

MÉMOIRE SUR LES POLYNOMES DE BERNOULLI.

PAR

N. E. NÖRLUND

à LUND.

1. Pour abrégé nous désignerons la différence du premier ordre avec l'intervalle ω par le symbole \triangle_{ω}

$$\triangle_{\omega} f(x) = \frac{f(x + \omega) - f(x)}{\omega},$$

et la moyenne entre les valeurs d'une fonction dans les points x et $x + \omega$ par le symbole ∇_{ω}

$$\nabla_{\omega} f(x) = \frac{f(x + \omega) + f(x)}{2}.$$

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ des nombres complexes quelconques. En appliquant les opérations \triangle et ∇ plusieurs fois de suite on trouve la différence du second ordre

$$\triangle_{\omega_1 \omega_2}^2 f(x) = \triangle_{\omega_2} \left(\triangle_{\omega_1} f(x) \right) = \frac{f(x + \omega_1 + \omega_2) - f(x + \omega_1) - f(x + \omega_2) + f(x)}{\omega_1 \omega_2}$$

et la moyenne du second ordre

$$\nabla_{\omega_1 \omega_2}^2 f(x) = \nabla_{\omega_2} \left(\nabla_{\omega_1} f(x) \right) = \frac{f(x + \omega_1 + \omega_2) + f(x + \omega_1) + f(x + \omega_2) + f(x)}{4}.$$

Et en général la différence d'ordre n

$$\triangle_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) = \triangle_{\omega_n} \left(\triangle_{\omega_1 \dots \omega_{n-1}}^{n-1} f(x) \right)$$

et la moyenne d'ordre n

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) = \nabla_{\omega_n} \left(\nabla_{\omega_1 \dots \omega_{n-1}}^{n-1} f(x) \right).$$

Si tous les nombres ω sont égaux à un j'écris plus brièvement $\Delta^n f(x)$ et $\nabla^n f(x)$.
On a donc

$$\Delta^n f(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} f(x+s),$$

$$\nabla^n f(x) = 2^{-n} \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} f(x+s).$$

Considérons les équations

$$\Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) = \varphi(x), \quad (1)$$

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) = \varphi(x), \quad (2)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée. Les solutions de ces deux équations forment une classe de transcendentes qui méritent d'attirer l'attention des géomètres. Pour plusieurs raisons il paraît naturel de commencer l'exposition des résultats que j'ai obtenus relativement à ces fonctions par une étude du cas où $\varphi(x)$ est un polynôme, et ce Mémoire est consacré à ce cas particulier. Nous allons voir que les solutions des équations (1) et (2) s'expriment linéairement par un nombre fini de polynômes. Mais si $\varphi(x)$ est une transcendante les solutions s'expriment encore à l'aide des mêmes polynômes. En mettant en évidence les propriétés de ces polynômes on facilitera l'étude des solutions dans des cas plus généraux. C'est ce que nous allons faire. Le but de ce Mémoire est donc surtout de servir d'introduction à d'autres Mémoires qui devront traiter des problèmes plus difficiles.

Si $n = 1$ les polynômes susdits se réduisent aux polynômes de BERNOULLI et aux polynômes d'EULER. Ces polynômes ont été étudiés depuis longtemps par un grand nombre d'auteurs. Je n'ai guère de résultats nouveaux à ajouter. Pourtant, pour la commodité du lecteur, je commence par reproduire quelques propriétés de ces polynômes. Je les déduis d'une manière qui est, je crois, préférable à celles qu'on a appliquées jusqu'ici.

Un extrait de ce Mémoire a été publié dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 169 (1919), p. 166—8, p. 221—3, p. 521—4, p. 608—10.

Les polynômes de Bernoulli.

2. On appelle *nombres de BERNOULLI* la suite des nombres B_0, B_1, B_2, \dots définis par la relation de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s = B_\nu, \quad \nu = 2, 3, 4, \dots \quad (3)$$

$$B_0 = 1.$$

On voit immédiatement que les B_ν sont des nombres rationnels et que $(\nu+1)! B_\nu$ est un entier. Les premiers d'entre eux sont

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}.$$

Ces nombres jouent un rôle considérable dans une foule de questions d'Analyse et surtout dans le calcul aux différences finies. A l'aide des nombres de BERNOULLI on peut aisément résoudre l'équation

$$f(x+1) - f(x) = \nu x^{\nu-1},$$

ν étant un entier positif. En effet, on sait trouver un polynome qui satisfait à cette équation. Ce polynome est du degré ν et il est déterminé à une constante arbitraire près.

J'appelle *polynome de BERNOULLI* le polynome $B_\nu(x)$ qui satisfait à l'équation aux différences finies

$$\Delta B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1} \quad (4)$$

et qui, pour $x=0$, est égal au nombre de BERNOULLI B_ν .

$$B_\nu(0) = B_\nu.$$

Soit

$$B_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} A_s x^{\nu-s}.$$

En substituant cette expression dans l'équation (4) on voit que les coefficients A_s doivent satisfaire à la relation de récurrence

$$A_0 = 1,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} A_s = A_\nu.$$

Mais cette relation coïncide avec celle qui détermine les nombres de BERNOULLI. On a donc $A_s = B_s$ et par conséquent

$$B_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s x^{\nu-s}. \quad (5)$$

En dérivant ce polynome par rapport à x on trouve la relation

$$D_x B_\nu(x) = \nu B_{\nu-1}(x), \quad (6)$$

d'où encore

$$D_x^p B_\nu(x) = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-p+1) B_{\nu-p}(x).$$

On a donc en vertu de la formule de TAYLOR

$$B_\nu(x+h) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} h^s B_{\nu-s}(x), \quad (7)$$

h étant un nombre quelconque. Si l'on pose en particulier $h=1$ on trouve la relation de récurrence

$$B_0(x) + \binom{\nu}{1} B_1(x) + \binom{\nu}{2} B_2(x) + \cdots + \binom{\nu}{\nu-1} B_{\nu-1}(x) = \nu x^{\nu-1}. \quad (8)$$

Cette formule permet de calculer successivement tous les $B_\nu(x)$. On trouve ainsi

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \quad B_5(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{3}\right).$$

3. On peut donner à ces résultats une forme symbolique qui est assez remarquable. La relation (3) peut en effet s'écrire sous la forme symbolique

$$(B+1)^\nu - B^\nu = 0, \quad \nu > 1, \quad (9)$$

où il faut développer suivant les puissances de B et puis remplacer B^n par B_n . L'équation (9) n'est plus valable dans le cas $\nu=1$ qui donne lieu à l'identité

$$(B+1) - B = 1.$$

On a donc la relation symbolique

$$\varphi(B+1) - \varphi(B) = \varphi'(0), \quad (10)$$

$\varphi(z)$ étant un polynome quelconque de z . Et si l'on remplace $\varphi(z)$ par $\varphi(z+x)$

$$\varphi(x+B+1) - \varphi(x+B) = \varphi'(x). \quad (11)$$

L'équation aux différences finies

$$f(x+1) - f(x) = \varphi'(x), \quad (12)$$

où $\varphi(x)$ est un polynome donné, admet donc la solution

$$f(x) = \varphi(x+B) = \varphi(x) + \frac{B_1}{1} \varphi'(x) + \frac{B_2}{2!} \varphi''(x) + \frac{B_3}{3!} \varphi'''(x) + \dots$$

Soit maintenant $\varphi(x) = x^\nu$. La définition des polynomes de BERNOULLI permet immédiatement de conclure qu'on a

$$B_\nu(x) = (x+B)^\nu. \quad (5 \text{ bis})$$

En développant le second membre on retrouve l'expression (5). En écrivant $x+h$ au lieu de x il vient

$$B_\nu(x+h) = (x+B+h)^\nu \quad (7 \text{ bis})$$

et en développant le second membre suivant les puissances de h on retrouve la formule (7).

Cela posé, on voit que la solution rationnelle $f(x)$ de l'équation (12) peut s'écrire comme il suit

$$f(x+h) = \varphi(x+(h+B)) = \varphi(x+B(h)),$$

x et h étant des variables quelconques. Pour trouver la valeur de l'expression symbolique au dernier membre on développe suivant les puissances de $B(h)$ et puis on remplace $(B(h))^\nu$ par $B_\nu(h)$. On a donc

$$f(x+h) = \varphi(x+B(h)) = \varphi(x) + \frac{B_1(h)}{1!} \varphi'(x) + \frac{B_2(h)}{2!} \varphi''(x) + \frac{B_3(h)}{3!} \varphi'''(x) + \dots \quad (13)$$

Les nombreuses applications des polynomes de BERNOULLI dans le calcul aux différences finies reviennent en dernière analyse à cette formule importante.

En y appliquant l'opération Δ on trouve la célèbre formule sommatoire d'EULER et de MAC LAURIN

$$\varphi'(x+h) = \Delta \varphi(x) + \frac{B_1(h)}{1!} \Delta \varphi'(x) + \frac{B_2(h)}{2!} \Delta \varphi''(x) + \frac{B_3(h)}{3!} \Delta \varphi'''(x) + \dots$$

Pour donner immédiatement une application de la formule (13) posons $\varphi(x) = B_{\nu+1}(x)$. On trouve

$$f(x+h) = \sum_{s=0}^{\nu+1} \binom{\nu+1}{s} B_s(h) B_{\nu+1-s}(x).$$

D'autre part on vérifie aisément que l'équation

$$f(x+1) - f(x) = (\nu+1) B_\nu(x)$$

admet la solution

$$f(x) = (\nu + 1)(x - 1) B_\nu(x) - \nu B_{\nu+1}(x).$$

Ces deux solutions ne peuvent donc différer que par une constante et leurs dérivées sont par conséquent identiques. C'est à dire qu'on a

$$\nu(x+h-1)B_{\nu-1}(x+h) - (\nu-1)B_\nu(x+h) = \sum_{s=0}^{s-\nu} \binom{\nu}{s} B_s(h) B_{\nu-s}(x), \quad (14)$$

x et h étant des variables quelconques.

Remarquons enfin que la relation (11) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\varphi(B(x) + 1) - \varphi(B(x)) = \varphi'(x). \quad (11 \text{ bis})$$

On trouve dans la littérature un très grand nombre de relations de récurrence entre les nombres et les polynomes de BERNOULLI. Les auteurs arrivent souvent à ces formules d'une manière fort détournée. Mais la source commune de toutes ces relations c'est la formule (11 bis). En choisissant le polynome $\varphi(x)$ convenablement on arrive aisément à ces relations. Pour en donner un exemple posons $\varphi(x) = x^\nu$, il vient

$$(B(x) + 1)^\nu - (B(x))^\nu = \nu x^{\nu-1}$$

ce qui n'est autre chose que la relation (8). Si l'on fait tendre x vers 0 cette équation se réduit à la relation qui nous a servi comme définition des nombres de BERNOULLI.

4. Revenons à l'équation

$$f(x+1) - f(x) = (\nu+1)x^\nu.$$

Elle admet les deux solutions

$$B_{\nu+1}(x) \text{ et } (-1)^{\nu+1} B_{\nu+1}(1-x).$$

C'est ce qu'on voit en remplaçant dans l'équation

$$B_{\nu+1}(x+1) - B_{\nu+1}(x) = (\nu+1)x^\nu$$

x par $-x$. Les deux polynomes susdits ne peuvent donc différer que par une constante K

$$(-1)^{\nu+1} B_{\nu+1}(1-x) = B_{\nu+1}(x) + K.$$

Je dis que cette constante est égale à zéro. En effet, dérivons par rapport à x il vient en vertu de (6)

$$B_\nu(1-x) = (-1)^\nu B_\nu(x) \quad (15)$$

et cette relation subsiste pour toutes les valeurs de ν .

De l'équation (6) on peut tirer cette autre relation

$$\int_x^y B_\nu(z) dz = \frac{B_{\nu+1}(y) - B_{\nu+1}(x)}{\nu+1}, \quad (16)$$

x et y étant des nombres quelconques. Si en particulier $y = x+1$ on trouve

$$\int_x^{x+1} B_\nu(z) dz = x^\nu. \quad (17)$$

On peut exprimer les sommes des puissances semblables des nombres entiers par les polynomes de BERNOULLI car en remplaçant x respectivement par 0, 1, 2, ... $n-1$ et en ajoutant ensemble on trouve

$$1^\nu + 2^\nu + 3^\nu + \dots + (n-1)^\nu = \int_0^n B_\nu(z) dz = \frac{B_{\nu+1}(n) - B_{\nu+1}}{\nu+1}, \quad \nu > 0.$$

C'est cette propriété des $B_\nu(x)$ qui a tout d'abord attiré l'attention des géomètres sur ces polynomes.

Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu \left(x + \frac{s}{n} \right),$$

n étant un entier positif quelconque. On a en vertu de (4)

$$f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) = \nu x^{\nu-1}.$$

Mais cette équation aux différences finies admet aussi la solution

$$n^{1-\nu} B_\nu(nx).$$

On a par conséquent

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu \left(x + \frac{s}{n} \right) = n^{1-\nu} B_\nu(nx) + K,$$

K étant une constante. Pour déterminer cette constante intégrons dans les deux membres de x à $x + \frac{1}{n}$; on trouve

$$\int_x^{x+1} B_\nu(z) dz = n^{1-\nu} \int_x^{x+\frac{1}{n}} B_\nu(nz) dz + \frac{K}{n}.$$

Mais en vertu de (17) cette relation se réduit à $K = 0$. On a donc

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right) = n^{1-\nu} B_\nu(nx), \quad (18)$$

quel que soit l'entier positif n .

On aurait aussi pu procéder inversement et déduire (17) de (18). En effet, si l'on divise les deux membres de (18) par n et puis fait tendre n vers l'infini on retrouve la relation (17).

5. Des relations (4), (15) et (18) on peut tirer la valeur de $B_\nu(x)$ pour certaines valeurs rationnelles de x . Posons $x=0$ dans les équations (4) et (15). On trouve

$$\begin{aligned} B_\nu(1) &= B_\nu, & \nu > 1 \\ B_\nu(1) &= (-1)^\nu B_\nu, & \nu \geq 0. \end{aligned}$$

On a donc $B_\nu = 0$, si ν est impair et plus grand que un . Par conséquent

$$B_{2\nu+1}(1) = B_{2\nu+1}(0) = 0, \quad \nu > 0, \quad (19)$$

$$B_{2\nu}(1) = B_{2\nu}(0) = B_{2\nu}. \quad (20)$$

Posons $x=0$ dans l'équation (18). Il vient

$$\sum_{s=1}^{s=n-1} B_\nu\left(\frac{s}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^{\nu-1}} - 1\right) B_\nu. \quad (21)$$

Si $n=2$ cette relation se réduit à

$$B_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{\nu-1}} - 1\right) B_\nu; \quad (22)$$

si ν est impair le second membre s'annule. Le polynome $B_\nu(x)$ admet donc les trois zéros $x=0, 1, \frac{1}{2}$, si ν est impair et ≥ 3 .

En posant $n = 3$ dans l'équation (21) on trouve en se reportant à l'équation (15)

$$B_\nu\left(\frac{2}{3}\right) = B_\nu\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3^{\nu-1}} - 1\right) \frac{B_\nu}{2}, \quad \nu \text{ pair.} \quad (23)$$

En posant $n = 4$ dans l'équation (21) on trouve à l'aide de (15) et de (22)

$$B_\nu\left(\frac{3}{4}\right) = B_\nu\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2^{\nu-1}} - 1\right) \frac{B_\nu}{2^\nu}, \quad \nu \text{ pair.} \quad (24)$$

En posant $n = 6$ on trouve enfin à l'aide de (15), (22) et (23)

$$B_\nu\left(\frac{5}{6}\right) = B_\nu\left(\frac{1}{6}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{\nu-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{\nu-1}}\right) \frac{B_\nu}{2}, \quad \nu \text{ pair.} \quad (25)$$

Nous verrons dans le paragraphe 11 qu'on peut encore trouver une expression simple de $B_\nu\left(\frac{1}{4}\right)$ si ν est impair.

6. Nous venons de voir que les polynomes de degré impair admettent les points $0, \frac{1}{2}$ et 1 pour zéros. Je veux démontrer qu'il n'y a pas d'autres zéros dans l'intervalle $0 < x < 1$. Je dis d'abord qu'on a

$$(-1)^\nu B_{2\nu-1}(x) > 0, \quad \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Cette inégalité se démontre par voie d'induction. Elle est vraie, si $\nu = 1$, car $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Supposons que l'inégalité (26) soit vraie pour une certaine valeur de ν . En intégrant entre les limites 0 et x on trouve

$$(-1)^\nu (B_{2\nu}(x) - B_{2\nu}) > 0, \quad \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}. \quad (27)$$

D'autre part on a

$$B_{2\nu+1}(0) = B_{2\nu+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Il y a donc une valeur x_0 de x , située entre 0 et $\frac{1}{2}$ pour laquelle la dérivée de $B_{2\nu+1}(x)$, et par conséquent $B_{2\nu}(x)$, s'annule. En posant $x = x_0$ dans l'inégalité (27) on trouve

$$(-1)^{\nu+1} B_{2\nu} > 0, \quad \nu > 0. \quad (28)$$

Cela posé, je dis que

$$(-1)^{\nu+1} B_{2\nu+1}(x) > 0, \quad \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}. \quad (29)$$

En effet, cette fonction s'annule dans les points $x=0$ et $x=\frac{1}{2}$ mais elle ne peut pas s'annuler à l'intérieur de l'intervalle $0 < x < \frac{1}{2}$ car alors sa dérivée s'annulerait dans deux points au moins de cet intervalle et sa dérivée seconde, et par conséquent $B_{2\nu-1}(x)$, s'annulerait aussi à l'intérieur de cet intervalle ce qui est contraire à l'hypothèse (26). Pour démontrer (29) il suffit donc de remarquer que pour des valeurs positives et très petites de x le signe de $(-1)^{\nu+1} B_{2\nu+1}(x)$ est le même que le signe de $(-1)^{\nu+1} B_{2\nu}$. Et ce nombre est, en vertu de (28), positif.

A l'aide de la relation

$$B_\nu(1-x) = (-1)^\nu B_\nu(x) \quad (30)$$

on peut maintenant se rendre compte comment se comportent nos polynomes dans l'intervalle $\frac{1}{2} < x < 1$. Des inégalités (29) et (27) on déduit en effet

$$(-1)^\nu B_{2\nu+1}(x) > 0, \quad \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \quad (31)$$

et

$$(-1)^\nu (B_{2\nu}(x) - B_{2\nu}) > 0, \quad \text{si } 0 < x < 1. \quad (32)$$

Le polynome $B_{2\nu+1}(x)$ a donc les zéros $x=0$, $\frac{1}{2}$ et 1 et aucun autre zéro dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. Ces zéros sont simples car $B_{2\nu}(x)$ est différent de zéro dans ces points en vertu de l'inégalité (28) et des relations (20) et (22). Le polynome $B_{2\nu}(x) - B_{2\nu}$ n'admet pas de zéro à l'intérieur de l'intervalle $0 < x < 1$. Mais les points $x=0$ et $x=1$ sont *des zéros d'ordre deux*, si $\nu > 1$, parce que la dérivée s'annule dans ces points pendant que la dérivée seconde est différente de zéro en vertu de (28). Si $\nu = 1$ ces deux zéros sont du premier ordre. Remarquons en particulier que le polynome

$$(-1)^\nu (B_{2\nu}(x) - B_{2\nu})$$

est positif et croît avec x dans l'intervalle $0 < x < \frac{1}{2}$; il est positif et décroissant dans l'intervalle $\frac{1}{2} < x < 1$. Ce polynome a donc un maximum dans le point $x = \frac{1}{2}$.

Des propriétés du polynome $B_{2\nu-1}(x)$ on conclut que le polynome $B_{2\nu}(x)$ a un seul zéro dans l'intervalle $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Ce zéro est situé entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{4}$. En effet, des relations (24) et (25) il résulte que $B_{2\nu}(x)$ change de signe entre ces deux points. Quand ν tend vers l'infini ce zéro tend vers $\frac{1}{4}$. De la relation (30) il résulte enfin que le polynome $B_{2\nu}(x)$ a un seul zéro dans l'intervalle $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ et que ce zéro est situé entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$.

Les polynomes d'Euler.

7. Il y a certains polynomes qui se rattachent étroitement aux polynomes $B_\nu(x)$ et qu'il convient d'étudier en même temps. Considérons l'équation aux différences finies

$$\frac{f(x+1) + f(x)}{2} = x^\nu, \quad (1)$$

ν étant un entier positif. Il y a évidemment un polynome et un seul qui satisfait à cette équation. Ce polynome est du degré ν . Je dis pour abrégé que c'est un *polynome* d'EULER et je le désigne par $E_\nu(x)$. On a donc

$$\nabla E_\nu(x) = x^\nu \quad (2)$$

En dérivant cette relation par rapport à x on voit qu'on a

$$D_x E_\nu(x) = \nu E_{\nu-1}(x). \quad (3)$$

La formule de TAYLOR nous donne donc ce développement

$$E_\nu(x+h) = E_\nu(x) + \binom{\nu}{1} h E_{\nu-1}(x) + \binom{\nu}{2} h^2 E_{\nu-2}(x) + \cdots + h^\nu E_0(x). \quad (4)$$

En posant en particulier $h=1$ cette formule se réduit à la relation de récurrence

$$2 E_\nu(x) + \binom{\nu}{1} E_{\nu-1}(x) + \binom{\nu}{2} E_{\nu-2}(x) + \cdots + E_0(x) = 2 x^\nu, \quad (5)$$

qui permet de calculer successivement tous les $E_\nu(x)$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
 E_0(x) &= 1, & E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, & E_2(x) &= x(x-1), & E_3(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right), \\
 E_4(x) &= x(x-1)(x^2 - x - 1), & E_5(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1), \\
 E_6(x) &= x(x-1)(x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 3).
 \end{aligned}$$

Si, dans l'équation (2), on remplace x par $-x$ on voit que le polynome

$$(-1)^{\nu} E_{\nu}(1-x)$$

est aussi une solution de l'équation (1). Ce polynome est donc égal à $E_{\nu}(x)$, car il n'y a qu'un seul polynome qui satisfasse à l'équation (1). C'est à dire qu'on a

$$E_{\nu}(1-x) = (-1)^{\nu} E_{\nu}(x). \quad (6)$$

Soit n un entier positif impair. Considérons la fonction

$$f(x) = n^{\nu} \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s E_{\nu} \left(\frac{x+s}{n} \right).$$

On a évidemment

$$f(x+1) + f(x) = n^{\nu} \left[E_{\nu} \left(\frac{x}{n} \right) + E_{\nu} \left(\frac{x}{n} + 1 \right) \right] = 2x^{\nu}.$$

Le polynome $f(x)$ est donc une solution de l'équation (1) et par conséquent il est égal à $E_{\nu}(x)$. On a donc

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s E_{\nu} \left(x + \frac{s}{n} \right) = n^{-\nu} E_{\nu}(nx). \quad (7)$$

Nous avons supposé que n est entier positif impair. La relation cesse d'être vraie si n est pair.

On démontre de la même manière cette autre relation

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s B_{\nu} \left(x + \frac{s}{n} \right) = -\frac{\nu}{2n^{\nu-1}} E_{\nu-1}(nx), \quad (8)$$

n étant un entier positif pair.

8. EULER a introduit certains nombres E_{ν} qu'on appelle les *nombres d'EULER* et qui figurent comme coefficients dans le développement de $\sec x$ en série de puissances. On peut définir les E_{ν} par la relation de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_{\nu-s} + \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \binom{\nu}{s} E_{\nu-s} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

$$E_0 = 1.$$

Cette relation peut aussi s'écrire sous la forme

$$E_\nu + \binom{\nu}{2} E_{\nu-2} + \binom{\nu}{4} E_{\nu-4} + \dots = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Le dernier terme au premier membre est E_0 , si ν est pair, mais νE_1 , si ν est impair. On voit immédiatement que $E_\nu = 0$, si ν est impair, et que les autres nombres d'EULER sont des entiers impairs. Voici les premiers d'entre eux

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \quad E_{10} = -50521.$$

Les polynomes $E_\nu(x)$ s'expriment d'une manière simple à l'aide des nombres d'EULER. En effet posons

$$E_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} A_s \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\nu-s}.$$

Pour déterminer les coefficients A_s substituons cette expression dans la relation (2) et développons le premier membre suivant les puissances de x . En égalant les coefficients des mêmes puissances de x on voit que les A_s doivent vérifier la relation de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^{\nu-s} A_{\nu-s} + \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \binom{\nu}{s} 2^{\nu-s} A_{\nu-s} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_0 = 1,$$

qui détermine uniquement ces nombres. Mais en comparant avec (9) on voit qu'on a

$$E_\nu = 2^\nu A_\nu$$

et par conséquent

$$E_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \frac{E_s}{2^s} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\nu-s}. \quad (10)$$

En posant $x = \frac{1}{2}$ il vient

$$E_\nu \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{E_\nu}{2^\nu}. \quad (11)$$

Le polynome $E_\nu(x)$ s'annule donc dans le point $x = \frac{1}{2}$, si ν est impair.

9. Pour mettre bien en évidence le caractère de la relation de récurrence (9) il convient de l'écrire sous la forme symbolique

$$(E + 1)^\nu + (E - 1)^\nu = \begin{cases} 0, & \nu > 0, \\ 2, & \nu = 0, \end{cases}$$

où il faut développer suivant les puissances de E et puis remplacer E^n par E_n . On a par conséquent

$$\varphi(E + 1) + \varphi(E - 1) = 2\varphi(0),$$

$\varphi(z)$ étant un polynome quelconque. Et si l'on remplace $\varphi(z)$ par $\varphi\left(x + \frac{z}{2}\right)$ il vient

$$\varphi\left(x + \frac{E + 1}{2}\right) + \varphi\left(x + \frac{E - 1}{2}\right) = 2\varphi(x). \quad (12)$$

L'équation aux différences finies

$$\frac{f(x + 1) + f(x)}{2} = \varphi(x), \quad (13)$$

où $\varphi(x)$ est un polynome quelconque de degré ν , admet donc la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{E - 1}{2}\right) = \sum_{s=0}^{\nu} \varphi^{(s)}\left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2^s} \frac{E_s}{s!}. \quad (14)$$

En particulier si l'on pose $\varphi(x) = x^\nu$, il résulte de la définition des polynomes $E_\nu(x)$ qu'on a

$$E_\nu(x) = \left(x + \frac{E - 1}{2}\right)^\nu$$

ce qui n'est autre chose que la relation (10). En remplaçant x par $x + h$ il vient

$$E_\nu(x + h) = \left(x + \frac{E - 1}{2} + h\right)^\nu.$$

En développant le second membre suivant les puissances de h on retrouve la relation (4).

La série (14) n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un développement plus général. En effet, remplaçons x par $x + h$ on trouve

$$f(x+h) = \varphi \left(x+h + \frac{E-1}{2} \right) = \varphi(x+E(h)).$$

Le polynome $f(x)$, défini par l'équation (13), peut donc se développer de la manière suivante

$$f(x+h) = \varphi(x+E(h)) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \varphi^{(s)}(x) \frac{E_s(h)}{s!}, \quad (15)$$

x et h étant des variables quelconques. On vérifie d'ailleurs immédiatement que ce polynome satisfait à l'équation (13) car en appliquant aux deux membres de l'équation (15) l'opération ∇ , où ∇ porte sur la variable h , on trouve

$$\frac{f(x+h+1) + f(x+h)}{2} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \varphi^{(s)}(x) \frac{h^s}{s!} = \varphi(x+h).$$

Mais si ∇ porte sur la variable x il vient

$$\varphi(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{E_s(h)}{s!} \nabla \varphi^{(s)}(x). \quad (16)$$

Cette formule sommatoire a été démontré par BOOLE¹ dans le cas particulier où $h=0$. Pour donner une application de cette formule posons

$$\varphi(x) = E_{\nu+1}(x) - (x-1) E_{\nu}(x)$$

d'où résulte

$$\nabla \varphi(x) = \frac{1}{2} E_{\nu}(x).$$

L'équation (16) se réduit par conséquent à

$$E_{\nu+1}(x+h) - (x+h-1) E_{\nu}(x+h) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_{\nu-s}(x) E_s(h). \quad (17)$$

Supposons en second lieu que

$$\varphi(x) = 2^{\nu} B_{\nu} \left(\frac{x}{2} \right).$$

On trouve en vertu de l'équation (18) paragraphe 4

$$\nabla \varphi(x) = B_{\nu}(x).$$

¹ A treatise on differential equations, London 1865, p. 107.

En substituant ces expressions dans l'équation (16) il vient

$$2^\nu B_\nu \left(\frac{x+h}{2} \right) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}(x) E_s(h). \quad (18)$$

On peut considérer l'équation (12) comme une relation de récurrence entre les $E_\nu(x)$. Cette équation peut en effet s'écrire comme il suit

$$\varphi(E(x)+1) + \varphi(E(x)) = 2\varphi(x). \quad (19)$$

En choisissant le polynome $\varphi(x)$ convenablement on en déduit des relations de récurrence en tel nombre qu'on veut. Par exemple en posant $\varphi(x) = x^\nu$ on retrouve la relation (5) qui s'écrit sous la forme symbolique

$$(E(x)+1)^\nu + (E(x))^\nu = 2x^\nu. \quad (5)$$

En posant en particulier $x = \frac{1}{2}$ il vient

$$(E+2)^\nu + E^\nu = 2$$

c'est à dire que

$$\sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} 2^s E_{\nu-s} + E^\nu = 2.$$

10. Il convient encore d'envisager deux autres suites de nombres, voisins aux nombres d'EULER et de BERNOULLI. Nous désignerons ces nombres par C_ν et D_ν et nous les définirons par les relations de récurrence

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} 2^s C_{\nu-s} + C_\nu &= 0, \quad \nu > 0, \\ \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} D_{\nu-s} - \sum_{s=0}^{\nu} (-1)^s \binom{\nu}{s} D_{\nu-s} &= 0, \quad \nu > 1, \\ C_0 = D_0 &= 1, \end{aligned}$$

ou sous forme symbolique

$$(C+2)^\nu + C^\nu = \begin{cases} 0, & \nu > 0, \\ 2, & \nu = 0. \end{cases} \quad (20)$$

$$(D+1)^\nu - (D-1)^\nu = \begin{cases} 0, & \nu > 1, \\ 2, & \nu = 1. \end{cases} \quad (21)$$

On voit immédiatement que les C_ν sont des entiers pendant que les D_ν sont des nombres rationnels tels que $D_\nu = 0$, si ν est impair. Les premiers d'entre eux sont

$$C_0 = 1, \quad C_1 = -1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 2, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = -16, \quad C_6 = 0, \quad C_7 = 272.$$

$$D_0 = 1, \quad D_2 = -\frac{1}{3}, \quad D_4 = \frac{7}{15}, \quad D_6 = -\frac{31}{21}, \quad D_8 = \frac{127}{15}, \quad D_{10} = -\frac{2555}{33}.$$

A l'aide de ces nombres on peut de nouveau résoudre les deux équations aux différences finies que nous venons d'étudier. En effet on a

$$\begin{aligned} \varphi(C+2) + \varphi(C) &= 2\varphi(0), \\ \varphi(D+1) - \varphi(D-1) &= 2\varphi'(0), \end{aligned}$$

$\varphi(z)$ étant un polynome quelconque. Et si l'on remplace $\varphi(z)$ par $\varphi\left(x + \frac{z}{2}\right)$ il vient

$$\varphi\left(x + 1 + \frac{C}{2}\right) + \varphi\left(x + \frac{C}{2}\right) = 2\varphi(x), \quad (22)$$

$$\varphi\left(x + \frac{D+1}{2}\right) - \varphi\left(x + \frac{D-1}{2}\right) = \varphi'(x). \quad (23)$$

L'équation aux différences finies

$$\nabla f(x) = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est un polynome quelconque de degré ν , admet donc la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{C}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{\varphi^{(s)}(x) C_s}{s! 2^s}$$

et il n'y a pas d'autres polynomes qui satisfassent à cette équation. Si l'on pose en particulier $\varphi(x) = x^\nu$ il résulte de la définition des polynomes d'EULER qu'on a

$$E_\nu(x) = \left(x + \frac{C}{2}\right)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^{-s} C_s x^{\nu-s}. \quad (24)$$

On voit de même que l'équation

$$\triangle f(x) = \varphi'(x)$$

admet la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{D-1}{2}\right) \quad (25)$$

c'est à dire que

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=v} \frac{D_s}{2^s s!} \varphi^{(s)}(x).$$

Soit en particulier $\varphi(x) = x^{v+1}$. De la définition des polynomes de BERNOULLI on conclut qu'on a

$$B_v(x) = \left(x + \frac{D-1}{2}\right)^v = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} 2^{-s} D_s \left(x - \frac{1}{2}\right)^{v-s}. \quad (26)$$

Si l'on pose $x = \frac{1}{2}$ il vient

$$B_v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{D_v}{2^v}. \quad (27)$$

Il y a entre les C_v et entre les D_v un grand nombre de relations qu'on déduit des équations (22) et (23) en choisissant convenablement le polynome $\varphi(x)$. Par exemple en posant $\varphi(x) = x^v$ on trouve

$$\begin{aligned} (x + C + 2)^v + (x + C)^v &= 2 x^v, \\ (x + D + 1)^v - (x + D - 1)^v &= 2 v x^{v-1}, \end{aligned}$$

d'où en particulier

$$\begin{aligned} (C + 1)^v + (C - 1)^v &= 2(-1)^v, \\ (D + 2)^v - D^v &= 2 v. \end{aligned}$$

Les nombres d'EULER s'expriment par les C_v et inversement. En effet en posant $x = \frac{1}{2}$ dans l'équation (24) il vient

$$E_v = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} C_s = (C + 1)^v.$$

Mais en posant $x = 0$ on trouve

$$E_v(0) = \frac{C_v}{2^v} \quad (28)$$

et par conséquent en vertu de (6)

$$E_v(1) = (-1)^v \frac{C_v}{2^v}. \quad (29)$$

De l'équation (10) on déduit maintenant en posant $x = 0$ ou $x = 1$

$$C_\nu = \sum_{s=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu-s} \binom{\nu}{s} E_s = (E-1)^\nu,$$

$$(-1)^\nu C_\nu = \sum_{s=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{s} E_s = (E+1)^\nu.$$

De même on trouve

$$2^\nu B_\nu = \sum_{s=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu-s} \binom{\nu}{s} D_s = (D-1)^\nu,$$

$$(-2)^\nu B_\nu = \sum_{s=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{s} D_s = (D+1)^\nu,$$

$$D_\nu = \sum_{s=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{s} 2^s B_s = (2B+1)^\nu.$$

Mais ces équations peuvent se réduire. En effet en comparant l'équation (27) à l'équation (22) paragraphe 5 on trouve

$$D_\nu = 2(1-2^{\nu-1})B_\nu. \quad (30)$$

Les C_ν s'expriment aussi par les nombres de BERNOULLI. En effet de l'équation (8) on déduit en posant $n=2$

$$E_{\nu-1}(x) = \frac{2^\nu}{\nu} \left[B_\nu \left(\frac{x+1}{2} \right) - B_\nu \left(\frac{x}{2} \right) \right]. \quad (31)$$

En faisant tendre x vers zéro il vient

$$C_{\nu-1} = 2^\nu (1-2^\nu) \frac{B_\nu}{\nu}. \quad (32)$$

Des propriétés des nombres de BERNOULLI on conclut maintenant que

$$C_{2\nu} = 0, \quad \text{si } \nu > 0,$$

$$D_{2\nu+1} = 0$$

et que

$$(-1)^\nu C_{2\nu-1} > 0, \quad (-1)^\nu D_{2\nu} > 0. \quad (33)$$

Cela posé rappelons que nous venons de démontrer que

$$2^{-\nu} C_\nu = E_\nu(0) = (-1)^\nu E_\nu(1).$$

Il en résulte que les polynomes $E_\nu(x)$ admettent les points $x=0$ et $x=1$ pour

zéros, si ν est pair. Ces zéros sont du premier ordre car la dérivée de $E_\nu(x)$ est différente de zéro dans ces points en vertu de l'inégalité (33).

Voici enfin une autre propriété des entiers C_ν , qu'il convient de signaler. Je veux démontrer que $2^{-\nu}(\nu + 1)C_\nu$ est un entier impair, si ν est impair. En effet, nous avons vu qu'on a

$$\varphi(C + 2) + \varphi(C) = 2\varphi(0).$$

Soit en particulier

$$\varphi(x) = x^\nu (x - 2)^{\nu-1},$$

il vient

$$(C + 2)^\nu C^{\nu-1} + C^\nu (C - 2)^{\nu-1} = 0,$$

mais puisque $C_{2\nu} = 0$ cette équation se réduit à

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s (2\nu - s) C_{2\nu-s-1} = 0.$$

En posant pour abrégier $T_{\nu+1} = 2^{-\nu}(\nu + 1)C_\nu$, l'équation prend la forme

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} T_{2\nu-s} = 0.$$

On en conclut immédiatement par voie d'induction que les $T_{2\nu}$ sont des entiers impairs.

II. De la relation (18) paragraphe 4 il résulte qu'on a

$$B_\nu\left(\frac{x}{2}\right) + B_\nu\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2^{1-\nu} B_\nu(x).$$

A l'aide de cette relation on déduit de l'équation (31) que

$$E_{\nu-1}(x) = \frac{2}{\nu} \left[B_\nu(x) - 2^\nu B_\nu\left(\frac{x}{2}\right) \right]. \quad (34)$$

On aurait pu arriver un peu plus directement à ce résultat en considérant l'équation aux différences finies

$$f(x+2) - f(x) = 2[(x+1)^{\nu-1} - x^{\nu-1}].$$

On vérifie immédiatement que le premier et le second membre de la relation (34) sont des solutions de cette équation. Ces deux solutions rationnelles ne peuvent donc différer que par une constante. Et cette constante est zéro. C'est ce qu'on voit en posant $x = 0$.

De l'équation (34) on peut déduire quelques résultats numériques. En posant $x = \frac{1}{2}$ on trouve

$$B_\nu \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{D_\nu - \nu E_{\nu-1}}{4^\nu}.$$

Si ν est impair cette équation se réduit à

$$B_\nu \left(\frac{1}{4} \right) = -\nu \frac{E_{\nu-1}}{4^\nu}.$$

Dans le paragraphe 5 nous avons déjà trouvé la valeur de $B_\nu \left(\frac{1}{4} \right)$ dans le cas où ν est pair et cette valeur est en accord avec celle que nous venons de trouver parce que $E_\nu = 0$, si ν est impair.

En posant $x = \frac{1}{3}$ dans l'équation (34) on trouve, en tenant compte des relations (23) et (25) paragraphe 5, que

$$E_\nu \left(\frac{1}{3} \right) = \left(1 - \frac{1}{3^\nu} \right) \frac{C_\nu}{2^{\nu+1}},$$

pourvu que ν soit impair. On arrive aussi à ce résultat en posant $x = 0$ et $n = 3$ dans l'équation (7). Mais si l'on pose $x = \frac{1}{2}$, $n = 3$ dans l'équation (7) on trouve

$$E_\nu \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^\nu} \right) E_\nu \left(\frac{1}{2} \right),$$

pourvu que ν soit pair. On a donc, dans ce cas

$$E_\nu \left(\frac{5}{6} \right) = E_\nu \left(\frac{1}{6} \right) = \left(1 + \frac{1}{3^\nu} \right) \frac{E_\nu}{2^{\nu+1}}.$$

12. Dans les paragraphes 3 et 9 nous avons démontré qu'on a

$$\nu(x+y-1)B_{\nu-1}(x+y) - (\nu-1)B_\nu(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s(x) B_{\nu-s}(y),$$

$$E_{\nu+1}(x+y) - (x+y-1)E_\nu(x+y) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s(x) E_{\nu-s}(y),$$

$$2^\nu B_\nu \left(\frac{x+y}{2} \right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s(x) E_{\nu-s}(y).$$

On peut en tirer diverses relations remarquables que je vais signaler. En posant x et y égaux à 0 ou $\frac{1}{2}$ on trouve

$$(B + B)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s B_{\nu-s} = (\nu - 1) B_{\nu} - \nu B_{\nu-1},$$

$$(C + C)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s C_{\nu-s} = C_{\nu+1} + 2 C_{\nu},$$

$$(E + E)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s E_{\nu-s} = -C_{\nu+1},$$

$$(D + D)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} D_s D_{\nu-s} = 2^{\nu} (\nu - 1) B_{\nu},$$

$$(E + C)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s C_{\nu-s} = E_{\nu} + E_{\nu+1},$$

$$(E + D)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s D_{\nu-s} = 2^{\nu} D_{\nu},$$

$$(C + D)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s D_{\nu-s} = D_{\nu} - \nu E_{\nu-1},$$

$$(2B + D)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s B_s D_{\nu-s} = -\nu D_{\nu-1} - (\nu - 1) D_{\nu},$$

$$(2B + C)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s B_s C_{\nu-s} = 4^{\nu} B_{\nu},$$

$$(2B + E)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s B_s E_{\nu-s} = D_{\nu} - \nu E_{\nu-1}.$$

13. Je vais enfin déduire les valeurs de quelques intégrales définies dont nous aurons à faire usage plus loin. Nous avons vu que

$$\frac{d B_{\nu}(x)}{dx} = \nu B_{\nu-1}(x), \quad \frac{d E_{\nu}(x)}{dx} = \nu E_{\nu-1}(x).$$

Il en résulte que

$$\int_x^y B_{\nu}(z) dz = \frac{B_{\nu+1}(y) - B_{\nu+1}(x)}{\nu + 1}$$

$$\int_x^y E_\nu(z) dz = \frac{E_{\nu+1}(y) - E_{\nu+1}(x)}{\nu + 1}. \quad (35)$$

En posant $y = x + \frac{1}{2}$ dans la première de ces équations on trouve en vertu de (31)

$$\int_x^{x+\frac{1}{2}} B_\nu(z) dz = \frac{E_\nu(2x)}{2^{\nu+1}},$$

d'où en particulier

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_\nu(z) dz = \frac{C_\nu}{2^{2\nu+1}}, \quad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} B_\nu(z) dz = \frac{E_\nu}{2^{2\nu+1}}.$$

De l'équation (35) on déduit en posant $x = 0$ et $y = 1$ ou $\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 E_\nu(z) dz = -\frac{C_{\nu+1}}{(\nu + 1)2^\nu},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_{2\nu-1}(z) dz = \frac{E_{2\nu}}{2^\nu \cdot 2^{2\nu}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_{2\nu}(z) dz = -\frac{C_{2\nu+1}}{(2^\nu + 1)2^{2\nu+1}}.$$

La première de ces intégrales s'annule donc si ν est impair.

14. Nous avons déjà vu que les polynomes $E_{2\nu}(x)$ admettent les points $x = 0$ et $x = 1$ pour zéros du premier ordre. C'est ce qui résulte en effet des égalités (28) et (29). Les polynomes de degré impair ont un zéro dans le point $x = \frac{1}{2}$. On a en effet

$$E_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{E_\nu}{2^\nu}$$

et $E_\nu = 0$, si ν est impair. Je veux démontrer que ce zéro est toujours du premier ordre et qu'il n'y a pas d'autres zéros dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ que ceux que nous venons d'indiquer. Dans ce but je démontre d'abord qu'on a

$$(-1)^\nu E_{2\nu-1}(x) > 0, \quad \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}. \quad (36)$$

En effet, cette inégalité est vraie, si $\nu = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour une certaine valeur de ν . En intégrant entre les limites 0 et x on trouve

$$(-1)^\nu E_{2\nu}(x) > 0, \quad \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \quad (37)$$

et en intégrant encore une fois entre les limites x et $\frac{1}{2}$ on trouve

$$(-1)^{\nu+1} E_{2\nu+1}(x) > 0, \quad \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{c. q. f. d. .}$$

Cette inégalité est vraie encore si $x = 0$; c'est ce qui résulte de l'équation (28). De l'inégalité (37) on peut tirer un résultat important. En posant $x = \frac{1}{2}$ on trouve en effet

$$(-1)^\nu E_{2\nu} > 0.$$

On voit maintenant que le zéro $x = \frac{1}{2}$ de la fonction $E_{2\nu+1}(x)$ est du premier ordre, car sa dérivée $(2\nu+1)E_{2\nu}(x)$ est différente de zéro dans le point $x = \frac{1}{2}$.

En tenant compte de la relation

$$E_\nu(1-x) = (-1)^\nu E_\nu(x)$$

on déduit de (36)

$$(-1)^\nu E_{2\nu-1}(x) < 0, \quad \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1$$

et de (37)

$$(-1)^\nu E_{2\nu}(x) > 0, \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

Le résultat énoncé plus haut relativement aux zéros de $E_\nu(x)$ est donc complètement démontré.

Polynomes d'Euler d'ordre n .

15. Les coefficients des deux suites de polynomes que nous venons d'étudier sont des nombres rationnels. On sait maintenant construire des polynomes qui possèdent des propriétés de tous points analogues à celles que nous venons d'énumérer et dont les coefficients dépendent d'un nombre quelconque de paramètres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Ces polynomes sont des généralisations immédiates des $E_\nu(x)$ et des $B_\nu(x)$ et nous les appellerons par extension des *polynomes d'EULER* et des *polynomes de BERNOULLI d'ordre supérieur*. L'étude de ces polynomes s'impose pour plusieurs raisons. Les $B_\nu(x)$ et les $E_\nu(x)$ sont indispensables dans l'étude des équations aux différences finies du premier ordre. Les polynomes nouveaux entrent de même dans l'étude des équations d'ordre quelconque.

Soit n un entier positif. Soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ des nombres complexes quelconques. Considérons l'équation aux différences finies

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) = x^\nu, \quad (1)$$

ν étant un entier non négatif. Il y a évidemment un polynome et un seul qui satisfait à cette équation. Ce polynome est du degré ν . Je le désigne par $E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n)$ ou plus brièvement par $E_\nu^{(n)}(x)$. On peut ainsi définir une suite infinie de *polynomes d'EULER* $E_\nu^{(1)}(x), E_\nu^{(2)}(x), E_\nu^{(3)}(x), \dots$ et l'on a en particulier $E_\nu^{(1)}(x | \omega) = \omega^\nu E_\nu\left(\frac{x}{\omega}\right)$.

Je dis pour abrégé, que le polynome $E_\nu^{(n)}(x)$ est *du degré ν et d'ordre n* . Les polynomes $E_\nu^{(n)}(x)$ possèdent des propriétés remarquables et il y a des nombreuses relations entre eux que nous allons mettre en évidence.

Voici d'abord deux propriétés importantes qui découlent immédiatement de la définition. Soit p un entier positif plus petit que n . Posons

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_p}^p E_\nu^{(n)}(x) = F(x).$$

On a en vertu de (1)

$$\nabla_{\omega_{p+1} \dots \omega_n}^{n-p} F(x) = x^\nu.$$

Le polynome $F(x)$ qui satisfait à cette équation est par définition égal à

$$F(x) = E_\nu^{(n-p)}(x | \omega_{p+1}, \dots, \omega_n).$$

On a donc

$$\nabla^p E_\nu^{(n)}(x) = E_\nu^{(n-p)}(x), \quad p = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2)$$

et si l'on veut mettre en évidence les paramètres

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_p}^p E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E_\nu^{(n-p)}(x | \omega_{p+1}, \dots, \omega_n).$$

Si l'on pose $E_\nu^{(0)}(x) = x^\nu$, cette relation subsiste encore pour $p = n$. On peut d'ailleurs permuter les paramètres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ d'une manière quelconque. Si l'on distingue p parmi d'eux, et si l'opération ∇^p porte sur ces p paramètres, le polynôme au second membre ne dépend plus des paramètres distingués.

Remarquons en particulier qu'on a

$$\begin{aligned} \nabla_{\omega_n} E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) &= E_\nu^{(n-1)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-1}), \\ \nabla_{\omega_{n-1}} E_\nu^{(n-1)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-1}) &= E_\nu^{(n-2)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-2}), \\ &\dots \\ \nabla_{\omega_1} E_\nu^{(1)}(x | \omega_1) &= x^\nu. \end{aligned} \quad (3)$$

Ces n équations sont équivalentes à l'équation¹ (1).

En dérivant l'équation (1) par rapport à x la définition des polynômes d'EULER nous donne immédiatement cette relation

$$D_x E_\nu^{(n)}(x) = \nu E_{\nu-1}^{(n)}(x) \quad (4)$$

On a donc en vertu de la formule de TAYLOR

$$E_\nu^{(n)}(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} h^s E_{\nu-s}^{(n)}(x). \quad (5)$$

En posant $h = \omega_n$ ce développement prend la forme

$$E_\nu^{(n-1)}(x) = E_\nu^{(n)}(x) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s E_{\nu-s}^{(n)}(x), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

A l'aide de cette relation de récurrence on sait déterminer successivement tous les polynômes d'EULER d'ordre n quand on connaît les polynômes d'ordre $n-1$. On sait d'ailleurs d'une manière explicite exprimer les polynômes d'ordre n par les polynômes d'ordre inférieur à n . En effet, je dis qu'on a

¹ On peut donc, si l'on aime mieux, définir les polynômes d'EULER par ces n équations au lieu de, comme nous l'avons fait, par l'unique équation (1).

$$E_v^{(n)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} E_s^{(p)}(y) E_{v-s}^{(n-p)}(x), \quad (7)$$

x et y étant des nombres quelconques, p étant, comme plus haut, un entier positif plus petit que n . Pour le voir considérons l'équation

$$\nabla_{\omega_1, \dots, \omega_p}^p f(x) = \varphi(x), \quad (8)$$

$\varphi(x)$ étant un polynome du degré ν

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_\nu x^\nu.$$

Le polynome $f(x)$ qui satisfait à cette équation peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = A_0 E_0^{(p)}(x) + A_1 E_1^{(p)}(x) + \dots + A_\nu E_\nu^{(p)}(x).$$

Remplaçons x par $x+y$ et développons le second membre suivant les puissances de x ; on trouve en vertu de (5)

$$f(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \varphi^{(s)}(x) \frac{E_s^{(p)}(y)}{s!}. \quad (9)$$

Si l'on pose en particulier

$$\varphi(x) = E_v^{(n-p)}(x | \omega_{p+1}, \dots, \omega_n)$$

on a comme nous venons de le démontrer

$$f(x) = E_v^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n).$$

En substituant ces valeurs l'équation (9) prend la forme

$$E_v^{(n)}(x+y | \omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(p)}(y | \omega_1, \dots, \omega_p) E_{v-s}^{(n-p)}(x | \omega_{p+1}, \dots, \omega_n) \quad (10)$$

c. q. f. d.

Cette relation subsiste encore si les polynomes $E_s^{(p)}(y)$ ($s = 0, 1, \dots, \nu$) dépendent de p quelconques parmi les nombres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ pendant que les polynomes $E_s^{(n-p)}(x)$ dépendent des $n-p$ autres. Notre relation peut évidemment s'écrire sous l'une et l'autre des deux formes symboliques suivantes

$$E_v^{(n)}(x+y) = E_v^{(n-p)}(x + E^{(p)}(y))$$

$$E_v^{(n)}(x+y) = (E^{(n-p)}(x) + E^{(p)}(y))^v.$$

De la dernière expression on conclut qu'on a plus généralement

$$E_\nu^{(n)}(x_1 + x_2 + \dots + x_s) = (E^{(p_1)}(x_1) + E^{(p_2)}(x_2) + \dots + E^{(p_s)}(x_s))^\nu, \quad (10 \text{ bis})$$

x_1, x_2, \dots, x_s étant des nombres quelconques, p_1, p_2, \dots, p_s étant des entiers positifs tels que $p_1 + p_2 + \dots + p_s = n$.

L'équation (10) est une généralisation de l'équation (5) et s'y réduit si $p = 0$. Si $p = 1$ on trouve

$$E_\nu^{(n)}(x + y) = \sum_{s=0}^{n-\nu} \binom{\nu}{s} E_s(y | \omega_n) E_{\nu-s}^{(n-1)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-1}). \quad (11)$$

En posant $y = 0$ il vient

$$E_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{n-\nu} \binom{\nu}{s} \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^s C_s E_{\nu-s}^{(n-1)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}). \quad (12)$$

On arrive aussi à cette équation en résolvant le système des équations (6) par rapport aux $E_\nu^{(n)}(x)$. Les équations (6) et (12) sont donc, pour ainsi dire, *réciproques*.

A l'aide de l'une ou l'autre de ces relations on détermine aisément tous les polynomes $E_\nu^{(n)}(x)$. Je reproduis ici les premiers d'entre eux

$$E_0^{(n)}(x) = 1, \quad E_1^{(n)}(x) = x - \frac{1}{2} \sum_1^n \omega_s,$$

$$E_2^{(n)}(x) = x^2 - \sum_1^n \omega_s x + \frac{1}{2} \sum \omega_{s_1} \omega_{s_2},$$

$$E_3^{(n)}(x) = x^3 - \frac{3}{2} \sum_1^n \omega_s x^2 + \frac{3}{2} \sum \omega_{s_1} \omega_{s_2} x + \frac{\sum_1^n \omega_s^3 - 3 \sum \omega_{s_1} \omega_{s_2} \omega_{s_3}}{4},$$

$$E_4^{(n)}(x) = x^4 - 2 \sum_1^n \omega_s x^3 + 3 \sum \omega_{s_1} \omega_{s_2} x^2 + \left(\sum_1^n \omega_s^3 - 3 \sum \omega_{s_1} \omega_{s_2} \omega_{s_3} \right) x - \frac{\sum \omega_{s_1}^3 \omega_{s_2} - 3 \sum \omega_{s_1} \omega_{s_2} \omega_{s_3} \omega_{s_4}}{2}.$$

16. Quelle est l'expression générale des coefficients dans ces polynomes? Il est facile de le voir. Nous allons démontrer qu'ils s'expriment d'une part à l'aide des nombres d'EULER E_ν et d'autre part à l'aide des entiers C_ν . Nous donne-

rons en même temps deux méthodes nouvelles¹ pour résoudre notre équation aux différences finies.

Dans ce but j'introduis certaines formes que je désigne par $E_v^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ et $C_v^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ ou plus brièvement par $E_v^{(n)}$ et $C_v^{(n)}$. Ces formes sont pour les polynomes d'EULER d'ordre n ce que les nombres E_v et C_v sont pour les polynomes d'EULER d'ordre un .

Nous avons défini les E_v et les C_v par les équations

$$\sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} E_{v-s} + \sum_{s=0}^{s=v} (-1)^s \binom{v}{s} E_{v-s} = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} 2^s C_{v-s} + C_v = 0,$$

ou symboliquement

$$(E + 1)^v + (E - 1)^v = \begin{cases} 0 & \nu > 0 \\ 2 & \nu = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$(C + 2)^v + (C)^v = \begin{cases} 0 & \nu > 0 \\ 2 & \nu = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Je définis de même les quantités $E_v^{(n)}$ et $C_v^{(n)}$ par les relations de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} \omega_n^s E_{v-s}^{(n)} + \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} (-1)^s \omega_n^s E_{v-s}^{(n)} = 2 E_v^{(n-1)}, \quad (15)$$

$$\sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} (2 \omega_n)^s C_{v-s}^{(n)} + C_v^{(n)} = 2 C_v^{(n-1)} \quad (16)$$

ou symboliquement

$$(E^{(n)} + \omega_n)^v + (E^{(n)} - \omega_n)^v = 2 E_v^{(n-1)}, \quad (17)$$

$$(C^{(n)} + 2 \omega_n)^v + (C^{(n)})^v = 2 C_v^{(n-1)}. \quad (18)$$

Pour achever la définition je pose en particulier

$$E_v^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^v E_v, \quad C_v^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^v C_v.$$

¹ Si nous n'avions pas eu ce but supplémentaire nous aurions pu simplifier un peu l'analyse de ce paragraphe en tenant compte des résultats du paragraphe précédent.

On détermine ainsi successivement les quantités $E_v^{(2)}[\omega_1, \omega_2]$, $E_v^{(3)}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, $E_v^{(4)}[\omega_1, \dots, \omega_4], \dots$ et les quantités $C_v^{(2)}[\omega_1, \omega_2]$, $C_v^{(3)}[\omega_1, \omega_2, \omega_3], \dots$. Les équations (13) et (14) sont pour ainsi dire les relations de récurrence qui appartiennent à l'équation aux différences finies

$$E_v(x+1) + E_v(x) = 2x^v.$$

Dans cet ordre d'idées on peut dire que les équations (17) et (18) sont les relations de récurrence qui appartiennent au système d'équations (3). Des équations (17) et (18) il résulte qu'on a

$$\varphi(E^{(n)} + \omega_n) + \varphi(E^{(n)} - \omega_n) = 2\varphi(E^{(n-1)}), \quad (19)$$

$$\varphi(C^{(n)} + 2\omega_n) + \varphi(C^{(n)}) = 2\varphi(C^{(n-1)}), \quad (20)$$

$\varphi(z)$ étant un polynome quelconque. Si l'on remplace $\varphi(z)$ par $\varphi\left(x + \frac{z}{2}\right)$ il vient

$$\varphi\left(x + \frac{E^{(n)} + \omega_n}{2}\right) + \varphi\left(x + \frac{E^{(n)} - \omega_n}{2}\right) = 2\varphi\left(x + \frac{E^{(n-1)}}{2}\right), \quad (21)$$

$$\varphi\left(x + \omega_n + \frac{C^{(n)}}{2}\right) + \varphi\left(x + \frac{C^{(n)}}{2}\right) = 2\varphi\left(x + \frac{C^{(n-1)}}{2}\right). \quad (22)$$

L'équation aux différences finies

$$f(x + \omega_n) + f(x) = 2\varphi\left(x + \frac{E^{(n-1)}}{2}\right)$$

admet donc la solution

$$f(x) = \varphi\left(x - \frac{\omega_n}{2} + \frac{E^{(n)}}{2}\right)$$

et l'équation aux différences finies

$$f(x + \omega_n) + f(x) = 2\varphi\left(x + \frac{C^{(n-1)}}{2}\right)$$

admet la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{C^{(n)}}{2}\right).$$

Cela posé, rappelons qu'on a

$$\begin{aligned}
 E_v^{(1)}(x + \omega_1) + E_v^{(1)}(x) &= 2 x^v \\
 E_v^{(2)}(x + \omega_2) + E_v^{(2)}(x) &= 2 E_v^{(1)}(x) \\
 E_v^{(3)}(x + \omega_3) + E_v^{(3)}(x) &= 2 E_v^{(2)}(x) \\
 \dots & \\
 E_v^{(n)}(x + \omega_n) + E_v^{(n)}(x) &= 2 E_v^{(n-1)}(x).
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

De la première de ces équations nous avons conclu dans le paragraphe 9 que

$$E_v^{(1)}(x | \omega_1) = \left(x - \frac{\omega_1}{2} + \frac{E^{(1)}}{2}\right)^v.$$

De la seconde équation on conclut de même, en posant $\varphi(x) = \left(x - \frac{\omega_1}{2}\right)^v$, que

$$E_v^{(2)}(x | \omega_1, \omega_2) = \left(x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{E^{(2)}}{2}\right)^v$$

et par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$E_v^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \left(x - \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2} + \frac{E^{(n)}}{2}\right)^v$$

c'est à dire que

$$E_v^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} \frac{E_s^{(n)}}{2^s} \left(x - \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2}\right)^{v-s}. \tag{24}$$

En changeant la variable il vient

$$2^v E_v^{(n)}\left(\frac{x + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} x^s E_{v-s}^{(n)}. \tag{25}$$

De la première des équations (23) nous avons conclu dans le paragraphe 10 que

$$E_v^{(1)}(x | \omega_1) = \left(x + \frac{C^{(1)}}{2}\right)^v.$$

De la seconde équation on conclut de même, en posant $\varphi(x) = x^v$, que

$$E_v^{(2)}(x | \omega_1, \omega_2) = \left(x + \frac{C^{(2)}}{2}\right)^v$$

et par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \left(x + \frac{C^{(n)}}{2}\right)^\nu \quad (26)$$

c'est à dire que

$$E_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} \frac{C_s^{(n)}}{2^s} x^{\nu-s}. \quad (27)$$

L'étude des polynomes d'EULER est ainsi ramenée à une étude des quantités $E_\nu^{(n)}$ ou $C_\nu^{(n)}$.

17. Revenons à l'équation (15) qui définit les $E_\nu^{(n)}$. On peut, si l'on aime mieux, écrire cette relation de récurrence sous la forme

$$E_\nu^{(n)} + \binom{\nu}{2} \omega_n^2 E_{\nu-2}^{(n)} + \binom{\nu}{4} \omega_n^4 E_{\nu-4}^{(n)} + \dots = E_\nu^{(n-1)} \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

Le dernier terme au premier membre est égal à $\omega_n^\nu E_0^{(n)}$, si ν est pair, mais égal à $\nu \omega_n^{\nu-1} E_1^{(n)}$, si ν est impair.

On voit immédiatement que $E_\nu^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ est une forme du degré ν et à coefficients entiers. Remarquons en outre qu'on a $E_{2\nu+1} = 0$, et par conséquent en vertu de (28) $E_{2\nu+1}^{(n)} = 0$ quels que soient n et ν .

De cette observation on peut tirer un résultat important. Posons $x = 0$ dans l'équation (25), il vient

$$2^\nu E_\nu^{(n)} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2} \right) = E_\nu^{(n)}. \quad (29)$$

Le polynome $E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n)$ s'annule donc toujours dans le point

$$x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2},$$

si ν est impair, et cela quel que soit n .

De l'équation (16)

$$C_\nu^{(n)} + \sum_{s=1}^{\nu-1} \binom{\nu}{s} \omega_n^s 2^{s-1} C_{\nu-s}^{(n)} = C_\nu^{(n-1)} \quad (16)$$

on conclut de même que $C_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ est une forme du degré ν et à coefficients entiers. Pour trouver l'expression explicite de ces formes posons $x = 0$ dans l'équation (27); il vient

$$2^\nu E_\nu^{(n)}(0) = C_\nu^{(n)}. \quad (30)$$

Revenons à l'équation (11) et posons $x = y = 0$ on trouve

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s C_s C_{\nu-s}^{(n-1)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}] \quad (31)$$

ce qui est la réciproque de l'équation (16). D'autre part en posant

$$y = \frac{\omega_n}{2}, \quad x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1}}{2}$$

dans l'équation (11) il vient

$$E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s E_s E_{\nu-s}^{(n-1)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}] \quad (32)$$

ce qui est la réciproque de l'équation (28). En posant $n = 2$ on trouve

$$C_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s C_{\nu-s} \omega_1^s \omega_2^{\nu-s}, \quad (33)$$

$$E_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s E_{\nu-s} \omega_1^s \omega_2^{\nu-s}, \quad (34)$$

et par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1! s_2! \dots s_n!} C_{s_1} C_{s_2} \dots C_{s_n} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n}, \quad (35)$$

$$E_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1! s_2! \dots s_n!} E_{s_1} E_{s_2} \dots E_{s_n} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n}, \quad (36)$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières, positives ou nulles de s_1, s_2, \dots, s_n qui vérifient la condition $s_1 + s_2 + \dots + s_n = \nu$.

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme symbolique

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = ({}_1C \omega_1 + {}_2C \omega_2 + \dots + {}_nC \omega_n)^\nu$$

$$E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = ({}_1E \omega_1 + {}_2E \omega_2 + \dots + {}_nE \omega_n)^\nu.$$

On a par conséquent aussi

$$2^\nu E_\nu^{(n)}\left(\frac{x}{2} \mid \omega_1, \dots, \omega_n\right) = (x + {}_1C \omega_1 + {}_2C \omega_2 + \dots + {}_nC \omega_n)^\nu$$

$$2^\nu E_\nu^{(n)}\left(\frac{x + \omega_1 + \dots + \omega_n}{2} \mid \omega_1, \dots, \omega_n\right) = (x + {}_1E \omega_1 + {}_2E \omega_2 + \dots + {}_nE \omega_n)^\nu.$$

On ne réduira pas les ${}_{\tau}C$ avec les ${}_sC$, ni non plus les ${}_{\tau}E$ avec les ${}_sE$. Mais lorsque le développement symbolique des seconds membres sera effectué, on remplacera $({}_sC)^\nu$ par C_ν et $({}_sE)^\nu$ par E_ν .

Les formes $E_\nu^{(n)}$ et $C_\nu^{(n)}$ sont donc des *fonctions symétriques des paramètres* $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ et il en est de même des polynômes $E_\nu^{(n)}(x)$. Ces fonctions sont en outre homogènes et du degré ν c'est à dire qu'on a

$$C_\nu^{(n)}[\lambda \omega_1, \lambda \omega_2, \dots, \lambda \omega_n] = \lambda^\nu C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n], \quad (37)$$

$$E_\nu^{(n)}[\lambda \omega_1, \lambda \omega_2, \dots, \lambda \omega_n] = \lambda^\nu E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n], \quad (38)$$

$$E_\nu^{(n)}(\lambda x | \lambda \omega_1, \dots, \lambda \omega_n) = \lambda^\nu E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n), \quad (39)$$

λ étant un nombre quelconque.

Si ν est impair le second membre de (33) se réduit et on trouve

$$C_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = (\omega_1^\nu + \omega_2^\nu) C_\nu.$$

De même si ν est impair le second membre de (36) se réduit à zéro parce que $E_{2p+1} = 0$.

Les relations (31) et (32) ne sont que des cas particuliers de relations plus générales. En effet, en posant dans l'équation (10)

$$y = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p}{2}, \quad x = \frac{\omega_{p+1} + \omega_{p+2} + \dots + \omega_n}{2}$$

on trouve

$$E_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(p)}[\omega_1, \dots, \omega_p] E_{\nu-s}^{(n-p)}[\omega_{p+1}, \dots, \omega_n] = (E^{(p)} + E^{(n-p)})^\nu$$

qui se réduit à (32), si $p = 1$. Et en posant $y = x = 0$ on trouve

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s^{(p)}[\omega_1, \dots, \omega_p] C_{\nu-s}^{(n-p)}[\omega_{p+1}, \dots, \omega_n] = (C^{(p)} + C^{(n-p)})^\nu$$

qui se réduit à (31), si $p = 1$. De ces expressions on conclut encore qu'on a plus généralement

$$E_\nu^{(n)} = (E^{(p_1)} + E^{(p_2)} + \dots + E^{(p_s)})^\nu,$$

$$C_\nu^{(n)} = (C^{(p_1)} + C^{(p_2)} + \dots + C^{(p_s)})^\nu,$$

p_1, p_2, \dots, p_s étant des entiers positifs qui vérifient la condition $p_1 + p_2 + \dots + p_s = n$. A l'aide de l'une ou de l'autre de ces relations on détermine aisément les $E_\nu^{(n)}$ et les $C_\nu^{(n)}$. Voici les premières de ces formes

$$E_0^{(n)} = 1, \quad E_2^{(n)} = - \sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^2, \quad E_4^{(n)} = 5 \sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^4 + 6 \sum \omega_{s_1}^2 \omega_{s_2}^2$$

$$C_0^{(n)} = 1, \quad C_1^{(n)} = - \sum_{s=1}^{s=n} \omega_s, \quad C_2^{(n)} = 2 \sum \omega_{s_1} \omega_{s_2}, \quad C_3^{(n)} = 2 \sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^3 - 6 \sum \omega_{s_1} \omega_{s_2} \omega_{s_3}.$$

18. Il y a un grand nombre de relations entre les $E_v^{(n)}$ et entre les $C_v^{(n)}$. On les déduit des équations (21) et (22) en choisissant convenablement le polynome $\varphi(x)$. Par exemple en posant $\varphi(x) = x^v$ on trouve

$$(x + E^{(n)} + \omega_n)^v + (x + E^{(n)} - \omega_n)^v = 2(x + E^{(n-1)})^v,$$

$$(x + C^{(n)} + 2\omega_n)^v + (x + C^{(n)})^v = 2(x + C^{(n-1)})^v.$$

En posant $x = \omega_n$ dans la première et $x = -\omega_n$ dans la seconde de ces relations on trouve

$$(E^{(n)} + 2\omega_n)^v + (E^{(n)})^v = 2(E^{(n-1)} + \omega_n)^v,$$

$$(C^{(n)} + \omega_n)^v + (C^{(n)} - \omega_n)^v = 2(C^{(n-1)} - \omega_n)^v.$$

Les $E_v^{(n)}$ s'expriment aussi par les $C_v^{(n)}$ et inversement. En posant $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$ dans l'équation (27) il vient

$$E_v^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} C_s^{(n)} (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^{v-s} = (C^{(n)} + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^v.$$

En posant $x = 0$ dans l'équation (24) il vient

$$C_v^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} (-1)^{v-s} E_s^{(n)} (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^{v-s} = (E^{(n)} - \omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_n)^v,$$

$$(-1)^v C_v^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} E_s^{(n)} (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^{v-s} = (E^{(n)} + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^v.$$

Remarquons encore que l'équation (22) peut s'écrire comme il suit

$$\varphi(E^{(n)}(x) + \omega_n) + \varphi(E^{(n)}(x)) = 2\varphi(E^{(n-1)}(x)).$$

C'est le type général des relations entre les polynomes de deux ordres consécutifs. $\varphi(x)$ est un polynome quelconque de degré v , pour fixer les idées. Remplaçons $\varphi(x)$ par $\varphi(x+y)$, y étant un nombre quelconque, et développons. Il vient

$$\sum_{s=0}^{s=v} \frac{E_s^{(n)}(x)}{s!} \nabla_{\omega_n} \varphi^{(s)}(y) = \sum_{s=0}^{s=v} \frac{E_s^{(n-1)}(x)}{s!} \varphi^{(s)}(y).$$

En appliquant aux deux membres de cette équation l'opération ∇_{n-1} fois de suite, où ∇ porte sur la variable y , on trouve

$$\sum_{s=0}^{s=v} \frac{E_s^{(n)}(x)}{s!} \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \varphi^{(s)}(y) = \varphi(x+y).$$

C'est le type général d'une relation de récurrence entre les polynômes d'ordre n .

En posant en particulier $x=0$ ou $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$ il vient

$$\sum_{s=0}^{s=v} \frac{C_s^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]}{2^s s!} \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \varphi^{(s)}(y) = \varphi(y),$$

$$\sum_{s=0}^{s=v} \frac{E_s^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]}{2^s s!} \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \varphi^{(s)}(y) = \varphi\left(y + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2}\right).$$

19. Nous avons vu qu'on a

$$\frac{E_v^{(n)}(x + \omega_1) + E_v^{(n)}(x)}{2} = E_v^{(n-1)}(x | \omega_2, \dots, \omega_n).$$

En remplaçant x par $-x$ et en tenant compte de l'équation (39) il vient

$$(-1)^v \frac{E_v^{(n)}(-x) + E_v^{(n)}(\omega_1 - x)}{2} = E_v^{(n-1)}(x | -\omega_2, \dots, -\omega_n).$$

Les polynômes $E_v^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n)$ et $(-1)^v E_v^{(n)}(\omega_1 - x | \omega_1, -\omega_2, -\omega_3, \dots, -\omega_n)$ satisfont donc tous les deux à l'équation

$$\frac{f(x + \omega_1) + f(x)}{2} = E_v^{(n-1)}(x | \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Ces deux polynômes sont par conséquent identiques c'est à dire qu'on a

$$E_v^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) = E_v^{(n)}(x - \omega_1 | -\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

et en remplaçant x par $x + \omega_1$

$$E_v^{(n)}(x + \omega_1 | \omega_1, \dots, \omega_n) = E_v^{(n)}(x | -\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \quad (40)$$

De cette relation on déduit encore

$$E_v^{(n)}(x + \omega_1 + \omega_2 | \omega_1, \dots, \omega_n) = E_v^{(n)}(x | -\omega_1, -\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n),$$

$$E_v^{(n)}(x + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p | \omega_1, \dots, \omega_n) = E_v^{(n)}(x | -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_p, \omega_{p+1}, \dots, \omega_n), \quad (41)$$

où p prend les valeurs $1, 2, \dots, n$. Dans le cas $p = n$ la relation peut s'écrire sous la forme

$$E_v^{(n)}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n - x | \omega_1, \dots, \omega_n) = (-1)^v E_v^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n). \quad (42)$$

En posant $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$ on voit que le polynome $E_v^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, si v est impair, admet ce point pour zéro comme nous l'avons déjà fait remarquer. En posant $x = 0$ il vient

$$E_v^{(n)}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 2^{-v} C_v^{(n)}[-\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_p, \omega_{p+1}, \dots, \omega_n] \quad (43)$$

et en particulier, si $p = n$

$$E_v^{(n)}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n | \omega_1, \dots, \omega_n) = (-2)^{-v} C_v^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n].$$

En développant le premier membre suivant les puissances de $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ on trouve cette nouvelle relation entre les $C_v^{(n)}$

$$(-1)^v C_v^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} 2^s (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^s C_{v-s}^{(n)} = (C^{(n)} + 2\omega_1 + 2\omega_2 + \dots + 2\omega_n)^v.$$

Si l'on change le signe d'un ou de plusieurs des nombres ω la fonction $E_v^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ n'est pas altérée. Mais où en est-il avec la fonction $C_v^{(n)}$? Il est facile de le voir. De l'équation (43) on conclut, en effet, qu'on a

$$C_v^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_{p-1}, -\omega_p, \omega_{p+1}, \dots, \omega_n] = -C_v^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_p, \dots, \omega_n]$$

$$+ 2 C_v^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{p-1}, \omega_{p+1}, \dots, \omega_n].$$

20. Soit m un entier positif impair. Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=m-1} (-1)^s E_v^{(n)}\left(x + \frac{s\omega_1}{m} | \omega_1, \dots, \omega_n\right).$$

On a évidemment

$$f\left(x + \frac{\omega_1}{m}\right) + f(x) = E_v^{(n)}(x + \omega_1) + E_v^{(n)}(x)$$

et par conséquent

$$f\left(x + \frac{\omega_1}{m}\right) + f(x) = 2 E_v^{(n-1)}(x | \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Mais cette équation admet aussi la solution

$$f(x) = E_v^{(n)}\left(x \mid \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \dots, \omega_n\right).$$

Ces deux solutions sont des polynomes en x . Elles sont par conséquent identiques.

On a donc

$$\sum_{s=0}^{s=m-1} (-1)^s E_v^{(n)}\left(x + \frac{s\omega_1}{m} \mid \omega_1, \dots, \omega_n\right) = E_v^{(n)}\left(x \mid \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \dots, \omega_n\right).$$

De cette relation on déduit encore

$$\begin{aligned} \sum_{s_1=0}^{m_1-1} \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \dots \sum_{s_p=0}^{m_p-1} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_p} E_v^{(n)}\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \dots + \frac{s_p\omega_p}{m_p} \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\right) \\ = E_v^{(n)}\left(x \mid \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \dots, \frac{\omega_p}{m_p}, \omega_{p+1}, \dots, \omega_n\right), \end{aligned}$$

m_1, m_2, \dots, m_p étant des entiers positifs impairs quelconques, p étant un des nombres $1, 2, \dots, n$. Dans le cas particulier où l'on a $p = n$ et $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{s_1=0}^{m-1} \dots \sum_{s_n=0}^{m-1} (-1)^{s_1+\dots+s_n} E_v^{(n)}\left(x + \frac{s_1\omega_1 + \dots + s_n\omega_n}{m} \mid \omega_1, \dots, \omega_n\right) = m^{-v} E_v^{(n)}(mx \mid \omega_1, \dots, \omega_n).$$

Polynomes de Bernoulli d'ordre n .

21. Passons aux polynomes de BERNOULLI. Nous avons défini les nombres de BERNOULLI par la relation de récurrence

$$\sum_{s=1}^{s=v} \binom{v}{s} B_{v-s} = \begin{cases} 0, & \text{si } v > 1, \\ 1, & \text{si } v = 1, \end{cases}$$

ou symboliquement

$$(B + 1)^v - B^v = \begin{cases} 0, & \text{si } v > 1, \\ 1, & \text{si } v = 1. \end{cases}$$

Par analogie avec ce qui précède j'introduis certaines quantités que je désigne par $B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n]$ ou, quand il n'y a pas lieu à équivoque, par $B_\nu^{(n)}$. Je définis ces quantités par la relation de récurrence

$$\sum_{s=1}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s B_{\nu-s}^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \omega_n \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{n-1}] \quad (1)$$

ou symboliquement

$$(B^{(n)} + \omega_n)^\nu - (B^{(n)})^\nu = \omega_n \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}. \quad (2)$$

Pour achever la définition je pose en particulier

$$B_\nu^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^\nu B_\nu.$$

A l'aide de cette relation de récurrence on détermine successivement toutes les quantités $B_\nu^{(2)}, B_\nu^{(3)}, B_\nu^{(4)}, \dots$

Considérons l'équation aux différences finies

$$\Delta_{\omega} f(x) = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome donné de degré ν . On sait trouver un polynome $f(x)$ qui satisfait à cette équation. Ce polynome est du degré $\nu + 1$ et il est entièrement défini quand on connaît sa valeur dans un point quelconque, par exemple dans le point $x = 0$.

Cela posé, je définis de la manière suivante une suite de polynomes que je désigne par $B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ou plus brièvement par $B_\nu^{(n)}(x)$.

$B_\nu^{(1)}(x | \omega_1)$ est le polynome qui satisfait à l'équation

$$\Delta_{\omega_1} B_\nu^{(1)}(x) = \nu x^{\nu-1} \quad (3)$$

et à la condition

$$B_\nu^{(1)}(0 | \omega_1) = B_\nu^{(1)}[\omega_1].$$

$B_\nu^{(2)}(x | \omega_1, \omega_2)$ est le polynome qui satisfait à l'équation

$$\Delta_{\omega_2} B_\nu^{(2)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(1)}(x) \quad (4)$$

et à la condition

$$B_\nu^{(2)}(0 | \omega_1, \omega_2) = B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2].$$

Et en général $B_\nu^{(n)}(x|\omega_1, \dots, \omega_n)$ est le polynôme qui satisfait à l'équation

$$\Delta_{\omega_n} B_\nu^{(n)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}(x) \quad (5)$$

et à la condition

$$B_\nu^{(n)}(0|\omega_1, \dots, \omega_n) = B_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]. \quad (6)$$

On a donc en particulier

$$B_\nu^{(0)}(x) = x^\nu$$

$$B_\nu^{(1)}(x|\omega_1) = \omega_1^\nu B_\nu\left(\frac{x}{\omega_1}\right).$$

On voit que $B_\nu^{(n)}(x)$ est un polynôme en x de degré ν . Ce polynôme possède des propriétés analogues à celles du polynôme $B_\nu(x)$. Je dis par extension que $B_\nu^{(n)}(x)$ est un polynôme de BERNOULLI d'ordre n et du degré ν .

Dans le paragraphe 2 nous avons démontré que les deux conditions imposées à $B_\nu^{(1)}(x)$ entraînent qu'on a:

$$B_\nu^{(1)}(x|\omega_1) = \sum_{s=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(1)}[\omega_1].$$

On démontre tout à fait de la même manière que les deux conditions que nous venons d'imposer à $B_\nu^{(2)}(x)$ entraînent qu'on a

$$B_\nu^{(2)}(x|\omega_1, \omega_2) = \sum_{s=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(2)}[\omega_1, \omega_2].$$

Par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$B_\nu^{(n)}(x|\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{s=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]. \quad (7)$$

En dérivant les deux membres de cette équation par rapport à x on trouve

$$D_x B_\nu^{(n)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(n)}(x). \quad (8)$$

On a par conséquent

$$D_x^p B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-p+1) B_{\nu-p}^{(n)}(x). \quad (9)$$

En appliquant la formule de TAYLOR on trouve donc

$$B_\nu^{(n)}(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} h^s B_{\nu-s}^{(n)}(x). \quad (10)$$

En posant $h = \omega_n$ on trouve, en vertu de (5), la relation de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s B_{\nu-s}^{(n)}(x) = \omega_n \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}(x) \quad (11)$$

qui se réduit à (1) quand x tend vers zéro.

De l'équation (5) on déduit

$$\Delta_{\omega_{n-1}\omega_n}^2 B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1) B_{\nu-2}^{(n-2)}(x),$$

et en général, si $p \leq n$

$$\Delta^p B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1)\dots(\nu-p+1) B_{\nu-p}^{(n-p)}(x). \quad (12)$$

Cette équation peut, en vertu de (9), s'écrire sous la forme

$$\Delta^p B_\nu^{(n)}(x) = D_x^p B_\nu^{(n-p)}(x), \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

En posant $p = n$ on trouve en particulier que $B_\nu^{(n)}(x)$ satisfait à l'équation

$$\Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) = \nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1) x^{\nu-n}. \quad (14)$$

Au lieu de définir $B_\nu^{(n)}(x)$ à l'aide des n équations susdites du premier ordre on aurait pu définir cette fonction comme le polynome qui satisfait à l'équation (14). Mais cette condition ne suffit pas pour le définir, car le polynome le plus général qui satisfait à cette équation renferme n constantes arbitraires. Il faut donc encore se donner les valeurs de $B_\nu^{(n)}(x)$ et de ses dérivées d'ordre $1, 2, \dots, n-1$ dans un point quelconque par exemple dans le point $x = 0$. Et il convient de choisir ses valeurs conformément à l'équation (7).

22. J'introduis encore une autre suite de quantités $D_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ que je définis par la relation de récurrence

$$(D^{(n)} + \omega_n)^\nu - (D^{(n)} - \omega_n)^\nu = 2 \omega_n \nu D_{\nu-1}^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{n-1}]. \quad (15)$$

Pour achever la définition je pose en particulier

$$D_\nu^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^\nu D_\nu.$$

En développant on trouve

$$D_\nu^{(n)} + \frac{\nu(\nu-1)}{2 \cdot 3} \omega_n^2 D_{\nu-2}^{(n)} + \dots + \frac{1 + (-1)^\nu}{2} \frac{\omega_n^\nu}{\nu+1} D_0^{(n)} = D_\nu^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{n-1}].$$

Puisque $D_\nu = 0$, si ν est impair, on voit qu'on a de même $D_\nu^{(n)} = 0$, si ν est impair, et cela quel que soit n .

Le système des équations (15) est équivalent à l'unique équation

$$\varphi\left(x + \frac{D^{(n)} + \omega_n}{2}\right) - \varphi\left(x + \frac{D^{(n)} - \omega_n}{2}\right) = \omega_n \varphi'\left(x + \frac{D^{(n-1)}}{2}\right), \quad (16)$$

$\varphi(x)$ étant un polynome quelconque et $\varphi'(x)$ étant sa dérivée. De même, des équations (2), qui nous ont servi comme définition des $B_\nu^{(n)}$, on déduit

$$\varphi(x + B^{(n)} + \omega_n) - \varphi(x + B^{(n)}) = \omega_n \varphi'(x + B^{(n-1)}). \quad (17)$$

L'équation aux différences finies

$$\Delta_{\omega_n} f(x) = \varphi'(x + B^{(n-1)})$$

admet donc la solution

$$f(x) = \varphi(x + B^{(n)}),$$

et l'équation

$$\Delta_{\omega_n} f(x) = \varphi'\left(x + \frac{D^{(n-1)}}{2}\right)$$

admet la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{D^{(n)} - \omega_n}{2}\right).$$

De ce dernier fait on conclut immédiatement que

$$B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) = \left(x - \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2} + \frac{D^{(n)}}{2}\right)^\nu.$$

En développant on trouve

$$2^\nu B_\nu^{(n)}\left(\frac{x + \omega_1 + \dots + \omega_n}{2} | \omega_1, \dots, \omega_n\right) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x^s D_{\nu-s}^{(n)}. \quad (18)$$

On a donc en particulier

$$B_\nu^{(n)} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2} \right) = 2^{-\nu} D_\nu^{(n)}. \quad (19)$$

Le polynome $B_\nu^{(n)}(x|\omega_1, \dots, \omega_n)$ admet par conséquent le point $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$ pour zéro, si ν est impair.

On peut exprimer les $D_\nu^{(n)}$ par les $B_\nu^{(n)}$ et inversement. En effet de l'équation

$$B_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(n)}$$

on déduit

$$D_\nu^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^s 2^{\nu-s} B_{\nu-s}^{(n)} = (2 B^{(n)} + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^\nu.$$

De l'équation (18) on déduit de même

$$2^\nu B_\nu^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \binom{\nu}{s} (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^s D_{\nu-s}^{(n)} = (D^{(n)} - \omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_n)^\nu,$$

$$(-2)^\nu B_\nu^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^s D_{\nu-s}^{(n)} = (D^{(n)} + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^\nu.$$

23. On peut écrire l'équation (17) sous la forme suivante

$$\varphi(B^{(n)}(x) + \omega_n) - \varphi(B^{(n)}(x)) = \omega_n \varphi'(B^{(n-1)}(x)). \quad (20)$$

C'est le type général d'une relation de récurrence entre les polynomes d'ordre n et d'ordre $n-1$. Ici $\varphi(x)$ signifie un polynome quelconque de degré $\nu+n$, pour fixer les idées. Remplaçons $\varphi(x)$ par $\varphi(x+y)$ et développons; il vient

$$\sum_{s=0}^{s=\nu+n} \frac{B_s^{(n)}(x)}{s!} \Delta_{\omega_n} \varphi^{(s)}(y) = \sum_{s=0}^{s=\nu+n} \frac{B_s^{(n-1)}(x)}{s!} \varphi^{(s+1)}(y).$$

Appliquons aux deux membres de cette équation $n-1$ fois de suite l'opération Δ , où Δ porte sur la variable y . On trouve

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{B_s^{(n)}(x)}{s!} \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \varphi^{(s)}(y) = \varphi^{(n)}(x+y). \quad (21)$$

C'est le type général d'une relation de récurrence entre les polynomes de BERNOULLI d'ordre n . Ici x et y sont des variables quelconques. Si en parti-

culier $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$ il vient

$$\sum_{s=0}^{s=v} \frac{B_s^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]}{s!} \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \varphi^{(s)}(y) = \varphi^{(n)}(y),$$

$$\sum_{s=0}^{s=v} \frac{D_s^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]}{2^s s!} \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \varphi^{(s)}(y) = \varphi^{(n)}\left(y + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2}\right).$$

Considérons l'équation aux différences finies

$$\Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) = \varphi^{(n)}(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome donné, et $\varphi^{(n)}(x)$ étant sa dérivée $n^{\text{ième}}$. De la relation (21) on conclut sans peine que cette équation admet une solution $f(x)$ telle qu'on ait, quels que soient x et y

$$f(x+y) = \varphi(B^{(n)}(x) + y) = \sum_{s=0}^{s=v+n} \frac{B_s^{(n)}(x)}{s!} \varphi^{(s)}(y).$$

Cette propriété des polynomes de BERNOULLI est assez remarquable. Nous avons supposé essentiellement que $\varphi(x)$ était un polynome mais on peut démontrer un résultat analogue dans des cas plus généraux.

24. A l'aide de la relation de récurrence (11) on peut trouver les polynomes de BERNOULLI d'ordre n quand on connaît les polynomes d'ordre $n-1$. On sait d'ailleurs d'une manière explicite exprimer les polynomes d'ordre n par les polynomes d'ordre inférieur à n . En effet, posons dans l'équation (21)

$$\varphi(y) = B_{v+n}^{(p+n)}(y | \omega_1, \dots, \omega_{p+n}),$$

p étant un entier positif quelconque. Il vient¹

$$B_v^{(n+p)}(x+y | \omega_1, \dots, \omega_{p+n}) = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} B_s^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) B_{v-s}^{(p)}(y | \omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+p}). \quad (22)$$

Cette relation subsiste d'ailleurs si l'on permute les nombres ω d'une manière quelconque. Ce fait résulte de ce que $B_v^{(n)}(x)$ est une fonction symétrique de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ comme nous allons le voir dans un moment. Ce n'est pas inutile de remarquer que l'équation (22) peut s'écrire sous la forme symbolique suivante

¹ Si $p = 0$ cette équation se réduit à l'équation (10).

$$B_v^{(n+p)}(x+y) = (B^{(n)}(x) + B^{(p)}(y))^v.$$

De cette expression on conclut qu'on a plus généralement

$$B_v^{(n)}(x_1 + x_2 + \dots + x_s) = (B^{(p_1)}(x_1) + B^{(p_2)}(x_2) + \dots + B^{(p_s)}(x_s))^v,$$

x_1, x_2, \dots, x_s étant des nombres quelconques et p_1, p_2, \dots, p_s étant des entiers non négatifs qui vérifient la condition

$$p_1 + p_2 + \dots + p_s = n.$$

Si l'on pose en particulier $p = 1, y = 0$ et si l'on remplace n par $n - 1$, l'équation (22) se réduit à

$$B_v^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} \omega_n^s B_s B_{v-s}^{(n-1)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-1}). \quad (23)$$

On peut aussi trouver cette relation en résolvant le système des équations (11) par rapport aux quantités $B_v^{(n)}(x)$. Les équations (11) et (23) sont donc réciproques. A l'aide de la relation de récurrence (23) on peut trouver le polynome de BERNOULLI d'un ordre et d'un degré quelconque. Mais le calcul s'effectue plus aisément en passant par l'intermédiaire des quantités $B_v^{(n)}$ ou $D_v^{(n)}$. Si l'on pose $x = y = 0$ dans l'équation (22) il vient

$$B_v^{(n+p)}[\omega_1, \dots, \omega_{n+p}] = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} B_s^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n] B_{v-s}^{(p)}[\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+p}].$$

Mais si l'on pose

$$x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2}, \quad y = \frac{\omega_{n+1} + \dots + \omega_{n+p}}{2}$$

il vient

$$D_v^{(n+p)}[\omega_1, \dots, \omega_{n+p}] = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} D_s^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n] D_{v-s}^{(p)}[\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+p}].$$

Soit en particulier $p = 1$ et remplaçons n par $n - 1$; on trouve

$$B_v^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} \omega_n^s B_s B_{v-s}^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{n-1}],$$

$$D_v^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} \omega_n^s D_s D_{v-s}^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{n-1}].$$

Ces deux équations sont réciproques aux équations qui nous ont servi comme définition des $B_\nu^{(n)}$ et des $D_\nu^{(n)}$.

Si $n = 2$, on trouve

$$B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} \omega_1^s \omega_2^{\nu-s} B_s B_{\nu-s} \quad (24)$$

et par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1! s_2! \dots s_n!} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n} B_{s_1} B_{s_2} \dots B_{s_n}, \quad (25)$$

$$D_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1! s_2! \dots s_n!} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n} D_{s_1} D_{s_2} \dots D_{s_n}, \quad (26)$$

les sommations étant étendues à toutes les valeurs positives ou nulles de s_1, s_2, \dots, s_n qui vérifient la condition $s_1 + s_2 + \dots + s_n = \nu$.

Ces équations peuvent s'écrire sous les formes symboliques

$$B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = ({}_1B \omega_1 + {}_2B \omega_2 + \dots + {}_nB \omega_n)^\nu,$$

$$D_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = ({}_1D \omega_1 + {}_2D \omega_2 + \dots + {}_nD \omega_n)^\nu.$$

On a par conséquent aussi

$$B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) = (x + {}_1B \omega_1 + {}_2B \omega_2 + \dots + {}_nB \omega_n)^\nu,$$

$$2^\nu B_\nu^{(n)}\left(\frac{x + \omega_1 + \dots + \omega_n}{2} | \omega_1, \dots, \omega_n\right) = (x + {}_1D \omega_1 + {}_2D \omega_2 + \dots + {}_nD \omega_n)^\nu.$$

Lorsque les développements symboliques aux seconds membres seront effectués on remplacera $({}_sB)^\nu$ par B_ν et $({}_sD)^\nu$ par D_ν .

Les $B_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ et les $D_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ sont donc des fonctions symétriques des paramètres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ et par conséquent il en est de même du polynôme $B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n)$. On voit en outre que ces fonctions sont homogènes et du degré ν , c'est à dire qu'on a

$$B_\nu^{(n)}[\lambda \omega_1, \lambda \omega_2, \dots, \lambda \omega_n] = \lambda^\nu B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n], \quad (27)$$

$$D_\nu^{(n)}[\lambda \omega_1, \lambda \omega_2, \dots, \lambda \omega_n] = \lambda^\nu D_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n],$$

$$B_\nu^{(n)}(\lambda x | \lambda \omega_1, \lambda \omega_2, \dots, \lambda \omega_n) = \lambda^\nu B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \quad (28)$$

A l'aide de l'une ou l'autre des relations précédentes on calcule aisément toutes les fonctions $B_\nu^{(n)}$ et $D_\nu^{(n)}$. On trouve, pour les premières valeurs de ν

$$\begin{aligned}
B_0^{(n)} &= 1, & B_1^{(n)} &= -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=n} \omega_s, & B_2^{(n)} &= \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^2 + \frac{1}{2} \sum \omega_s \omega_{s_2}, \\
D_0^{(n)} &= 1, & D_2^{(n)} &= -\frac{1}{3} \sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^2, & D_4^{(n)} &= \frac{7}{15} \sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^4 + \frac{2}{3} \sum \omega_{s_1}^2 \omega_{s_2}^2.
\end{aligned}$$

25. Nous allons maintenant déduire quelques autres propriétés des polynomes $B_\nu^{(n)}(x)$. Revenons à l'équation (5):

$$\frac{B_{\nu+1}^{(n)}(x + \omega_n) - B_{\nu+1}^{(n)}(x)}{\omega_n} = (\nu + 1) B_\nu^{(n-1)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

et remplaçons x par $-x$ il vient

$$(-1)^{\nu+1} \frac{B_{\nu+1}^{(n)}(-x) - B_{\nu+1}^{(n)}(\omega_n - x)}{\omega_n} = (\nu + 1) B_\nu^{(n-1)}(x | -\omega_1, \dots, -\omega_{n-1}).$$

Les polynomes $B_{\nu+1}^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n)$ et $(-1)^{\nu+1} B_{\nu+1}^{(n)}(\omega_n - x | -\omega_1, \dots, -\omega_{n-1}, \omega_n)$ satisfont donc tous les deux à l'équation

$$\frac{f(x + \omega_n) - f(x)}{\omega_n} = (\nu + 1) B_\nu^{(n-1)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-1}).$$

Les dérivées par rapport à x de ces deux polynomes sont par conséquent identiques c'est à dire qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) = B_\nu^{(n)}(x - \omega_n | \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, -\omega_n),$$

et en remplaçant x par $x + \omega_n$

$$B_\nu^{(n)}(x + \omega_n | \omega_1, \dots, \omega_n) = B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, -\omega_n).$$

De cette relation on déduit encore

$$B_\nu^{(n)}(x + \omega_{n-1} + \omega_n | \omega_1, \dots, \omega_n) = B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_{n-2}, -\omega_{n-1}, -\omega_n),$$

$$B_\nu^{(n)}(x + \omega_{p+1} + \dots + \omega_n | \omega_1, \dots, \omega_n) = B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_p, -\omega_{p+1}, -\omega_{p+2}, \dots, -\omega_n),$$

où p prend les valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$. Dans le cas le plus important, où $p=0$, cette relation peut s'écrire sous la forme

$$B_\nu^{(n)}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n - x | \omega_1, \dots, \omega_n) = (-1)^\nu B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n). \quad (29)$$

Si l'on pose ici

$$x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2}$$

on voit de nouveau que le polynome $B_\nu^{(n)}(x)$ s'annule dans le point

$$x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2},$$

si ν est impair.

D'autre part en posant $x = 0$ il vient

$$B_\nu^{(n)}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n | \omega_1, \dots, \omega_n) = (-1)^\nu B_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]. \quad (30)$$

Le polynome $B_\nu^{(n)}(x) - B_\nu^{(n)}$ admet donc, si ν est pair, les deux zéros $x = 0$ et $x = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$.

Plus généralement on sait trouver la valeur du polynome $B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n)$ dans tous les points $s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \dots + s_n \omega_n$, où s_i désigne un des nombres 0 ou 1. De la formule que nous venons de démontrer il résulte en effet qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \dots + s_n \omega_n) = B_\nu^{(n)}[(-1)^{s_1} \omega_1, (-1)^{s_2} \omega_2, \dots, (-1)^{s_n} \omega_n].$$

D'autre part de l'équation aux différences finies que satisfait le polynome $B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n)$ on déduit en posant $x = 0$ qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(\omega_i) = B_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n] + \omega_i \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n], \quad (31)$$

i étant un des nombres 1, 2, ..., n . En comparant ces deux équations on trouve en particulier la relation

$$B_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, -\omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n] = B_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n] + \omega_i \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n].$$

Remarquons encore qu'en développant le premier membre de l'équation (30) suivant les puissances de $(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$ on trouve cette nouvelle relation de récurrence entre les $B_\nu^{(n)}$

$$(B^{(n)} + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)^\nu = (-1)^\nu B_\nu^{(n)}.$$

26. Soit m un entier positif quelconque. Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=m-1} B_{\nu+1}^{(n)} \left(x + \frac{s\omega_1}{m} \mid \omega_1, \dots, \omega_n \right).$$

On a évidemment

$$f\left(x + \frac{\omega_1}{m}\right) - f(x) = B_{\nu+1}^{(n)}(x + \omega_1) - B_{\nu+1}^{(n)}(x),$$

et par conséquent

$$f\left(x + \frac{\omega_1}{m}\right) - f(x) = \omega_1 (\nu + 1) B_{\nu}^{(n-1)}(x \mid \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Mais cette équation admet aussi la solution

$$f(x) = m B_{\nu+1}^{(n)} \left(x \mid \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \dots, \omega_n \right).$$

Ces deux solutions sont des polynomes en x . Leurs dérivées sont par conséquent identiques c'est à dire que

$$\sum_{s=0}^{s=m-1} B_{\nu}^{(n)} \left(x + \frac{s\omega_1}{m} \mid \omega_1, \dots, \omega_n \right) = m B_{\nu}^{(n)} \left(x \mid \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \dots, \omega_n \right). \quad (33)$$

De cette relation on déduit encore que

$$\begin{aligned} \sum_{s_1=0}^{m_1-1} \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \dots \sum_{s_p=0}^{m_p-1} B_{\nu}^{(n)} \left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \dots + \frac{s_p\omega_p}{m_p} \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \right) \\ = m_1 m_2 \dots m_p B_{\nu}^{(n)} \left(x \mid \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \dots, \frac{\omega_p}{m_p}, \omega_{p+1}, \dots, \omega_n \right), \end{aligned} \quad (34)$$

m_1, m_2, \dots, m_p étant des entiers positifs quelconques, p étant un des nombres $1, 2, \dots, n$. Dans le cas particulier où l'on a $p = n$ et $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{s_1=0}^{m-1} \sum_{s_2=0}^{m-1} \dots \sum_{s_n=0}^{m-1} B_{\nu}^{(n)} \left(x + \frac{s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \dots + s_n\omega_n}{m} \mid \omega_1, \dots, \omega_n \right) \\ = m^{n-\nu} B_{\nu}^{(n)}(mx \mid \omega_1, \dots, \omega_n). \end{aligned} \quad (35)$$

Si l'on pose $m = 2$ et si l'on remplace ω_s par $2\omega_s$ ($s = 1, 2, \dots, n$) cette équation se réduit à

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n B_\nu^{(n)}(x | 2\omega_1, 2\omega_2, \dots, 2\omega_n) = B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \quad (36)$$

Il y a encore une autre relation de ce genre qu'il convient de signaler. Soit maintenant m_1, m_2, \dots, m_n des entiers positifs pairs. Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{s_1=0}^{m_1-1} \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \dots \sum_{s_n=0}^{m_n-1} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} B_{\nu+n}^{(n)} \left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \dots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \mid \omega_1, \dots, \omega_n \right).$$

En appliquant l'opération ∇ n fois de suite on trouve

$$2^n \nabla_{\frac{\omega_1}{m_1}} \nabla_{\frac{\omega_2}{m_2}} \dots \nabla_{\frac{\omega_n}{m_n}} f(x) = (-1)^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \triangle_{\omega_1 \dots \omega_n}^n B_{\nu+n}^{(n)}(x).$$

On a par conséquent

$$\nabla^n f(x) = k x^\nu,$$

où l'on a posé pour abrégier

$$k = \left(-\frac{1}{2} \right)^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n).$$

Mais cette équation admet aussi la solution

$$f(x) = k E_\nu^{(n)} \left(x \mid \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \dots, \frac{\omega_n}{m_n} \right).$$

Ces deux solutions sont des polynomes en x . Elles sont par conséquent identiques. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{s_1=0}^{m_1-1} \dots \sum_{s_n=0}^{m_n-1} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} B_{\nu+n}^{(n)} \left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \dots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \mid \omega_1, \dots, \omega_n \right) \\ = k E_\nu^{(n)} \left(x \mid \frac{\omega_1}{m_1}, \dots, \frac{\omega_n}{m_n} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

On sait ainsi exprimer les polynomes d'Euler par les polynomes de Bernoulli. Dans le cas particulier où l'on a $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 2$ cette relation peut s'écrire sous une forme qui est assez remarquable. On trouve en effet

$$E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \triangle_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}^n \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(x | 2\omega_1, 2\omega_2, \dots, 2\omega_n)}{(\nu+n)(\nu+n-1)\dots(\nu+1)}. \quad (38)$$

A l'aide de cette relation on sait déduire les propriétés des polynomes d'EULER des propriétés correspondantes du polynome de BERNOULLI.

27. Je vais maintenant considérer quelques intégrales définies. Voyons d'abord ce qui se passe quand un ou plusieurs des paramètres ω tendent vers zéro.

Nous avons vu qu'on a

$$B_v^{(n)}(x|\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{v}{s} \omega_1^s B_s B_{v-s}^{(n-1)}(x|\omega_2, \dots, \omega_n).$$

Faisons tendre ω_1 vers zéro il vient

$$B_v^{(n)}(x|0, \omega_2, \dots, \omega_n) = B_v^{(n-1)}(x|\omega_2, \dots, \omega_n).$$

On a par conséquent

$$B_v^{(n)}(x|0, 0, \dots, 0, \omega_{p+1}, \dots, \omega_n) = B_v^{(n-p)}(x|\omega_{p+1}, \dots, \omega_n)$$

et en posant $x = 0$

$$B_v^{(n)}[0, 0, \dots, 0, \omega_{p+1}, \dots, \omega_n] = B_v^{(n-p)}[\omega_{p+1}, \dots, \omega_n].$$

Cela posé, reprenons l'équation (33) divisons les deux membres par m et faisons tendre m vers l'infini il vient

$$\frac{1}{\omega_1} \int_0^{\omega_1} B_v^{(n)}(x+t|\omega_1, \dots, \omega_n) dt = B_v^{(n-1)}(x|\omega_2, \dots, \omega_n). \quad (39)$$

De l'équation (34) on déduit de même en divisant par $m_1 m_2 \dots m_p$ et en faisant tendre les entiers m_1, m_2, \dots, m_p vers l'infini

$$\frac{1}{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \dots \int_0^{\omega_p} B_v^{(n)}(x+t_1+t_2+\dots+t_p|\omega_1, \dots, \omega_n) dt_1 \dots dt_p = B_v^{(n-p)}(x|\omega_{p+1}, \dots, \omega_n). \quad (40)$$

Si $p = n$ on trouve en particulier¹

¹ On peut aussi aisément déduire ces formules de l'équation aux différences finies à laquelle satisfait $B_v^{(n)}(x)$.

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 B_\nu^{(n)}(x + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n | \omega_1, \dots, \omega_n) dt_n = x^\nu. \quad (41)$$

Remplaçons x par $x + s_1 \omega_1 + \cdots + s_n \omega_n$ ($s_i = 0, 1, \dots, m_i - 1$) et ajoutons ensemble, il vient

$$\int_0^{m_1} dt_1 \int_0^{m_2} dt_2 \cdots \int_0^{m_n} B_\nu^{(n)}(x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n) dt_n = \sum_{s_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{m_n-1} (x + s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \cdots + s_n \omega_n)^\nu,$$

m_1, m_2, \dots, m_n étant des entiers positifs quelconques.

On peut, si l'on aime mieux, écrire cette relation comme il suit

$$\begin{aligned} \sum_{s_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{m_n-1} (x + s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \cdots + s_n \omega_n)^\nu \\ = \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + n)} \triangle_{m_1 \omega_1 \dots m_n \omega_n}^n B_{\nu+n}^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n). \end{aligned} \quad (42)$$

En faisant tendre x vers zéro dans l'équation (41), il vient

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 B_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n) dt_n = 0. \quad \nu > 0 \quad (43)$$

Cette relation est vraie quels que soient ν et n . Elle est vraie encore si l'on remplace le polynome de BERNOULLI $B_\nu^{(n)}(x)$ par le polynome d'EULER $E_\nu^{(n)}(x)$, pourvu que ν soit impair.

En effet dans le paragraphe 13 nous avons démontré qu'on a

$$\int_0^1 E_\nu^{(1)}(\omega t | \omega) dt = 0,$$

si ν est impair. Et dans le paragraphe 15 nous avons démontré que

$$E_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n) = \sum_{s=0}^{s-\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(1)}(\omega_n t_n) E_{\nu-s}^{(n-1)}(\omega_1 t_1 + \cdots + \omega_{n-1} t_{n-1}).$$

Par voie d'induction on démontre alors aisément que

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 E_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n) dt_n = 0,$$

si ν est impair. Mais si ν est un nombre quelconque la valeur de cette intégrale est égale à

$$\frac{(-1)^n}{2^\nu} \sum \frac{\nu!}{(s_1 + 1)! (s_2 + 1)! \cdots (s_n + 1)!} C_{s_1+1} C_{s_2+1} \cdots C_{s_n+1} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \cdots \omega_n^{s_n},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières, positives ou nulles de s_1, s_2, \dots, s_n telles que $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \nu$.

Remarquons enfin que l'équation (38) peut s'écrire sous la forme

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 B_\nu^{(n)}(x + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n | 2\omega_1, 2\omega_2, \dots, 2\omega_n) dt_n = E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n);$$

c'est ce qu'on voit en tenant compte de l'équation (8).

En posant en particulier $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)$ on trouve

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dt_1 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dt_2 \cdots \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} B_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n | \omega_1, \dots, \omega_n) dt_n = \frac{E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]}{2^{2\nu+n}}$$

D'autre part en posant $x = 0$, il vient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dt_1 \int_0^{\frac{1}{2}} dt_2 \cdots \int_0^{\frac{1}{2}} B_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) dt_n = \frac{C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]}{2^{2\nu+n}}.$$

28. Arrêtons nous un moment au cas particulier où $n = 2$. On a en vertu de (24)

$$B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_1^s \omega_2^{\nu-s} B_s B_{\nu-s}.$$

Si ν est impair tous les termes au second membre disparaissent, excepté le second et l'avant-dernier. On a donc

$$B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = -\frac{\nu}{2} \omega_1 \omega_2 (\omega_1^{\nu-2} + \omega_2^{\nu-2}) B_{\nu-1}, \quad (45)$$

si ν est impair. Reprenons l'équation (31):

$$B_\nu^{(2)}(\omega_1 | \omega_1, \omega_2) = B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] + \omega_1 \omega_2^{\nu-1} \nu B_{\nu-1},$$

$$B_\nu^{(2)}(\omega_2 | \omega_1, \omega_2) = B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] + \omega_1^{\nu-1} \omega_2 \nu B_{\nu-1}.$$

Dans le cas actuel les seconds membres peuvent se réduire. Si ν est impair on trouve en substituant l'expression que nous venons d'indiquer

$$B_\nu^{(2)}(\omega_1 | \omega_1, \omega_2) = \frac{\nu}{2} (\omega_2^{\nu-2} - \omega_1^{\nu-2}) \omega_1 \omega_2 B_{\nu-1},$$

$$B_\nu^{(2)}(\omega_2 | \omega_1, \omega_2) = \frac{\nu}{2} (\omega_1^{\nu-2} - \omega_2^{\nu-2}) \omega_1 \omega_2 B_{\nu-1}.$$

Ces deux valeurs sont donc égales et de signes contraires. Mais si ν est pair et > 2 nos équations se réduisent à

$$B_\nu^{(2)}(\omega_1) = B_\nu^{(2)}(\omega_2) = B_\nu^{(2)}$$

parce que B_3, B_5, B_7, \dots sont nuls. Rappelons en outre que

$$B_\nu^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = (-1)^\nu B_\nu^{(2)}.$$

Le polynome

$$B_\nu^{(2)}(x) - B_\nu^{(2)}$$

admet par conséquent les quatre points $x = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ pour zéros, si ν est pair et plus grand que 2, et ces zéros sont en général du premier ordre. Si $\nu = 2$ ce polynome a les deux zéros $x = 0$ et $x = \omega_1 + \omega_2$.

Pour trouver les valeurs du polynome de BERNOULLI d'ordre 2 dans les points $\frac{\omega_1}{2}$ et $\frac{\omega_2}{2}$ rappelons qu'on a

$$B_\nu^{(2)}(x | \omega_1, \omega_2) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s B_{\nu-s}(x | \omega_1) \omega_2^s,$$

$$B_\nu^{(2)}(x | \omega_1, \omega_2) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s B_{\nu-s}(x | \omega_2) \omega_1^s.$$

En posant $x = \frac{\omega_1}{2}$ dans la première et $x = \frac{\omega_2}{2}$ dans la seconde de ces relations on trouve

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1}{2} | \omega_1, \omega_2\right) = 2 B_\nu^{(2)}\left[\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right] - B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2],$$

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_2}{2} | \omega_1, \omega_2\right) = 2 B_\nu^{(2)}\left[\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right] - B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2].$$

Si ν est impair ces expressions se réduisent et on trouve en vertu de (45)

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1}{2} | \omega_1, \omega_2\right) = \frac{\nu}{2} (1 - 2^{2-\nu}) \omega_1^{\nu-1} \omega_2 B_{\nu-1},$$

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_2}{2} | \omega_1, \omega_2\right) = \frac{\nu}{2} (1 - 2^{2-\nu}) \omega_1 \omega_2^{\nu-1} B_{\nu-1}.$$

A l'aide de l'équation (35) on déduit enfin la valeur du polynome dans le point $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. En effet, en posant $x = 0$ et $n = m = 2$ on trouve, après quelques réductions

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} | \omega_1, \omega_2\right) = (1 + 2^{2-\nu}) B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] - 2 B_\nu^{(2)}\left[\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right] - 2 B_\nu^{(2)}\left[\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right].$$

Le second membre se réduit à zéro si ν est impair. Mais si, dans la même relation (35), on pose $x = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4}$ et $n = m = 2$, on trouve

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{4} | \omega_1, \omega_2\right) + B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1 + 3\omega_2}{4} | \omega_1, \omega_2\right) = 2^{1-\nu} B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} | \omega_1, \omega_2\right),$$

pourvu que ν soit pair. Posons enfin dans l'équation (38) $x = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et $n = 2$, on trouve, après quelques réductions

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{4} | \omega_1, \omega_2\right) - B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1 + 3\omega_2}{4} | \omega_1, \omega_2\right) = \omega_1 \omega_2 \nu (\nu - 1) \frac{B_{\nu-2}^{(2)}[\omega_1, \omega_2]}{2^{2\nu-1}}.$$

A l'aide de ces deux relations on trouve la valeur de notre polynome dans le point $\frac{\omega_1 + \omega_2}{4}$.

Enfin en posant $x = 0$ dans l'équation (38) il vient

$$\omega_1 \omega_2 \nu (\nu - 1) 2^{2-2\nu} C_{\nu-2}^{(2)} = B_\nu^{(2)} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) - B_\nu^{(2)} \left(\frac{\omega_1}{2} \right) - B_\nu^{(2)} \left(\frac{\omega_2}{2} \right) + B_\nu^{(2)}.$$

En substituant les valeurs que nous venons de trouver il vient

$$\omega_1 \omega_2 \nu (\nu - 1) 2^{-2\nu} C_{\nu-2}^{(2)} [\omega_1, \omega_2] = (1 + 2^{-\nu}) B_\nu^{(2)} [\omega_1, \omega_2] - B_\nu^{(2)} \left[\frac{\omega_1}{2}, \omega_2 \right] - B_\nu^{(2)} \left[\omega_1, \frac{\omega_2}{2} \right].$$

MM. P. APPELL¹, M. KRAUSE² et E. W. BARNES³ ont étudié des polynomes voisins des polynomes $B_\nu^{(2)}(x)$. Dans ce qui précède nous avons poussé plus loin l'étude de ces fonctions. Notre point de départ a été différent de celui de ces auteurs. M. APPELL a défini un polynome de BERNOULLI à deux variables x et y par l'équation

$$P_\nu(x, y) = \sum_{p=1}^{p=x} \sum_{q=1}^{q=y} (p\omega_1 + q\omega_2)^\nu.$$

Ce polynome de M. APPELL est égal à

$$P_\nu(x, y) = \frac{B_{\nu+2}^{(2)}(x\omega_1 + y\omega_2) - B_{\nu+2}^{(2)}(x\omega_1) - B_{\nu+2}^{(2)}(y\omega_2) + B_{\nu+2}^{(2)}(0)}{\omega_1 \omega_2 (\nu + 1) (\nu + 2)},$$

ou encore égal à

$$P_\nu(x, y) = \int_1^{x+1} \int_1^{y+1} B_\nu^{(2)}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 | \omega_1, \omega_2) dt_2 dt_1.$$

M. BARNES a d'abord introduit à l'aide d'une équation aux différences finies un polynome qui est un peu moins simple que $B_\nu^{(2)}(x)$. Mais en poursuivant ses recherches et considérant le cas général M. BARNES a préféré définir ses polynomes par ce fait que leurs dérivées figurent comme coefficients dans certains développements en séries. Nous avons partout défini les polynomes par leur propriété la plus essentielle. Le lecteur pourra juger de l'avantage que présente cette définition vis à vis de toute autre.

¹ Sur les fonctions de BERNOULLI à deux variables, Archiv Math. Phys. (3) 4 (1902-03), p. 292-3.

² Über die BERNOULLI'schen Funktionen zweier veränderlicher Grössen, Archiv Math. Phys. (3) 4 (1902-03), p. 293-5; Über BERNOULLI'schen Zahlen und Funktionen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlicher Grössen, Ber. Ges. Lpz, 55 (1903), math. p. 39-62.

³ The Theory of the double Gamma Funktion, Philos. Trans. London 196 A (1901), p. 271-85; On the Theory of the multiple Gamma Function, Trans. Cambr. philos. Soc. 19 (1904) p. 377-86.

Dans le cas particulier où tous les nombres ω_i se réduisent à 1 les $B_\nu^{(n)}$ ont été étudiés par A. CAUCHY¹, E. LUCAS², B. IMSCHENETZSKY³, J. SYLVESTER⁴, D. SINTZOF⁵, E. GRIGORIEW⁶ et N. NIELSEN⁷. Nous parlerons plus loin de ce cas particulier.

Polynomes de Bernoulli et polynomes d'Euler d'ordre négatif.

29. Jusqu'ici nous avons supposé essentiellement que l'ordre n était un entier positif. Nos relations subsistent encore pour $n = 0$, si l'on suppose que

$$B_\nu^{(0)}(x) = E_\nu^{(0)}(x) = x^\nu.$$

Mais il y a avantage à étendre la notion et à introduire des fonctions d'ordre négatif. On peut ainsi faire rentrer dans un même cadre des fonctions qui apparaissent jusqu'ici comme distinctes. Nous avons défini les fonctions d'ordre positif de sorte que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) &= \frac{\nu!}{(\nu - n)!} x^{\nu - n}, \\ \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) &= x^\nu. \end{aligned}$$

Je définis le polynome de BERNOULLI d'ordre $-n$ par l'équation

$$B_\nu^{(-n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{\nu!}{(\nu + n)!} \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n x^{\nu + n}, \quad (1)$$

et le polynome d'EULER d'ordre $-n$ par l'équation

$$E_\nu^{(-n)}(x | \omega_1, \dots, \omega_n) = \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n x^\nu, \quad (2)$$

n et ν étant des entiers non négatifs. On voit que $B_\nu^{(-n)}(x)$ et $E_\nu^{(-n)}(x)$ sont encore des polynomes du degré ν . De la définition il résulte immédiatement que

¹ ŒUVRES (2) 8, Paris 1890, p. 180—94.

² Sur les développements en séries, Bull. Soc. math. France 6 (1878), p. 57—68.

³ Mém. Acad. Pétersbourg (7) 31 (1883), mém. n° 11.

⁴ Educ. Times 39 (1883), p. 74.

⁵ Bull. Soc. physico-mathématique de Kasan (1) 8 (1890), p. 291—336; id. (2) 1 (1892), p. 234.

⁶ Nombres de BERNOULLI des ordres supérieurs, id. (2) 7 (1898), p. 146—202.

⁷ Ann. mat. pura appl. (3) 10 (1904), p. 287—325; Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, p. 66—78.

$$\Delta_{\omega_{n+1}} B_{\nu}^{(-n)}(x|\omega_1, \dots, \omega_n) = \nu B_{\nu-1}^{(-n-1)}(x|\omega_1, \dots, \omega_{n+1}), \quad (3)$$

$$\nabla_{\omega_{n+1}} E_{\nu}^{(-n)}(x|\omega_1, \dots, \omega_n) = E_{\nu}^{(-n-1)}(x|\omega_1, \dots, \omega_{n+1}). \quad (4)$$

Les équations

$$\Delta^p B_{\nu}^{(n)}(x) = \nu(\nu-1)\dots(\nu-p+1) B_{\nu-p}^{(n-p)}(x), \quad (5)$$

$$\nabla^p E_{\nu}^{(n)}(x) = E_{\nu}^{(n-p)}(x) \quad (6)$$

restent donc vraies même si $p > n$.

Dans les paragraphes 15 et 24 nous avons démontré qu'on a

$$E_{\nu}^{(n+p)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(n)}(x) E_{\nu-s}^{(p)}(y), \quad (7)$$

$$B_{\nu}^{(n+p)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)}(x) B_{\nu-s}^{(p)}(y), \quad (8)$$

x et y étant des nombres quelconques, n et p étant des entiers non négatifs. Appliquons aux deux membres de l'équation (7) l'opération

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_n, \omega_1 \dots \omega_n}^{2n}$$

où ∇ porte sur la variable x . On retrouve l'équation (7) où n a été changé en $-n$. Appliquons ensuite aux deux membres de cette équation l'opération

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_p, \omega_1 \dots \omega_p}^{2p}$$

où ∇ porte sur la variable y . On retrouve l'équation (7) où n et p ont été changés en $-n$ et $-p$. On peut enfin faire la même observation relativement à l'équation (8). Les équations (7) et (8) subsistent donc pour toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives de p et de n . Nous mentionnerons quelques cas particuliers de ces équations. Posons $p = 0$ et remplaçons n par $-n$, il vient¹

$$E_{\nu}^{(-n)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} y^{\nu-s} E_s^{(-n)}(x), \quad (9)$$

¹ On peut aussi déduire ces équations de la formule de TAYLOR.

$$B_v^{(-n)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{\nu}{s} y^{v-s} B_s^{(-n)}(x). \quad (10)$$

Par analogie avec ce qui précède je pose

$$\begin{aligned} B_v^{(-n)} &= B_v^{(-n)}(0), \\ C_v^{(-n)} &= 2^v E_v^{(-n)}(0), \\ D_v^{(-n)} &= 2^v B_v^{(-n)} \left(-\frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2} \right), \\ E_v^{(-n)} &= 2^v E_v^{(-n)} \left(-\frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{2} \right). \end{aligned}$$

Alors il résulte des équations (9) et (10) que les polynomes d'ordre négatif s'expriment par les $B_v^{(-n)}$ etc. de la même manière que les polynomes d'ordre positif s'expriment par les $B_v^{(n)}$ etc. Il s'agit donc de trouver les fonctions $B_v^{(-n)}$ etc. Dans ce but posons $x = y = 0$ dans l'équation (8). Il vient

$$B_v^{(-n-p)} = \sum_{s=0}^{s=v} \binom{\nu}{s} B_s^{(-n)} B_{v-s}^{(-p)} \quad (11)$$

et cette relation subsiste si l'on remplace B par C , par D ou par E . Cela posé, on arrive aisément à trouver l'expression explicite des fonctions $B_v^{(-n)}$ etc. On a d'abord

$$\begin{aligned} B_0^{(-n)} &= C_0^{(-n)} = D_0^{(-n)} = E_0^{(-n)} = 1, \\ B_v^{(-1)}[\omega] &= \frac{\omega^v}{\nu + 1}, \quad C_v^{(-1)}[\omega] = 2^{v-1} \omega^v, \end{aligned}$$

pour toutes les valeurs positives de ν et

$$E_v^{(-1)}[\omega] = \omega^v, \quad D_v^{(-1)}[\omega] = \frac{\omega^v}{\nu + 1},$$

si ν est pair. Mais si ν est impair on a $D_v^{(-1)} = E_v^{(-1)} = 0$.

De ce dernier fait on conclut immédiatement qu'on a toujours

$$D_v^{(-n)} = E_v^{(-n)} = 0,$$

si ν est impair, et cela quel que soit n . Par voie d'induction on démontre ensuite que

$$B_v^{(-n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{(s_1 + 1)!(s_2 + 1)! \dots (s_n + 1)!} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n},$$

$$C_v^{(-n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1! s_2! \dots s_n!} C_{s_1}^{(-1)}[\omega_1] \dots C_{s_n}^{(-1)}[\omega_n],$$

les sommations étant étendues à toutes les valeurs entières, nulles ou positives de s_1, s_2, \dots, s_n qui vérifient la condition $s_1 + s_2 + \dots + s_n = \nu$.

Si ν est pair on trouve

$$E_v^{(-n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1! s_2! \dots s_n!} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n},$$

$$D_v^{(-n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{(s_1 + 1)!(s_2 + 1)! \dots (s_n + 1)!} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n},$$

les sommations étant étendues aux mêmes valeurs de s_1, s_2, \dots, s_n *en exceptant celles qui sont impaires*.

Revenons aux équations (7) et (8) et posons $p = -n$. Il vient

$$(x + y)^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(n)}(x) E_{\nu-s}^{(-n)}(y), \quad (12)$$

$$(x + y)^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)}(x) B_{\nu-s}^{(-n)}(y), \quad (13)$$

et en particulier si $y = 0$

$$x^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} 2^{-s} C_s^{(-n)} E_{\nu-s}^{(n)}(x),$$

$$x^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(-n)} B_{\nu-s}^{(n)}(x).$$

A l'aide de ces relations de récurrence on sait trouver les polynomes de BERNOULLI et les polynomes d'EULER d'ordre n *sans passer par l'intermédiaire des polynomes d'ordre inférieur à n* . Remarquons en outre que ces équations peuvent s'écrire comme il suit

$$\sum_{s=0}^{\nu} \frac{C_s^{(-n)}}{2^s s!} \frac{d^s E_\nu^{(n)}(x)}{dx^s} = x^\nu,$$

$$\sum_{s=0}^{\nu} \frac{B_s^{(-n)}}{s!} \frac{d^s B_\nu^{(-n)}(x)}{dx^s} = x^\nu.$$

Les polynomes de BERNOULLI et les polynomes d'EULER d'ordre quelconque (positif ou négatif) satisfont donc à des équations différentielles linéaires et à coefficients constants. Et ces équations n'admettent aucune autre solution rationnelle.

Posons enfin $x = y = 0$ dans l'équation (13); il vient

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)} B_{\nu-s}^{(-n)} = 0. \tag{14}$$

Dans cette équation le second membre est égal à 0, si $\nu > 0$, mais égal à 1, si $\nu = 0$. Nous avons défini la forme $B_\nu^{(n)}$ par un système de n relations de récurrence. Ce système peut donc se remplacer par l'unique équation (14) qui lui est équivalente. Surtout quand il s'agit de trouver $B_\nu^{(n)}$ pour une grande valeur de n il est préférable de se servir de cette équation.

Relativement aux fonctions $C_\nu^{(n)}$, $D_\nu^{(n)}$ et $E_\nu^{(n)}$ on peut faire la même remarque, car l'équation (14) subsiste si l'on remplace B par C , par D ou par E . Il faut donc commencer par calculer les fonctions $E_\nu^{(-n)}$ et $D_\nu^{(-n)}$ qui sont d'une nature plus simple que les fonctions d'ordre positif.

30. Tout ce que nous avons dit des polynomes d'ordre positif reste vrai mutatis mutandis pour les polynomes d'ordre négatif. C'est trop évident pour que j'aie besoin de m'y arrêter. Je veux donner seulement un exemple. Dans le paragraphe 26 nous avons établi pour les polynomes d'ordre positif les deux relations suivantes

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n B_\nu^{(n)}(x | 2\omega_1, 2\omega_2, \dots, 2\omega_n) &= D_x^{(n)} E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \\ \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n B_\nu^{(n)}(x | 2\omega_1, 2\omega_2, \dots, 2\omega_n) &= B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \end{aligned}$$

Je dis que ces relations sont vraies encore si l'on remplace n par $-n$. En effet on a

$$\Delta_{\omega} \nabla_{\omega} = \nabla_{\omega} \Delta_{\omega} = \Delta_{2\omega}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) &= \Delta_{2\omega_1 \dots 2\omega_n}^n f(x), \\ \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) &= \Delta_{2\omega_1 \dots 2\omega_n}^n f(x). \end{aligned}$$

Posons $f(x) = x^\nu$ dans la première de ces relations et $f(x) = x^{\nu+n}$ dans la seconde, il vient

$$\Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n E_\nu^{(-n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = D_x^n B_\nu^{(-n)}(x | 2\omega_1, 2\omega_2, \dots, 2\omega_n),$$

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n B_\nu^{(-n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = B_\nu^{(-n)}(x | 2\omega_1, 2\omega_2, \dots, 2\omega_n).$$

c. q. f. d.

31. On sait exprimer les moyennes et les différences d'une fonction par ses dérivées. En effet soit $f(x)$ une fonction analytique, holomorphe au voisinage du point $x=0$. Appliquons aux deux membres de l'équation

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}$$

l'opération ∇^n , il vient

$$\nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu)}(0) \frac{E_\nu^{(-n)}(x)}{\nu!}.$$

Mais en appliquant l'opération Δ^n on trouve

$$\Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu+n)}(0) \frac{B_\nu^{(-n)}(x)}{\nu!}.$$

Ces deux séries convergent si les valeurs absolues des nombres x et ω sont suffisamment petites.

Soit par exemple $f(x) = e^{xt}$ il vient

$$2^{-n} (e^{\omega_1 t} + 1)(e^{\omega_2 t} + 1) \dots (e^{\omega_n t} + 1) e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} E_\nu^{(-n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

$$\frac{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \dots (e^{\omega_n t} - 1)}{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n t^n} e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(-n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Ces deux séries convergent pour toutes les valeurs des variables x et t . Nous en mentionnerons les trois cas particuliers suivants

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \dots \cos \omega_n t &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}^{(-n)}, \\ \frac{\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \dots \sin \omega_n t}{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n t^n} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}^{(-n)}, \\ \frac{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \dots (e^{\omega_n t} - 1)}{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n t^n} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(-n)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Quelle est maintenant la fonction génératrice des $B_\nu^{(n)}$? Nous venons de voir que notre définition de ces formes est équivalente à l'équation (14):

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)} B_{\nu-s}^{(-n)} = \begin{cases} 0, & \nu > 0 \\ 1, & \nu = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Elles se déterminent uniquement par cette équation quand on y pose successivement $\nu = 0, 1, 2, \dots$. On en conclut que la fonction génératrice des $B_\nu^{(n)}$ est la réciproque de la fonction génératrice des $B_\nu^{(-n)}$ c'est à dire qu'on a

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n t^n}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \dots (e^{\omega_n t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}; \tag{16}$$

car en multipliant terme à terme les équations (15) et (16) on trouve

$$1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)} B_{\nu-s}^{(-n)}.$$

Les coefficients de la série (16) satisfont donc bien à l'équation (14). Pour trouver la fonction génératrice du polynome $B_\nu^{(n)}(x)$ rappelons qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(n)}.$$

Multiplions la série (16) par la série

$$e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} x^\nu.$$

Il vient

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \dots (e^{\omega_n t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \tag{17}$$

On démontre de la même manière que

$$\frac{2^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t} + 1)(e^{\omega_2 t} + 1) \cdots (e^{\omega_n t} + 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} E_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \quad (18)$$

La série (17) converge pour toutes les valeurs de x si le module de t est inférieur au plus petit des nombres

$$\left| \frac{2\pi}{\omega_1} \right|, \left| \frac{2\pi}{\omega_2} \right|, \dots, \left| \frac{2\pi}{\omega_n} \right|.$$

La série (18) converge si le module de t est inférieur à la moitié de ces nombres.

On aurait pu arriver un peu plus directement aux équations (17) et (18) en partant des équations aux différences finies. Considérons par exemple la fonction au premier membre de (18). Cette fonction est holomorphe au voisinage du point $t=0$. Elle se développe par conséquent en série suivant les puissances de t . Les coefficients dans cette série sont des polynomes en x . Cela posé, appliquons aux deux membres de l'équation (18) l'opération ∇^n , il vient

$$e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \nabla^n E_\nu^{(n)}(x).$$

Il en résulte que

$$\nabla^n E_\nu^{(n)}(x) = x^\nu$$

Les coefficients de la série sont par conséquent les polynomes d'EULER d'ordre n . c. q. f. d.

En posant $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$ dans les équations (17) et (18) on trouve en particulier

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n t^n}{\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \dots \sin \omega_n t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}^{(n)},$$

$$\sec \omega_1 t \sec \omega_2 t \dots \sec \omega_n t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}^{(n)}.$$

Nous mentionnerons encore le cas particulier où $n=1$, $\omega_1=1$. En ce cas on trouve

$$t \operatorname{cosec} t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}, \quad |t| < \pi,$$

$$\operatorname{séc} t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}, \quad |t| < \frac{\pi}{2},$$

$$t \operatorname{cot} t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2t)^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu}, \quad |t| < \pi,$$

$$\operatorname{tg} t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} C_{2\nu+1}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}.$$

Un cas particulier.

32. Jusqu'ici les paramètres ω_i ont été des nombres quelconques. Supposons maintenant que tous les ω_i tendent vers un et voyons ce qui arrive. L'équation (17) du dernier paragraphe se réduit à

$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t - 1)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} B_{\nu}^{(n)}(x), \quad |t| < 2\pi. \quad (1)$$

Dérivons par rapport à t , il vient

$$\frac{(n+xt)t^{n-1}e^{xt}}{(e^t-1)^n} - \frac{nt^n e^{(x+1)t}}{(e^t-1)^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} B_{\nu+1}^{(n)}(x),$$

d'où en réduisant

$$\frac{t^{n+1} e^{(x+1)t}}{(e^t - 1)^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} \left\{ \frac{n-\nu}{n} B_{\nu}^{(n)}(x) + \frac{x\nu}{n} B_{\nu-1}^{(n)}(x) \right\}.$$

Mais en comparant ce développement avec le développement (1) on trouve

$$B_{\nu}^{(n+1)}(x+1) = \frac{n-\nu}{n} B_{\nu}^{(n)}(x) + \frac{x\nu}{n} B_{\nu-1}^{(n)}(x).^1$$

En tenant compte de l'équation

$$B_{\nu}^{(n+1)}(x+1) - B_{\nu}^{(n+1)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(n)}(x)$$

¹ De cette équation on déduit, en posant $x=0$, que $B_{\nu}^{(n+1)}(1) = \frac{n-\nu}{n} B_{\nu}^{(n)}$.

on peut éliminer $B(x+1)$ et on trouve

$$B_v^{(n+1)}(x) = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_v^{(n)}(x) + (x-n) \frac{\nu}{n} B_{v-1}^{(n)}(x). \quad (2)$$

Cette relation est démontré si n est un entier positif. Elle est vraie encore si n est négatif. C'est ce qu'on voit en dérivant la fonction génératrice des polynomes d'ordre négatif. On le démontre aussi de la manière suivante. Considérons l'identité

$$\Delta^n (\varphi(x) \psi(x)) = (\Delta^n \varphi(x)) \psi(x) + \binom{n}{1} (\Delta^{n-1} \varphi(x+1)) \Delta \psi(x) + \dots + \varphi(x+n) \Delta^n \psi(x),$$

et posons

$$\varphi(x) = x^{\nu+n-1}, \quad \psi(x) = x.$$

Il vient

$$\Delta^n x^{\nu+n} = (x+n) \Delta^n x^{\nu+n-1} + n \Delta^{n-1} x^{\nu+n-1}.$$

Mais cette relation est identique à celle qu'on obtient en remplaçant n par $-n$ dans l'équation (2).

En dérivant la fonction génératrice des polynomes d'EULER on démontre de la même manière que ces polynomes satisfont à la relation

$$E_v^{(n+1)}(x) = \frac{2}{n} E_{v+1}^{(n)}(x) - \frac{2}{n} (x-n) E_v^{(n)}(x), \quad (3)$$

n étant un entier positif ou négatif.

Posons $\nu = n$ dans l'équation (2). Il vient

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-n) B_{n-1}^{(n)}(x).$$

Mais comme on a $B_0^{(1)}(x) = 1$ il en résulte que

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n). \quad (4)$$

On a donc en particulier

$$B_n^{(n+1)} = (-1)^n n!,$$

$$D_n^{(n+1)} = (-1)^{\frac{n}{2}} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-1), \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

$$D_n^{(n+1)} = 0, \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

De l'équation (4) on déduit

$$B_n^{(n)}(x) = \int_x^{x+1} (t-1)(t-2)\dots(t-n) dt,$$

d'où en particulier

$$B_n^{(n)} = \int_0^1 (t-1)(t-2)\dots(t-n) dt,$$

$$-\frac{1}{n} B_{n+1}^{(n)} = \int_0^1 t(t-1)(t-2)\dots(t-n) dt.$$

De l'équation (4) on déduit de même qu'on a

$$B_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{\nu! d^{n-\nu} (x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n! dx^{n-\nu}}, \quad (5)$$

si $\nu \leq n$. On a donc en particulier

$$B_{n-1}^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n} (x-1)(x-2)\dots(x-n) \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n} \right],$$

$$B_n^{(n+2)} = (-1)^n n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right),$$

$$D_n^{(n+2)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1} 2^n \left[\binom{n}{2}! \right]^2, \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

Voici une autre relation qui est plus remarquable. En posant $n=1$ dans l'équation (2) on trouve

$$B_\nu^{(2)}(x) = \nu(\nu-1) \left\{ (x-1) \frac{B_{\nu-1}(x)}{\nu-1} - \frac{B_\nu(x)}{\nu} \right\}.$$

En posant $n=2$ et en substituant l'expression de $B_\nu^{(2)}(x)$, que nous venons de trouver, il vient

$$B_\nu^{(3)}(x) = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2} \left\{ (x-1)(x-2) \frac{B_{\nu-2}(x)}{\nu-2} - (2x-3) \frac{B_{\nu-1}(x)}{\nu-1} + \frac{B_\nu(x)}{\nu} \right\}.$$

Par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$B_v^{(n+1)}(x) = \frac{\nu!}{n!(\nu-n-1)!} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s B_{\nu-n+s}(x)}{s!} D_x^s (x-1)(x-2)\cdots(x-n). \quad (6)$$

Dans le cas actuel les polynomes de BERNOULLI d'un ordre positif quelconque s'expriment donc linéairement par les polynomes d'ordre un^1 .

Pour les polynomes d'EULER il en est de même. On a d'abord pour les polynomes d'ordre deux

$$\frac{1}{2} E_v^{(2)}(x) = -(x-1) E_v(x) + E_{v+1}(x).$$

En effet, remplaçons x par $x+1$ et ajoutons ensemble il vient

$$\frac{E_v^{(2)}(x+1) + E_v^{(2)}(x)}{2} = E_v(x). \quad \text{c. q. f. d.}$$

Je dis qu'on a en général

$$E_v^{(n+1)}(x) = \frac{2^n}{n!} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^{n-s}}{s!} E_{v+s}(x) D_x^s (x-1)(x-2)\cdots(x-n). \quad (7)$$

Pour le démontrer remplaçons x par $x+1$, il vient

$$\begin{aligned} E_v^{(n+1)}(x+1) &= \frac{2^n}{n!} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^{n-s}}{s!} E_{v+s}(x) D_x^s x(x-1)\cdots(x-n+1) \\ &\quad + \frac{2^{n+1}}{n!} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^{n-s}}{s!} x^{v+s} D_x^s x(x-1)\cdots(x-n+1). \end{aligned}$$

Mais le dernier terme au second membre est nul en vertu de la formule de TAYLOR. On a donc

$$\begin{aligned} E_v^{(n+1)}(x+1) &= \frac{2^n}{n!} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^{n-s}}{s!} E_{v+s}(x) D_x^s (x-1)(x-2)\cdots(x-n) \\ &\quad - \frac{2^n}{(n-1)!} \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^{n-s}}{s!} E_{v+s}(x) D_x^s (x-1)(x-2)\cdots(x-n+1). \end{aligned}$$

En ajoutant cette équation à l'équation (7) il vient

¹ L'expression (6) se réduit à l'expression (5) si $\nu \leq n$.

$$\frac{E_v^{(n+1)}(x+1) + E_v^{(n+1)}(x)}{2} = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^{n-1-s}}{s!} E_{v+s}(x) D_x^n (x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Le polynome défini par l'équation (7) possède donc la propriété qui s'exprime par la relation

$$\frac{E_v^{(n+1)}(x+1) + E_v^{(n+1)}(x)}{2} = E_v^{(n)}(x).$$

Mais c'est la propriété qui nous a servi comme définition des polynomes d'EULER et ces polynomes sont uniquement déterminés par cette propriété. La relation (7) est par conséquent démontrée.

Faisons tendre x vers zéro dans les équations (7) et (6), il vient

$$C_v^{(n+1)} = \frac{2^n}{n!} \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} 2^{-s} C_{v+s} B_{n-s}^{(n+1)},$$

$$B_v^{(n+1)} = \frac{\nu!}{n!(\nu-n-1)!} \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \frac{B_{\nu-s}}{\nu-s} B_s^{(n+1)}.$$

Ces deux formules sont des généralisations de celles du paragraphe 12.

33. Parmi les nombreuses relations de récurrence entre les nombres $B_v^{(n)}$ il y en a une qui mérite d'être signalée. Développons le polynome $B_v^{(\nu+1)}(x)$ suivant les puissances de x , il vient¹

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(\nu+1)}. \tag{8}$$

D'autre part de l'équation (22) paragraphe 24 il résulte qu'on a

$$B_v^{(n+\nu+1)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)}(x) B_{\nu-s}^{(\nu+1)}.$$

En comparant ces deux équations on trouve la relation symbolique:

¹ On conclut de cette relation que $(-1)^s \binom{\nu}{s} B_s^{(\nu+1)}$ est un entier positif, si $s \leq \nu$. L'importance de ces nombres a été reconnue pour la première fois par STIRLING.

$$(B^{(n)} + x - 1)(B^{(n)} + x - 2) \cdots (B^{(n)} + x - \nu) = B_\nu^{(n+\nu+1)}(x). \quad (9)$$

En posant respectivement $x = 0, 1, \nu + n, \nu + n + 1$ on trouve les quatre relations de récurrence suivantes

$$(B^{(n)} - 1)(B^{(n)} - 2) \cdots (B^{(n)} - \nu) = B_\nu^{(n+\nu+1)},$$

$$B^{(n)}(B^{(n)} - 1)(B^{(n)} - 2) \cdots (B^{(n)} - \nu + 1) = \frac{n}{n + \nu} B_\nu^{(n+\nu)},$$

$$(B^{(n)} + n)(B^{(n)} + n + 1) \cdots (B^{(n)} + n + \nu - 1) = (-1)^\nu \frac{n}{n + \nu} B_\nu^{(n+\nu)},$$

$$(B^{(n)} + n + 1)(B^{(n)} + n + 2) \cdots (B^{(n)} + n + \nu) = (-1)^\nu B_\nu^{(n+\nu+1)}.$$

Si $n = 1$ ces équations se réduisent à

$$(B - 1)(B - 2) \cdots (B - \nu) = (-1)^\nu \nu! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu + 1} \right),$$

$$B(B - 1)(B - 2) \cdots (B - \nu + 1) = (-1)^\nu \frac{\nu!}{\nu + 1},$$

$$(B + 1)(B + 2) \cdots (B + \nu) = \frac{\nu!}{\nu + 1},$$

$$(B + 2)(B + 3) \cdots (B + \nu + 1) = \nu! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu + 1} \right),$$

où les B sont les nombres de BERNOULLI. Pour trouver une relation analogue entre les $D_\nu^{(n)}$ remplaçons dans l'équation (9) x par $x + \frac{n}{2}$; il vient

$$\left(\frac{D^{(n)}}{2} + x - 1 \right) \left(\frac{D^{(n)}}{2} + x - 2 \right) \cdots \left(\frac{D^{(n)}}{2} + x - \nu \right) = B_\nu^{(n+\nu+1)} \left(\frac{n}{2} + x \right),$$

d'où en particulier

$$(D^{(n)} + \nu - 1)(D^{(n)} + \nu - 3)(D^{(n)} + \nu - 5) \cdots (D^{(n)} - (\nu - 1)) = D_\nu^{(n+\nu+1)},$$

$$(D^{(n)} - n - 2)(D^{(n)} - n - 4) \cdots (D^{(n)} - n - 2\nu) = 2^\nu B_\nu^{(n+\nu+1)},$$

$$(D^{(n)} - n)(D^{(n)} - n - 2) \cdots (D^{(n)} - n - 2\nu + 2) = 2^\nu \frac{n}{n + \nu} B_\nu^{(n+\nu)}.$$

Si $n = 1$ ces équations se réduisent à

$$(D + \nu - 1)(D + \nu - 3)(D + \nu - 5) \cdots (D - (\nu - 1)) = \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}}{\nu + 1} 2^{\nu} \left(\frac{\nu!}{2}\right)^2,$$

$$(D - 3)(D - 5)(D - 7) \cdots (D - 2\nu - 1) = (-2)^{\nu} \nu! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu + 1}\right),$$

$$(D - 1)(D - 3)D - 5) \cdots (D - 2\nu + 1) = (-2)^{\nu} \frac{\nu!}{\nu + 1}.$$

On a encore

$$(D - 2)(D - 4)(D - 6) \cdots (D - 2\nu)$$

$$= \frac{(-1)^{\nu}}{\nu + 1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2\nu + 1) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2\nu + 1}\right).$$

Dans la première de ces relations on suppose que ν est pair. Si ν est impair le second membre se réduit à zéro.

34. Nous allons maintenant développer le polynome de BERNOULLI en série de facultés. Soit $f(x)$ un polynome du degré ν . On a en vertu de la formule d'interpolation de NEWTON

$$f(x + y) = f(y) + \sum_{s=1}^{s=\nu} \frac{x(x-1) \cdots (x-s+1)}{s} \Delta^s f(y).$$

Posons $f(x) = B_{\nu}^{(n)}(x)$, on trouve

$$B_{\nu}^{(n)}(x + y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}^{(n-s)}(y) x(x-1) \cdots (x-s+1). \tag{10}$$

Si $\nu > n$ il figure dans ce développement à la fois des polynomes d'ordre positif et des polynomes d'ordre négatif. Posons $y = 0$ ou $y = 1$ il vient

$$B_{\nu}^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}^{(n-s)} x(x-1) \cdots (x-s+1),$$

$$B_{\nu}^{(n+1)}(x) = (n - \nu) \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \frac{B_{\nu-s}^{(n-s)}}{n-s} (x-1)(x-2) \cdots (x-s).$$

Nous mentionnerons quelques cas particuliers de cette formule remarquable. Soit d'abord $n = 0$, il vient

$$(x+y)^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}^{(-s)}(y) x(x-1)\cdots(x-s+1),$$

$$x^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}^{(-s)} x(x-1)\cdots(x-s+1).$$

C'est le développement d'une puissance positive de x en série de facultés. La dernière équation est réciproque à l'équation (8). Soit pour abrégier

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-s+1) = x^{[s]}$$

et posons, dans l'équation (10), $n = \nu + 1$ il vient

$$(x+y)^{[\nu]} = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x^{[s]} y^{[\nu-s]}.$$

On en conclut qu'on a plus généralement

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{[\nu]} = \sum \frac{\nu!}{s_1! s_2! \cdots s_n!} x_1^{[s_1]} x_2^{[s_2]} \cdots x_n^{[s_n]},$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs non négatives des s_i qui vérifient la condition $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \nu$. C'est la formule du polynome des factorielles.

Posons enfin $\nu = n$ dans l'équation (10), divisons par x et faisons tendre x et y vers zéro, il vient

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s B_s^{(s)}}{n-s+1 s!} = 1.$$

C'est une relation de récurrence entre les nombres $B_n^{(n)}$. Ces nombres figurent comme coefficients dans plusieurs développements en séries. On trouve, pour les premières valeurs de n

$$B_1^{(1)} = -\frac{1}{2}, \quad B_2^{(2)} = \frac{5}{6}, \quad B_3^{(3)} = -\frac{9}{4}, \quad B_4^{(4)} = \frac{251}{30}, \quad B_5^{(5)} = -\frac{475}{12}.$$

Entre ces nombres on a aussi la relation

$$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \frac{B_s^{(s)}}{s!} = (-1)^n \frac{B_n^{(n)}}{n!}$$

qu'on déduit de même de l'équation (10).

De la formule d'interpolation de NEWTON en déduit encore par un calcul facile ces deux séries nouvelles

$$B_{2\nu}^{(n)} \left(x + \frac{n}{2} \right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{2\nu}{2s} 2^{2s-2\nu} D_{2\nu-2s}^{(n-2s)} x^2 (x^2 - 1^2) (x^2 - 2^2) \cdots (x^2 - (s-1)^2),$$

$$2^{2\nu+1} B_{2\nu+1}^{(n)} \left(\frac{x+n}{2} \right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{2\nu+1}{2s+1} D_{2\nu-2s}^{(n-2s-1)} x (x^2 - 1^2) (x^2 - 3^2) \cdots (x^2 - (2s-1)^2).$$

35. Voici un autre résultat qu'on peut tirer de la formule de NEWTON

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{s=0}^{s=y} \frac{y(y-1)\cdots(y-s+1)}{s!} \Delta^s f(x). \tag{II}$$

Dans le paragraphe 31 nous avons vu qu'on peut exprimer les différences d'une fonction par ses dérivées. Inversement on sait exprimer les dérivées d'un polynome d'une manière simple à l'aide de ses différences. En effet dérivons par rapport à y et posons ensuite $y=0$ ou $y=-1$ il vient

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{s=y} (-1)^{s-1} \frac{\Delta^s f(x)}{s},$$

$$f'(x-1) = \sum_{s=1}^{s=y} (-1)^{s-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s} \right) \Delta^s f(x).$$

Soit en particulier $f(x) = B_{\nu+1}(x)$, il vient

$$B_{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=y} (-1)^s \frac{\Delta^s x^{\nu}}{s+1},$$

$$B_{\nu}(x-1) = \sum_{s=0}^{s=y} (-1)^s \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s+1} \right) \Delta^s x^{\nu}.$$

De même, dérivons n fois par rapport à y dans les deux membres de l'équation (II) et posons ensuite $y=0$ ou $y=-1$, on trouve en vertu de l'équation (5)

$$f^{(n)}(x) = n \sum_{s=0}^{s=y} \frac{B_s^{(s+n)}}{s!} \frac{\Delta^{s+n} f(x)}{s+n},$$

$$f^{(n)}(x-1) = \sum_{s=0}^{s=y} \frac{B_s^{(s+n+1)}}{s!} \Delta^{s+n} f(x),$$

$f(x)$ étant un polynome quelconque de degré $\nu + n$. Soit en particulier

$$f(x) = B_{\nu+n}^{(n)}(x)$$

il vient

$$B_{\nu}^{(n)}(x) = n \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{B_s^{(s+n)} \Delta^s x^{\nu}}{s! (s+n)},$$

$$B_{\nu}^{(n)}(x-1) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{B_s^{(s+n+1)}}{s!} \Delta^s x^{\nu}.$$

Pour les polynomes d'EULER d'un ordre positif quelconque on trouve de même

$$E_{\nu}^{(n+1)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{(-1)^s}{2^s} \binom{s+n}{n} \Delta^s x^{\nu}$$

et en particulier si $n = 0$

$$E_{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \frac{\Delta^s x^{\nu}}{2^s}.$$

36. Revenons aux équations (2) et (3)

$$B_{\nu}^{(n+1)}(x) = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_{\nu}^{(n)}(x) + (x-n) \frac{\nu}{n} B_{\nu-1}^{(n)}(x), \quad (2)$$

$$E_{\nu}^{(n+1)}(x) = \frac{2}{n} E_{\nu+1}^{(n)}(x) - \frac{2}{n} (x-n) E_{\nu}^{(n)}(x), \quad (3)$$

et faisons tendre x vers zéro. Il vient

$$B_{\nu}^{(n+1)} = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_{\nu}^{(n)} - \nu B_{\nu-1}^{(n)}, \quad (12)$$

$$C_{\nu}^{(n+1)} = 2 C_{\nu}^{(n)} + \frac{1}{n} C_{\nu+1}^{(n)}. \quad (13)$$

D'autre part on a

$$B_{\nu}^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s B_{\nu-s}^{(n)},$$

$$C_{\nu}^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s C_{\nu-s}^{(n)}.$$

En réduisant à l'aide des équations (12) et (13) on trouve

$$B_\nu^{(n)} = -\frac{n}{\nu} \sum_{s=1}^{\nu-1} (-1)^s \binom{\nu}{s} B_s B_{\nu-s}^{(n)}, \quad (14)$$

$$C_{\nu+1}^{(n)} = -n \sum_{s=0}^{\nu-1} (-1)^s \binom{\nu}{s} C_s C_{\nu-s}^{(n)}. \quad (15)$$

A l'aide des équations (12) et (13) ou des équations (14) et (15) on peut déterminer successivement tous les $B_\nu^{(n)}$ et $C_\nu^{(n)}$. Comme on a

$$B_0^{(n)} = C_0^{(n)} = 1 \quad (16)$$

on voit que les $B_\nu^{(n)}$ et les $C_\nu^{(n)}$ sont des polynomes en n de degré ν . On trouve pour les premières valeurs de ν

$$\begin{aligned} B_1^{(n)} &= -\frac{n}{2}, & B_2^{(n)} &= \frac{n(3n-1)}{12}, & B_3^{(n)} &= -\frac{n^2(n-1)}{8}, \\ B_4^{(n)} &= \frac{n(15n^3-30n^2+5n+2)}{240}, & B_5^{(n)} &= -\frac{n^2(n-1)(3n^2-7n-2)}{96}, \\ C_1^{(n)} &= -n, & C_2^{(n)} &= n(n-1), & C_3^{(n)} &= -n^3(n-3), \\ C_4^{(n)} &= n(n-1)(n^2-5n-2), & C_5^{(n)} &= -n^2(n^3-10n^2+15n+10). \end{aligned}$$

A l'aide des relations

$$D_\nu^{(n)} = (2B^{(n)} + n)^\nu, \quad E_\nu^{(n)} = (C^{(n)} + n)^\nu$$

on détermine ensuite les $D_\nu^{(n)}$ et les $E_\nu^{(n)}$. On sait que ces nombres sont nuls si ν est impair. Pour les premières valeurs paires de ν on trouve

$$\begin{aligned} D_0^{(n)} &= 1, & D_2^{(n)} &= -\frac{n}{3}, & D_4^{(n)} &= \frac{n(5n+2)}{15}, & D_6^{(n)} &= -\frac{n(35n^2+42n+16)}{63}, \\ E_0^{(n)} &= 1, & E_2^{(n)} &= -n, & E_4^{(n)} &= n(3n+2), & E_6^{(n)} &= -n(15n^3+30n+16), \\ E_8^{(n)} &= n(105n^3+420n^2+588n+272), \end{aligned}$$

$$E_{10}^{(n)} = -n(945n^4+6300n^3+16380n^2+18960n+7936).$$

Jusqu'ici l'ordre n a été essentiellement un entier, d'abord positif et puis positif ou négatif. Mais ici une extension nouvelle se présente à l'esprit, extension qui n'avait pas de sens dans le cas général. En définissant les $B_\nu^{(n)}$ et les $C_\nu^{(n)}$ comme

les polynomes en n qui satisfont aux équations (12), (13) et (16) on peut considérer n comme une variable continue, réelle ou complexe. On arrive ainsi à quatre suites de polynomes en n . En se reportant au paragraphe 31 on voit que ces polynomes figurent comme coefficients dans les séries suivantes

$$\frac{t^n \cos nt}{(\sin t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2t)^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu}^{(n)}, \quad |t| < \pi$$

$$\frac{t^n \sin nt}{(\sin t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{(2t)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} B_{2\nu+1}^{(n)}, \quad |t| < \pi$$

$$\left(\frac{t}{\sin t}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}^{(n)}, \quad |t| < \pi$$

$$\frac{\cos nt}{(\cos t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} C_{2\nu}^{(n)}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin nt}{(\cos t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} C_{2\nu+1}^{(n)}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{(\cos t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}^{(n)}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}$$

Nous ferons une autre fois l'étude plus complète de ces polynomes qui se rattachent aux polynomes de BERNOULLI de la manière que nous venons d'indiquer.

