt. Zunächst bilden wir eine Funktion $f_1(x)$, die überall gleich 0 ist, ausser in einem endlichen Intervalle, etwa die Funktion

$$f_1(x)=\begin{cases} 1-|x| & \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{für} \quad |x|>1 \end{cases}$$

(siehe Fig. 13 a, S. 115, wo der besseren Übersichtlichkeit halber der Masstab der Ordinate vergrössert wurde).

2ter Schritt. Die zweite Funktion $f_2(x)$ wird durch die Gleichung

$$f_2(x)=\frac{1}{2} f_1(x+\tau_2)+f_1(x)+\frac{1}{2} f_1(x-\tau_2)$$

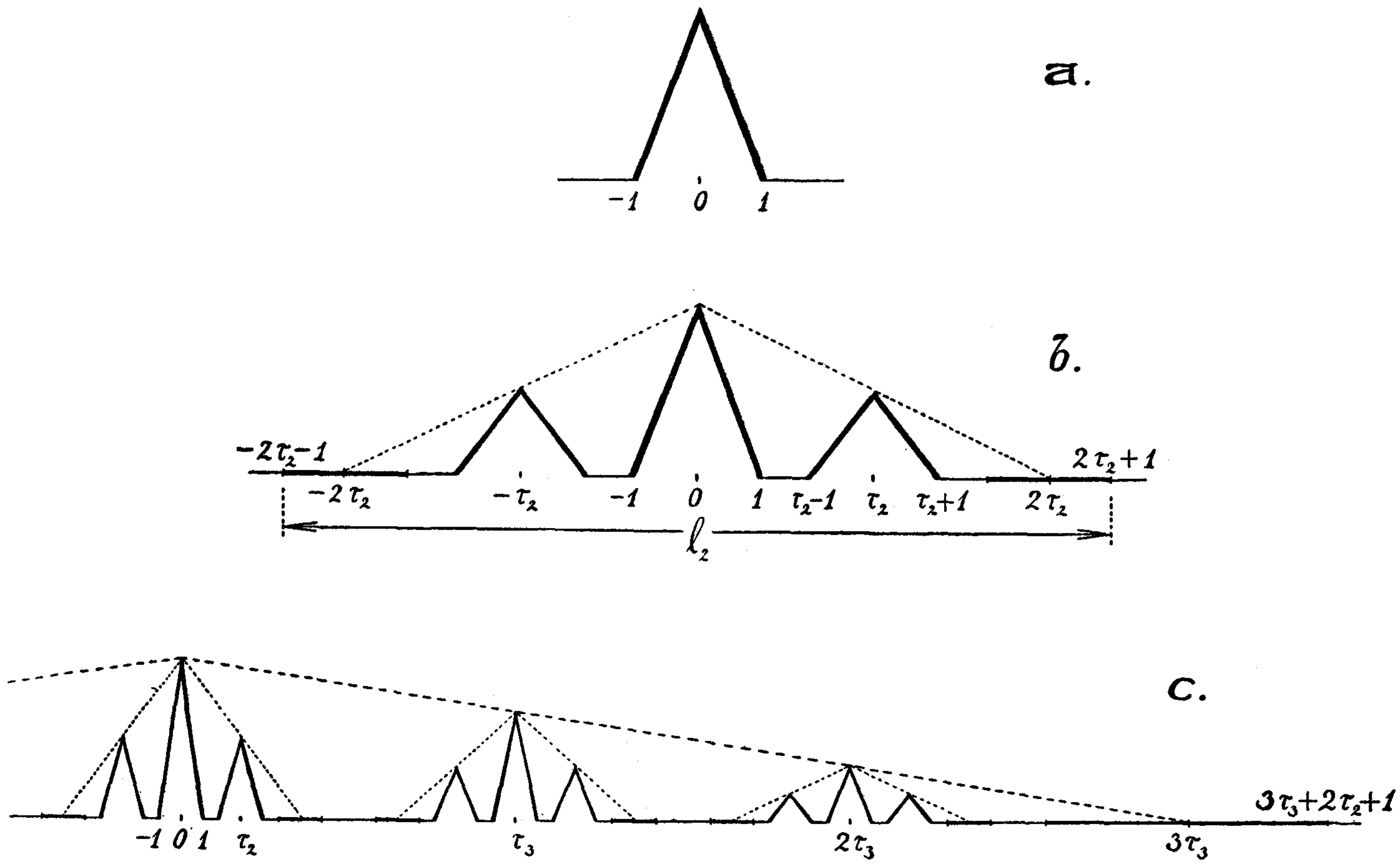
definiert (siehe Fig. 13 b), wo die positive Zahl τ_2 beliebig gewählt ist, mit der einzigen Einschränkung, dass die »Hügel» nicht übereinandergreifen, d. h. dass $\tau_2-1>1$, also $\tau_2>2$ ist. Wie aus der Figur unmittelbar zu sehen, erfüllt diese Funktion $f_2(x)$ für alle x die Ungleichung

$$|f_2(x+\tau_2)-f_2(x)| \leqq \frac{1}{2}.$$

Unter der »Länge» l_2 der zweiten »Hügelkette» werden wir die Länge des Intervalles $(-2\tau_2-1,\ 2\tau_2+1)$ also die Zahl $2(2\tau_2+1)$ verstehen; hierbei haben wir auch die beiden »Nullhügel», die »über» dem Intervalle $(-2\tau_2-1,\ -2\tau_2+1)$ bzw. »über» $(2\tau_2-1,\ 2\tau_2+1)$ liegen, mit zur Hügelkette gerechnet (vgl. die Figur).

3ter Schritt. Die dritte Funktion $f_3(x)$ wird durch die Gleichung

$$f_3(x)=\frac{1}{3} f_2(x+2\tau_3)+\frac{2}{3} f_2(x+\tau_3)+f_2(x)+\frac{2}{3} f_2(x-\tau_3)+\frac{1}{3} f_2(x-2\tau_3)$$



a.
−1
0
1
b.
−2τ₂−1
2τ₂+1
−2τ₂
−τ₂
−1
0
1
τ₂−1
τ₂
τ₂+1
2τ₂
ℓ₂
c.
3τ₃+2τ₂+1
−1 0 1
τ₂
τ₃
2τ₃
3τ₃

Fig. 13.

definiert, wo τ_3 eine beliebig gewählte Zahl bedeutet, die nur $> l_2$, d. h. $> 2(2\tau_2+1)$ sein soll. (Vgl. Fig. 13 c; in dieser Figur ist nur die rechte »Hälfte» von $f_3(x)$ gezeichnet; ausserdem ist der Masstab der Ordinate neuerlich geändert.) Es ist klar, dass $f_3(x)$, sowie $f_2(x)$, die Ungleichung

$$|f_3(x+\tau_2)-f_3(x)| \leqq \frac{1}{2}$$

erfüllt; $f_3(x)$ erfüllt aber offenbar ausserdem noch die Ungleichung

$$|f_3(x+\tau_3)-f_3(x)| \leqq \frac{1}{3}.$$

Unter der Länge l_3 der dritten Hügelkette werden wir nun die Länge des Intervalles $(-3\tau_3-2\tau_2-1,\ 3\tau_3+2\tau_2+1)$, d. h. die Zahl $2(3\tau_3+2\tau_2+1)$, verstehen.

Wir fahren in dieser Weise fort und bestimmen die Funktionen $f_4(x)$, $f_5(x), \ldots$, indem wir die Funktion $f_n(x)$ folgendermassen aus der Funktion $f_{n-1}(x)$ ableiten:

n^{ter} Schritt. Es wird gesetzt:

$$f_n(x) = \sum_{m=n-1}^{1} \frac{n-m}{n} f_{n-1}(x+m\tau_n) + f_{n-1}(x) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{n-m}{n} f_{n-1}(x-m\tau_n),$$

wo τ_n beliebig gewählt wird, nur so, dass $\tau_n > l_{n-1}$, d. h. (wie durch Induktion sofort zu sehen) so, dass $\tau_n > 2((n-1)\tau_{n-1}+(n-2)\tau_{n-2}+\cdots+2\tau_2+1)$ ist. Diese Funktion $f_n(x)$ befriedigt offenbar nicht nur (wie $f_{n-1}(x)$) die $n-2$ Ungleichungen

$$|f_n(x+\tau_r)-f_n(x)| \leqq \frac{1}{r} \qquad (r=2, 3, \ldots, n-1)$$

sondern auch die neue:

$$|f_n(x+\tau_n)-f_n(x)| \leqq \frac{1}{n}.$$

Grenzübergang. Wir definieren nunmehr die gewünschte Funktion $f(x)$ durch die Limesgleichung

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Es ist klar, dass dieser Limes existiert; denn bei jedem festen x haben die Funktionswerte $f_n(x)$ von einer gewissen Stelle an, d. h. für $n > N = N(x)$, einen konstanten, d. h. von n unabhängigen Wert. Und es ist ferner klar, dass die Funktion $f(x)$ periodenartig ist, da sie bei jedem festen $n \geqq 2$ (und alle x) die Ungleichung

$$|f(x+\tau_n)-f(x)| \leqq \frac{1}{n} \tag{29}$$

erfüllt; in der Tat gilt ja für $N \geqq n$ die Ungleichung

$$|f_N(x+\tau_n)-f_N(x)| \leqq \frac{1}{n},$$

welche, wenn wir N gegen Unendlich wachsen lassen (während x und τ_n festgehalten werden), in die Ungleichung (29) übergeht.

Wir gelangen nunmehr zum Beweise unserer Behauptung, dass zwei periodenartige Funktionen existieren, deren Summe nicht wieder periodenartig ist. Wir benutzen hierzu zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ vom Typus des obigen Beispieles, deren entsprechende Zahlenfolgen τ_n wir mit τ_n' und τ_n'' bezeichnen. Es ist klar, dass unsere Aufgabe, die Nicht-Periodenartigkeit von $\varphi(x)+\psi(x)$ zu zeigen, gelöst ist, falls wir durch Wahl der Grössen τ_n' und τ_n'' erreichen können, dass keiner der Hügel der einen Funktion mit einem der Hügel der zweiten Funktion irgend einen Punkt gemeinsam hat, abgesehen natürlich vom »Ausgangshügel» über dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$; falls nämlich dies erreicht ist, wird ja die Summe $\varphi(x)+\psi(x)$ im Punkte $x=0$ den den Wert $1+1=2$ haben, aber in jedem Punkte x mit $|x|>1$ einen Wert $\leqq 1$ besitzen, so dass zu einem gegebenen $\varepsilon<1$ $\left(\text{z. B. zu } \varepsilon=\frac{1}{2}\right)$ gewiss keine beliebig grossen Verschiebungszahlen existieren. Wir bemerken zunächst, dass es offenbar genügt die τ' und τ'' so zu bestimmen, dass bei jedem festen n keiner der Hügel der n^{ten} Hilfsfunktion $\varphi_n(x)$ mit einem der Hügel der n^{ten} Hilfsfunktion $\psi_n(x)$ einen Punkt gemeinsam hat (natürlich immer abgesehen vom Ausgangshügel). Um nun die Möglichkeit einer solchen Bestimmung darzutun wenden wir das Verfahren der vollständigen Induktion an. Wir bestimmen zunächst τ_2' und τ_2'' so, dass $\varphi_2(x)$ nicht mit $\psi_2(x)$ in dem erwähntem Sinne kollidiert; dies ist möglich, weil wir ja die Zahlen τ_2' und τ_2'' ganz frei wählen können, nur so, dass sie beide >2 sind. Wir denken uns nunmehr auch noch die Zahlen $\tau_3', \tau_4', \ldots, \tau_{n-1}'$ und $\tau_3'', \tau_4'', \ldots, \tau_{n-1}''$ so bestimmt, dass $\varphi_{n-1}(x)$ und $\psi_{n-1}(x)$ kollisionsfrei sind; es handelt sich dann darum, nachzuweisen, dass es möglich ist τ_n' und τ_n'' so zu wählen, dass auch $\varphi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ nicht kollidieren. Zu diesem Zwecke wählen wir zuerst τ_n' so gross im Verhältnis zu τ_{n-1}'', dass $\varphi_n(x)$ nicht mit $\psi_{n-1}(x)$ kollidiert, und dann τ_n'' so gross im Verhältnis zu τ_n', dass $\psi_n(x)$ nicht mit $\varphi_n(x)$ kollidiert. Die Durchführbarkeit dieses Verfahrens ist offenbar dadurch gegeben, dass, falls $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ festgelegt sind, τ_n ganz beliebig, nur oberhalb einer gewissen Schranke gewählt werden kann. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nachdem sich somit gezeigt hat, dass bereits die Frage nach der Invarianz des Begriffes der »Periodenartigkeit» gegenüber Addition verneinend zu beantworten ist und daher auch diese Definition als nicht gut brauchbar beiseite gelegt werden muss, bietet sich wohl unsere Definition der »Fastperiodizität» als eine sehr naheliegende dar. Gerade die bei ihr aufgestellte Forderung der Existenz einer Länge $l(\varepsilon)$, durch die der Abstand der Verschiebungszahlen auch nach oben eingeschränkt wird, macht ein derartiges gegenseitiges Verhalten zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, wie es eben im Falle der »Periodenartigkeit» geschildert wurde, unmöglich. Trotzdem muss es wohl überraschend erscheinen, dass man bereits durch eine so einfache Art der Verallgemeinerung des Begriffes der Periodizität zu einer Funktionenklasse gelangen kann, die nicht nur in sich abgerundet ist, sondern genau diejenigen (stetigen) Funktionen umfasst, welche in periodische Schwingungen aufgelöst werden können; es wäre wohl kaum von vorneherein zu erwarten, dass man diese Funktionenklasse durch Verschiebungseigenschaften charakterisieren könnte, ohne gezwungen zu sein den Verschiebungszahlen ganz andersartige Einschränkungen, die etwa durch die Schwingungsexponenten bedingt wären, aufzuerlegen.

Ich füge hinzu, dass mir bei der Aufsuchung der Definition der Fastperiodizität der im nächsten Zusatz zu besprechende BOHL-WENNBERG'sche Satz über diophantische Approximationen sehr nützlich gewesen ist, aus welchem unmittelbar gefolgert werden wird, dass jede Summe von endlich vielen rein periodischen Funktionen den in der Definition der Fastperiodizität aufgestellten Forderungen genügt.

Schliesslich sei noch in diesem Zusammenhange, wo von der Definition einer verallgemeinerten Periodizität die Rede ist, darauf aufmerksam gemacht, dass man sich bei gewissen Fragen — vor allem bei der Frage, wann eine gegebene Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine »Fourierreihe» ist, d. h. zu einer bestimmten fast periodischen Funktion gehört — nicht, wie es in diesen beiden Abhandlungen geschieht, auf die Betrachtung stetiger Funktionen beschränken kann. Schon im Falle der rein periodischen Funktionen wurde ja eine einfache Beantwortung der erwähnten Frage (wie sie durch den RIESZ-FISCHER'schen Satz gegeben wird) erst dann möglich, als man die beliebigen, nur im Lebesgue'schen Sinne integrierbaren Funktionen in die Betrachtung einführte. Solche Untersuchungen, welche für den Fall der fast periodischen Funktionen nicht ganz einfach erscheinen, wurden bei diesen ersten Veröffentlichungen ganz ausser Betracht gelassen.

2. Aequivalenz des Corollares zu Satz III mit einem Satz über diophantische Approximationen.

In § I haben wir als Corollar des Satzes, dass die Summe zweier fast periodischer Funktionen wieder eine fast periodische Funktion ist, das folgende Ergebnis für den Spezialfall rein periodischer Funktionen gewonnen:

Satz A. *Die Summe*

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

einer beliebigen endlichen Anzahl von stetigen rein periodischen Funktionen ist eine fast periodische Funktion.

Wir wollen hier zeigen, dass dieser Satz A seinem eigentlichen Inhalte nach mit einem bekannten Satz (dem unten stehenden Satze B) über diophantische Approximationen völlig aequivalent ist. Dieser Satz, welcher wohl zuerst von BOHL[1] bei Gelegenheit seiner Arbeiten über die in der Einleitung genannten »quasi-periodischen» Funktionen aufgestellt und dann später von WENNBERG[2] bei einer Untersuchung über Dirichlet'sche Reihen wiedergefunden wurde, bildet eine Verschärfung des bekannten DIRICHLET-KRONECKER'schen Satzes, nach welchem in N arithmetischen Progressionen $\{m p_1\}$, $\{m p_2\}$, $\ldots$, $\{m p_N\}$, welche alle vom Nullpunkte ausgehen, immer wieder Punkte $m_1 p_1$, $m_2 p_2$, $\ldots$, $m_N p_N$ zu finden sind, die mit beliebig vorgegebener Genauigkeit zusammenfallen.

---

[1] P. BOHL, Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie, Crelles Journal, Bd. 131 (1906), S. 268—321. (Vergl. insb. S. 279.) Hier ist der Satz zwar nur für den Fall ausgesprochen, wo die reziproken Werte der Zahlen p linear unabhängig sind, aber daraus folgt sofort seine Gültigkeit für beliebige p.

[2] S. WENNBERG, Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen, Dissertation (Upsala 1920), S. 19. Es bedeutet nur eine andere Formulierung des Satzes, wenn er hier für stetige statt für ganzzahlige Parameter ausgesprochen wird.

Satz B. *Es seien* $p_1, \ldots, p_N$ *beliebige reelle Zahlen* $\neq 0$, *und* $\delta > 0$ *beliebig gegeben. Dann gibt es eine Länge* $l = l(p_1, \ldots, p_N, \delta)$ *derart, dass jedes Intervall dieser Länge mindestens eine Zahl* τ *enthält, welche den* N *diophantischen Ungleichungen*

$$|\tau - m_i p_i| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, N;\ m_i \text{ ganz})$$

genügt, d. h. dass in jedem Intervall dieser Länge l eine Zahl τ gelegen ist mit der Eigenschaft, dass das Intervall $(\tau - \delta, \tau + \delta)$ einen Punkt jeder der N arithmetischen Progressionen $\{m p_1\}, \ldots, \{m p_N\}$ enthält.

Beweis der Aequivalenz von Satz A und B. 1) Wir zeigen zunächst, dass der Satz A unmittelbar aus dem Satze B gefolgert werden kann. Es seien also die N rein periodischen Funktionen $f_1(x), \ldots, f_N(x)$ mit den entsprechenden Perioden $p_1, \ldots, p_N$ beliebig gegeben; wir haben bei jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Länge l derart zu beweisen, dass jedes Intervall dieser Länge eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Summe $F(x) = \Sigma f_n(x)$ enthält. Zu diesem Zwecke wählen wir zunächst, was aus Stetigkeitsgründen möglich ist, zu dem gegebenen ε das $\delta > 0$ so klein, dass bei jedem festen $n = 1, \ldots, N$ die sämtlichen Zahlen der Form

$$m p_n + \delta' \qquad (m \text{ ganz}, |\delta'| < \delta)$$

zu $\frac{\varepsilon}{N}$ gehörige Verschiebungszahlen unserer Funktion $f_n(x)$ sind, und bestimmen danach zu diesem δ und den gegebenen Perioden $p_1, \ldots, p_N$ eine Länge l im Sinne des Satzes B so, dass jedes Intervall dieser Länge eine Zahl τ enthält, welche die Form besitzt

$$\tau = m_1 p_1 + \delta_1' = m_2 p_2 + \delta_2' = \cdots = m_N p_N + \delta_N',$$

wo gleichzeitig

$$|\delta_1'| < \delta,\ |\delta_2'| < \delta, \ldots, |\delta_N'| < \delta$$

ist. Dann hat dieses l offenbar die gewünschte Eigenschaft; denn in jedem Intervall der Länge l liegt ja eine Zahl τ, welche gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{N}$ gehörige Verschiebungszahl jedes der N Summanden $f_n(x)$ und daher gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Summe $F(x)$ ist.

2) Andererseits ist aber auch klar, dass der Satz B aus dem Satz A gefolgert werden kann. Wir haben nur (ganz wie bei den Beweisen der Hilfssätze 7 und 8 in § 9) zu den gegebenen Zahlen p_n und der gegebenen Zahl δ des Satzes B die durch die Fig. 14 angegebenen stetigen rein periodischen Funktionen $f_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$ mit den Perioden p_n zu bilden und zu benutzen, dass

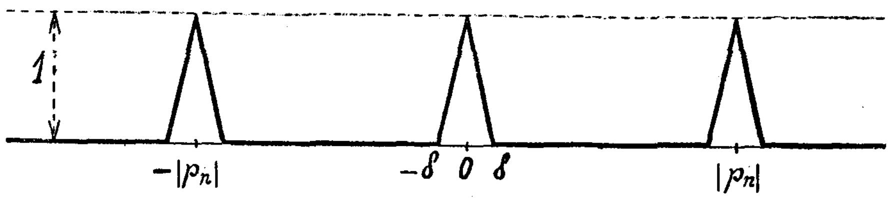


Fig. 14.

nach Satz A die Summe $F(x) = \Sigma f_n(x)$ fast periodisch wird. Denn hieraus folgt ja die Existenz einer Länge l mit der Eigenschaft, dass jedes Intervall dieser Länge eine, etwa zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gehörige, Verschiebungszahl τ der Funktion $F(x)$ enthält, welche Zahl τ, wie aus der Figur sofort hervorgeht, die gewünschte Form

$$\tau = m_1 p_1 + \delta_1' = \cdots = m_N p_N + \delta_N' \qquad (|\delta_n'| < \delta)$$

besitzen muss.

Wir fügen hinzu, dass Bohl aus dem Satze B unmittelbar hat folgern können, dass es zu jeder seiner »quasi-periodischen» Funktionen $f(x)$ eine Länge $l = l(\varepsilon)$ derart gibt, dass jedes Intervall dieser Länge eine zu ε gehörige Verschiebungszahl τ enthält, also, in unserer Terminologie, *dass jede quasi-periodische Funktion auch fast periodisch ist.* Wie schon in der Einleitung bemerkt, werden wir in der Abhandlung II ausführlich auf diese Frage eingehen und dabei zeigen, wie die Bohl'schen Funktionen innerhalb der allgemeinen Klasse der fast periodischen Funktionen in übersichtlicher Weise charakterisiert werden können.

3. Über die Integration fast periodischer Funktionen.

Es sei $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine beliebige fast periodische Funktion und $F(x)$ irgend ein unbestimmtes Integral von $f(x)$. Da sich die verschiedenen unbestimmten Integrale nur um eine additive Konstante unterscheiden, ist es gleichgültig welches unter ihnen wir betrachten, z. B.

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy.$$

In § 5 haben wir ohne Weiteres beweisen können (Satz XXIV), dass bei jedem festen $c > 0$ das Integral

$$\int_x^{x+c} f(y)\,dy,$$

also die Differenz $F(x+c) - F(x)$, wieder fast periodisch ist. In diesem Zusatze werden wir die viel tiefer liegende Frage erörtern, wann auch die Funktion $F(x)$ selbst fast periodisch ist.

Man sieht unmittelbar, *dass es zur Fastperiodizität von $F(x)$ notwendig ist, dass die Fourierreihe von $f(x)$ kein konstantes Glied enthält*, dass also

$$M\{f(x)\} = 0$$

ist. In der Tat folgt aus $M\{f(x)\} = c \neq 0$, d. h. aus

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} F(T) = c,$$

dass $F(T) = cT + o(T)$ ist, so dass also $F(T)$ nicht einmal beschränkt bleibt. Die Bedingung $M\{f(x)\} = 0$ genügt aber nicht — wie es bei den rein periodischen Funktionen der Fall ist — um die Entwickelbarkeit von $F(x)$ in eine Fourierreihe, d. h. ihre Fastperiodizität, zu sichern. Für diese Tatsache hat bereits Bohl ein Beispiel gegeben, indem er eine quasi-periodische Funktion $f(x)$ der erwähnten Art konstruiert hat. Innerhalb der allgemeineren Klasse der fast periodischen Funktionen wird es aber noch leichter sein ein solches Beispiel unter den Funktionen mit linear unabhängigen Fourierexponenten anzugeben, wie wir am Ende dieses Zusatzes zeigen werden.

Bevor wir die Frage behandeln, wann $F(x)$ wieder fast periodisch ist, bemerken wir zunächst, dass man mit Hilfe partieller Integration sofort zeigen kann, *dass, falls das Integral $F(x)$ fast periodisch wird, seine Fourierentwicklung durch die Reihe*

$$F(x) \sim C + \sum \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x} \qquad (C = \text{const.})$$

gegeben ist. In der Tat findet man bei jedem $\lambda \neq 0$

$$M\{F(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\left[F(x)\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\right]_0^T + \frac{1}{i\lambda}\int_0^T f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{i\lambda}\lim_{T\to\infty}\frac{F(T)}{T}e^{-i\lambda T} + \frac{1}{i\lambda}M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \frac{1}{i\lambda}M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\},$$

da ja nach einer obigen Bemerkung die vorausgesetzte Fastperiodizität von $F(x)$ die Gleichung $M\{f(x)\} = 0$, d. h. die Limesgleichung $F(T) = o(T)$, zur Folge hat.

Für seine spezielle Klasse der quasi-periodischen Funktionen hat Bohl die Frage nach der Quasiperiodizität des Integrales $F(x)$ vollständig erledigt, indem er zu dem schönen Resultat gelangt ist[1], dass die blosse Forderung der Beschränktheit von $F(x)$ für die Quasiperiodizität dieser Funktion genügt. Bei Betrachtung des scharfsinnigen Bohl'schen Beweises findet man, dass er unmittelbar auf die fast periodischen Funktionen übertragen werden kann, indem die einzige Eigenschaft der Funktion $f(x)$, die Bohl zum Beweise heranzieht, eben diejenige ist, welche unserer Definition der Fastperiodizität zu Grunde liegt.[2] Unser Beweis des folgenden Satzes über fast periodische Funktionen ist daher eine fast wörtliche Wiedergabe des Beweises, den Bohl für die quasi-periodischen Funktionen gegeben hat.

Satz. *Für die Fastperiodizität des Integrals $F(x)$ ist nicht nur notwendig sondern auch hinreichend, dass $F(x)$ beschränkt bleibt.*

Beweis. Es darf offenbar $f(x)$, und also auch $F(x)$, reell angenommen werden. Nach Voraussetzung ist die Funktion $F(x)$ beschränkt; wir bezeichnen ihre untere und obere Grenze mit k_1 bzw. k_2 (wo $k_1 < k_2$ angenommen werden kann, da im Falle $k_1 = k_2$ das Integral $F(x)$ konstant ist).

---

[1] Vgl. P. Bohl, Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie, l. c., S. 283.

[2] Gerade dieses Integrationsproblem ist es gewesen, das Bohl zur Aufstellung seines im Zusatze 2 besprochenen Satzes über diophantische Approximationen geführt hat, aus welchem er schliessen konnte, dass seine Funktionen »fast periodischen» Charakter tragen, d. h. dass eine »Länge $l(\varepsilon)$» existiert.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Der Beweis wird dadurch erbracht, dass eine Zahl $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon, f(x))$ so angegeben wird, dass jede zu ε_1 gehörige Verschiebungszahl der gegebenen Funktion $f(x)$ auch eine zu ε gehörige Verschiebungszahl des Integrales $F(x)$ ist.

Zu diesem Zwecke wählen wir zwei feste Werte x_1 und x_2 (wir werden im folgenden den kleineren unter ihnen mit ξ und ihren Abstand $|x_2 - x_1|$ mit d bezeichnen) derart, dass

$$F(x_1) < k_1 + \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{und} \quad F(x_2) > k_2 - \frac{\varepsilon}{6}$$

ist, und bestimmen danach die Länge $l = l\left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)$ derart, dass in jedem Intervall dieser Länge mindestens eine zu $\frac{\varepsilon}{6d}$ gehörige Verschiebungszahl τ der Funktion $f(x)$ gelegen ist. Wir werden zunächst nur beweisen, dass die Schwingungen von $F(x)$ eine gewisse »Regelmässigkeit» aufweisen, nämlich, dass sich in jedem Intervalle $(\alpha, \alpha + L)$ der Länge $L = l + d$ zwei Werte z_1 und z_2 so finden lassen, dass

$$F(z_1) < k_1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad F(z_2) > k_2 - \frac{\varepsilon}{2} \tag{30}$$

ist. In der Tat können wir nach der Definition der Länge l eine Verschiebungszahl $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)$ der Funktion $f(x)$ so wählen, dass die Zahl $\xi + \tau$ in das Intervall $(\alpha, \alpha + l)$ fällt und daher die beiden Zahlen $x_1 + \tau = z_1$ und $x_2 + \tau = z_2$ in das grössere Intervall $(\alpha, \alpha + L)$ zu liegen kommen; dann gilt die Relation

$$\begin{aligned} F(z_2) - F(z_1) &= (F(x_2) - F(x_1)) + \int_{z_1}^{z_2} f(y)\,dy - \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy \\ &= (F(x_2) - F(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} (f(y+\tau) - f(y))\,dy \end{aligned}$$

also die Ungleichung

$$F(z_2) - F(z_1) \geqq (F(x_2) - F(x_1)) - d\,\frac{\varepsilon}{6d} > k_2 - k_1 - \frac{2\,\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} = k_2 - k_1 - \frac{\varepsilon}{2};$$

diese Ungleichung $F(z_2)-F(z_1) > k_2-k_1-\frac{\varepsilon}{2}$ ist aber nach der Bedeutung von k_1 und k_2 nur möglich, wenn $F(z_1)$ und $F(z_2)$ die gewünschten Ungleichungen (30) erfüllen.

Wir behaupten nun, dass die »kleine» Zahl $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2L}$ die oben erwähnte Eigenschaft besitzt, dass also jede »feine», d. h. zu ε_1 gehörige, Verschiebungszahl τ der Funktion $f(x)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(x)$ ist, d. h. die Ungleichung

$$|F(x+\tau)-F(x)| \leqq \varepsilon \tag{31}$$

für alle x befriedigt.

Es ist ein von Bohl herrührender Kunstgriff den Beweis der Ungleichung (31) dadurch zu erbringen, dass die beiden »einseitigen» Abschätzungen

$$F(x+\tau)-F(x) \geqq -\varepsilon \tag{32 a}$$

und

$$F(x+\tau)-F(x) \leqq \varepsilon \tag{32 b}$$

für sich abgeleitet werden.

a) Zum Beweise der Ungleichung (32 a) wählen wir zu dem beliebig gegebenen x eine Zahl z_1 aus dem Intervalle $(x, x+L)$, für welche $F(z_1)<k_1+\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dann ist

$$F(x+\tau)-F(x)=(F(z_1+\tau)-F(z_1))+\int_x^{x+\tau} f(y)\,dy-\int_{z_1}^{z_1+\tau} f(y)\,dy$$

$$=(F(z_1+\tau)-F(z_1))+\int_x^{z_1} f(y)\,dy-\int_{x+\tau}^{z_1+\tau} f(y)\,dy$$

$$> \left(k_1-\left(k_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)-\left|\int_x^{z_1}(f(y+\tau)-f(y))\,dy\right| > -\frac{\varepsilon}{2}-L\frac{\varepsilon}{2L}=-\varepsilon.$$

b) Der Beweis der Ungleichung (32 b) verläuft ebenso, nur dass wir hier einen Punkt z_2 im Intervalle $(x, x+L)$ benutzen, in welchem $F(z_2)>k_2-\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Wir erhalten dann in analoger Weise:

$$F(x+\tau)-F(x)=(F(z_2+\tau)-F(z_2))+\int\limits_x^{x+\tau} f(y)\,dy-\int\limits_{z_2}^{z_2+\tau} f(y)\,dy$$

$$=(F(z_2+\tau)-F(z_2))+\int\limits_x^{z_2} f(y)\,dy-\int\limits_{x+\tau}^{z_2+\tau} f(y)\,dy$$

$$<\left(k_2-\left(k_2-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\left|\int\limits_x^{z_2}(f(y+\tau)-f(y))\,dy\right|<\frac{\varepsilon}{2}+L\frac{\varepsilon}{2L}=\varepsilon.$$

Hiermit ist der Beweis zu Ende.

Wir beschliessen diesen Zusatz mit einigen Bemerkungen über den Fall einer *linear unabhängiger Exponentenfolge,* wo die Verhältnisse besonders übersichtlich liegen, weil ja hier die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ wegen der Konvergenz von $\Sigma|A_n|$ im gewöhnlichen Sinne konvergiert, sogar gleichmässig für alle x. Es sei $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine beliebige fast periodische Funktion mit einer derartigen Exponentenfolge (womit übrigens speziell gesagt ist, dass die Reihe kein konstantes Glied enthält). Dann gilt der Satz, *dass eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Integral $F(x)$ wieder fast periodisch ist, einfach darin besteht, dass die Reihe*

$$\sum\left|\frac{A_n}{\Lambda_n}\right|$$

konvergiert.

Einerseits ist klar, dass diese Bedingung notwendig ist; denn, falls $F(x)$ fast periodisch ist, lautet ja nach einer obigen Bemerkung ihre Fourierentwicklung

$$F(x)\sim C+\sum\frac{A_n}{i\Lambda_n}e^{i\Lambda_n x},$$

so dass die Reihe mit linear unabhängigen Exponenten

$$\sum\frac{A_n}{i\Lambda_n}e^{i\Lambda_n x}$$

die Fourierreihe einer fast periodischen Funktion, nämlich der Funktion $F(x)-C$, ist und somit nach dem Konvergenzsatz (Kapitel III) absolut konvergieren muss.

Andererseits ist die Bedingung aber auch hinreichend. Denn aus ihr folgt, dass die Reihe

$$\sum \frac{A_n}{i\,\varLambda_n} e^{i\varLambda_n x} \tag{33}$$

gleichmässig konvergiert und daher (nach dem Corollar des Satzes VI) durch ihre Summe $G(x)$ eine fast periodische Funktion bestimmt; diese Funktion $G(x)$ ist aber auch ein unbestimmtes Integral von $f(x)$, weil ja die aus der Reihe (33) durch gliedweise Differentiation entstehende Reihe $\Sigma A_n e^{i\varLambda_n x}$ gleichmässig konvergiert mit der Summe $f(x)$, und somit $G(x)$ differentierbar ist mit dem Differentialquotienten $G'(x)=f(x)$.

Mit diesem Satze ist auch die Richtigkeit der obigen Bemerkung bewiesen, *dass das Fehlen des konstanten Gliedes in einer Fourierentwicklung* $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\varLambda_n x}$ *nicht für die Fastperiodizität des Integrales* $F(x)$ *genügt.* In der Tat können ja Koeffizienten A_n und linear unabhängige Exponenten $\varLambda_n$ so gewählt werden, dass zwar die Reihe

$$\sum |A_n|$$

aber nicht die Reihe

$$\sum \left|\frac{A_n}{\varLambda_n}\right|$$

konvergiert.