SUR LA DÉFINITION DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

PAR

S. MANDELBROJT

à PARIS.

À Mademoiselle EDITH ABADI.

Du point de vue de Weierstrass-Méray, le fait le plus important dans l'étude des fonctions analytiques est le suivant: une fonction analytique est complètement définie si on donne *tous* les coefficients du développement de Taylor en un point régulier.

On peut se poser la question suivante: La nature d'une fonction analytique holomorphe à l'origine étant connue, peut elle être définie par une série partielle de ses coefficients sans rien dire sur les autres coefficients? Par les mots »la fonction est définie» j'entends qu'elle est déterminée à une fonction entière près, ou bien à une fonction près, dont le rayon d'holomorphie est supérieur à celui de la fonction à définir.

La réponse à cette première question supposée positive on peut se demander si le caractère de la suite partielle qui définit la fonction dépend de la nature de cette fonction et quelle est cette dépendance?

J'établis dans ce travail quelques théorèmes qui répondent aux questions proposées. On peut résumer ces théorèmes dans l'énoncé suivant:

(A): *Si on donne soit le caractère, soit la distribution des singularités d'une fonction analytique, celle-ci est définie par un groupe partiel de ses coefficients; la nature du groupe (c'est-à-dire la croissance des indices des coefficients qui servent à définir cette fonction) dépend de ces singularités.*

Faisons maintenant quelques conventions, qui viennent assez naturellement:

Appelons *suites complémentaires* deux suites d'entiers $n_i\,(i=1, 2, \ldots)$ et $n'_j\,(j=1, 2, \ldots)$ dont la réunion forme la suite de tous les nombres entiers positifs.

Soit

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots\ a_{n_i},\ \ldots$$

une suite de nombres complexes, tels que $\overline{\lim\limits_{i=\infty}} \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|}$ soit fini.

Nous dirons que la suite de coefficients $a_{n'_j}$ $(j=1, 2, \ldots)$ est fonction de la suite a_{n_i} $(i=1, 2, \ldots)$ si, un procédé étant fixé, la différence des deux fonctions quelconques $f_1(x)$ et $f_2(x)$ définies par ce procédé (le procédé en question peut se réduire à l'indication des singularités de la fonction comme c'est dans le cas actuel), et qui satisfont aux conditions

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n x^n$$

$$a'_n = a''_n = a_n \quad \text{si} \quad n = n_i,$$

est une fonction entière.

Ou même si on ne considère que des singularités sur le cercle de convergence, on dira que la suite $a_{n'_j}$ est fonction de la suite a_{n_i} si la différence $f_1(x) - f_2(x)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est supérieur au rayon d'holomorphie de chaque fonction $f_1(x)$ et $f_2(x)$. Le problème capital qui se pose après avoir donné la suite a_n $(n=1, 2, \ldots)$ de coefficients de la série de Taylor, qui définit une fonction analytique $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$, est de trouver les relations qui existent entre la suite a_n et l'allure de la fonction $\varphi(x)$, — principalement de trouver des renseignements sur les singularités de cette fonction. Les définitions que nous venons d'adopter permettent de substituer au fait (A) le fait (A′) qui donne dans les cas généraux une solution théorique de ce problème.

(A′). *Si on donne soit le caractère, soit la distribution des singularités d'une fonction analytique, holomorphe à l'origine, on peut indiquer une suite de nombres entiers n_i telle que, a_n étant les coefficients de cette fonction, la suite $a_{n'_j}$ est fonction de la suite a_{n_i}. La croissance de la suite n_i dépend de ces singularités.* (Les suites n_i et n'_j sont complémentaires.) Cela veut dire que: *la nature*[1] *des singularités d'une fonction étant définie, les coefficients d'ordre n_i $(i=1, 2, \ldots)$ définissent la partie principale des coefficients d'ordre n'_j.*

[1] Ou bien la distribution.

No. 1. Je suis obligé de rappeler quelques théorèmes que j'ai démontrés dans mon mémoire »Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes» (Annales de l'Ecole Normale supérieure t. 40. 1923): Théorème 1. Etant donnée la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}, \tag{1}$$

je suppose qu'il existe une suite de λ_n

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots$$

satisfaisant à la condition

$$\lim\ (\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i}) = \infty\,;$$

je dis que la série (1) a sur le cercle de convergence au moins un point qui n'est pas pôle.

Théorème 2. Etant donnée une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} \tag{1}$$

de rayon de convergence égal à R et dont les λ_n sont tels qu'il existe une suite

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots$$

satisfaisant à la condition

$$\lim\ (\lambda_{n_i+1} - 2^p\,\lambda_{n_i}) = \infty\,,$$

où p est un nombre entier positif, la fonction représentée par la série (1) ne peut pas être mise sous la forme:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{[P(x)]^{\frac{q}{p+1}}}\,,$$

où $\varphi_1(x)$ est une fonction régulière dans un cercle de rayon supérieur à R; $P(x)$ est un polynome de la forme

$$P(x) = (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_k)^{\nu_k}$$

$$|x'_j| = R\ \ (j=1,2,\ldots k)$$

ν_j étant des nombres entiers positifs, et q un entier quelconque.

Théorème 3. Si la série

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

est telle qu'il existe une suite

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots$$

satisfaisant à la condition

$$\lim_{i=\infty} \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} = \infty,$$

la fonction représentée par cette série n'a d'autres singularités que des continus non-bornés.

Thèorème 4. Soit

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_n,\ \ldots$$

une suite d'entiers ne contenant qu'un nombre fini de multiples de chaque nombre p_i appartenant à une suite quelconque de nombres premiers

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_i,\ \ldots,$$

la fonction, repsésentée par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

possède sur le cercle de convergence un ensemble non réductible de points singuliers.

No. 2. Je passe à la démonstration du théorème suivant:

Théorème I. Si l'ensemble E donné des points singuliers d'une fonction analytique, holomorphe à l'origine, est tel, qu'aucune partie de cet ensemble n'est un continu non borné, la fonction est définie (à une fonction entière près) par une suite partielle de coefficients

$$(1) \qquad a_{n_1},\ a_{n_1+1},\ a_{n_1+2},\ \ldots\ a_{n_1+k_1},\ \ldots\ a_{n_i},\ a_{n_i+1},\ \ldots\ a_{n_i+k_i},\ \ldots,$$

la suite n_i étant une suite quelconque d'entiers positifs, et satisfaisant à la condition

$$\lim_{i=\infty} \frac{k_i}{n_i} = \infty.$$

Soient $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b'_n x^n$ et $\varphi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b''_n x^n$ deux fonctions analytiques admettant l'ensemble E comme l'ensemble de points singuliers et dont les coefficients jouissent de la propriété suivante:

$$\begin{gathered} b'_{n_i}=b''_{n_i}=a_{n_i} \\ b'_{n_i+1}=b''_{n_i+1}=a_{n_i+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b'_{n_i+k_i}=b''_{n_i+k_i}=a_{n_i+k_i} \end{gathered}$$

pour $i=1, 2, \ldots$

Soit $f(x)$ la différence de ces deux fonctions:

$$f(x)=\varphi(x)-\varphi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

On a évidemment:

$$c_{n_i}=0, \quad c_{n_i+1}=0, \ldots c_{n_i+k_i}=0.$$
$$(i=1, 2, \ldots)$$

Soit λ_n la suite de nombres entiers positifs qui n'entrent pas dans la suite

$$n_i, n_i+1, \ldots n_i+k_i \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

On peut donc écrire

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} x^{\lambda_n}.$$

On constate facilement que:

$$\lambda_{n_i+1}=\lambda_{n_i}+2+k_i,$$

où $\lambda_{n_i}=n_i-1$. Et en vertu de la condition (2) on a

$$\lim_{i=\infty} \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}}=\frac{\lambda_{n_i}+2+k_i}{\lambda_{n_i}}=\infty. \tag{2'}$$

L'ensemble de points singuliers de la fonction $f(x)$ est une partie (au point de vue de la théorie des ensembles l'ensemble lui-même est aussi sa propre partie) de l'ensemble E. Il ne contient donc aucune partie qui soit un continu non borné.

Si on supposait

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \neq 0$$

on serait en contradiction évidente avec le théorème 3, énoncé dans le no. précédent. Le théorème I est donc démontré. Comme on voit il est essentiel d'indiquer l'ensemble E, en donnant les affixes de tous ses points (il ne suffit pas d'indiquer ses propriétés).[1]

No. 3. *Théorème II. Une fonction n'ayant sur le cercle de convergence de rayon R d'autres points singuliers que les points d'affixes α_j $(j=1, 2, \dots k)$, ces singularités étant telles que la fonction puisse être représentée sous la forme*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha_1)^{\frac{q_1}{\nu_1}} (x-\alpha_2)^{\frac{q_2}{\nu_2}} \dots (x-\alpha_k)^{\frac{q_k}{\nu_k}}},$$

q_j, ν_j étant des entiers positifs liés à α_j, et $\varphi(x)$ étant holomorphe dans un cercle de rayon supérieur à R, cette fonction est définie (à une fonction de rayon d'holomorphie supérieur à R près) par la suite

(1) $$a_{n_i}, a_{n_i+1}, \dots a_{n_i+k_i} \qquad (i=1, 2, \dots),$$

les n_i étant des entiers positifs quelconques et k_i satisfaisant à la condition

(3) $$\lim [k_i-(2^{p-1}-1)n_i] = \infty,$$

p étant le plus petit commun multiple des nombres $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_k$. Remarquons que $f(x)$ peut être mise sous la forme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{[P(x)]^{\frac{1}{p}}},$$

$P(x)$ étant un polynome dont les zéros sont les points d'affixes α_j $(j=1, 2, \dots k)$. Deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ admettant les mêmes points singuliers α_j avec les

---

[1] On peut donc dire, que si une fonction analytique représentée par une série entière de rayon de convergence fini, n'a pas comme singularités des continus non-bornés — la suite des coefficients qui n'entrent pas dans (1) est fonction de la suite (1).

mêmes nombres correspondants q_j, ν_j donnent par soustraction l'une de l'autre une fonction du même caractère, c'est-à-dire

$$f_1(x)-f_2(x)=F(x)=\frac{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}{[P(x)]^{\frac{1}{p}}}=\frac{\Psi(x)}{[P(x)]^{\frac{1}{p}}},$$

Ψ ayant un rayon de convergence supérieur à R.

On a comme dans le théorème précédent

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} x^{\lambda_n},$$

la suite λ_n admettant une suite partielle

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots\ ;\ \lambda_{n_i}=n_i-1$$

telle que

$$\lambda_{n_i+1}=\lambda_{n_i}+k_i+2.$$

On a donc

$$\lambda_{n_i+1}-2^{p-1}\lambda_{n_i}=k_i-(2^{p-1}-1)\,n_i+1-2^{p-1}.$$

Il résulte de (3) immédiatement

$$\lim\ (\lambda_{n_i+1}-2^{p-1}\lambda_{n_i})=\infty.$$

L'égalité

$$\overline{\lim}\ \sqrt[\lambda_n]{|c_{\lambda_n}|}=\frac{1}{R}$$

est donc impossible en vertu du théorème 2 énoncé dans le n° précédent.[1]

Théorème III. Une fonction n'ayant que des pôles sur le cercle de convergence est définie par la suite (1), *les k_i satisfaisant à la condition*

$$\lim_{i=\infty} k_i=\infty. \tag{4}$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le théorème 1 du numéro précédent. En outre elle diffère peu de la démonstration du théorème précédent. Pourtant elle peut prêter à une remarque:

[1] On pourrait faire ici une remarque toute semblable à celle que nous avons faite dans la note (page 134). Les théorèmes III. V. VI donnent lieu aux mêmes remarques. Ceci correspond au fait (A') de l'introduction.

Dans le théorème précédent on a précisé les affixes des points singuliers α_j, tandis que dans ce théorème ceci n'est plus nécessaire. On le comprend facilement si l'on remarque que la fonction $F(x)$ dans ce cas n'admet que des pôles sur le cercle de convergence, quels que soient les pôles de $f_1(x)$ et ceux de $f_2(x)$ sur ce cercle. Mais si les α_j ou bien les q_j et ν_j du théorème précédent ne sont pas les mêmes pour $f_1(x)$ et $f_2(x)$ la fonction $F(x)$ correspondante aurait des singularités sur lesquelles on ne pourrait plus faire des conclusions immédiates.

On voit donc que le théorème III est plus général que le cas particulier du théorème II, obtenu en y faisant $p=0$.

No. 4. Il est maintenant à propos d'indiquer un fait qui n'est pas lié strictement aux théorèmes précédents, mais dont les conséquences peuvent être utiles, ce fait pouvant présenter quelques intérêts quand on se trouve dans l'ordre d'idées d'Eisenstein.

Théorème IV. Si l'on peut extraire de la suite λ_n de nombres entiers positifs, une suite partielle

$$\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \ldots \lambda_{n_i}, \ldots$$

telle que

$$\lim (\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i}) = \infty \tag{1}$$

la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

dont le rayon de convergence est égal à un et dont les coefficients sont entiers, admet le cercle de convergence comme coupure.

On sait d'après le théorème Hadamard-Fabry que lorsque on ne fait pas la restriction sur les coefficients a_n il faut pour pouvoir tirer la conclusion du théorème (c.-a.-d. que le cercle de convergence est une coupure) que *tous* les λ_n jouissent de la propriété (1).

Remarquons qu'on ne peut pas remplacer dans notre théorème les coefficients entiers par des coefficients p. e. rationnels, car on peut former une telle série avec des lacunes satisfaisant à la condition (1) et pourtant elle n'admet qu'un seul point singulier dans tout le plan.

De même la condition relative au rayon du cercle de convergence est nécessaire.[1]

Pour démontrer le théorème IV je rappelle un théorème dû à M. Carlson[2]:

[1] Je développerai ces remarques dans un autre travail.

[2] »Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten«. Math. Zeitschr. 1921.

La fonction représentée par une série entière avec des coefficients entiers, convergente à l'intérieur du cercle de rayon 1 est ou bien une fonction rationnelle, ou bien admet le cercle de convergence comme coupure. Dans le premier cas la fonction est de la forme

$$\frac{P(x)}{(1-x^p)^q}.$$

Si on se rapporte maintenant à l'énoncé du théorème IV on voit que $\varphi(x)$ est ou bien une fonction rationnelle ou bien admet le cercle de convergence comme coupure; or, la première hypothèse est impossible en vertu du théorème 1 énoncé dans le no. 1; il en résulte la vérification du théorème. On pourrait en tirer la conclusion suivante:

La suite (1) du théorème III, satisfaisant à la condition (4), *définit complètement* la fonction, si on sait que les cofficients de la série correspondante sont entiers, et si on connait un point régulier sur le cercle de convergence de rayon 1.

Ainsi p. e. toutes les séries, dont le cercle de convergence est de rayon 1, les coefficients entiers, le point d'affixe -1 régulier et dont tous les coefficients de la suite

$$a_{n_i},\ a_{n_i+1},\ \ldots\ a_{n_i+k_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\lim k_i=\infty$$

sont égaux à 1, se réduisent à la seule fonction

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-x}$$

(à un polynome près évidemment).

Si on combine le théorème 4 avec le théorème de M. Carlson, on pourrait remplacer dans le théorème IV la condition (1) pour λ_n par celle à laquelle satisfont les λ_n dans le théorème 4.

No. 5. *Théorème V. Si l'ensemble de points singuliers sur le cercle de convergence de rayon R d'une fonction ânalytique est réductible*[1], *la fonction est définie (à une fonction de rayon d'holomorphie supérieur à R près) par une suite partielle de coefficients*

[1] Un ensemble est dit réductible, si un de ses ensembles dérivés successifs est fini.

$$
(\mathrm{L}) \qquad \begin{cases} a_{p_1}, \; a_{2p_1}, \; \ldots \; a_{ip_1}, \; \ldots \\ a_{p_2}, \; a_{2p_2}, \; \ldots \; a_{ip_2}, \; \ldots \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{p_j}, \; a_{2p_j}, \; \ldots \; a_{ip_j}, \; \ldots \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{cases}
$$

$p_1, p_2, \ldots p_j, \ldots$ *étant une suite quelconque de nombres premiers.*

Remarquons d'abord que, si E_1 et E_2 sont deux ensembles réductibles, il en est de même de chaque partie de la somme de ces deux ensembles (par suite de la somme elle-même aussi).

Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions admettant le même ensemble réductible comme ensemble de points singuliers sur le cercle de convergence de rayon R, et dont les séries correspondantes ont comme coefficients d'ordres:

$$
\begin{array}{l} p_1, \; 2p_1, \; \ldots \; ip_1, \; \ldots \\ p_2, \; 2p_2, \; \ldots \; ip_2, \; \ldots \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ p_j, \; 2p_j, \; \ldots \; ip_j, \; \ldots \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{array}
$$

ceux qui figurent dans le tableau (L). Soit $F(x)$ la différence des deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

L'ensemble des points singuliers de $F(x)$ sur le cercle de rayon R est réductible.

D'autre part la fonction

$$
F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{\lambda_n}
$$

satisfait à l'hypothèse du théorème 4 relative aux lacunes (ou bien à la croissance de la suite λ_n).

Son ensemble de points singuliers sur le cercle de convergence devrait donc être non réductible s'il n'était pas nul. La contradiction est évidente, et le théorème V est démontré.

No. 6. J'ai défini dans »Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes» une classe spéciale de séries entières que j'ai nommées »les séries entières de la classe (A)».

Soit $\sum_{n=1} x^{\lambda_n}$ une série entière dont les coefficients sont égaux à *zéro* ou bien à *un*. Soit λ'_n une suite de nombres entiers qui complète la suite λ_n c'est-à-dire les deux suites λ_n et λ'_n forment toute la suite des nombres entiers positifs.

Supposons qu'il existe une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda'_n}$ dont le cercle de convergence est d'un rayon au moins égal à *un*, et que la fonction représentée par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda'_n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$$

admet le point d'affixe *un* comme point régulier. La série $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$ sera alors dite *série de la classe (A)*.

Je démontre ensuite (voir le même mémoire) le théorème suivant: »Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$ est de la classe (A), la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$ d'un rayon de convergence fini, les a_n étant d'ailleurs arbitraires, possède sur le cercle de convergence au moins deux points singuliers».

Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda'_n}$ telle que la suite

$$\lambda'_1,\ \lambda'_2,\ \ldots\ \lambda'_n,\ \ldots$$

ne contienne qu'un nombre fini de multiples d'un nombre premier p. Pour plus de clarté supposons même que cette suite n'admet pas du tout des multiples de p; ce fait ne restreint pas la généralité.

Regardons ensuite la série

$$\frac{1}{1-x^p} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{np}$$

dont les seuls points singuliers sont des pôles simples d'affixes

$$1,\ e^{\frac{2i\pi}{p}},\ e^{\frac{4i\pi}{p}},\ \ldots\ e^{\frac{2(p-1)i\pi}{p}}.$$

La partie principale du pôle d'affixe 1 étant égale à $\frac{1}{p(1-x)}$, il est évident que la série

$$\varphi(x) = \sum b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p x^{np} = \frac{1}{1-x} - \frac{p}{1-x^p}$$

représente une fonction holomorphe autour du point d'affixe *un*.

D'autre part les coefficients correspondants aux puissances λ_n sont égaux à 1.

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$$

est donc une série de la classe (A).

D'après le théorème cité tout à l'heure toute série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda'_n}$ possède sur le cercle de convergence au moins deux points singuliers.

De plus: x_1 étant un point singulier de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda'_n}$ sur le cercle de convergence, il est facile à démontrer que sur ce cercle se trouve au moins un point singulier d'affixe $x_1\, e^{\frac{2m i\pi}{p}}$, m étant un des nombres $1, 2, \ldots p-1$. (Voir le mémoire cité.)

En partant de cette remarque il devient évident que:

Théorème 5: Si la suite λ'_n ne contient pas des multiples de k nombres premiers

$$p_1, p_2, \ldots p_k,$$

ou bien n'en contient qu'un nombre fini, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda'_n}$ d'un rayon de convergence fini, et dont les coefficients sont d'ailleurs arbitraires possède au moins $k+1$ points singuliers sur le cercle de convergence.

No. 7. On peut maintenant très facilement démontrer le théorème suivant:

Théorème VI. Si une fonction analytique n'a que m points singuliers sur le cercle de convergence de rayon R, cette fonction est définie (à une fonction de rayon d'holomorphie supérieur à R près) par la suite de coefficients

$$(\mathrm{L'}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{p_1}, a_{2p_1}, \ldots a_{ip_1} \\ a_{p_2}, a_{2p_2}, \ldots a_{ip_2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{p_{2m}}, a_{2p_{2m}}, \ldots a_{ip_{2m}} \end{array} \right.$$

$p_1, p_2, \ldots p_{2m}$ *étant des nombres premiers distincts quelconques.*

Si on donne les affixes des points singuliers, on peut remplacer dans cet énoncé $2m$ *par* m.

Supposons en effet qu'il existe deux séries entières

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \text{ et } f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c'_n x^n$$

qui satisfont aux conditions suivantes:

1° Elles ont un même rayon de convergence égal à R.

2° Pour n égal à jp_k, j étant un entier positif quelconque et k prenant une des valeurs

$$1,\ 2, \dots m$$

on a

$$c_n = c'_n = a_n.$$

3° Chacune de ces fonctions n'a que m points singuliers sur le cercle de convergence.

La fonction

$$F(x)=f_1(x)-f_2(x)$$

possède au plus $2m$ points singuliers sur le cercle de convergence (si les affixes des m points singuliers qui interviennent dans l'énoncé sont donnés, $F(x)$ possède au plus m points singuliers sur le cercle de convergence). $F(x)$ peut être mise sous la forme

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} r_n x^{\lambda_n},$$

où λ_n satisfont à la condition du théorème 5, où il faut remplacer k par $2m$.

La fonction $F(x)$ devrait donc avoir au moins $2m+1$ points singuliers sur le cercle de convergence, si elle en a un sur le cercle, ce qui est contradictoire à la remarque précédente.

No. 8. Le théorème Hadamard-Fabry permet de tirer une conséquence intéressante si on se place dans l'ordre d'idées que nous avons adopté.

Je rappelle ce théorème:

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

la suite λ_n satisfaisant à la condition

$$\lim (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty,$$

admet le cercle de convergence comme coupure.

Par un raisonnement tout semblable à ceux qui servaient à démontrer la plupart des théorèmes de cet ouvrage on peut arriver à la conclusion suivante:

Une fonction $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$ ayant sur le cercle de convergence un point régulier donné est définie par une suite

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_i}, \ldots$$

qui comprend tous les coefficients sauf ceux dont les indices n'_i satisfont à la condition

$$\lim (n'_{i+1} - n'_i) = \infty.$$

Mais si on ne considère que les séries qui admettent le cercle de convergence comme coupure, aucune suite partielle ne définit la fonction.

C'est-à-dire, deux séries $\varphi(x) = \Sigma b_n x^n$ et $\varphi_1(x) = \Sigma c_n x^n$ qui ont les mêmes coefficients d'ordre $n_1, n_2, \ldots$, la suite n_i étant quelconque, qui admettant en outre le même cercle de rayon R comme coupure, ne diffèrent pas en général, d'une fonction dont le rayon de convergence est supérieur à R.

Soit en effet

$$n'_1, n'_2, \ldots n'_i, \ldots$$

la suite qui complète la suite

$$n_1, n_2, \ldots n_i, \ldots$$

(c.-a.-d., les deux suites n'_i et n_i forment ensembles la suite de tous les nombres entiers positifs). Choisissons parmi les n'_i une suite de nombres n''_i tels que

$$\lim (n''_{i+1} - n''_i) = \infty.$$

Soit maintenant

$$c_{n''_1}, c_{n''_2}, \ldots c_{n''_i}, \ldots$$

une suite de nombres positifs tels que

$$\lim \sqrt[n''_i]{c_{n''_i}} = \frac{1}{R}.$$

Soit

$$n_1''', \; n_2''', \; \ldots \; n_i''', \; \ldots$$

une suite contenue dans n_i' et qui n'est pas contenue dans n_i''. Soit, enfin,

$$b_{n_1'''}, \; b_{n_2'''}, \; \ldots \; b_{n_i'''}, \; \ldots$$

une suite satisfaisant à la conditon

$$\sqrt[n_i''']{|b_{n_i'''}|} \leq \frac{1}{R}.$$

D'après le théorème que j'établis dans »Sur les séries etc.» on reconnait qu'il y a un ensemble de puissance continue de valeurs de φ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ telles que les séries

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \, x^n,$$

où

$$\begin{aligned} a'_n &= a_n \quad \text{pour} \quad n = n_i \\ a'_n &= b_n \quad \text{»} \quad n = n_i''' \\ \text{et} \quad a'_n &= c_n \, e^{i\varphi} \quad \text{»} \quad n = n_i'' \end{aligned}$$

admettent le cercle de convergence comme coupure, et il n'y a qu'un ensemble dénombrable de valeurs de φ telles que ces séries (1) soient prolongeables en dehors du cercle de rayon R.

Si on prend deux séries (1) qui ne sont pas prolongeables, qui correspondent à deux valeurs de φ: φ_1 et φ_2, leur différence admet le cercle de convergence comme coupure, d'après le théorème Hadamard-Fabry. Pourtant elles admettent les mêmes coefficients d'ordre n_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

No. 9. Je veux faire enfin la remarque suivante: Si les conditions qui entrent dans les hypothèses des théorèmes II, III, V, VI sont vérifiées dans tout le plan, on pourrait remplacer la locution »(à une fonction de rayon d'holomorphie supérieur à R près)» par la suivante: »(à une fonction entière près)».

Si par exemple, dans le théorème V on sait que la fonction, dont les coefficients qui entrent dans le tableau (L) sont donnés, admet comme singularités dans tout le plan un ensemble réductible elle est définie à une fonction entière près.