ÜBER POTENZREIHEN MIT VORGESCHRIEBENEN ANFANGSGLIEDERN.

Von

FRIEDRICH RIESZ

in Kolozsvár.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit befasse ich mich in erster Reihe mit dem folgenden Problem: *Wir betrachten sämtliche innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktionen $f(z)$, deren Potenzreihenentwicklung mit den vorgeschriebenen Gliedern*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

beginnt. Wir bilden das über den Einheitskreis erstreckte Integral

$$I[f] = \int\limits_{|z|=1} |f(z)|\,|dz| = \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|\,dt$$

und fragen, ob es unter den betrachteten Funktionen eine solche gibt, für die der Integralwert $I[f]$ möglichst klein ausfällt? Wenn ja, welche sind die weiteren Eigenschaften dieser Funktion?

Unser Problem wird vielleicht anziehender erscheinen, sobald wir es auch geometrisch deuten. Es sei $F(z)$ eine Integralfunktion von $f(z)$. Die Gleichung

$$v = F(z)$$

definiert eine konforme Abbildung des Kreises $|z| \leqq 1$ auf ein Gebiet der v-Ebene resp. auf ein Riemann'sches Flächenstück. Das Flächenstück wird durch die Kurve

$$v = F(e^{it}) = \xi(t) + i\,\eta(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

begrenzt, und das Integral

$$I[f] = \int_{|z|=1} |F'(z)|\,|dz| = \int_0^{2\pi} \Big[[\xi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2\Big]^{\frac{1}{2}} dt$$

ist die *Länge* dieser Kurve.

Da nun zugleich mit $f(z)$ auch $F(z)$, und umgekehrt, mit $F(z)$ auch $f(z) = F'(z)$ innerhalb und auf dem Einheitskreise regulär ausfallen, da ferner das Flächenstück bis auf eine Verschiebung von der Wahl der Integrationskonstanten unabhängig ist, speziell also die Länge der Randkurve von der Integrationskonstante nicht abhängt, so können wir unser Problem auch in folgender Form aussprechen:

Wir betrachten sämtliche innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktionen $F(z)$, deren Potenzreihenentwicklung mit den vorgeschriebenen Gliedern

$$A_0 + A_1 z + \cdots + A_{n+1} z^{n+1}$$

beginnt. Gibt es unter diesen Funktionen eine solche, für welche die Länge der Kurve $v = F(e^{it})$ möglichst klein ausfällt? Wenn ja, welche sind die weiteren Eigenschaften dieser Funktion?

Unser Problem reiht sich an jene wohlbekannte Extremalprobleme für Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern an, die aus den Untersuchungen des Herrn CARATHÉODORY über die PICARD-LANDAU'schen Sätze emporgegangen sind. Hierher gehört auch jenes von den Herren CARATHÉODORY und FEJÉR in einer gemeinsamen Arbeit behandelte Problem, welches sich von unserem dadurch unterscheidet, dass nicht das Integral, sondern der *Maximalwert* von $|f(z)|$ möglichst klein zu machen ist.[1] Dieses Problem wurde neuerdings auch durch Herrn GRONWALL behandelt, u. zw. in derart elementarer Weise, dass eine weitere Vereinfachung kaum zu leisten wäre.[2] Wenn ich dennoch im letzten §. dieser Arbeit auf das CARATHÉODORY-FEJÉR'sche Problem zurückkehre und die in den vorangehenden Untersuchungen entwickelte Methode auch auf dieses Problem anwende, so ist dies dadurch gerechtfertigt, weil hiedurch die beiden anscheinend weit entfernten Probleme miteinander eng verknüpft erscheinen.

---

[1] C. CARATHÉODORY u. L. FEJÉR, *Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koefficienten* etc., Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXII (2° sem. 1911), p. 232.

[2] T. H. GRONWALL, *On the maximum modulus of an analytic function*, Annals of mathematics, 2° ser., vol. 16 (1914—1915), p. 77.

Ich bemerke noch, dass das erste Problem, indem man darin $f(z)$ durch $f(z)z^{-n-1}$ ersetzt, was ja auf das Integral $I[f]$ ohne Einfluss ist, folgendermassen formuliert werden kann: Die rationale Funktion

$$\frac{a_0}{z^{n+1}} + \frac{a_1}{z^n} + \cdots + \frac{a_n}{z}$$

ist durch eine innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktion in dem Sinne zu approximieren, dass das über den Einheitskreis erstreckte Integral der absolut genommenen Differenz möglichst klein ausfalle. Das allgemeinere, d. i. sich auf eine derartige Approximation einer beliebig gegebenen rationalen Funktion beziehende Problem lässt sich durch unsere Methode äusserst ähnlich behandeln.

§ 1.

Nehmen wir zunächst ohne Beweis an, dass es unter den Funktionen $f(z)$, die sich innerhalb und auf dem Einheitskreise regulär verhalten, und deren Potenzreihenentwicklung mit den vorgeschriebenen Gliedern

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

beginnt, tatsächlich eine gibt, für welche das Integral

$$I[f] = \int\limits_{|z|=1} |f(z)|\,|dz| = \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|\,dt$$

möglichst klein wird. Wir bezeichnen diese Minimalfunktion mit $f^*(z)$. Wir können auch ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_0 \neq 0$ voraussetzen; denn wäre $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$, so liesse sich, indem man $f(z)$ durch $f(z)z^{-k}$ ersetzt, das Problem auf das entsprechende Problem bezüglich der Anfangsglieder

$$a_k + a_{k+1} z + \cdots + a_n z^{n-k}$$

zurückführen.

Es bedeute nun λ ein beliebig veränderliches Parameter, p irgend eine ganze Zahl $> n$. Dann setzt die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = f^*(z)\,(1 + \lambda z^p)^2$$

ebenfalls mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern an, und da auf dem Einheitskreise

$$|(1+\lambda z^p)^2| = (1+\lambda z^p)(1+\bar{\lambda} z^{-p}) = 1 + \lambda z^p + \bar{\lambda} z^{-p} + |\lambda|^2$$

ist, so wird

$$\int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,|dz| \leqq \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,(1 + \lambda z^p + \bar{\lambda} z^{-p} + |\lambda|^2)\,|dz|.$$

Somit ist, wenn

$$I^* = I[f^*],\ I_p = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,z^p\,|dz|;\ \bar{I}_p = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,z^{-p}\,|dz|$$

gesetzt wird, die HERMITE'sche Form

$$I_p \lambda + \bar{I}_p \bar{\lambda} + I^* |\lambda|^2$$

nicht-negativ. Also muss ihre Determinante $\geqq 0$ ausfallen, d. h. es ist

$$- I_p \bar{I}_p = - |I_p|^2 \geqq 0.$$

Augenscheinlich kann aber hier nur das Gleichheitszeichen gelten; also ist genau

$$I_p = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,z^p\,|dz| = 0$$

für alle $p > n$.

Dieses Resultat können wir auf folgende Weise deuten. Wir setzen darin $z = e^{it}$, also $z^p = \cos pt + i \sin pt$, $|dz| = dt$ und zerlegen in reellen und imaginären Teil; dann besagt unsere Identität, dass in der FOURIER'schen Entwicklung der stetigen, nach 2π periodischen Funktion $|f^*(e^{it})|$ für alle Indices $p > n$ die Koeffizienten verschwinden, mit anderen Worten: *die Funktion $|f^*(e^{it})|$ ist ein trigonometrisches Polynom höchstens n-ter Ordnung.*

Kehren wir nun zur Veränderlichen z zurück! Dann lässt sich die soeben ausgesprochene Tatsache auch so deuten, dass die Funktion $|f^*(z)|\,z^n$ längs des Einheitskreises mit einem rationalen Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung $P(z)$ zusammenfällt. Ich behaupte, dass jede innerhalb oder auf dem Einheitskreise gelegene Nullstelle von $f^*(z)$ zugleich eine Nullstelle von $P(z)$ ist, u. zw. von wenigstens derselben Ordnung wie für $f^*(z)$. Für Nullstellen auf dem Einheitskreise folgt die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar aus der Identität

$$P^2(z) = f^*(z)\,\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) z^{2n},$$

wo $\bar{f}^*$ die durch jene Potenzreihe dargestellte Funktion bezeichnet, welche aus der Potenzreihe für $f^*(z)$ dadurch hervorgeht, dass man die Koeffizienten durch die konjugiert komplexen Grössen ersetzt, und somit $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ die durch die entsprechende, nach negativen Potenzen von z fortschreitende Reihe dargestellte Funktion bedeutet. Da auf dem Einheitskreise die Werte z und $\frac{1}{z}$ zueinander konjugiert sind, so sind es auch die Werte $f^*(z)$ und $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$; also ist $f^*(z)\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) = |f^*(z)|^2$. Somit besteht jene Identität tatsächlich längs des Einheitskreises, und da auf beiden Seiten regulär analytische Funktionen stehen, so besteht sie auch in der Umgebung des Einheitskreises, speziell in der Umgebung einer jeden auf dem Einheitskreise gelegenen Nullstelle α. Nun ist aber $\alpha = \frac{1}{\bar{\alpha}}$ auch Nullstelle von $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$, u. zw. von derselben Ordnung wie für $f^*(z)$; somit ist auf Grund obiger Identität α auch für $P(z)$ eine Nullstelle von derselben Ordnung wie für $f^*(z)$.

Es sei nun α eine innerhalb des Einheitskreises gelegene Nullstelle k-ter Ordnung von $f^*(z)$. Es bedeute λ wieder ein beliebig veränderliches Parameter, h eine positive ganze Zahl $\leqq k$. Dann ist die Funktion

$$f(z) = f^*(z)\left(1 + 2\lambda\frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right)$$

innerhalb und auf dem Einheitskreise regulär und ihre Potenzreihe beginnt mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern. Somit ist $I[f] \geqq I[f^*]$. Andererseits ist

$$I[f] = \int\limits_{|z|=1}|f^*(z)|\left|1 + 2\lambda\frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right||dz| \leqq \int\limits_{|z|=1}|f^*(z)|\left[\left|1+\lambda\frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right|^2 + |\lambda|^2\left|\frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right|^2\right]|dz| =$$

$$= \int\limits_{|z|=1}|f^*(z)|\left(1+\lambda\frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right)\left(1+\bar{\lambda}\frac{z^{-n-1}}{\left(\frac{1}{z}-\bar{\alpha}\right)^h}\right)|dz| + |\lambda|^2\int\limits_{|z|=1}|f^*(z)|\frac{|dz|}{|z-\alpha|^{2h}} =$$

$$= I[f^*] + J_h\lambda + \bar{J}_h\bar{\lambda} + 2K_h|\lambda|^2,$$

wo

$$J_h = \int\limits_{|z|=1}|f^*(z)|\frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}|dz|$$

und

$$K_h = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)| \frac{|dz|}{|z-\alpha|^{2h}}$$

gesetzt wurde. Demnach ist die HERMITE'sche Form

$$J_h \lambda + \bar{J}_h \bar{\lambda} + 2 K_h |\lambda|^2$$

nicht-negativ, woraus ähnlich, wie vormals für I_p, das Verschwinden von J_h folgt. D. h. da $|f^*(z)| z^n = P(z)$ und $z|dz| = -idz$ ist, so wird

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{P(z)}{(z-\alpha)^h} dz = i J_h = 0$$

für $h = 1, 2, \ldots, k$; also ist α für $P(z)$ eine Nullstelle von wenigstens k-ter Ordnung.

Wir haben also bewiesen, dass $|f^*(z)| z^n$ längs des Einheitskreises mit einem rationalen Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung $P(z)$ übereinstimmt und dass alle innerhalb oder auf dem Einheitskreise gelegenen Nullstellen von $f^*(z)$ auch Nullstellen von $P(z)$ sind u. zw. wenigstens von derselben Ordnung wie für $f^*(z)$. Diese Resultate gestatten es nun, uns über die Struktur der Funktion $f^*(z)$ näher zu orientieren. Zunächst definiert nämlich die Identität

$$P^2(z) = f^*(z) \bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) z^{2n}$$

die Funktion $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung für alle z innerhalb des Einheitskreises:

$$\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{P^2(z)}{z^{2n} f^*(z)} = z^{-2n} \left(\frac{P(z)}{f^*(z)}\right)^2 f^*(z) = z^{-2n} Q^2(z) f^*(z),$$

wo $Q = \frac{P}{f^*}$ dem über die Nullstellen von P und von f^* erhaltenen Resultate gemäss innerhalb und auf dem Einheitskreise regulär ist. Demnach ist daselbst auch die Funktion $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ regulär bis auf den Punkt $z = 0$, der für sie ein Pol höchstens $2n$-ter Ordnung ist. Ersetzen wir $\frac{1}{z}$ durch ζ, so ist also die Funktion $\bar{f}^*(\zeta)$ für alle ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Punkte ζ definiert; sie ist auch überall regulär und besitzt nur im Unendlichen einen Pol höchstens von der $2n$-ten Ordnung. Also ist $\bar{f}^*(z)$ und somit auch $f^*(z)$ *ein rationales Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung.* Was die Nullstellen dieses Polynoms betrifft, so sei zunächst α eine innerhalb des Einheitskreises gelegene Nullstelle k-ter Ordnung. Da laut Voraussetzung $a_0 \neq 0$ ist, so ist auch $\alpha \neq 0$. Die Identität

$$\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-2n} Q^2(z) f^*(z)$$

besagt nun, dass α auch für $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ eine Nullstelle wenigstens von der k-ten Ordnung sein muss, u. zw. genau von der k-ten Ordnung, wenn $Q(\alpha) \neq 0$, sonst aber ist ihre Ordnungszahl um eine gerade Zahl höher. Ausser den Nullstellen α von $f^*(z)$ kann ferner $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ noch weitere Nullstellen innerhalb des Einheitskreises besitzen, nämlich die von den α verschiedenen Nullstellen β von $Q(z)$; dieselben sind wegen des Faktors Q^2 für $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ Nullstellen von gerader Ordnungszahl. Nun aber entspricht jeder innerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstelle α oder β der Funktion $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ je eine ausserhalb des Kreises gelegene Nullstelle von $f^*(z)$, nämlich $\frac{1}{\alpha}$ bez. $\frac{1}{\beta}$, u. zw. sind diese Nullstellen von derselben Ordnung wie die entsprechenden Nullstellen von $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$. Damit haben wir gezeigt, dass die innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von $f^*(z)$ nach der folgenden Regel verteilt sind: *Zugleich mit jeder im Innern gelegenen Nullstelle α ist auch ihr Spiegelbild $\frac{1}{\alpha}$ eine Nullstelle u. zw. von derselben oder um eine gerade Zahl höheren Ordnung; die eventuell noch ausserdem ausserhalb des Einheitskreises auftretenden Nullstellen sind von gerader Ordnung.*

Was schliesslich die auf dem Einheitskreise gelegenen Nullstellen betrifft, so haben wir gesehen, dass diese auch für $P(z)$ Nullstellen von genau derselben Ordnung sind; nun ist aber die Funktion $P(z) z^{-n} = |f^*(z)|$ längs des Einheitskreises reell und nicht negativ; sie kann daher dort nur Nullstellen gerader Ordnung zulassen. Somit *sind alle auf dem Einheitskreise gelegenen Nullstellen von $f^*(z)$ von gerader Ordnungszahl.*

Zusammenfassend können wir auch so sagen: *Die Funktion $f^*(z)$ ist ein rationales Polynom höchstens der $2n$-ten Ordnung, und ihre Nullstellen lassen sich derart* *zu Paaren anordnen, dass die beiden Elemente je eines dieser Paare entweder identisch und auf dem Einheitskreise oder ausserhalb derselben gelegen, oder aber Spiegelbilder von einander in bezug auf den Einheitskreis sind.*

§ 2.

Bisher haben wir die Existenz einer Minimalfunktion $f^*(z)$ ohne Beweis vorausgesetzt. Um den Beweis zu erbringen, könnte man es mit dem folgenden, bei ähnlichen Problemen bewährten Verfahren versuchen. Es sei I^* die untere Grenze der Integralwerte $I[f]$; dann gibt es eine Folge $f_1, f_2, \ldots$, für welche $I[f_n] \to I^*$. Man kann leicht zeigen, dass entweder schon diese Folge *innerhalb* des Einheitskreises einer daselbst regulären Funktion $f^*(z)$ zustrebt, oder aber dies jedenfalls für eine entsprechend ausgewählte Teilfolge der Fall ist. Man sieht ferner auch leicht ein, dass die Potenzreihe für $f^*(z)$ ebenfalls mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern ansetzt, wie auch, dass für jeden Kreis $|z| = r$, dessen Radius r *kleiner* als 1 ist,

$$\int\limits_{|z|=r} |f^*(z)|\,|dz| \leq I^*$$

ist. Es sind nämlich die Koeffizienten der Potenzreihen für die Funktionen f_n wie auch diese Funktionen selbst mit Hilfe der CAUCHY'schen Integralausdrücke leicht aus $I[f_n]$ abzuschätzen; die Funktionen selbst jedoch nur im *Innern* des Einheitskreises. Auf dem Einheitskreise, auch wenn wir die vorgeschriebenen Anfangsglieder in Betracht ziehen, ergibt diese Abschätzung überhaupt nichts. Keinesfalls tritt also durch dieses Verfahren das reguläre Verhalten von $f^*(z)$ *längs des Einheitskreises* in Evidenz. Andererseits aber haben wir dieses reguläre Verhalten bisher nicht nur in unserer Problemstellung gefordert, sondern auch, wenigstens anscheinend, in den vorangehenden Untersuchungen wesentlich ausgenützt.

Lassen wir nun die Forderung des regulären Verhaltens auf dem Einheitskreise selbst bis auf weiteres fallen und ersetzen wir sie durch eine allgemeinere, unserem Minimalproblem besser angepasste Forderung. Indem wir dann wieder an ein rationales Polynom gelangen, so wird dies, da es sich ja überall regulär verhält, auch eine Lösung unseres ursprünglichen Problems ergeben.

Wollen wir unsere neue Forderung unserem Minimalproblem möglichst anpassen, so empfiehlt es sich, an die zweite Formulierung des Problems anzuknüpfen. Es handelt sich in dieser Formulierung darum, die Länge der Kurve $v = F(e^{it})$

($0 \leqq t \leqq 2\pi$), d. h. also die *totale Schwankung* der Funktion $F(e^{it})$ möglichst klein zu machen. Beschränktheit der Schwankung bedingt noch keineswegs reguläres Verhalten; so z. B. sind die den Einheitskreis auf ein endliches Polygon oder allgemeiner, auf ein von einer einfach geschlossenen rektifizierbaren Kurve begrenztes Gebiet konform abbildenden Funktionen auf dem Rande nicht überall regulär, doch von beschränkter Schwankung.

Betrachten wir also sämtliche *innerhalb des Einheitskreises reguläre und beschränkte Funktionen $F(z)$, für welche die Randwerte $F(e^{it})$ existieren und eine Funktion von beschränkter Schwankung ausmachen.* Die Existenz der Randwerte verlangen wir im Sinne radialer Annäherung: $F(re^{it}) \to F(e^{it})$. Wir können jedoch sofort hinzufügen, dass diese Präzisierung eigentlich überflüssig ist. Es sind nämlich die soeben gekennzeichneten Funktionen *auch auf dem Einheitskreise, also für $|z| \leqq 1$ ausnahmslos stetig.* Dies folgt keineswegs unmittelbar aus der beschränkten Schwankung, denn Funktionen beschränkter Schwankung lassen ja noch abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen zu. Nun können aber bekanntlich diese Unstetigkeitsstellen, wenn sie auftreten, nur solche erster Art sein. Dass andererseits auch solche bei den Randwerten $F(e^{it})$ ausgeschlossen sind, ist in dem allgemeinen Satze enthalten, wonach die Randfunktion einer regulären und beschränkten Funktion keine Unstetigkeitsstellen *erster Art* zulässt.[1]

Zu derselben Funktionenklasse gelangen wir auch, indem wir alle jene nach 2π periodische Funktionen beschränkter Schwankung $F(e^{it})$ von t betrachten, deren FOURIER'sche Reihe sich als eine nach *positiven* Potenzen von e^{it} fortschreitende Reihe auffassen lässt, d. i. wo die Sinuskoeffizienten die i-fachen der entsprechenden Cosinuskoeffizienten sind. In Formeln

[1] A. PRINGSHEIM, *Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise*, Sitzungsber. d. math.-phys. Cl. d. k. bay. Akademie d. Wiss. zu München, 1900, Heft 1., p. 96—98; P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta mathematica 30 (1906), p. 363; E. LINDELÖF, *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme*, Acta Soc. Scient. Fennicae, Tom. XLVI, No 4 (1915), p. 7.

Laut mündlicher Mitleitung des Herrn L. FEJÉR kann man den Satz auch durch folgende einfache Überlegung begründen: Die Potenzreihe einer beschränkten Funktion ist auch eine FOURIER'sche Reihe für die Randfunktion und ist daher an einer Unstetigkeitsstelle erster Art durch arithmetische Mittel summierbar. Daraus folgt nach dem verallgemeinerten ABEL-FROBENIUS'schen Satze, dass bei jeder beliebigen geradlinigen Annäherung jener Stelle aus dem Inneren des Kreises die Funktion *ein und demselben* Grenzwerte, nämlich der Reihensumme zustrebt. Andererseits sind $F(x+iy)$ oder, wenn es beliebt, Reell- und Imaginarteil derselben harmonische Funktionen; der Grenzwert einer harmonischen Funktion an einer Unstetigkeitsstelle erster Art variirt aber mit dem Einfallswinkel und ist bei verschiedenen Geraden *verschieden*.

Wir möchten noch bemerken, dass der Satz in den folgenden Ausführungen nicht wesentlich benützt wird; jedenfalls gestattet er uns, beim Rechnen mit $F(e^{it})$ auf eine gewisse Vorsicht zu verzichten, die bei Auftreten von Unstetigkeitsstellen angemessen wäre.

$$\int_0^{\pi} F(e^{it})\, e^{ikt}\, dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Schreibt man in der FOURIER'schen Reihe einer solchen Funktion z an Stelle von e^{it}, also z^m an Stelle von e^{imt}, so erhält man die Potenzreihe je einer Funktion $F(z)$. Auf Grund der klassischen Resultate über die FOURIER-Reihe der Funktionen beschränkter Schwankung konvergiert unsere Potenzreihe nicht nur im Inneren des Einheitskreises, sondern auch auf demselben u. zw. gegen die Randfunktion. Da ferner diese laut obiger Bemerkung nicht nur von beschränkter Schwankung, sondern auch stetig ist, so ist die Konvergenz überall gleichmässig.

Wir greifen nun aus der Gesamtheit der soeben definierten Funktionen $F(z)$ jene heraus, deren *Potenzreihenentwicklung mit den vorgegebenen Gliedern*

$$A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{n+1} z^{n+1}$$

beginnt, wo

$$A_1 = a_0,\ A_2 = \frac{a_1}{2},\ \ldots,\ A_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

gesetzt wurde. Wir bezeichnen mit $T[F]$ die totale Schwankung der Funktion $F(e^{it})$ oder mit anderen Worten das Integral

$$\int_{|z|=1} |dF|$$

Es sei T^* die untere Grenze der Werte $T[F]$. Dann gibt es eine Folge $F_1, F_2, \ldots$, für welche $T[F_k] \to T^*$. Die Funktionen $F_k(e^{it})$ sind *in ihrer Gesamtheit von beschränkter Schwankung*, d. h. ihre totalen Schwankungen liegen unterhalb einer gemeinsamen Schranke. Ferner sind diese Funktionen *in ihrer Gesamtheit beschränkt;* da nämlich

$$\int_0^{2\pi} F_k(e^{it})\, dt = 0$$

ist, so können weder der reelle, noch der imaginäre Teil von $F_k(e^{it})$ von konstantem Vorzeichen sein und es sind daher beide Teile dem absoluten Werte nach $\leq T[F_k]$.

Nach dem Satze von HELLY[1] enthält jede Folge, die in ihrer Gesamtheit beschränkt und von beschränkter Schwankung ist, *eine überall konvergente Teilfolge.*

---

[1] E. HELLY, *Über lineare Funktionaloperationen*, Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wiss., Wien, Bd. CXXI (1912) Abt. II a, p. 283.

Wenden wir diesen Satz auf unsere Folge $\{F_k\}$ an; sei $\{F^{(k)}\}$ eine überall konvergente Teilfolge und $F^*(e^{it})$ ihre Grenzfunktion; dann ist für jede Einteilung $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_r = t_0$ des Einheitskreises

$$\sum_{m=0}^{r-1} | F^*(e^{it_{m+1}}) - F^*(e^{it_m} | = \lim_{k \to \infty} \sum_{m=0}^{r-1} | F^{(k)}(e^{it_{m+1}}) - F^{(k)}(e^{it_m}) | \leq \lim_{k \to \infty} T[F^{(k)}] = T^*,$$

d. h. die Funktion $F^*(e^{it})$ ist ebenfalls von beschränkter Schwankung und ihre totale Schwankung ist $\leq T^*$. Da ferner die FOURIER-Koeffizienten von F^*, als Grenzfunktion der beschränkten Folge $\{F^{(k)}\}$, sich als Grenzwerte der entsprechenden Koeffizienten der $F^{(k)}$ ergeben, so ist auch die FOURIER-Reihe von F^* vom Potenzreihentypus und die entsprechende Potenzreihe für $F^*(z)$ beginnt ebenfalls mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern. Hieraus folgt auch noch, dass die totale Schwankung von $F^*(e^{it})$ nicht kleiner sein kann, als die untere Grenze T^*; also ist genau

$$T[F^*] = T^*.$$

Damit ist gezeigt, dass *es unter den betrachteten Funktionen $F(z)$ sicher eine gibt, für welche die totale Schwankung möglichst klein wird.*

§ 3.

Wir untersuchen nun die totale Schwankung der Funktion F^* auf dem von $z = 1$ nach $z = e^{it}$ führenden *Bogen* des Einheitskreises als Funktion der Veränderlichen t. Es wird sich ergeben, dass diese Funktion — von einem linearen Gliede abgesehen — ein *trigonometrisches Polynom* höchstens n-ter Ordnung ist.

Wir beginnen mit einigen Überlegungen allgemeiner Art. Es sei $F(z)$ irgend eine Funktion vom betrachteten Typus, $g(z)$ eine innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktion. Wir bilden die Funktion

$$H(z) = \int_0^z F'(z) g(z) dz = \int_0^z g(z) dF(z) = F(z) g(z) - F(0) g(0) - \int_0^z F(z) g'(z) dz.$$

Auf Grund des letzten Ausdrucks kann die Integration längs eines beliebigen, innerhalb oder teilweise auch auf dem *Rande* führenden Wege geschehen; der Wert des Integrals ist von dem Integrationswege unabhängig. *Die Funktion $H(z)$ ist beschränkt, im Kreisinneren regulär, auf dem Rande aber von beschränkter Schwankung.* Das reguläre Verhalten im Kreisinneren lässt sich aus allen der 3 Integralausdrücke, die Beschränktheit aus dem letzten unmittelbar ablesen; die beschränkte Schwankung der Randfunktion ergibt sich leicht aus dem mittleren, wie auch aus dem letzten Ausdruck, z. B. aus dem letzteren dadurch, dass man bemerkt, dass Produkt und Differenz zweier Funktionen beschränkter Schwankung, ferner das Integral einer stetigen (oder beschränkten oder auch nur integrierbaren) Funktion ebenfalls Funktionen beschränkter Schwankung sind. Aus dem mittleren Ausdrucke ergibt sich auch der genaue Wert der totalen Schwankung von $H(z)$, nämlich

$$T[H]=\int\limits_{|z|=1}|g(z)|\,|dF(z)|.$$

Wählen wir nämlich eine genügend dichte Einteilung $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_r = z_0$ des Einheitskreises, so ist $T[H]$ mit beliebiger Annäherung gleich der Summe

$$\sum_{m=0}^{r-1}|H(z_{m+1})-H(z_m)|=\sum_{m=0}^{r-1}\left|\int\limits_{z_m}^{z_{m+1}}g(z)\,dF(z)\right|.$$

Andererseits wird das Integral

$$\int\limits_{|z|=1}|g(z)|\,|dF(z)|$$

durch die Summe

$$\sum_{m=0}^{r-1}|g(z_m)|\,|F(z_{m+1})-F(z_m)|=\sum_{m=0}^{r-1}\left|g(z_m)\int\limits_{z_m}^{z_{m+1}}dF(z)\right|$$

beliebig genau angenähert. Ist schliesslich die Einteilung derart dicht, dass auf den einzelnen Bögen $|g(z)-g(z_m)|\leqq\delta$ ist, so wird die Differenz der beiden Summen $\leqq \delta\, T[F]$; also wird bei entsprechender Einteilung auch diese Differenz beliebig klein. Somit ist genau

$$T[H]=\int\limits_{|z|=1}|g(z)|\,|dF(z)|.$$

Die Potenzreihe für $H(z)$ ergibt sich aus jenen von $F'(z)$ und $g(z)$ durch Multiplikation und gliedweise Integration. Daraus folgt sofort, dass wenn die Potenzreihe von $F(z)$ mit den vorgeschriebenen Gliedern, jene von $g(z)$ aber mit

$1 + cz^p$ $(p > n)$ beginnt, auch die Potenzreihe von $H(z)$ mit den vorgeschriebenen Gliedern beginnen muss. Wählen wir speziell für $F(z)$ die Minimalfunktion $F^*(z)$, für $g(z)$ die Funktion $(1 + \lambda z^p)^2$, also

$$H(z) = \int_0^z (1 + \lambda z^p)^2 d F(z),$$

so beginnt die Potenzreihe von $H(z)$ mit den vorgeschriebenen Gliedern; daher ist

$$T^* = T[F^*] \leqq T[H] = \int_{|z|=1} (1 + \lambda z^p)(1 + \bar{\lambda} z^{-p}) |d F^*(z)| = (1 + |\lambda|^2) T^* + \lambda I_p + \bar{\lambda} \bar{I}_p,$$

wo jetzt

$$I_p = \int_{|z|=1} z^p |d F^*(z)|, \quad \bar{I}_p = \int_{|z|=1} z^{-p} |d F^*(z)|$$

gesetzt ist; I_p und $\bar{I}_p$ sind konjugierte Grössen. Somit ist wieder die HERMITE'sche Form

$$I_p \lambda + \bar{I}_p \bar{\lambda} + T^* |\lambda|^2$$

nicht-negativ und daher

$$I_p = \int_{|z|=1} z^p |dF^*(z)| = 0,$$

u. zw. für alle $p > n$.

Um dieses Resultat weiter zu verfolgen, bezeichnen wir mit $V^*(z)$ die totale Schwankung von $F^*(z)$ auf dem von 1 bis z führenden Bogen des Einheitskreises. Ersetzen wir in unserem Integral $|dF(z)|$ durch $dV^*(z)$. Die Differenz der entsprechenden Näherungssummen wird für genügend dichte Einteilung beliebig klein, denn sie ist

$$\leqq T[F^*] - \sum_{m=0}^{r-1} |F^*(z_{m+1}) - F^*(z_m)|.$$

Somit ändert sich der Integralwert durch Einsetzen von dV^* an Stelle von $|dF^*|$ überhaupt nicht. Also ist

$$\int_{|z|=1} z^p d V^*(z) = 0 \quad (p = n + 1, n + 2, \ldots).$$

Führen wir noch e^{it} an Stelle von z ein, so ergibt sich nach partieller Integration, da sich $V^*(z)$ bei einmaligem Umlaufe um T^* ändert,

$$T^* - ip\int_0^{2\pi} V^*(e^{it})\, e^{ipt}\, dt = 0 \quad (p = n+1,\ n+2, \ldots).$$

Andererseits ist

$$T^* = ip\int_0^{2\pi} \frac{T^*}{2\pi} e^{ipt}\, t\, dt$$

und somit wird schliesslich

$$\int_0^{2\pi}\left[V^*(e^{it}) - \frac{T^*}{2\pi}t\right] e^{ipt}\, dt = 0 \quad (p \doteq n+1,\ n+2, \ldots).$$

d. h. der reelle Ausdruck in der eckigen Klammer ist *ein trigonometriches Polynom höchstens n-ter Ordnung.*

Der bisher befolgte Gedankengang ist bis zu gewissem Grade jenem des § 1. nachgebildet. Wir könnten nun diesen Parallelismus weiter verfolgen und unter Andern zeigen, dass der Differentialquotient von $V^*(e^{it})$ auf dem Einheitskreise mit einer Funktion $P(z)z^{-n}$ übereinstimmt, wo $P(z)$ ein rationales Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung ist, und dass die innerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von $\frac{dF^*}{dz}$ zugleich Nullstellen von wenigstens derselben Ordnung für $P(z)$ sind. Weiter aber wäre der Parallelismus schwer zu verfolgen, da hier schon das reguläre Verhalten von $f^*(z)$ *auf dem Rande* tief ausgenützt wurde, während wir jetzt über das Verhalten von $F^*(z)$ bez. von $\frac{dF^*}{dz}$ auf dem Rande viel weniger wissen.

In den folgenden Untersuchungen werden wir das in diesem § erhaltene Resultat nicht voll ausnützen, sondern wir werden daraus nur einige Folgerungen über das Verhalten von F^* und von $\frac{dF^*}{dz}$ ziehen. Aus der speziellen Form der Funktion $V^*(e^{it})$ folgern wir nämlich nur so viel, dass *ihr Differenzenquotient beschränkt ist* und dass *ihr Differentialquotient nur eine endliche Anzahl von Nullstellen haben kann.* Somit ist auch der Differenzenquotient von $F^*(e^{it})$ beschränkt, also *ist die Funktion $F^*(e^{it})$ ein Integral ihres ebenfalls beschränkten Differentialquotienten* (dessen Existenz höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Masse 0 schon aus der beschränkten Schwankung folgt). Ferner kann dieser Differentialquotient, dessen absoluter Wert ja fast überall, d. i. höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Masse o, mit $\frac{dV^*(e^{it})}{dt}$ übereinstimmt, *nur auf einer Menge vom Masse* o *verschwinden.*

Ich möchte noch bemerken, dass die beiden letzten für die spezielle Funktion $F^*(z)$ jetzt hergeleiteten und in der Folge zur Anwendung gelangenden Resultate eigentlich ganz allgemein für alle Funktionen $F(z)$ vom betrachteten Typus gelten, wie dies aus gewissen Untersuchungen, die ich gemeinsam mit meinem Bruder MARCEL RIESZ ausgeführt habe und über die wir unlängst dem Nordischen Mathematikerkongress in Stockholm berichteten, hervorgeht. Eine Bezugnahme auf diese Untersuchungen allgemeinerer Art würde also diesen § überflüssig machen. Doch greifen jene allgemeine Untersuchungen viel tiefer in die LEBESGUE'sche Integrationstheorie ein, als dies für das hier behandelte spezielle Problem notwendig ist.

§ 4.

Es sollen jetzt $g(t)$ und $h(t)$ im Intervall $(o, 2\pi)$ definierte, im LEBESGUE'schen Sinne integrierbare, reelle oder komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen t bedeuten; λ ist ein beliebig komplex veränderliches Parameter. Über die Funktion $g(t)$ setzen wir noch voraus, dass sie höchstens in einer Menge vom Masse o verschwindet. Wir betrachten das Integral

$$I(\lambda) = \int_0^{2\pi} |g(t) + \lambda h(t)| dt$$

und werden eine *notwendige und hinreichende Bedingung* dafür herleiten, damit $I(o) \leqq I(\lambda)$ sei, d. i. dass die Funktion $I(\lambda)$ *ihren Minimalwert für* $\lambda = o$ *erreiche. Die Bedingung heisst:*

$$\int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{sg}}\, g(t) h(t) dt = o,$$

wo

$$\overline{\mathrm{sg}}\, g(t) = \frac{\bar{g}(t)}{|g(t)|} = \frac{|g(t)|}{g(t)}$$

gesetzt ist.

Nehmen wir zunächst λ als reell veränderlich an und berechnen wir $I'(o)$. Der entsprechende Differenzenquotient in bezug auf λ des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes $|g + \lambda h|$, also

$$\frac{|g(t) + \lambda h(t)| - |g(t)|}{\lambda}$$

ist dem absoluten Werte nach $\leq |h(t)|$, also kleiner als eine integrierbare Funktion; somit ist es gestattet, die Differentiation unter dem Integralzeichen auszuführen. Nun ist aber der Differentialquotient von $|a + \lambda b|$ für $\lambda = 0$, wenn $a \neq 0$ ist, gleich dem reellen Teile von $b\,\overline{\mathrm{sg}}\,a = \frac{\bar{a}}{|a|}\,b$.[1] Also ist $I'(0)$ gleich dem reellen Teile von

$$\int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{sg}}\, g(t)\, h(t)\, dt.$$

Wenn also $I(\lambda)$ für $\lambda = 0$ ein Minimum hat, so ist der reelle Teil dieses Integrals gleich 0.

Lassen wir jetzt λ längs der imaginären Axe variiren, oder was auf dasselbe hinausläuft, ersetzen wir $h(t)$ durch $i\,h(t)$; dann ergibt sich, dass auch der imaginäre Teil unseres Integrals verschwindet.

Wenn also $I(\lambda)$ für $\lambda = 0$ ein Minimum hat, so verschwindet das betrachtete Integral vollständig, d. h. unsere Bedingung ist tatsächlich *notwendig*.[2]

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, dass die Bedingung erfüllt ist. Wir zeigen, dass dann $I(0) \leq I(\lambda)$ ist. Wir dürfen uns dabei auf reelle λ beschränken, denn durch Multiplikation von $h(t)$ mit einer entsprechend gewählten Konstanten $e^{i\Theta}$ lässt sich der allgemeine Fall auf diesen zurückführen. Nun ist aber der Integrandus $|g + \lambda h|$ eine konvexe Funktion von λ, dasselbe gilt daher auch für den Integralwert $I(\lambda)$. Eine konvexe Funktion besitzt aber an einer Stelle, wo ihr Differentialquotient verschwindet, nicht nur im Verhältnis zur näheren Umgebung, sondern auch ein absolutes Minimum.

Somit ist unsere Bedingung auch *hinreichend.*

Setzen wir jetzt für $g(t)$ die Funktion $\frac{d\,F^*(e^{it})}{dt}$, für $h(t)$ aber $e^{i(p+1)t}$ ein, wo $p > n$ ist. Dann ist $g(t) + \lambda h(t)$ der Differentialquotient nach t des Randwertes der Funktion

---

[1] Es sei nämlich $a = a' + ia''$, $b = b' + ib''$, so ist

$$|a + \lambda b| = [(a' + \lambda b')^2 + (a'' + \lambda b'')^2]^{\frac{1}{2}};\ |a + \lambda b|'_{\lambda=0} = \left[\frac{b'(a' + \lambda b') + b''(a'' + \lambda b'')}{|a + \lambda b|}\right]_{\lambda=0} = \frac{a'b' + a''b''}{|a|}.$$

[2] Unter specielleren Voraussetzungen (reelle Funktionen und reelles Parameter, endliche Anzahl von Zeichenwechsel) steht die Notwendigkeit der Bedingung schon in der ersten Arbeit von Th. J. Stieltjes: *De la représentation approximative d'une fonction par une autre,* Delft 1876, Oeuvres complètes, I, p. 11.

$$F(z) = F^*(z) - \frac{i\lambda}{p+1} z^{p+1}$$

und es ist somit

$$I(0) = T^* \leqq T[F] = I(\lambda).$$

Daher ist also

$$\int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{sg}}\, g(t)\, e^{i(p+1)t} dt = 0 \quad (p = n+1, n+2, \ldots).$$

Man kann dieses Resultat auch so aussprechen: Die FOURIER'sche Reihe der Funktion

$$\gamma(t) = e^{i(n+1)t}\, \overline{\mathrm{sg}} \left(\frac{dF^*(e^{it})}{dt}\right) = e^{i(n+1)t}\, \overline{\mathrm{sg}}\, g(t)$$

ist vom *Potenzreihentypus.* Darunter verstehen wir wie bisher, dass die formal gebildete FOURIER-Reihe, ebenfalls rein formal, als Potenzreihe in e^{it} aufgefasst werden kann, d. h. dass

$$\int_0^{2\pi} \gamma(t)\, e^{ikt} dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ich behaupte nun, dass *auch die* FOURIER'*sche Reihe der Funktion*

$$e^{i(2n+1)t}\, \bar{g}(t) = e^{i(2n+1)t} g(t) (\overline{\mathrm{sg}}\, g(t))^2 = \gamma^2(t)\, g(t)\, e^{-it}$$

vom Potenzreihentypus ist.

Die Richtigkeit der Behauptung ist im folgenden allgemeinen Satze enthalten: *Sind die* FOURIER-*Reihen von zwei integrierbaren Funktionen von Potenzreihentypus, und ist wenigstens eine der beiden Funktionen beschränkt, so ist auch die* FOURIER-*Reihe ihres Produkts von Potenzreihentypus.*

Es sei nämlich von den beiden Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ z. B. $\varphi(t)$ beschränkt, dann lässt sich eine Folge von ganzen rationalen Ausdrücken in e^{it} angeben, die einerseits in ihrer Gesamtheit beschränkt sind, andererseits aber fast überall gegen die Funktion $\varphi(t)$ konvergieren. Eine solche Folge $\{P_m(e^{it})\}$ bilden z. B. nach den wohlbekannten Sätzen von FEJÉR und LEBESGUE die arithmetischen Mittel der FOURIER-Reihe von $\varphi(t)$. Durch Multiplikation mit $e^{ikt}\psi(t)$ erhält man

$$\psi(t)\, P_m(e^{it})\, e^{ikt} \to \varphi(t)\, \psi(t)\, e^{ikt}$$

und da die linksstehenden Funktionen dem absoluten Werte nach alle kleiner sind als die Funktion $C|\psi(t)|$, wo C eine passend gewählte Konstante bedeutet, da sie also in ihrer Gesamtheit dem absoluten Werte nach unterhalb einer integrierbaren Funktion liegen, so darf man gliedweise integrieren:

$$\int_0^{2\pi} \psi(t) P_m(e^{it}) e^{ikt} dt \to \int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(t) e^{ikt} dt.$$

Da nun aber $\psi(t)$ vom Potenzreihentypus ist, so verschwindet das von o bis 2π genommene Integral von $e^{irt}\psi(t)$ für jede ganze positive Zahl r, also verschwinden auch die linksstehenden Integrale für ganze positive k und es verschwindet also auch der rechtsstehende Grenzwert. Somit ist

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(t) e^{ikt} dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

d. h. die FOURIER'sche Reihe des Produkts $\varphi(t)\psi(t)$ ist vom Potenzreihentypus.

Wenden wir nun den Satz auf das Produkt

$$\gamma^2(t)\, g(t)\, e^{-it}$$

an. Da $\gamma(t)$ beschränkt und ihre FOURIER-Reihe vom Potenzreihentypus ist, so gilt nach dem Satze dasselbe für $\gamma^2(t)$. Andererseits ist die FOURIER-Reihe der Funktion $F^*(e^{it})$ und somit auch jene ihres Differentialquotienten $g(t)$ vom Potenzreihentypus; ferner beginnt letztere mit $i A_1 e^{it}$, also ist auch noch die FOURIER-Reihe von $g(t)e^{-it}$ vom Potenzreihentypus. Dasselbe gilt daher auf Grund unseres Satzes vom Produkt $\gamma^2(t) g(t) e^{-it}$.

Nun ist aber

$$\gamma^2(t)\, g(t)\, e^{-it} = e^{i(2n+1)t}\bar{g}(t);$$

also ist die FOURIER-Reihe des rechtsstehenden Ausdruckes vom Potenzreihentypus und somit ist für alle positive ganze Zahlen k

$$\int_0^{2\pi} e^{i(2n+1+k)t}\bar{g}(t)\, dt = 0,$$

oder, indem wir auf die konjugierten Werte übergehen,

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(2n+1+k)t} g(t)\, dt = 0$$

D. h. die (potenzreihenartige) FOURIER-Reihe von $g(t)$ bricht nach dem Gliede vom Index $2n+1$ ab; dasselbe gilt somit auch für die FOURIER-Reihe von $F^*(e^{it})$ d. i. für die Potenzreihe von $F^*(z)$. Also *ist* $F^*(z)$ *ein rationales Polynom höchstens* $2n+1$*-ter Ordnung.*

Kehren wir endlich zum Differentialquotienten von $F^*(z)$ zurück, den wir mit $f^*(z)$ bezeichnen, so *ist* $f^*(z)$ *ein rationales Polynom höchstens* $2n$*-ter Ordnung, das mit den vorgeschriebenen Gliedern*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

beginnt, und für welches das Integral des absoluten Wertes $I[f^*] = T$ *möglichst klein ausfällt.* Somit *besitzt unser Minimumproblem tatsächlich eine innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Lösung.*

Die weiteren Eigenschaften der Funktion f^*, d. h. die spezielle Verteilung ihrer Nullstellen haben wir schon in § 1. erkannt. Ich möchte jedoch bemerken, dass wir den § 1., der uns hauptsächlich zur Orientierung dienen sollte, entbehren könnten, da jene spezielle Verteilung der Nullstellen sich jetzt auch leicht aus der Tatsache ergibt, dass die FOURIER-Reihe der Funktion

$$e^{i(n+1)t}\,\overline{\mathrm{sg}}\,g(t) = -i\,e^{int}\,\overline{\mathrm{sg}}\,f^*(e^{it})$$

vom Potenzreihentypus ist.

§ 5.

Wir haben soeben gesehen, dass unser Minimumproblem wenigstens eine Lösung besitzt; wir wollen jetzt zeigen, dass es *nur eine* Lösung besitzt.

Nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene Lösungen; beide wären dann rationale Polynome höchstens $2n$-ter Ordnung mit den gemeinsamen Anfangsgliedern

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

Schreiben wir die beiden Funktionen in der Form $f^*(z)$ und $f^*(z) + \varphi(z)$, wo also

$$f^*(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots + a_{2n} z^{2n},$$
$$\varphi(z) = b_{n+1} z^{n+1} + \cdots + b_{2n} z^{2n}$$

gesetzt ist. Wir bilden nun das Polynom $f_\mu = f^* + \mu\varphi$, wo μ ein beliebig veränderliches Parameter bedeutet. Dann ist laut Annahme

$$I[f^*] = I[f^* + \varphi] = I^*;\; I[f_\mu] \geqq I^*.$$

Ist nun zunächst μ nur reell veränderlich, so ist der Integrandus im Ausdrucke für $I[f_\mu]$, also auch $I[f_\mu]$ selbst eine konvexe Funktion von μ; ferner ist für $\mu = 0$ und für $\mu = 1$

$$I[f_\mu] = I^*;$$

daher ist für alle Werte von μ zwischen 0 und 1

$$I[f_\mu] \leqq I^*.$$

Es ist daher genau

$$I[f_\mu] = I^* \quad (0 \leqq \mu \leqq 1).$$

Somit ist f_μ nicht nur für $\mu = 0$ und $\mu = 1$, sondern auch für alle μ zwischen 0 und 1 ein Minimalpolynom, dessen Nullstellen daher nach der bekannten Art verteilt sein müssen. Daher sind, zunächst für $0 \leqq \mu \leqq 1$, sämtliche Nullstellen des Polynoms

$$z^{2n} f_\mu(z) \bar{f}_\mu\left(\frac{1}{z}\right) = z^{2n} f^*(z) \bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) + z^{2n}\left[f^*(z) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) + \bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) \varphi(z)\right]\mu + z^{2n} \varphi(z) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) \mu^2 =$$

$$= \alpha(z) + \beta(z)\mu + \gamma(z)\mu^2$$

von gerader Ordnung. Nun kommen aber die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hiefür in gewissen algebraischen Relationen zum Ausdruck; diese Relationen bestehen also für alle Werte von μ zwischen 0 und 1 und somit überhaupt für alle reelle und komplexe Werte von μ. Daher sind sämtliche Nullstellen der Funktion

$$\alpha(z) + \beta(z)\mu + \gamma(z)\mu^2$$

für jeden Wert μ von gerader Ordnung; speziell hat also die Funktion ausschliesslich *mehrfache Nullstellen.*

Wir unterscheiden 4 Fälle:

1) $\gamma(z)$ *verschwindet identisch.* Dann verschwindet auch $\varphi(z)$ identisch, d. h. $f^*(z)$ und $f^*(z) + \varphi(z)$ sind nicht verschieden.

2) *Die Diskriminante der Gleichung 2-ten Grades in* μ

$$\alpha(z) + \beta(z)\mu + \gamma(z)\mu^2 = 0$$

verschwindet identisch. Die Diskriminante ist

$$D(z) = \beta^2(z) - 4\alpha(z)\gamma(z) = z^{4n}\left[f^*(z)\bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) - \bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)\varphi(z)\right]^2;$$

verschwindet also $D(z)$ identisch, so ist, ebenfalls identisch,

$$z^{2n} f^*(z)\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{2n}\overline{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)\varphi(z).$$

Nun ist aber $\varphi(z)$ durch z^{n+1} teilbar, somit ist es auch das rechtsstehende Polynom und daher ist es auch das linksstehende. Andererseits aber ist $a_0 \neq 0$, und so muss schliesslich das Polynom

$$z^{2n}\overline{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{b}_{2n} + \overline{b}_{2n-1}z + \cdots + \overline{b}_{n+1}z^{n-1}$$

durch z^{n+1} teilbar sein, was, da der Grad des Polynoms $< n+1$ ist, das identische Verschwinden nach sich zieht. Also verschwindet auch $\varphi(z)$ identisch.

3) *$\beta(z)$ verschwindet identisch.* Dann ist

$$z^{2n} f^*(z)\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) = -z^{2n}\overline{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)\varphi(z),$$

woraus, ähnlich wie in 2), das identische Verschwinden von $\varphi(z)$ folgt.

4) *Es verschwinden weder $\gamma(z)$, noch $\beta(z)$ oder $D(z)$ identisch.* Dann besitzen sowohl $\gamma(z)$ wie $\beta(z)$ und $D(z)$ nur je eine endliche Anzahl von Nullstellen. Dasselbe ist für $\alpha(z)$ immer der Fall. Also hat im allgemeinen für einen gegebenen Wert von z die Gleichung in μ

$$\alpha(z) + \beta(z)\mu + \gamma(z)\mu^2 = 0$$

zwei verschiedene Lösungen, μ_1 und μ_2, und welche wir von beiden in den linksstehenden Ausdruck eintragen, so hat die so definierte Funktion von z den gegebenen Wert zur Nullstelle, also zur mehrfachen Nullstelle. Somit genügen der betreffende Wert von z und die entsprechenden Werte μ_1 resp. μ_2 auch der Gleichung

$$\alpha'(z) + \beta'(z)\mu + \gamma'(z)\mu^2 = 0.$$

D. h. die beiden Gleichungen 2-ten Grades haben im allgemeinen ihre beiden Wurzeln gemein; also ist

$$\frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} = \frac{\beta'(z)}{\beta(z)} = \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)},$$

oder, indem man integriert,

$$\beta(z) = c_1\alpha(z);\ \gamma(z) = c_2\alpha(z).$$

Da ferner die Funktionen $z^{-2n}\alpha(z)$, $z^{-2n}\beta(z)$, $z^{-2n}\gamma(z)$ längs des Einheitskreises reell sind, so sind es auch ihre konstanten Verhältniszahlen c_1 und c_2. Ausserdem ist, da $\gamma(z)$ nicht identisch verschwindet, $c_2 \neq 0$. Indem wir nun zu den ursprünglichen Bezeichnungen zurückkehren, so ist also

$$f_\mu(z)\bar{f}_\mu\left(\frac{1}{z}\right) = f^*(z)\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)(1 + c_1\mu + c_2\mu^2),$$

wo c_1 und c_2 reell sind und $c_2 \neq 0$. Dann aber kann

$$I[f_\mu] = I^* \,|\, 1 + c_1\mu + c_2\mu^2 \,|^{\frac{1}{2}}$$

nicht entlang der Strecke $0 \leqq \mu \leqq 1$ konstant sein. Damit sind wir auf einen Widerspruch gestossen.

§ 6.

Wir ergänzen noch unsere Resultate durch den folgenden Satz, der gewissermassen als Umkehrung der Resultate des § 1. gelten darf, und durch den die Bestimmung der Minimalfunktion $f^*(z)$ auf ein algebraisches Problem zurückgeführt wird:

Kann man die Nullstellen des rationalen Polynoms höchstens $2n$-ter Ordnung

$$f_1(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots + a_{2n} z^{2n} \quad (a_0 \neq 0)$$

derart zu Paaren anordnen, dass die beiden Elemente je eines dieser Paare entweder identisch und in diesem Falle auf dem Einheitskreise oder ausserhalb desselben gelegen, oder aber Spiegelbilder von einander in bezug auf den Einheitskreis sind, dann ist $f_1(z)$ Lösung unseres Minimumproblems.

Unter der gemachten Voraussetzung liegen nämlich sämtliche Pole der rationalen Funktion

$$\frac{z^{2n}\bar{f}_1\left(\frac{1}{z}\right)}{f_1(z)}$$

ausserhalb des Einheitskreises; auf dem Einheitskreise selbst hat die Funktion keine Nullstelle und die innerhalb des Kreises gelegenen Nullstellen sind sämtlich von gerader Ordnung; daher sind die beiden Determinationen von

$$z^n\sqrt{\frac{\bar{f}_1\left(\frac{1}{z}\right)}{f_1(z)}},$$

deren Randwerte gleich

$$\pm z^n \overline{\mathrm{sg}}\, f_1(z) = \pm e^{int} \overline{\mathrm{sg}}\, f_1(e^{it})$$

sind, im Kreisinneren und auf dem Rande regulär; dasselbe gilt auch für ihr Produkt mit irgend einer regulären Funktion $\psi(z)$. Also ist auch das Produkt

$$\overline{\mathrm{sg}}\, f_1(e^{it})\, e^{int}\, \psi(e^{it})$$

Randwert einer regulären Funktion. Daher ist

$$\int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{sg}}\, f_1(e^{it})\, e^{i(n+1)t}\, \psi(e^{it})\, dt = -i \int_{|z|=1} \overline{\mathrm{sg}}\, f_1(z)\, z^n\, \psi(z)\, dz = 0.$$

D. h. für die Funktionen

$$g(t) = f_1(e^{it}),\; h(t) = e^{i(n+1)t}\psi(e^{it})$$

ist die in § 4. hergeleitete notwendige und hinreichende Bedingung erfüllt, und somit ist

$$\int_0^{2\pi} |f_1(e^{it})|\, dt \leqq \int_0^{2\pi} |f_1(e^{it}) + e^{i(n+1)t}\psi(e^{it})|\, dt,$$

oder in der früher benutzten Schreibweise

$$I[f_1] \leqq I[f_1 + z^{n+1}\psi].$$

Damit ist der behauptete Satz bewiesen.

Wir können sämtliche Resultate in den folgenden Satz zusammenfassen:

Unter allen innerhalb und auf dem Einheitskreise regulären Funktionen $f(z)$, deren Potenzreihe mit den vorgeschriebenen Gliedern

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

beginnt, gibt es eine und nur eine solche, für welche der Integralwert

$$\int_{|z|=1} |f(z)|\, |dz|$$

möglichst klein ausfällt.

Diese Funktion ist vollständig charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften:

1) *Sie ist ein rationales Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung;*

2) *ihre Nullstellen lassen sich derart zu Paaren anordnen, dass die beiden Elemente je eines dieser Paare entweder identisch sind und in diesem Falle ausser-*

halb oder auf dem Einheitskreise liegen, oder aber Spiegelbilder von einander in bezug auf den Einheitskreis sind.

§ 7.

Das schon in der Einleitung erwähnte CARATHÉODORY-FEJÉR'sche Problem lautet: *Wir betrachten sämtliche innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktionen $g(z)$, deren Potenzreihenentwickelung mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern*

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

beginnt. Gibt es unter diesen Funktionen eine solche, für welche der Maximalwert von $|g(z)|$ auf dem Einheitskreise möglichst klein ausfällt? Wenn ja, welche sind die weiteren Eigenschaften dieser Funktion?

Dieses Problem steht in enger Beziehung zu dem bisher behandelten Problem. Als Mittelglied behandeln wir zunächst das folgende Problem: Gegeben sind die Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$, und wir betrachten sämtliche innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktionen $f(z)$, für welche *die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ihrer Potenzreihe die Gleichung*

$$c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \cdots + c_0 a_n = 1$$

befriedigen. Gibt es unter diesen Funktionen eine solche, für welche $I[f]$ möglichst klein wird, und wenn ja, was sind die weiteren Eigenschaften dieser Funktion?

Was zunächst die Existenz betrifft, so lässt sich durch fast buchstäbliche Wiederholung des § 2. die Existenz einer Funktion $F^*(z)$ zeigen, die innerhalb des Einheitskreises regulär und beschränkt, auf demselben von beschränkter Schwankung ist, für welche ferner die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ der Potenzreihenentwicklung die Bedingung

$$c_n A_1 + c_{n-1} 2 A_2 + \cdots + c_0 (n+1) A_{n+1} = 1$$

erfüllen, und für welche unter allen ähnlichen Funktionen $F(z)$ die totale Schwankung $T[F]$ möglichst klein wird.

Nun ist aber diese Funktion resp. ihr Differentialquotient $f^*(z)$, in bezug auf ihre eigenen Anfangsglieder, a fortiori zugleich Lösung unseres alten Problems; also ist

$$f^*(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots + a_{2n} z^{2n}$$

ein Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung, dessen Nullstellen in der bekannten Weise verteilt sind.

Andererseits aber ist jetzt auch noch, da die $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nicht einzeln gegeben, sondern nur der einzigen Bedingung

$$c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \cdots + c_0 a_n = 1$$

unterworfen sind,

$$I[f^*] \leqq I[f^* + \lambda \varphi]$$

gegenüber allen innerhalb und auf dem Einheitskreise regulären Funktionen

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots,$$

deren Koeffizienten der homogenen Bedingung

$$c_n b_0 + c_{n+1} b_1 + \cdots + c_0 b_n = 0$$

genügen. Also ist nach § 4. für alle solche Funktionen

$$\int\limits_{|z|=1} \overline{\mathrm{sg}}\, f^*(z) \varphi(z) \frac{1}{z}\, dz = i \int\limits_0^{2\pi} \overline{\mathrm{sg}}\, f^*(e^{it}) \varphi(e^{it})\, dt = 0.$$

Nun sind aber speziell die Funktionen

$$\varphi(z) = c_{k-1} z^{n-k} - c_k z^{n-k+1} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

von dieser Art; somit ist

$$\int\limits_{|z|=1} \overline{\mathrm{sg}}\, f^*(z) [c_{k-1} z^{n-k-1} - c_k z^{n-k}]\, dz = 0 \quad (1 \leqq k \leqq n).$$

Diese Relationen lassen sich folgendermassen deuten. Die Funktion $z^n \overline{\mathrm{sg}}\, f^*(z)$ stimmt auf dem Einheitskreise mit der einen der beiden Determinationen von

$$z^n \sqrt{\frac{\overline{f^*}\left(\frac{1}{z}\right)}{f^*(z)}}$$

überein, die wir durch $h(z)$ bezeichnen. Infolge der eigentümlichen Verteilung der Nullstellen von $f^*(z)$ ist $h(z)$ eine solche rationale Funktion, deren Nullstellen — höchstens n an der Zahl — innerhalb des Einheitskreises, ihre Pole aber, mit der entsprechenden Multiplizität, in den Spiegelbildern der Nullstellen liegen. Längs des Einheitskreises ist $|h(z)| = 1$. Nach Einführung der Funktion $h(z)$ lauten unsere Relationen:

$$c_{k-1}\int\limits_{|z|=1} h(z)\, z^{-k-1}\, dz = c_k \int\limits_{|z|=1} h(z)\, z^{-k}\, dz \quad (1 \leq k \leq n).$$

Dies besagt, dass *die ersten $n+1$ Koeffizienten der Potenzreihe für $h(z)$ mit den Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ proportional sind.* Die Koeffizienten resp. der Proportionalitätsfaktor α lassen sich leicht berechnen. Da

$$h(z) = \alpha(c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots), \quad f^*(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

ist, so wird

$$\alpha = \alpha(c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \cdots + c_0 a_n) = \frac{1}{2 i \pi}\int\limits_{|z|=1} h(z)\, f^*(z)\, z^{-n-1}\, dz =$$

$$\frac{1}{2 i \pi}\int\limits_{|z|=1} f^*(z)\, \overline{\mathrm{sg}}\, f^*(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\, |dz| = \frac{I^*}{2\pi}.$$

Also *beginnt die Potenzreihe der rationalen Funktion*

$$g^*(z) = \frac{2\pi}{I^*} h(z)$$

genau mit den Gliedern

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n.$$

Ich behaupte, dass *die Funktion $g^*(z)$ eine Lösung und zwar die einzige Lösung des* Carathéodory-Fejér'schen *Problems ist.* Es ist nämlich der Maximalwert von $|g^*(z)|$, den dieser übrigens in allen Punkten des Einheitskreises annimmt, gleich $\frac{2\pi}{I^*}$. Andererseits besteht für jede innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktion

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

die Ungleichung

$$1 = c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \cdots + c_0 a_n = \frac{1}{2 i \pi}\int\limits_{|z|=1} g(z)\, f^*(z)\, z^{-n-1}\, dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} g(z)\, f^*(z)\, z^{-n} |dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \max\, |g(z)| \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\, |dz| = \frac{I^*}{2\pi} \max\, |g(z)|,$$

also die Ungleichung

$$\max\, |g(z)| \geq \frac{2\pi}{I^*};$$

und zwar kann das Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn $|g(z)\, z^{-n}|$, also $|g(z)|$ längs des Einheitskreises konstant und $g(z)\, f^*(z)\, z^{-n}$ daselbst positiv resp. nichtnegativ ist, was nur für $g(z) =$ positives Multiplum von $h(z) = z^n\, \overline{\mathrm{sg}}\, f^*(z)$ zutrifft, also nur für $g(z) = \frac{2\pi}{I^*} h(z) = g^*(z)$.

Es verdient bemerkt zu werden, dass für diese Schlussweise, speziell also für den Beweis der Eindeutigkeit der Minimallösung $g^*(z)$, die tiefer liegende Eindeutigkeitsfrage für $f^*(z)$ nicht in Betracht kommt.

Damit ist gezeigt, dass *das* CARATHÉODORY-FEJÉR'*sche Problem eine und nur eine Lösung $g^*(z)$ hat, und zwar ist $g^*(z)$ eine rationale Funktion mit höchstens n Nullstellen, die alle innerhalb des Einheitskreises liegen und mit derselben Anzahl von Polen, die, jede mit der entsprechenden Multiplizität, in die Spiegelbilder der Nullstellen in bezug auf den Einheitskreis fallen; auf dem Einheitskreise selbst ist $|g^*(z)|$ konstant.*

Kolozsvár, den 29. Oktober 1916.