ÜBER DIE HINSICHTLICH DER UNABHÄNGIGEN UND ABHÄNGIGEN VARIABELN PERIODISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG.

Von

P. BOHL

in Riga.

Es möge die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(s, t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1$$

vorliegen. Hierbei sei $\varphi(s, t)$ eine für alle s, t gegebene, stetige und hinsichtlich s und t mit den Perioden 1 periodische Funktion.[1] Ausserdem sei die Lipschitzsche Bedingung erfüllt. *Es existirt dann stets eine solche Konstante μ, dass der Unterschied einer beliebig gewählten Lösung von 1) und der Grösse $\mu \, . \, t$ für alle t zwischen endlichen Grenzen bleibt.* Einen Beweis dieses Satzes findet man in einer Note von E. E. Levi.[2] In ihr wird auf eine die Theorie der Mondbewegung betreffende Arbeit von Levi-Civita[3] hingewiesen. Der genannte Satz ist jedoch, wie mir scheint, nebst weitergehenden Resultaten gewissen Untersuchungen zu entnehmen, welche Poincaré im Jahre 1885 veröffentlicht hat.[4]

---

[1] Sind die Perioden andere, so genügt die Einführung neuer s und t proportionaler Variabeln, um auf den oben genannten Fall zurückzukommen. Es möge ferner besonders bemerkt werden, dass in dieser Untersuchung nur reelle endliche Grössen vorkommen.

[2] E. E. Levi, Sur les équations différentielles périodiques, C. R. 1911 T. 153 S. 799.

[3] Levi-Civita, Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire. Annales de l'Ecole Normale supérieure. 28, 1911.

[4] H. Poincaré, Sur les courbes définies par les équations différentielles. Troisième partie. Journal de Mathématiques IV s. T. 1. 1885. Die hier in Betracht gezogenen Untersuchungen finden sich im 15. Kapitel und beginnen auf S. 226. Poincaré betrachtet die sprunghafte Punktbewegung auf einer geschlossenen Linie. Eine wichtige Rolle spielt hierbei eine Art von Stabilität. Es ist dies die stabilité à la Poisson, die »ewige Wiederkunft» mit beliebiger Annäherung. Man kann die auftretenden Fragen von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachten und sie zu mancherlei Problemen in Beziehung setzen. Ich erwähne etwa die Ponceletschen Polygone.

Liegt eine Lösung von 1) vor, so verdient die Frage besonderes Interesse, ob die Lösung in der Form

$$s = \mu . t + f(t, \mu . t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2$$

darstellbar ist. Hierbei ist μ die schon erwähnte Konstante, $f(x, y)$ eine für alle x, y definierte, *stetige* und hinsichtlich x, y mit den Perioden 1 periodische Funktion.[1] Ist μ keine Rationalzahl und kann *eine* Lösung in der Form 2) dargestellt werden, so werden alle Lösungen aus der Gleichung

$$s = \mu . t + c + f(t, \mu . t + c) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3$$

durch geeignete Wahl der Konstanten c erhalten. Umgekehrt liefert 3) in diesem Fall bei jedem Wert der Konstanten c eine Lösung.

Es sei μ keine Rationalzahl und es möge eine der Lösungen in naheliegender Weise durch eine Kurve auf einem Kreisring dargestellt werden. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten des eben besprochenen Falles besteht dann darin, dass die darstellende Kurve den Ring überall dicht bedeckt. Die Richtigkeit dieser Behauptung geht aus den unten folgenden Erörterungen hervor. So leicht es nun häufig ist, beim Auftreten neuer wesentlicher Voraussetzungen[2] das Auftreten des oben besprochenen Falles vorherzusagen, so schwierig ist es, allgemeine praktisch wertvolle Kriterien dafür anzugeben. Die im Anfang dieser Einleitung eingeführten Annahmen genügen jedenfalls *nicht*, um das Eintreten des genannten Falles sicherzustellen.

Wir nehmen nun an, $\varphi(s, t)$ sei eine solche Funktion, dass der eben erörterte Fall eintritt. Wir haben im Vorhergehenden bereits auf Voraussetzungen hingewiesen, die mitunter geeignet sind, die genannte Annahme zu stützen. Hier möge noch erwähnt werden, dass, wenn $\varphi(s, t)$ nur von s oder nur von t abhängt, die Berechtigung der Annahme häufig ohne jede Schwierigkeit zu erweisen ist. Es möge weiter die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(s, t) + \psi(\varepsilon, s, t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4$$

gebildet werden. Hierbei ist ψ für alle s, t und diejenigen ε gegeben, deren Absolutwert kleiner als eine bestimmte positive Zahl ist. Ferner genügt ψ für

---

[1] In diesem Fall kann $f(t, \mu . t)$ mit beliebiger Annäherung durch ein aus $\sin 2\pi t$, $\cos 2\pi t$, $\sin 2\pi\mu t$, $\cos 2\pi\mu t$ gebildetes ganzes Polynom ersetzt werden.

[2] Diese Voraussetzungen könnten z. B. Aussagen über integrierende Faktoren, infinitesimale Transformationen, Integralinvarianten u. s. w. enthalten.

jedes einzelne spezielle ε denselben Bedingungen, wie sie *zu Anfang* dieser Einleitung für φ formuliert wurden. Endlich soll es möglich sein, $|\psi|$ dadurch beliebig klein zu machen, dass man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt.

Wir bezeichnen die charakteristische Zahl für 4) mit ϱ. Man kann $|\mu - \varrho|$ beliebig klein machen, indem man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt.[1]

Es sei nun σ irgend eine Lösung von 4).

$$s = \mu . t + c + f(t, \mu . t + c) \quad \dots \dots \dots \dots \quad 5$$

sei diejenige Lösung von 1), welche für $t = 0$ mit σ übereinstimmt. Dann können wir schreiben

$$\sigma = \varrho . t + c + f(t, \varrho . t + c) + \eta \quad \dots \dots \dots \dots \quad 6$$

wobei $|\eta|$ beliebig klein gemacht werden kann, indem man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt; und zwar genügt ein Kleinheitsgrad gleichzeitig für alle t und alle Lösungen von 4).

Es ist also, um eine Approximationslösung im eben genannten Sinn zu erhalten, genügend, in dem Ausdruck für die Lösung von 1) die Zahl μ durch die Zahl ϱ zu ersetzen. Diesen Satz sehe ich als das wesentliche Ergebnis meiner Arbeit an. Es wäre von bedeutendem Interesse, wenn eine *direkte* Verallgemeinerung des Satzes denselben auf Systeme von Differentialgleichungen ausdehnen könnte. Ein dahin gehender Versuch wäre jedoch aussichtslos.

Ich möchte nun noch einige Worte über das Verhältnis meiner Arbeit zu den Untersuchungen von Poincaré hinzufügen. Poincaré geht auf die Konstruktion eines *Integrals* aus, während in meiner Arbeit eine Darstellung der *Lösungen* ins Auge gefasst wird. Am Schluss des hier in Betracht gezogenen Kapitels führt Poincaré auch einen »kleinen» Parameter in die Differentialgleichung ein und gibt eine gewisse Entwicklung für dass *Integral. Dieser Teil der Arbeit von* Poincaré *hat jedoch nur einen formalen Charakter.*

Es war nicht zu vermeiden, dass ein grosser Teil meiner Arbeit den oben erwähnten bereits vorhandenen Untersuchungen nahe steht. Dies gilt insbesondere bezüglich der Untersuchungen von Poincaré, während die Arbeit von Levi nur für den Beginn des ersten Paragraphen in Betracht kommt. Ich habe meine Darstellungsform so gewählt, dass die folgenden Auseinandersetzungen ohne Kenntnis der Arbeiten von Poincaré und Levi verstanden werden können. Ein Verzicht auf diese Unabhängigkeit hätte keine nennenswerte Kürzung herbeigeführt.

[1] Dies kann unmittelbar aus den Untersuchungen von Poincaré gefolgert werden.

§ 1.

Die charakteristische Zahl. Vorbereitende Sätze.

Wir fassen *eine* Lösung von 1) ins Auge und bilden

$$s(t+m)-s(t) \quad \ldots \quad 7$$

wobei m irgend eine positive ganze Zahl bedeutet. *Zunächst überzeugen wir uns davon, dass die grösste der ganzen Zahlen, die nicht grösser als 7) sind, einen von der Wahl von t unabhängigen Wert besitzt.* Andernfalls müsste nämlich für einen gewissen t-Werth der Ausdruck 7) gerade *gleich* einer ganzen Zahl g werden. Hieraus würde dann gemäss den bezüglich 1) eingeführten Voraussetzungen folgen, dass 7) für *alle* t den Wert g besitzt. Somit wäre unsere Behauptung dennoch richtig. Die in der eben begründeten Behauptung genannte ganze Zahl wollen wir mit (m) bezeichnen; sie kann auch gleich Null oder kleiner als Null sein.

Es bezeichne nun auch n irgend eine positive ganze Zahl. Dann gilt

$$s(t+m\,.\,n)-s(t)=[s(t+m\,.\,n)-s(t+m(n-1))]+[s(t+m(n-1))-$$
$$-s(t+m(n-2))]+\cdots+[s(t+m)-s(t)]=n[(m)+\varepsilon]=m[(n)+\eta] \quad . \; . \quad 8$$

wobei ε und η kleiner als 1 und nicht negativ sind. Aus 8) ergibt sich

$$\frac{(m)}{m}+\frac{\varepsilon}{m}=\frac{(n)}{n}+\frac{\eta}{n} \quad \ldots \quad 9$$

Man kann daher den Unterschied der in 9) links und rechts an erster Stelle stehenden Brüche kleiner als eine beliebig gewählte positive Zahl machen, indem man sich auf genügend grosse m, n beschränkt. Es existiert daher der endliche Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(m)}{m}=\mu \quad \ldots \quad 10$$

Dieser Grenzwert hängt nicht von der Wahl der Lösung ab. Ist nämlich $s_1(t)$ irgend eine Lösung von 1), so gibt es eine solche ganze Zahl ν, dass für alle t $s(t)+\nu \overline{\gtrless} s_1(t) < s(t)+\nu+1$ gilt. Hieraus geht die Richtigkeit der eben gemachten Bemerkung sofort hervor.

Mit Benutzung von 9) erkennen wir nun, dass die Grösse

$$m\,.\,\mu-(m)-\varepsilon=m\,.\,\mu-m\,.\,\frac{(n)}{n}-m\,.\,\frac{\eta}{n} \quad \ldots \quad 11$$

falls m festgehalten wird, während n nach ∞ strebt, nach o konvergiert. Dieses Resultat verlangt das Bestehen der Ungleichung

$$0 \leqq m \,.\, \mu - (m) \leqq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 12$$

wobei das Gleichungszeichen nur für ein *rationales* μ vorkommen kann.

Es mag zunächst bemerkt werden, dass μ sicher rational ist, wenn die Grösse 7) für ein gewisses m eine ganze Zahl g ist. Dann wäre nämlich in 8) $\varepsilon = 0$ und $(m) = g$ und daher $\mu = \frac{g}{m}$.

Wir haben nun, wenn n irgend eine positive ganze Zahl ist und λ, ν irgend welche ganze Zahlen bedeuten

$$(n) + \lambda - \nu \leqq [s(t+n) + \lambda] - [s(t) + \nu] < (n) + \lambda - \nu + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 13$$

$$[\mu \,.\, (t+n) + \lambda] - [\mu \,.\, t + \nu] = \mu \,.\, n + \lambda - \nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 14$$

$$(n) + \lambda - \nu \leqq \mu \,.\, n + \lambda - \nu \leqq (n) + \lambda - \nu + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 15$$

wobei in 13) und 15) das Gleichungszeichen nur für rationales μ auftreten kann. Die Differenzen

$$[s(t+n) + \lambda] - [s(t) + \nu] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 16$$

und

$$[\mu \,.\, (t+n) + \lambda] - [\mu \,.\, t + \nu] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 17$$

liegen daher für ein *nicht* rationales μ *zwischen* denselben aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. *Diese Differenzen sind daher von Null verschieden und gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ.* Bei *rationalem* μ liegen sie in dem von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen bestimmten Intervall, wobei die letzteren Zahlen selbst mit zum Intervall gerechnet werden. *Die Differenzen 16), 17) haben daher nicht entgegengesetztes Zeichen.*

Offenbar gilt das gefundene Resultat auch dann, wenn n eine *negative* ganze Zahl ist.

§ 2.

Geometrische Darstellung. Der in der Einleitung erwähnte besondere Fall.

Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf einer Ebene ein. Unter einer Verschiebung (m, n) verstehen wir eine solche Verschiebung eines geometrischen Gebildes, bei welcher die Abszissen seiner Punkte den Zuwachs m, die Ordinaten den Zuwachs n erfahren. Im Folgenden werden nur *ganzzahlige* Werte von m und n zugelassen, ohne dass hierauf besonders hingewiesen wird. Andererseits können m, n positiv, negativ oder gleich Null sein. Wir stellen nun *eine* Lösung von 1) durch eine Kurve dar und unterwerfen diese Kurve allen Verschiebungen der eben genannten Art. Die durch die Verschiebung (m, n) erhaltene Kurve nennen wir (m, n)-Kurve. Hiernach ist die $(0, 0)$-Kurve die ursprüngliche Kurve. Alle diese Kurven stellen Lösungen dar. Haben die (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Kurve einen gemeinsamen Punkt, so fallen sie ganz zusammen. Tritt dieser Fall ein, so führt die Verschiebung $(m_2 - m_1, n_2 - n_1)$ jeden Punkt der (m_1, n_1)-Kurve in einen Punkt derselben Kurve über und das Gleiche gilt von der $(0, 0)$-Kurve. Bei der Verschiebung $(m_2 - m_1, n_2 - n_1)$ geht der Punkt mit den Koordinaten $t, s(t)$ in den Punkt mit den Koordinaten $t + m_2 - m_1, s(t) + + n_2 - n_1$ über, sodass, weil der letztere ein Punkt der $(0, 0)$-Kurve ist, $s(t + + m_2 - m_1) = s(t) + n_2 - n_1$ gilt. Ist nun nicht gleichzeitig $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$, so wird die Grösse 7) für ein gewisses positives m gleich einer ganzen Zahl. Hieraus folgt, wie im § 1 bemerkt wurde, dass μ eine Rationalzahl ist. Ist also μ *keine* Rationalzahl, so haben die Kurven (m_1, n_1) und (m_2, n_2) *keinen* gemeinsamen Punkt, wofern nicht gleichzeitig $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$ gilt.

Wir denken uns nun die Ebene als aus 2 Blättern bestehend. Auf dem einen Blatt befinden sich die eben besprochenen Kurven; dieses Blatt heisse das Kurvenblatt. Das andere Blatt wollen wir aus einem sogleich ersichtlichen Grunde das Geradenblatt nennen. Alle Konstruktionen, bei welchen nicht angegeben wird, auf welchem Blatt sie geschehen, mögen auf beiden Blättern in derselben Weise ausgeführt werden. Auf dem Geradenblatt ziehen wir durch den Koordinatenanfangspunkt eine Gerade mit dem Richtungskoeffizienten μ. Diese Gerade unterwerfen wir allen Verschiebungen der oben genannten Art. Durch die Verschiebung (m, n) entsteht, wie wir sagen, die (m, n)-Gerade. Ist μ *keine* Rationalzahl, so sind die (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Gerade von einander verschieden, sofern nicht gleichzeitig $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$ ist. In diesem Falle bedecken die (m, n)-Geraden die Geradenebene überall dicht. Wir ziehen nun eine Senkrechte zur Abszissenachse;[1] dieselbe ist nach dem Vorigen als auf der Curven- und Geraden-Ebene gelegene Doppellinie anzusehen. Die Durchschnittspunkte der Senkrechten mit der (m, n)-Kurve und der (m, n)-Geraden bilden, wie wir festsetzen, ein Paar von entsprechenden Punkten. Bei *nicht* rationalem μ ist

---

[1] Im Folgenden verstehen wir unter einer »Senkrechten« stets eine Senkrechte zur Abszissenachse.

dadurch eine wechselseitig eindeutige Beziehung festgesetzt. P_1 und P_2 seien nun die Durchschnittspunkte der Senkrechten mit der (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Geraden. Q_1 und Q_2 seien die Durchschnittspunkte mit der (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Kurve. Hierbei wird der Fall, dass gleichzeitig $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$ ist, ausgeschlossen. Die Abszisse der auf der Senkrechten gelegenen Punkte sei t. Dann haben P_1, P_2, Q_1, Q_2 die Ordinaten $\mu . (t - m_1) + n_1$, $\mu(t - m_2) + n_2$, $s(t - m_1) + n_1$, $s(t - m_2) + n_2$. Indem wir nun das in § 1 hinsichtlich der Differenzen 16), 17) Gefundene heranziehen, erhalten wir folgenden Satz: *Es kann niemals der Fall eintreten, dass P_2 von P_1 aus in der Richtung der positiven Ordinatenachse und gleichzeitig Q_2 von Q_1 aus in der Richtung der negativen Ordinatenachse liegt. Ebenso ist der Fall ausgeschlossen, dass P_2 von P_1 aus in der Richtung der negativen Ordinatenachse und gleichzeitig Q_2 von Q_1 aus in der Richtung der positiven Ordinatenachse liegt.* Wir drücken dieses Resultat so aus, dass wir sagen: *Die Punkte $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ liegen nicht in entgegengesetzter Ordnung.* Ist μ *keine* Rationalzahl, so sind sowohl P_1 und P_2 als auch Q_1 und Q_2 von einander verschieden. *In diesem Fall liegen $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ stets in derselben Ordnung.* Ich bemerke ausdrücklich, dass der eben abgeleitete für das Folgende wichtige Satz auf die Poincaréschen Untersuchungen zurückgeht. *Von nun an setzen wir in diesem Paragraphen μ als nicht rational voraus.*

Es mögen nun zunächst die Konsequenzen der weiteren Voraussetzung verfolgt werden, dass *die (m, n)-Kurven die Kurvenebene überall dicht bedecken.* Dann liegen auch die Durchschnittspunkte der (m, n)-Kurven mit einer Senkrechten auf ihr überall dicht. Ist das letztere umgekehrt für *eine* Senkrechte der Fall, so bedecken die (m, n)-Kurven die Ebene in der genannten Art. Wir fassen nun irgend eine Senkrechte S ins Auge. Dieselbe ist nach dem Vorhergehenden als Doppellinie anzusehen. Die überall dicht auf S liegenden Durchschnittspunkte mit den (m, n)-Geraden sind nach dem Vorigen den überall dicht auf S liegenden Durchschnittspunkten mit den (m, n)-Kurven wechselseitig eindeutig zugeordnet. Dabei ist, wie wir sahen, die Anordnung der zugeordneten Punkte auf der Kurven- und Geraden-Ebene die gleiche. Wir vervollständigen nun die Zuordnung so, dass *alle* Punkte der auf der *Geradenebene* gelegenen Senkrechten und *alle* auf der *Kurvenebene* gelegenen Punkte von S einander wechselseitig eindeutig entsprechen, wobei die Anordnung der beiden einander zugeordneten Punktsysteme in dem oben erwähnten Sinn dieselbe bleibt. Diese Zuordnung lässt sich offenbar stets ausführen und zwar nur in *einer* bestimmten Weise. Das eben Gesagte erstreckt sich auf *alle* Senkrechten.

Es seien nun x, y die Koordinaten irgend eines Punktes der Geradenebene und Y die Ordinate des zugeordneten Punktes der Kurvenebene. Nach dem

Obigen ist $Y-y$ eine eindeutige Funktion von x, y; wir bezeichnen sie mit $f(x, y)$. Weiter folgt aus dem eben Ausgeführten, dass $f(x, y)$ sich in eine *stetige* Funktion von y verwandelt, wenn man $x = \text{const.}$ setzt. Endlich ist $f(x, y)$ hinsichtlich x, y mit den Perioden 1 periodisch. Dies ergibt sich, wenn man bedenkt, dass, wie leicht zu sehen, eine (m, n)-Verschiebung entsprechende Punkte wieder in entsprechende Punkte überführt. Beachtet man die Periodizität von $f(x, y)$, die eben genannte Stetigkeitseigenschaft und endlich das über die Anordnung der zugeordneten Punkte Gesagte, so sieht man, dass die Schwankung von $f(x, y)$ bei einem speziellen konstanten x-Wert kleiner als 1 ist. *Wir werden jetzt beweisen, dass $f(x, y)$ überall stetig ist.*

Wir denken uns zunächst zwei Punkte der Geradenebene, welche auf ein und derselben (m, n)-Geraden liegen und die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 besitzen. Y_1 und Y_2 seien die Ordinaten der zugeordneten Kurvenpunkte. Es gibt dann solche Werte u, v, dass

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (Y_2 - y_2) - (Y_1 - y_1) = \varphi(u, v)(x_2 - x_1) - \mu(x_2 - x_1) \quad . \; . \quad 18$$

gilt, wobei φ die in 1) vorkommende Funktion bedeutet. Man kann daher die links stehende Differenz absolut beliebig klein machen, indem man $|x_2 - x_1|$ genügend klein wählt. Im Folgenden bedeute $f(P)$ den Wert von $f(x,y)$ für den Punkt P der Geradenebene. Wäre $f(x,y)$ für einen Punkt Q der Geradenebene *nicht* stetig, so würden in beliebiger Nähe von Q Punkte P existieren, für welche $|f(P) - f(Q)| > q$ gilt, wobei q eine gewisse positive Konstante bedeutet. Ist P ein derartiger Punkt, so gibt es auf der durch ihn hindurchgehenden Senkrechten einen Punkt P', welcher auf einer der Geraden (m,n) liegt, von P eine beliebig kleine Entfernung hat und $|f(P') - f(Q)| > q$ liefert. Hierbei ist die bereits gefundene Stetigkeitseigenschaft von $f(x,y)$ berücksichtigt worden. Auf Grund des eben gesagten können wir behaupten, dass die vorhin gemachte Aussage über die Existenz von Punkten P besonderer Art bestehen bleibt, wenn man die Forderung hinzufügt, dass die P auf Geraden (m,n) liegen. Es gibt daher auch auf diesen Geraden gelegene Punkte $P_1, P_2 \ldots$, welche nach Q konvergieren und $|f(P_1) - f(Q)| > q$, $|f(P_2) - f(Q)| > q \ldots$ liefern. Durch jeden dieser Punkte P_1, P_2 u. s. w., beispielsweise P_ν, denken wir uns die (m,n)-Gerade gezogen und ihren Schnittpunkt R_ν mit der durch Q gehenden Senkrechten bestimmt. Dann streben die Entfernungen QR_ν und $P_\nu R_\nu$ für $\nu \to \infty$ nach 0. Wir haben also nach dem Vorigen, indem wir das in Anschluss an 18) Gesagte und die bereits gefundene Stetigkeitseigenschaft von $f(x,y)$ berücksichtigen,

$$[f(P_\nu) - f(R_\nu)] \to 0 \qquad [f(R_\nu) - f(Q)] \to 0 \cdot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 19$$

und folglich

$$[f(P_\nu) - f(Q)] \to 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 20$$

Das gefundene Resultat lässt sich aber mit der Ungleichung $|f(P_\nu) - f(Q)| > q$ nicht vereinigen. Wir müssen daher unsere versuchsweise gemachte Annahme, $f(x, y)$ sei im Punkte Q nicht stetig, fallen lassen. Die Stetigkeit von $f(x, y)$ ist daher bewiesen. $f(x, y)$ ist also eine für alle x, y gegebene, eindeutige, stetige, mit den Perioden 1 hinsichtlich der x, y periodische Funktion.

Dem Punkt der Geradenbene mit den Koordinaten $t, \mu . t$ ist der Punkt mit den Koordinaten $t, s(t)$ auf der Kurvenebene zugeordnet. Wir haben also

$$s(t) - \mu . t = f(t, \mu . t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 21$$

Die betrachtete Lösung von 1) ist also in der Form 2) darstellbar.

Nun wollen wir die Voraussetzung, dass die (m, n)-Kurven die Ebene überall dicht bebecken, ausschalten, andererseits aber die Annahme machen, dass die betrachtete Lösung in der Form

$$s(t) = \mu . t + \chi(t, \mu . t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 22$$

darstellbar ist. Hierbei bedeutet $\chi(x, y)$ eine für alle x, y gegebene, eindeutige, stetige und mit der Perioden 1 periodische Funktion.

Aus dieser Annahme folgt, wie wir zunächst zeigen, *dass die (m, n)-Kurven die Ebene überall dicht bedecken.* Um den Beweis zu führen, ziehen wir die der Abszisse t entsprechende Senkrechte. Die Schnittpunkte der (m, n)-Kurven und (m, n)-Geraden mit dieser Geraden haben die Ordinaten $s(t - m) + n$ und $\mu . (t - m) + n$. Wir wollen im Folgenden der bequemeren Ausdrucksweise wegen die auf den (m, n)-Kurven gelegenen Punkte der Kurvenebene und die auf den (m, n)-Geraden gelegenen Punkte der Geradenebene »Punkte erster Klasse» nennen und alle übrigen Punkte auf den genannten Ebenen zur »zweiten Klasse» rechnen. Es seien nun P_1, P_2 auf der gezogenen Senkrechten gelegene, zur ersten Klasse gehörende Punkte der Geradenebene. Q_1, Q_2 seien die entsprechenden Punkte der Kurvenebene. Die Ordinaten von P_1, P_2 seien y_1, y_2, diejeningen von Q_1, Q_2 seien Y_1, Y_2. Dann haben wir, wenn P_1 und P_2 auf der (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Geraden liegen

$$Y_2 - Y_1 = [s(t - m_2) + n_2] - [s(t - m_1) + n_1] = [\mu . (t - m_2) + n_2] - [\mu . (t - m_1) + n_1] +$$
$$+ \chi(t, \mu . (t - m_2) + n_2) - \chi(t, \mu . (t - m_1) + n_1) = y_2 - y_1 + \chi(t, y_2) - \chi(t, y_1) \quad . \; . \; . \quad 23$$

Man kann somit die Entfernung $Q_1 Q_2$ beliebig klein machen, wenn man nur die Entfernung $P_1 P_2$ genügend klein wählt. Gäbe es nun auf der erwähnten Senkrechten eine Strecke von der Länge $r > 0$ ohne auf der Kurvenebene gelegene Punkte erster Klasse, so würde diese Lücke die auf der Senkrechten und der Kurvenebene gelegenen Punkte erster Klasse in zwei Gruppen I und II zerlegen. Diesen Gruppen I und II mögen auf der Geradenebene die Punktgruppen (1) und (2) entsprechen. Berücksichtigt man das oben über die Punktanordnung Gesagte sowie den Umstand, dass die (m, n)-Geraden die Geradenebene überall dicht bedecken, so ergibt sich die Existenz von einander beliebig nahe liegenden Punkten R_1 und R_2, von denen R_1 der Gruppe (1), R_2 der Gruppe (2) angehört. Sind S_1 und S_2 die R_1 und R_2 entsprechenden Punkte der Kurvenebene, so gehört S_1 zur Gruppe I, S_2 zur Gruppe II. Benutzen wir nun die in Anschluss an 23) gemachte Bemerkung, so sehen wir, dass man die Entfernung $S_1 S_2$ beliebig klein machen kann, wenn man die Entfernung $R_1 R_2$ genügend klein wählt. Dieses Resultat ist mit der Existenz der oben erwähnten Lücke nicht vereinbar. Unsere Behauptung, dass die (m, n)-Kurven die Kurvenebene überall dicht bedecken, ist damit bewiesen.

Wir können daher im vorliegenden Fall die Funktion $f(x, y)$ wie im Vorhergehenden konstruieren. Dann gilt

$$s(t) - \mu . t = \chi(t, \mu . t) = f(t, \mu . t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24$$

$$\chi(t, \mu . (t-m) + n) = \chi(t-m, \mu . (t-m)) = f(t-m, \mu . (t-m)) = \\ = f(t, \mu . (t-m) + n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25$$

falls m, n ganze Zahlen sind. Zieht man nun die der Abszisse t entsprechende Senkrechte, so stimmen die Funktionen $\chi(x, y)$ und $f(x, y)$ für gewisse auf der Senkrechten überall dicht liegende Punkte der Geradenebene überein. Hieraus folgt, *dass die genannten Funktionen überhaupt zusammmenfallen.*

Wir wollen nun unter Beibehaltung der im unmittelbar Vorhergehenden gemachten Voraussetzungen diejenige Lösung von 1) darstellen, für welche bei $t = t_0$ $s = s_0$ wird. Wir ziehen zu diesem Zweck die der Abszisse t_0 entsprechende Senkrechte. Auf dieser Senkrechten bestimmen wir den Punkt P der Kurvenebene mit der Ordinate s_0 und den P entsprechenden[1] Punkt der Geradenebene. Die Ordinate des letzteren sei g_0. Nach dem Vorhergehenden können die ganzen Zahlen m, n so bestimmt werden, dass

$$s(t_0 - m) + n = s_0 + \varepsilon \qquad \mu . (t_0 - m) + n = g_0 + \eta \quad \ldots\ldots \quad 26$$

ist, wobei $|\varepsilon|$ und $|\eta|$ beliebig klein sind. Dann stellt

[1] Hierbei wird die Lösung zu Grunde gelegt, welche der Gegenstand der vorhergehenden Undersuchungen war.

$$s(t-m)+n=\mu.(t-m)+n+f(t,\mu.(t-m)+n) \quad \ldots \ldots \quad 27$$

eine Lösung von 1) dar, die sich von der gesuchten Lösung in einem beliebig aber fest angenommen, t_0 umschliessenden t-Intervall beliebig wenig unterscheidet, wofern nur $|\varepsilon|$ genügend klein ist. Die rechte Seite von 27) kann geschrieben werden

$$\mu.(t-t_0)+g_0+\eta+f(t,\mu.(t-t_0)+g_0+\eta) \quad \ldots \ldots \quad 28$$

Der Ausdruck 28) unterscheidet sich von

$$\mu.(t-t_0)+g_0+f(t,\mu.(t-t_0)+g_0) \quad \ldots \ldots \quad 29$$

beliebig wenig, wenn nur $|\eta|$ genügend klein ist. Man kann daher den Unterschied der gesuchten Lösung und des Ausdrucks 29) im genannten t-Intervall beliebig klein machen, indem man m, n geeignet wählt. Da aber weder die gesuchte Lösung noch 29) von der Wahl der m, n abhängen, so muss die gesuchte Lösung im genannten Intervall mit 29) übereinstimmen. Da ferner dieses t-Intervall beliebig gross gewählt werden kann, *so muss 29) die gesuchte Lösung für alle t liefern.*

Wir sehen also, *dass im hier vorliegenden Fall jede Lösung von 1) in der Form*

$$s=\mu.t+c+f(t,\mu.t+c) \quad \ldots \ldots \quad 30$$

bei geeigneter Wahl der Konstanten c dargestellt werden kann. Aus dem Vorhergehenden folgt auch unmittelbar, *dass 30) bei jedem Wert der Konstanten c eine Lösung liefert.*

Wir wollen annehmen, dass der den letzen Unterschungen zu Grunde liegende Fall eintritt. Es mögen die Koordinaten eines Punktes der Kurvenebene mit X, Y bezeichnet werden, während y die Ordinate des entsprechenden Punktes der Geradenebene ist. Man kann dann $Y-y$ als Funktion von X, Y betrachten. Überlegungen, die den obigen analog sind, würden dann zur Darstellung eines *Integrals* von 1) führen. Die Form dieses Integrals entspricht dem von Poincaré gefundenen Resultat.

§ 3.

Beweis des in der Einleitung angegebenen Satzes.

Indem wir uns der in der Einleitung erwähnten Bezeichnungen bedienen, wollen wir zunächst zeigen, dass man in der Tat $|\mu-\varrho|$ beliebig klein machen kann, indem man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt. $s(t)$ und $\sigma(t)$ seien Lösungen von

1) und 4), welche für $t = 0$ zusammenfallen. m sei eine beliebig aber fest ausgewählte positive ganze Zahl und (m) habe dieselbe Bedeutung, wie im §1, wobei die Gleichung 1) und die Lösung $s(t)$ zu Grunde gelegt werden. Indem man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt, kann man erreichen, dass $\sigma(m) - \sigma(0)$ sich von $s(m) - - s(0)$ beliebig wenig unterscheidet. Da, wie wir voraussetzen,[1] μ keine Rationalzahl ist, kann $s(m) - s(0)$ nach § 1 nicht ganzzahlig sein. Bildet man daher (m) unter Zugrundelegung von 4) und $\sigma(t)$, so findet man bei genügend kleinem $|\varepsilon|$ denselben Wert, wie unter Zugrundelegung von 1) und $s(t)$. Die Benutzung von 12) ergibt somit $m|\mu - \varrho| < 1$ und daher $|\mu - \varrho| < \frac{1}{m}$. Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung bewiesen.

Wir denken uns nun auf der positiven Ordinatenachse vom Anfangspunkt an die Strecke 1 aufgetragen. Diese werde dann in p gleiche Teile geteilt. p bedeutet hierbei eine positive ganze Zahl. Die Schnittpunkte der (m, n)-Geraden[2] mit der Ordinatenachse liegen auf ihr überall dicht, da wir ja ein nicht rationales μ voraussetzen. Es kann daher zwischen den Endpunkten jeder Teilstrecke je ein Schnittpunkt ausgewählt werden. Die (m, n)-Geraden, welche durch die gewählten Schnittpunkte gehen, denken wir uns für diejenigen Abszissen gezogen, welche kleiner als 1 und nicht kleiner als 0 sind. Auf die so erhaltenen p Abschnitte wenden wir alle (m, n)-Verschiebungen an und erhalten so ein System von unendlich vielen Abschnitten γ. Irgend eine Senkrechte schneidet diese Abschnitte in Punkten, die auf ihr nirgends dicht gelegen sind. Die Abstände benachbarter Schnittpunkte sind kleiner als $\frac{2}{p}$.

Wir kehren zu den anfänglichen p Abschnitten zurück und lenken unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen Abschnitte β der $(0, 0)$-Geraden, welche nach gehöriger Verschiebung diese p Abschnitte liefern. Auf der $(0, 0)$-Geraden wählen wir dann 2 Punkte mit den Abszissen $-k$ und $+k$ so aus, dass der von diesen Punkten begrenzte Abschnitt δ alle Abschnitte β umfasst. Sobald μ und p vorliegen, kann k gewählt werden.[3] Da alle Abschnitte γ durch Verschiebung der p Abschnitte hervorgehen, so liefert der Verschiebungsprozess angewandt auf den Abschnitt δ alle Abschnitte γ als Teilabschnitte. Jeder Punkt auf einem Abschnitt γ geht daher durch Verschiebung eines gewissen Punktes des Abschnittes δ hervor.

Auf Grund des Gesagten ergibt sich die Richtigkeit der folgenden Behaup-

---

[1] Diese Voraussetzung ist übrigens für den im Augenblick verfolgten Zweck unwesentlich.
[2] Es wird herbei die Gleichung 1) zu Grunde gelegt.
[3] Wir wollen k positiv wählen. Ausserdem mögen die Punkte mit den Abszissen $\pm k$ zu δ gerechnet werden.

tung. *Zieht man einen Geradenabschnitt von der Länge* $\frac{2}{p}$ *in der Richtung der Ordinatenachse, so liegt zwischen den Endpunkten dieser Strecke mindestens ein Punkt, der durch eine* (m, n)*-Verschiebung eines Punktes von* δ *hervorgeht.*

Im Falle der Gleichung 1) kommen die Betrachtungen des zweiten Paragraphen im vollen Umfang zur Geltung. Die Lösungen ergeben sich aus 3). Im Falle der Gleichung 4) dagegen sind diejenigen Untersuchungen gegenstandslos, welche sich auf die Annahme stützen, dass die (m, n)-Kurven die Kurvenebene überall dicht bedecken.

Wir wählen zunächst eine positive Konstante ϑ willkürlich aber fest aus. Dieser Konstanten ϑ ordnen wir eine positive Grösse θ so zu, dass

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \overline{\gtrless} \frac{\vartheta}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 31$$

gilt, sobald $|y'' - y'| < \theta$ ist. Hierbei bedeutet $f(x, y)$ eine gemäss § 2 für die Gleichung 1) unter Zugrundelegung einer fest gewählten Lösung eingeführte Funktion. Hierauf werden die positiven Grössen r und q sowie die positive ganze Zahl p so gewählt, dass

$$2r + 2q + \frac{4}{p} < \frac{\vartheta}{2} \qquad 2q + \frac{4}{p} \overline{\gtrless} \theta \quad \ldots \ldots \ldots \quad 32$$

ist. Der positiven ganzen Zahl p ordnen wir hierauf gemäss den vorhergehenden Betrachtungen dieses Paragraphen eine positive Grösse k zu, wobei wir uns auf Gleichung 1) beziehen. Endlich sei $\varkappa$ eine solche positive Grösse, dass für $|\varepsilon| < \varkappa$

$$|\mu - \varrho| < \frac{q}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 33$$

gilt und für $-k \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} k$ Lösungen von 1) und 4), die für $t = 0$ zusammenfallen, sich um weniger als r unterscheiden. Es existiert bei unseren Voraussetzungen ein solches $\varkappa$. *Im Folgenden wird stets* $|\varepsilon| < \varkappa$ *angenommen.*

Es möge nun $\sigma(t)$ irgend eine Lösung von 4) sein. Die Konstante c sei so gewählt, dass

$$s(t) = \mu . t + c + f(t, \mu . t + c) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 34$$

diejenige Lösung von 1) darstellt, welche für $t = 0$ mit $\sigma(t)$ übereinstimmt. *Diese Lösung* 34) *der Gleichung* 1) werde von nun ab zu Grunde gelegt und die Betrachtungen von § 2 mögen sich an diese Lösung anschliessen. Die Rolle der Funktion $f(x, y)$ in § 2 spielt dann die Funktion $c + f(x, y + c)$.

Sowohl für die Gleichung 1) als auch für die Gleichung 4) führen wir je eine Geraden und Kurvenebene ein; wir haben es daher jetzt mit vier übereinander liegenden Ebenen zu thun. Die Kurvenebenen mögen mit C_1 und C_4, die Geradenebenen mit G_1 und G_4 bezeichnet verden, je nachdem es sich um die Gleichung 1) oder 4) handelt.

Wir ziehen nun die $(0,0)$-Gerade auf G_1 und G_4 und bestimmen auf diesen Geraden die Abschnitte, welche die Punkte umfassen, deren Abszissen absolut nicht grösser als k sind. Diese Abschnitte wollen wir R-Abschnitte auf der $(0,0)_1$-und $(0,0)_4$-Geraden nennen, je nachdem es sich um Gleichung 1) oder Gleichung 4) handelt.

Wir ziehen nun die Senkrechte $x=t$, wobei t willkürlich gewählt ist. Diese Senkrechte mag allen vier Ebenen C_1, G_1, C_4, G_4 angehören. Auf dieser Senkrechten wählen wir den Punkt R mit der Ordinate $\varrho . t$. R möge auf G_1 und G_4 liegen. Es möge zunächst die auf G_1 gelegene Senkrechte betrachtet werden und im besonderen diejenigen beiden Abschnitte derselben, deren Ordinaten den Ungleichungen $q \overline{\overline{<}} y \overline{\overline{<}} q + \frac{2}{p}$ und $-q - \frac{2}{p} \overline{\overline{<}} y \overline{\overline{<}} -q$ genügen. Da diese Strecken in der Richtung der Ordinatenachse liegen und die Längen $\frac{2}{p}$ haben, so kann man zwischen den Endpunkten der ersten einen solchen Punkt P_1 und zwischen den Endpunkten der zweiten einen solchen Punkt P_2 angeben, dass P_1 durch Verschiebung eines Punktes P_1', P_2 durch Verschiebung eines Punktes P_2' erhalten wird, wobei sowohl P_1' als auch P_2' dem k-Abschnitt der $(0,0)_1$-Geraden angehören. Die Abszisse von P_1' sei a_1, diejenige von P_2' sei a_2. Wir bestimmen nun die P_1' und P_2' entsprechenden Punkte Q_1' und Q_2', wobei die Gleichung 1) und die Lösung 34) zu Grunde gelegt werden. Q_1' liegt auf C_1 und hat die Koordinaten $a_1, s(a_1)$; Q_2' liegt auf C_1 und hat die Koordinaten $a_2, s(a_2)$. Dieselbe Verschiebung, welche P_1' in P_1 überführt, wenden wir nun auf Q_1' an und gelangen so zu dem P_1 auf C_1 entspechenden Punkt, den wir mit Q_1 bezeichnen wollen. Dieselbe Verschiebung, welche P_2' in P_2 überführt, lässt Q_2' in einen Punkt auf C_1 übergehen, der P_2 entspricht; wir bezeichnen ihn mit Q_2. Q_1 und Q_2 liegen auf der Senkrechten $x=t$ in derselben Ordnung wie P_1 und P_2. Den R entsprechenden auf C_1 liegenden Punkt bezeichnen wir mit S. Seine Ordinate ist

$$\varrho . t + c + f(t, \varrho . t + c) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 35$$

Da P_1 und P_2 den Punkt R einschliessen, so schliessen Q_1 und Q_2 den Punkt S ein.

Wir wenden uns nun der Gleichung 4) zu. Zunächst werden auf dem k-Abschnitt der $(0,0)_4$-Geraden diejenigen Punkte aufgesucht, welche dieselben

Abszissen wie P_1' und P_2' haben. Es seien dies der Punkt π_1' mit der Abszisse a_1 und der Ordinate $\varrho . a_1$ und ferner der Punkt π_2' mit der Abszisse a_2 und der Ordinate $\varrho . a_2$. Die Entfernungen $P_1'\pi_1'$ und $P_2'\pi_2'$ sind gleich $|\mu - \varrho| . |a_1|$ und $|\mu - \varrho| . |a_2|$. Da $|a_1|$ und $|a_2|$ nicht grösser als k sind, so erhält man mit Berücksichtigung von 33) $P_1'\pi_1' < q$ und $P_2'\pi_2' < q$. Wir unterwerfen nun π_1' derselben Verschiebung, welche P_1' nach P_1 führt und π_2' derselben Verschiebung, welche P_2' nach P_2 führt. Auf diese Weise ergeben sich zwei Punkte auf der Senkrechten $x = t$, welche wir π_1 und π_2 nennen wollen. Offenbar ist $P_1 \pi_1 = P_1'\pi_1'$ und $P_2 \pi_2 = P_2'\pi_2'$ und daher

$$P_1 \pi_1 < q \qquad\qquad P_2 \pi_2 < q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36$$

Der Punkt P_1 liegt, wie wir wissen, auf der Senkrechten $x = t$ vom Punkt R aus nach der Seite der positiven Ordinatenachse und es ist $P_1 R > q$. Daher liegt auch der Punkt π_1 auf $x = t$ vom Punkte R aus in der Richtung der positiven Ordinatenachse. Ebenso ergibt sich, dass π_2 auf $x = t$ von R aus in der Richtung der negativen Ordinatenachse liegt. Die Punkte π_1 und π_2 schliessen den Punkt R ein.

Wir fassen nun diejenigen Punkte auf C_4 ins Auge, welche die Koordinaten $a_1, \sigma(a_1)$ und $a_2, \sigma(a_2)$ besitzen. Diese Punkte nennen wir γ_1' und γ_2'. Wenden wir die Betrachtungen des § 2 auf die Gleichung 4) an, indem wir die Lösung $\sigma(t)$ zu Grunde legen, so sind γ_1', γ_2' Punkte, welche π_1', π_2' entsprechen. Die Entfernungen $Q_1'\gamma_1'$ und $Q_2'\gamma_2'$ sind gleich $|s(a_1) - \sigma(a_1)|$ und $|s(a_2) - \sigma(a_2)|$. Diese Grössen sind jedoch kleiner als r (s. die auf (33) folgenden Zeilen). Wir haben also $Q_1'\gamma_1' < r$ und $Q_2'\gamma_2' < r$. Es möge nun γ_1' derselben Verschiebung unterworfen werden, wie P_1', Q_1', π_1' und γ_2' derselben Verschiebung wie P_2', Q_2', π_2'. Man erhält so auf der Senkrechten $x = t$ zwei Punkte, die wir γ_1 und γ_2 nennen. Da π_1' und γ_1' entspechende Punkte sind, so sind auch π_1 und γ_1 entsprechende Punkte. Dasselbe gilt von π_2 und γ_2. Hierbei wird natürlich die Gleichung 4) und die Lösung $\sigma(t)$ zu Grunde gelegt. Es gilt $Q_1'\gamma_1' = Q_1\gamma_1$ und $Q_2'\gamma_2' = Q_2\gamma_2$ und daher

$$Q_1 \gamma_1 < r \qquad\qquad Q_2 \gamma_2 < r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37$$

Wir bezeichnen nun den Punkt der C_4-Ebene mit den Koordinaten $t, \sigma(t)$ mit Σ. Offenbar sind R und Σ entsprechende Punkte. Da π_1 und π_2 den Punkt R einschliessen und γ_1, γ_2 den Punkten π_1, π_2 entsprechende Punkte sind, so liegt Σ nicht ausserhalb des von γ_1 und γ_2 bestimmten Intervalls der Senkrechten $x = t$.

Indem wir für den Augenblick die Verteilung der erwähnten auf $x = t$ liegenden Punkte auf die vier Ebenen unberücksichtigt lassen und nur die Lage auf der Senkrechten $x = t$ beachten, vergrössern wir das Intervall $Q_1 Q_2$ nach beiden Seiten hin um r. Das so gefundene neue Intervall hat die Ausdehnung $Q_1 Q_2 + 2r$. Der Punkt S liegt zwischen Q_1 und Q_2, also auch zwischen den Endpunkten des neuen Intervalls. Die Entfernungen $Q_1 \gamma_1$ und $Q_2 \gamma_2$ sind kleiner als r, es liegen daher auch γ_1 und γ_2 zwischen den Endpunkten des neuen Intervalls. Da ferner Σ nicht ausserhalb des von γ_1 und γ_2 bestimmten Intervalls gelegen ist, so liegt auch Σ zwischen den Endpunkten des neuen Intervalls. Die Entfernung ΣS ist daher kleiner als $Q_1 Q_2 + 2r$. Die Ordinate von Σ ist $\sigma(t)$, diejenige von S wird durch den Ausdruck 35) dargestellt. *Es unterscheidet sich daher $\sigma(t)$ vom Ausdruck 35) um weniger als $Q_1 Q_2 + 2r$.*

Q_1 und Q_2 sind Punkte auf C_1, welche P_1 und P_2 entsprechen, wenn die Gleichung 1) und die Lösung 34) zu Grunde gelegt werden. Werden die Ordinaten von P_1 und P_2 mit y_1 und y_2 bezeichnet, so hat daher Q_1 die Ordinate

$$y_1 + c + f(t, y_1 + c) \quad \ldots \ldots \quad 38$$

und Q_2 die Ordinate

$$y_2 + c + f(t, y_2 + c) \quad \ldots \ldots \quad 39$$

Für die Entfernung $Q_1 Q_2$ gilt daher

$$Q_1 Q_2 \overline{\overline{<}} |y_2 - y_1| + |f(t, y_2 + c) - f(t, y_1 + c)| \quad \ldots \ldots \quad 40$$

Nach dem über die Lage von P_1 und P_2 oben Gesagten gilt, wenn man 32) berücksichtigt,

$$|y_2 - y_1| < 2q + \frac{4}{p} \overline{\overline{<}} \theta \quad \ldots \ldots \quad 41$$

und daher nach 31)

$$|f(t, y_2 + c) - f(t, y_1 + c)| \overline{\overline{<}} \frac{\vartheta}{2} \quad \ldots \ldots \quad 42$$

Somit ergibt sich

$$Q_1 Q_2 < 2q + \frac{4}{p} + \frac{\vartheta}{2} \quad \ldots \ldots \quad 43$$

$$Q_1 Q_2 + 2r < 2r + 2q + \frac{4}{p} + \frac{\vartheta}{2} < \vartheta \quad \ldots \ldots \quad 44$$

wobei 32) berücksichtigt worden ist. *Es unterscheidet sich daher $\sigma(t)$ vom Ausdruck 35) um weniger als ϑ.* Wir können also schreiben

$$\sigma(t) = \varrho \,.\, t + c + f(t, \varrho \,.\, t + c) + \eta \quad \ldots \ldots \quad 45$$
$$|\eta| < \vartheta$$

Damit ist der in der Einleitung erwähnte Satz bewiesen.