SUR L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN.

PAR

MARCEL RIESZ

à STOCKHOLM.

1°. Dans cette Note, je me propose de représenter la fonction $\dfrac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\zeta(s)}$ par une intégrale de la forme

$$\int_0^\infty F(x)\, x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\, dx,$$

$F(x)$ désignant une fonction entière donnée explicitement. Comme on sait, l'hypothèse de Riemann consiste en ce que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$. Notre représentation fournira une condition nécessaire et suffisante pour la validité de cette hypothèse de Riemann. Je ne sais pas encore décider si cette condition facilitera la vérification de l'hypothèse.

2°. Formons les quantités

$$C_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

et la fonction entière

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{C_k \Gamma(k)} x^k.$$

D'après le calcul des résidus, on a

$$F(x) = \frac{i}{2} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^z}{\zeta(2z)\Gamma(z)\sin \pi z}\, dz, \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq a < 1\right)^{1} \tag{1}$$

[1] En ce qui concerne l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\zeta(z)}$ *cf.* LANDAU: Handbuch der Lehre der Verteilung der Primzahlen (Teubner, 1909) t. I p. 177—178.

l'intégrale étant absolument et uniformément convergente pour

$$-\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \operatorname{Arg} x \leqq \frac{\pi}{2}-\delta \qquad (\delta > 0) \tag{2}$$

Il en résulte immédiatement, en posant $a=\frac{1}{2}$, que l'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

ou en adoptant une notation due à M. LANDAU

$$F(x) = o(x^{\frac{1}{2}}),^{1} \tag{3}$$

x tendant vers l'infini à l'intérieur d'un angle de la forme (2).

3°. Formons maintenant l'intégrale

$$\varphi(s) = \int_0^\infty x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} F(x) dx, \tag{4}$$

le chemin d'intégration étant l'axe réel positif. En vertu de (3), cette intégrale converge absolument et *uniformément* dans toute bande de la forme

$$1+\delta \leqq R(s) \leqq 2-\delta \qquad (\delta > 0),$$

et elle y représente donc une fonction analytique. D'autre part, on peut écrire

$$n^{-s}\varphi(s) = \int_0^\infty x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} F\left(\frac{x}{n^2}\right) dx$$

$$\zeta(s)\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} F\left(\frac{x}{n^2}\right) dx.$$

Il est légitime d'intervertir l'ordre de la sommation et de l'intégration. Cela est évident pour l'intégrale prise entre 0 et 1 p. ex., les termes de la série étant de l'ordre de grandeur n^{-2}. Pour l'intégrale prise entre 1 et ∞, la formule (1) nous donne

---

[1] Comme d'ordinaire, la notation $\Phi(x)=o(x^a)$ signifie que $\frac{\Phi(x)}{x^a}$ tend vers zéro et la notation $\Phi(x)=O(x^a)$ signifie que $\frac{\Phi(x)}{x^a}$ reste fini, quand x tend vers l'infini.

$$\left|F\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| < M\left(\frac{x}{n^2}\right)^a,$$

M désignant un nombre positif ne dépendant que de a. En choisissant $\frac{1}{2} < a < \frac{R(s)}{2}$, on voit que l'interversion en question est légitime.

Or, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

étant uniformément convergente dans tout domaine borné et ayant par conséquent la valeur

$$xe^{-x},$$

on a finalement

$$\zeta(s)\varphi(s) = \int_0^\infty x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} x e^{-x} dx = \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)$$

c.-à-d.

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\zeta(s)} = \int_0^\infty x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} F(x) dx. \tag{5}$$

4°. Si l'on avait, x tendant vers l'infini sur l'axe réel positif,

$$F(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}+\delta}\right) \tag{6}$$

pour tout nombre positif δ, l'intégrale (5) convergerait absolument et uniformément dans toute bande de la forme

$$\frac{1}{2} + \delta \leqq R(s) \leqq 2 - \delta.$$

Donc, moyennant l'hypothèse (6), la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$.

D'autre part, en utilisant un théorème de M. Carathéodory, M. Landau avait démontré que moyennant l'hypothèse de Riemann, on a

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O(|s|^r)^1 \text{ pour } R(s) \geqq \frac{1}{2} + \delta,$$

[1] Landau: *loc. cit.* t. II p. 870. M. Littlewood a démontré que moyennant la même hypothèse, on a même $\frac{1}{\zeta(s)} = O(|s|^\epsilon)$, ϵ désignant un nombre positif arbitrairement petit. (Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$. Comptes rendus, 29 janvier 1912.)

r désignant un nombre positif ne dépendant que de δ. Donc, en admettant que l'hypothèse de Riemann soit vraie, on pourrait mettre dans (1) $a = \frac{1}{4} + \delta$, ce qui entraînerait (6).

On en conclut que *(6) est la condition nécessaire et suffisante pour la validité de l'hypothèse de Riemann.*

Remarquons que la formule (1) met en évidence que la relation (6) est remplie dans tout angle (2), dès qu'elle l'est sur l'axe réel positif.

Inversement, on voit sans peine, en combinant (3) avec un théorème connu de MM. PHRAGMÉN et LINDELÖF, que (6) étant remplie sur une certaine demi-droite située dans l'angle (2), elle le sera sur l'axe réel positif.

On pourrait remplacer $F(x)$ par d'autres fonctions de structure analogue. On voit que la méthode que nous avons suivie permet aussi d'exprimer la valeur réciproque d'une fonction quelconque représentée par une série de Dirichlet.

Il est facile de vérifier l'identité

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n^2}},$$

les $\mu(n)$ désignant les nombres de MÖBIUS.

5°. Nous ajouterons quelques remarques sur la distribution des zéros de la fonction $F(x)$.

On a, pour x réel et positif, $\lim\limits_{x=\infty} \frac{e^{-x}F(-x)}{x} = -1$. D'autre part, pour un x quelconque $\neq 0$, $F(x)$ satisfait à l'inégalité $|F(x)| < |x| e^{|x|}$. De ces deux faits il résulte d'après des théorèmes connus de POINCARÉ[1] et de M. HADAMARD que $F(x)$ est de *genre un.*

Désignons maintenant par γ_ν les zéros de $\frac{F(x)}{x}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. De l'inégalité ci-dessus, on conclut immédiatement moyennant le théorème en question de M. HADAMARD que la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|^{1+\varepsilon}}$ est convergente, ε désignant un nombre positif arbitrairement petit. Nous allons démontrer que la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|}$ est divergente.

En effet, si elle était convergente on aurait d'après les faits précédents et

[1] De la convergence de $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|}$ il s'ensuit $\left| \prod\limits_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\gamma_\nu}\right) \right| = O(e^{\varepsilon|x|})$, ε désignant un nombre positif arbitrairement petit.

le théorème cité de POINCARÉ $F(x)=xe^{-x}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\gamma_\nu}\right)$. Observons maintenant que la relation $F(x)=O(x^{\frac{1}{4}-\delta})\,(\delta>0)$, x tendant vers l'infini sur l'axe réel positif, est inadmissible. Elle entraînerait en effet le résultat manifestement inexact que la fonction $\zeta(s)$ ne possède pas de zéros imaginaires. Mais si $F(x)$ était de la forme ci-dessus, il résulterait immédiatement du dit théorème de POINCARÉ $F(x)=O(e^{-x(1-\varepsilon)})=O(x^{\frac{1}{4}-\delta})$. Nous avons donc démontré que la série $\sum\frac{1}{|\gamma_\nu|}$ est divergente.

Ainsi nous avons obtenu pour $F(x)$ la forme canonique suivante:

$$F(x)=xe^{\gamma x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\gamma_\nu}\right)e^{\frac{x}{\gamma_\nu}}. \tag{7}$$

Le nombre γ est évidemment réel.

Nous allons maintenant démontrer que $F(x)$ *a une infinité de zéros imaginaires.* Ceci résultera d'un théorème important de M. PÓLYA qu'il a eu l'amitié de me communiquer lors d'un entretien à Göttingen l'été 1913.[1]

Le théorème en question peut s'énoncer de la manière suivante:

Supposons que la fonction entière $\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ *admette une représentation de la forme*

$$\Phi(x)=c\,x^r e^{-\gamma x^2+\delta x}\prod_{\mu=1}^{\tau}(1+\beta_\mu x)(1+\bar\beta_\mu x)\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\delta_\nu x)e^{-\delta_\nu x}, \tag{8}$$

γ *étant* $\geqq 0$, β_μ *et* $\bar\beta_\mu$ *désignant des quantités imaginaires conjuguées,* c, δ *et* δ_ν *des quantités réelles, et* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu^2$ *étant convergent. Alors, pour que la fonction* $\Phi(x)$ *n'admette pas en même temps une représentation de la forme*

$$\Phi(x)=c\,x^r e^{\gamma x}\prod_{\mu=1}^{\tau}(1+\beta_\mu x)(1+\bar\beta_\mu x)\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\delta_\nu x), \tag{9}$$

γ *et tous les* δ_ν *étant des nombres réels de même signe et le produit* $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\delta_\nu x)$ *étant*

[1] Le théorème se trouve établi dans le travail suivant de M. PÓLYA, paru pendant l'impression du travail présent: Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins. J. f. Math (145) 1915; *cf.* p. 247—249.

absolument convergent, il faut et il suffit que chacune des deux suites $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ *et* $a_0, -a_1, \ldots (-1)^n a_n, \ldots$ *présente une infinité de changements de signe.*

En ce qui concerne notre fonction $F(x)$, il est manifeste, d'après ce que nous venons de démontrer, qu'elle ne peut admettre une représentation de la forme (9). D'autre part, il résulte de la formule (7) que si la fonction $F(x)$ n'avait qu'un nombre fini de zéros imaginaires, elle admettrait une représentation de la forme (8). La suite $\frac{1}{C_1 \Gamma(1)}, \frac{1}{C_2 \Gamma(2)}, \ldots$ ne présentant aucun changement de signe, il s'ensuivrait d'après le théorème de M. Pólya que $F(x)$ admet en même temps une représentation de la forme (9). Ceci étant impossible, il se trouve établi que $F(x)$ possède vraiment une infinité de zéros imaginaires.

D'autre part, de la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n^2}\right) = x e^{-x}$$

et de l'inadmissibilité de la relation $F(x) = O(x^{\frac{1}{4}-\delta})$, il résulte immédiatement que $F(x)$ change de signe au moins une fois sur l'axe réel positif.