SUR LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

Dans trois mémoires (Acta Mathematica T. 1, p. 1—62: *Sur les groupes fuchsiens;* Acta T. 1, p. 193—294: *Sur les fonctions fuchsiennes;* Acta T. 3, p. 49—92: *Sur les groupes kleinéens*) j'ai étudié les groupes discontinus formés par des substitutions linéaires et les fonctions uniformes qui ne sont pas altérées par les substitutions de ces groupes. Avant de montrer comment ces fonctions et d'autres analogues donnent les intégrales des équations linéaires à coëfficients algébriques, il est nécessaire de résoudre deux problèmes importants:

1°. Étant donnée une équation linéaire à coëfficients algébriques, déterminer son groupe.

2°. Étant donnée une équation linéaire du 2^d ordre dépendant de certains paramètres arbitraires, disposer de ces paramètres de manière que le groupe de l'équation soit fuchsien.

§ 1. *Invariants fondamentaux.*

Occupons-nous d'abord du premier de ces problèmes.

Considérons une équation quelconque à coëfficients algébriques:

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \varphi_{p-1}(x, y)\frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}} + \varphi_{p-2}(x, y)\frac{d^{p-2} v}{dx^{p-2}} + \dots \tag{1}$$

$$\dots + \varphi_1(x, y)\frac{dv}{dx} + \varphi_0(x, y)v = 0.$$

Dans cette équation les φ sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées entre elles par une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Supposons que l'on considère un système fondamental d'intégrales de l'équation (1)

$$v_1, v_2, \ldots, v_p$$

et qu'on fasse décrire à x un contour fermé C tel que y revienne à la même valeur; les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ prendront des valeurs nouvelles $w_1, w_2, \ldots, w_p$ qui seront des fonctions linéaires de leurs valeurs initiales, de telle sorte que l'on ait:

$$w_k = \sum \alpha_{ik} v_i.$$

En d'autres termes, les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ subiront une substitution linéaire

$$S = (v_1, v_2, \ldots, v_p; w_1, w_2, \ldots, w_p)$$

que l'on pourra représenter par le tableau à double entrée des coëfficients:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \ldots & \alpha_{pp} \end{vmatrix}$$

Si l'on opère ainsi pour tous les contours C possibles, on obtiendra un ensemble de substitutions linéaires qui formeront un groupe G. Ce sera *le groupe de l'équation* (1).

On peut toujours supposer que dans l'équation (1), le coëfficient φ_{p-1} est identiquement nul; car si cela n'était pas, on ramènerait au cas où ce coëfficient est nul par une transformation bien simple et bien connue. On en conclut que le déterminant de la substitution S est égal à l'unité; on a donc:

$$\sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn} = 1. \tag{3}$$

La connaissance de l'équation (1) et du contour C ne suffit pas pour déterminer la substitution S. En effet cette substitution dépend en outre du choix du système d'intégrales fondamentales $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Supposons qu'on les remplace par p autres intégrales fondamentales:

$$u_1, u_2, \ldots, u_p.$$

On aura

$$u_k = \sum \beta_{ik} v_i$$

de sorte que la substitution

$$\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_p; u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

sera linéaire. En décrivant un contour C et en partant des intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_p$, on obtiendra alors une substitution linéaire:

$$\sigma^{-1}S\sigma.$$

L'ensemble des substitutions $\sigma^{-1}S\sigma$ formera un groupe que l'on pourra désigner par la notation $\sigma^{-1}G\sigma$ et qui pourra, aussi bien que G, être regardé comme le groupe de l'équation (1), si au lieu d'envisager le système des intégrales v, on envisage celui des intégrales u. On sait que le groupe $\sigma^{-1}G\sigma$ s'appelle le transformé de G par la substitution linéaire σ.

Afin de n'avoir qu'un seul groupe pour l'équation (1) nous ne considérerons pas comme distincts le groupe G et ses transformés par les diverses substitutions linéaires.

Cela posé, cherchons les invariants de la substitution S, c'est à dire les fonctions de ses coëfficients qui demeurent invariables quand on remplace S par $\sigma^{-1}S\sigma$. Formons l'équation:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+t & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+t & \ldots & \alpha_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \ldots & \alpha_{pp}+t \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation, et par conséquent aussi ses coëfficients, ne changeront pas quand on remplacera S par $\sigma^{-1}S\sigma$. Ce seront des invariants de S.

Ces invariants sont au nombre de $p - 1$. En effet l'équation en t (4) est de degré p; elle a donc $p + 1$ coëfficients. Mais le coëfficient de t^p et le terme tout connu sont égaux à 1; il reste donc $p - 1$ invariants. Ces invariants, qui sont des coëfficients de l'équation (4) seront des fonctions entières des α.

Supposons que les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ soient définies de la manière suivante: Au point initial du contour C (pour $x = 0$ par exemple) v_1 est égal à 1 et ses $p - 1$ premières dérivées sont nulles; v_i est nul, ainsi que ses $p - 1$ premières dérivées, à l'exception de la dérivée d'ordre $i - 1$ qui est égale à 1. Soit maintenant w_k^1 ce que devient l'intégrale v_k quand x revient au point initial après avoir décrit le contour C et w_k^i ce que devient sa dérivée d'ordre $i - 1$; on aura:

$$w_k = \sum w_k^i v_i; \quad w_k^i = \alpha_{ik}.$$

Il en résulte que les invariants sont des fonctions rationnelles entières des w_k^i.

Supposons en particulier $p = 2$; l'équation (1) devient:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + v\varphi_2(x, y) = 0$$

et l'équation (4) s'écrit:

$$\begin{vmatrix} w_1^1 + t & w_2^1 \\ w_1^2 & w_2^2 + t \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$t^2 + t(w_1^1 + w_2^2) + 1 = 0.$$

La substitution S admet alors comme invariant unique $w_1^1 + w_2^2$. Si k est son multiplicateur, cet invariant est précisément $k + \frac{1}{k}$.

Si l'on connaissait les invariants de toutes les substitutions S, le groupe G serait complètement déterminé, puisque nous ne le regardons pas comme distinct de ses transformés $\sigma^{-1}G\sigma$. Mais il ne sera pas nécessaire de connaître tous ces invariants, il suffira d'en connaître un certain nombre que nous appellerons *invariants fondamentaux* et dont tous les autres ne seront que des fonctions.

Combien y a-t-il d'invariants fondamentaux? Supposons que le groupe G soit dérivé de n substitutions fondamentales. Les coëfficients de chaque substitution seront au nombre de p^2 mais à cause de la relation (3), il n'en restera que $p^2 - 1$ d'indépendants. Pour les n substitutions cela fait en tout $n(p^2 - 1)$ coëfficients. Mais nous ne considérons pas comme distincts le groupe G et ses divers transformés. Il faut donc retrancher $p^2 - 1$ du nombre précédent et on arrive à cette conclusion que pour déterminer le groupe G, il faut $(n - 1)(p^2 - 1)$ conditions.

Si donc on se donne $(n - 1)(p^2 - 1)$ invariants quelconques (pourvu qu'ils soient indépendants) tous les autres n'en seront que des fonctions. On choisira par exemple pour invariants fondamentaux les invariants de $(n - 1)(p + 1)$ substitutions convenablement choisies.

On peut toujours supposer que l'équation (1) a ses coëfficients rationnels. En effet supposons que cela ne soit pas et que l'équation (2) soit une relation algébrique de degré m de telle façon qu'à chaque valeur de x correspondent m valeurs de y

$$y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}.$$

On pourra toujours tracer dans le plan des x, $m - 1$ contours $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ tels que quand x décrit le contour C_i, y_0 se change en y_i. Soient maintenant:

$$v_1^0, v_2^0, \ldots, v_p^0$$

p intégrales fondamentales de l'équation (1) correspondant à la valeur y_0 de y. Soient

$$v_1^i, v_2^i, \ldots, v_p^i$$

ce que deviennent ces intégrales quand x a décrit le contour C_i. Cela posé les mp fonctions

$$\begin{array}{llll} v_1^0, & v_2^0, & \ldots, & v_p^0 \\ v_1^1, & v_2^1, & \ldots, & v_p^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{m-1}, & v_2^{m-1}, & \ldots, & v_p^{m-1} \end{array}$$

satisferont à une équation (1') linéaire et d'ordre mp dont les coëfficients seront rationnels en x. La connaissance du groupe de (1') suffira pour déterminer le groupe de l'équation (1).

Supposons donc que l'équation (1) ait ses coëfficients rationnels et qu'elle présente $n + 1$ points singuliers, en y comprenant le point ∞ s'il y a lieu et en n'y comprenant pas les points à apparence singulière. Le groupe est alors dérivé de n substitutions fondamentales dont on connaît immédiatement les invariants, à l'aide de l'équation déterminante, pourvu que les intégrales soient régulières; ce sont les substitutions auxquelles on est conduit en faisant décrire à la variable un contour fermé qui n'enveloppe qu'un seul point singulier. Il reste donc à calculer les invariants de $(n - 1)p - 2$ substitutions.

Soit a un point singulier quelconque et soient

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$$

les racines de l'équation déterminante correspondante.

Il y aura dans le voisinage du point a, p intégrales particulièrement remarquables. La k^e d'entre elles sera égale à $(x - a)^{\lambda_k}$ multipliée par une fonction holomorphe. Soient:

$$v_1, v_2, \ldots, v_p$$

ces p intégrales que j'appellerai intégrales canoniques par rapport au point a. Lorsque la variable décrira un cercle infiniment petit autour du point a, ces p intégrales v subiront la substitution linéaire:

$$\begin{vmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & e^{i\lambda_p} \end{vmatrix}$$

que j'appellerai substitution canonique relative au point b.

Soient de même:

$$w_1, w_2, \ldots, w_p$$

les intégrales canoniques par rapport à un second point singulier b.

Joignons les deux points a et b par un chemin quelconque amb. Lorsque la variable partant du point a et décrivant le chemin amb sera parvenue dans le voisinage du point b, les intégrales canoniques $v_1, v_2, \ldots, v_p$ seront devenues des fonctions linéaires des intégrales canoniques $w_1, w_2, \ldots, w_p$, de telle sorte que l'on ait:

$$v_k = \sum \beta_{ik} w_i.$$

La substitution linéaire:

$$S = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{p1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1p} & \beta_{2p} & \cdots & \beta_{pp} \end{vmatrix}$$

s'appellera la *substitution auxiliaire relative au chemin amb*. Si l'on connaît cette substitution auxiliaire on connaîtra aussi une substitution du groupe de l'équation (1), ce sera celle que subissent les intégrales canoniques $v_1, v_2, \ldots, v_p$, quand partant du voisinage du point a, la variable décrit le chemin amb jusque dans le voisinage du point b, décrit ensuite un cercle infiniment petit autour du point b, et revient enfin dans le voisinage du point a par le chemin bma.

Soit Σ la substitution canonique relative au point b. Quand la variable décrira le contour précité, les intégrales v subiront la substitution $S^{-1}\Sigma S$.

Supposons que l'on joigne entre eux les $n + 1$ points singuliers par n chemins quelconques, de façon que l'on puisse circuler entre deux quelconques de ces points singuliers à l'aide de ces n chemins; lorsque l'on connaîtra les substitutions auxiliaires relatives à ces n chemins, le groupe de l'équation (1) sera complètement déterminé.

Soient en effet a l'un des points singuliers et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les n autres. Joignons par exemple le point a à chacun des points b_i par une droite. Soient $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les substitutions canoniques relatives respectivement aux points $a, b_1, b_2, \ldots, b_n$; soient $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les substitutions auxiliaires relatives aux chemins ab_1, ab_2, ..., ab_n. Le groupe de l'équation (1) sera dérivé des $n+1$ substitutions:

$$\Sigma, \quad S_1^{-1}\Sigma_1 S_1, \quad S_2^{-1}\Sigma_2 S_2, \quad \ldots, \quad S_n^{-1}\Sigma_n S_n$$

entre lesquelles il y a d'ailleurs la relation:

$$\Sigma S_1^{-1}\Sigma_1 S_1 S_2^{-1}\Sigma_2 S_2 \ \ldots \ S_n^{-1}\Sigma_n S_n = 1.$$

Supposons maintenant que l'on distingue deux des points singuliers a et b; et soient c_1, c_2, ..., c_{n-1} les $n-1$ autres. Joignons a et b par $n-1$ chemins différents am_1b, am_2b, ..., $am_{n-1}b$ et soient S_1, S_2, ..., S_{n-1} les substitutions auxiliaires correspondantes. Ces $n-1$ chemins partageront le plan en $n-1$ régions; supposons que chacune de ces régions contienne un point singulier c_i et un seul. Le groupe de l'équation (1) sera entièrement déterminé. Si en effet Σ et Σ' sont les substitutions canoniques relatives aux deux points a et b, le groupe sera dérivé des n substitutions:

$$\Sigma, \quad S_1^{-1}S_2, \quad S_2^{-1}S_3, \quad \ldots, \quad S_{n-2}^{-1}S_{n-1}, \quad S_{n-1}^{-1}S_1.$$

Supposons que le point c_i soit contenu dans la région limitée par les deux chemins am_ib et $am_{i+1}b$, décrivons un contour situé tout entier dans cette région et enveloppant le point c_i; quand la variable décrira ce contour, les intégrales canoniques relatives au point a subiront la substitution:

$$S_i^{-1}S_{i+1}.$$

On voit que pour déterminer le groupe de l'équation (1) il suffit de connaître, soit les invariants fondamentaux, soit certaines substitutions auxiliaires.

§ 2. *Calcul numérique des invariants fondamentaux.*

Les invariants fondamentaux qui définissent complètement le groupe d'une équation linéaire sont évidemment des fonctions des coëfficients de cette équation; d'où le problème suivant qui se pose tout naturellement: déterminer ces invariants en fonctions de ces coëfficients. Mais en réalité ce problème est double: on peut se proposer de calculer numériquement ces invariants quand on a affaire à une équation numérique donnée; mais il n'est pas non plus indigne d'intérêt d'étudier, au point de vue de la théorie des fonctions, la façon dont varient les invariants quand on fait varier les coëfficients. Les méthodes propres au calcul numérique ne nous apprennent rien sur la nature de ces fonctions, pendant que les formules les plus instructives à ce dernier point de vue conduiraient à des calculs pénibles si on voulait les traduire en nombres.

Au point de vue du calcul numérique, un grand nombre de méthodes ont déjà été proposées, parmi lesquelles je citerai celle de M. Fuchs (tome 75, Journal de Crelle) et celle de M. Hamburger (tome 83, Journal de Crelle).

La méthode de M. Fuchs consiste à distinguer deux des $n+1$ points singuliers, a et b, comme à la fin du paragraphe précédent, puis à diviser le plan en $n-1$ régions par $n-1$ chemins am_1b, am_2b, ..., $am_{n-1}b$, de façon que chacune de ces $n-1$ régions contienne un des $n-1$ autres points singuliers c_1, c_2, ..., c_{n-1} et un seul. Le savant géomètre d'Heidelberg donne ensuite un développement des intégrales canoniques relatives au point a et ce développement est valable dans une certaine région R_a. De même les intégrales canoniques relatives au point b sont susceptibles d'un développement valable dans une région R_b. Les deux régions R_a et R_b ont $n-1$ parties communes P_1, P_2, ..., P_{n-1}. On peut d'ailleurs tracer le chemin am_ib de telle façon qu'il reste constamment intérieur à l'une des régions R_a et R_b ou à toutes deux à la fois, et qu'il traverse la région P_i. Il suffit alors de comparer les deux développements de M. Fuchs pour une valeur de x quelconque intérieure à P_i (région dans laquelle les deux développements sont valables à la fois) pour pouvoir calculer les coëfficients de la substitution auxiliaire relative au chemin am_ib. Le groupe de l'équation (1) est ainsi entièrement déterminé.

On peut varier cette méthode à l'infini; supposons en effet que nous joignions deux points singuliers quelconques a et b par un chemin quelconque amb et que nous cherchions la substitution auxiliaire relative à ce chemin. Traçons autour des deux points a et b deux régions quelconques R_a et R_b telles 1° que la première contienne l'unique point singulier a et la seconde l'unique point singulier b; 2° qu'elles aient une partie commune P; 3° que le chemin amb reste constamment intérieur au moins à l'une des régions R_a et R_b et traverse la région P. Supposons que deux fonctions $f_a(x)$ (et $f_b(x)$) soient telles que quand x reste intérieur à la région R_a (ou à la région R_b) la fonction f_a (ou la fonction f_b) aient constamment leur module inférieur à 1, de telle sorte que ces deux fonctions donnent respectivement la représentation conforme du cercle de rayon 1 et de centre 0 sur la région R_a et sur la région R_b. Je suppose de plus:

$$f_a(a) = 0, \qquad f_b(b) = 0.$$

Les intégrales canoniques relatives au point a se développeront suivant les puissances de $f_a(x)$. Ce développement dont les coëfficients se calculent par récurrence sera valable dans toute la région R_a. De même les intégrales canoniques relatives au point b seront dans toute la région R_b développables suivant les puissances de $f_b(x)$. Il suffira de comparer les deux développements pour un point de la région P (où ils sont valables à la fois) pour calculer les coëfficients de la substitution auxiliaire cherchée.

On choisira les régions R_a et R_b de telle façon que les fonctions f_a et f_b soient aussi simples que possible. On pourra prendre par exemple un rectangle, ou un fuseau limité par deux arcs de cercle qui se coupent, ou la portion du plan comprise entre deux droites parallèles.

Voici maintenant en quoi consiste la méthode de M. Hamburger.

Soit 0 un des points singuliers et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les n autres, rangés par ordre de module croissant; soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ leurs modules; construisons les deux cercles qui ont pour centre l'origine et pour rayon ρ_i et ρ_{i+1}. Considérons un contour fermé C compris tout entier dans la région annulaire limitée par ces deux cercles. Soit A un point de ce contour C; supposons par exemple:

$$A = \sqrt{\rho_i \rho_{i+1}}.$$

Soit $v_1, v_2, \ldots, v_p$ un système fondamental d'intégrales dans le voisinage du point A. Soient $w_1, w_2, \ldots, w_p$ ce que deviennent ces intégrales quand on revient au point A après avoir décrit le contour C. Les intégrales v peuvent se développer suivant les puissances croissantes de

$$lx - lA$$

et si on a:

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A > 2\pi$$

les développements sont encore valables quand on fait

$$\mathrm{l}x - \mathrm{l}A = 2i\pi.$$

En substituant alors $2i\pi$ à la place de $\mathrm{l}x - \mathrm{l}A$ dans les développements des intégrales v et de leurs dérivées, on aura les valeurs des intégrales w et de leurs dérivées, ce qui suffit pour déterminer la substitution du groupe de l'équation (1), qui correspond au contour C.

La méthode de M. HAMBURGER peut être aisément étendue au cas où

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A < 2\pi.$$

Nous poserons pour abréger

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A = \frac{\pi}{2\alpha},$$

puis nous développerons les intégrales v suivant les puissances de

$$\frac{x^{i\alpha} - A^{i\alpha}}{x^{i\alpha} + A^{i\alpha}} = z.$$

Le développement sera encore convergent pour

$$x = Ae^{2i\pi}$$

ou:

$$z = \frac{e^{-2\pi\alpha} - 1}{e^{-2\pi\alpha} + 1}.$$

En remplaçant dans les développements des intégrales v et de leurs dérivées z par cette valeur, on aura les valeurs des intégrales w et de leurs dérivées et par conséquent la substitution qui correspond au contour C.

Il suffit de réfléchir un instant à la nature de ces méthodes pour comprendre qu'on peut les varier à l'infini. Le calculateur devra se guider dans son choix d'après la convergence plus ou moins rapide des séries employées. Or cette convergence dépend avant tout de la position relative des $n + 1$ points singuliers. C'est donc cette position qui déterminera le choix d'une méthode.

Mais aucune des méthodes ainsi proposées ne nous apprendrait rien sur les propriétés des invariants fondamentaux considérés comme fonctions des coëfficients et étudiés au point de vue de la théorie des fonctions. C'est cette étude que nous allons aborder dans le paragraphe suivant.

§ 3. *Propriétés des invariants fondamentaux.*

Écrivons l'équation (1) sous la forme suivante:

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum_{k=0}^{k=p-2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{h} \frac{A_{hki}}{(x-a_i)^h} \frac{d^k v}{dx^k}. \tag{1}$$

Pour écrire ainsi cette équation nous avons décomposé en éléments simples les coëfficients des diverses dérivées de v, qui par hypothèse sont des fonctions rationnelles de x. Nous avons supposé de plus que ces fonctions rationnelles n'admettaient pas de partie entière, car il est toujours permis de faire cette hypothèse.

Les invariants fondamentaux que nous cherchons seront des fonctions des a_i et des A_{hki}. Considérons d'abord les a_i comme des constantes et les A comme seules variables. Je dis que *les invariants seront des fonctions entières des A.*

Pour le faire voir il suffit de démontrer ce qui suit: Écrivons l'équation (1) sous la forme suivante:

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \alpha \sum \varphi_k \frac{d^k v}{dx^k} + \beta \sum \psi_k \frac{d^k v}{dx^k}. \tag{1'}$$

Les φ_k et les ψ_k sont des fonctions rationnelles de x que je suppose entièrement déterminées; α et β sont des paramètres que je vais regarder comme variables. Il suffit, dis-je, de démontrer que les invariants sont des fonctions entières de α et de β.

Considérons un point quelconque a du plan et décrivons de ce point comme centre un cercle K assez petit pour ne contenir aucun point singulier. Soient v_1, v_2, ..., v_p, p intégrales assujetties aux conditions suivantes:

$$\text{Pour } x = a, \quad v_1 = 1, \text{ ses } p - 1 \text{ premières dérivées sont nulles,}$$
$$v_i = 0, \text{ ses } p - 1 \text{ premières dérivées sont nulles,}$$

excepté la dérivée d'ordre $i - 1$ qui est égale à 1.

Les intégrales v_1, v_2, ..., v_p sont développables à l'intérieur du cercle K suivant les puissances croissantes de $x - a$. Le coëfficient de $(x - a)^m$ est un polynôme d'ordre $m - p + 1$ en α et en β. On a donc un développement de ces intégrales suivant les puissances de $x - a$, de α et de β. Il reste à faire voir que ce développement est convergent.

Si on regarde v comme fonction de x, de α et de β, l'équation (1) peut être regardée comme une équation aux différences partielles et le théorème de M^me de Kowalevsky (J. de Crelle, T. 80) appliqué à cette équation montre que v peut être développé suivant les puissances de $x - a$, de $\alpha - \alpha_0$ et de $\beta - \beta_0$, pourvu que x soit intérieur au cercle K et que les modules $\alpha - \alpha_0$ et $\beta - \beta_0$ soient suffisamment petits. Ainsi v est une fonction holomorphe de α et de β dans le voisinage d'un point quelconque α_0, β_0; c'est donc une fonction entière de α et de β et le développement de v suivant les puissances de $x - a$, de α et de β est convergent quels que soient α et β pourvu que x soit intérieur au cercle K.

Il faut maintenant démontrer que si x est regardé comme une constante, v est encore fonction entière de α et de β, *quand même x est extérieur au cercle K.* Pour définir complètement la fonction v dans ce cas, il ne suffit pas de se donner la valeur de x, il faut encore connaître le chemin *amx* par lequel cette variable a atteint cette valeur, en partant du point a.

Supposons pour fixer les idées que b soit un point intérieur à K, que K' soit un cercle ayant son centre en b et ne contenant aucun point singulier, que x soit intérieur au cercle K' et extérieur à K, enfin que le chemin *amx* soit tout entier intérieur à la figure formée par l'ensemble des deux cercles K et K'.

Soient u_1, u_2, ..., u_p un système fondamental d'intégrales défini comme il suit: u_i devra satisfaire pour $x = b$ aux mêmes conditions auxquelles était assujettie v_i pour $x = a$.

Soit v_i^1 la valeur de v_i pour $x = b$, v_i^{k+1} la valeur de sa dérivée k^e. On aura:

$$v_i = \sum_{k=1}^{k=p} v_i^k u_k .$$

Or les v_i^k sont des fonctions entières de α et de β puisque le point b est intérieur au cercle K, et les u_k sont aussi des fonctions entières de α et de β puisque le point x est intérieur au cercle K'. Donc les v_i sont aussi des fonctions entières de α et de β.

Le raisonnement serait le même si au lieu d'avoir à considérer seulement deux cercles de convergence K et K', il était nécessaire d'en envisager plusieurs.

Supposons maintenant que le chemin amx se réduise à un contour fermé C. Les valeurs des intégrales v_i et de leurs dérivées ne sont alors autre chose que ce que nous avons appelé w_i^k dans le § 1. Or les invariants fondamentaux sont des polynômes entiers par rapport aux w_i^k, ce seront donc des fonctions entières de α et de β.

Ainsi quand on regarde les a_i comme des constantes, les invariants sont des fonctions entières des A_{hki} et peuvent par conséquent être développées suivant les puissances de ces quantités A_{hki}. Considérons un quelconque des coëfficients de ces développements, ce sera évidemment une fonction des a_i et c'est la nature de cette fonction qu'il nous reste à étudier. Il est aisé de voir que ces fonctions s'expriment à l'aide de quadratures successives. Écrivons en effet l'équation (1) sous la forme (1') et considérons le développement de l'intégrale v_i suivant les puissances de α et de β:

$$v_i = \sum v_{imn} \alpha^m \beta^n .$$

Je dis qu'on peut obtenir le coefficient v_{imn} par de simples quadratures. Je suppose en effet que cela soit vrai pour $v_{i.m-1.n}$ et $v_{i.m.n-1}$; cela sera vrai aussi pour v_{imn} car on a identiquement:

$$\frac{d^p v_{imn}}{dx^p} = \sum \varphi_k \frac{d^k v_{i.m-1.n}}{dx^k} + \sum \psi_k \frac{d^k v_{i.m.n-1}}{dx^k}$$

et la dérivée p^e de v_{imn} s'exprimant à l'aide de quadratures successives, il en sera de même de la fonction v_{imn} elle-même.

Soit maintenant w_{imn}^k le coëfficient de $\alpha^m\beta^n$ dans le développement de w_i^k. Ce coëfficient s'exprimera pour la même raison par des quadratures, et il en sera de même des coëfficients qui entrent dans le développement des invariants, car ce sont des polynômes entiers par rapport aux w_{imn}^k. On peut d'ailleurs pousser plus loin l'étude du développement de la fonction v_i. À cet effet posons:

$$A(x,\ \alpha_1) = \int_0^x \frac{dx}{x - a_1}$$

$$A(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2) = \int_0^x \frac{dx A(x,\ a_1)}{x - a_2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{q-1},\ \alpha_q) = \int_0^x \frac{dx A(x,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{q-1})}{x - a_q}.$$

Remarquons maintenant qu'on peut mettre l'équation (1) sous la forme de p équations simultanées du 1^er^ ordre. Si les intégrales sont régulières dans le voisinage de chacun des points singuliers, nous pourrons introduire p variables simultanées $u_1 = v,\ u_2,\ \ldots,\ u_p$ et remplacer l'équation (1) par les p équations simultanées

$$\frac{du_i}{dx} = \sum \varphi_{ik} u_k.$$

Les φ_{ik} seront des fonctions rationnelles de la forme suivante

$$(2) \qquad \varphi_{ik} = \sum \frac{A_{i.k.\lambda}}{x - a_\lambda},$$

les $A_{i.k.\lambda}$ étant des constantes. Supposons par exemple $p = 2$, l'équation (1) s'écrira:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P}{Q^2} v;$$

Q sera le produit $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ et P sera un polynôme en x de degré $2n - 2$. Nous pourrons toujours trouver deux polynômes entiers A et C de degré $n - 1$ en x et satisfaisant identiquement à la relation:

$$C + A^2 + A'Q - AQ' = P.$$

Posons alors $v = u_1$ et introduisons une variable auxiliaire u_2. Nous pourrons écrire

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{A}{Q} u_1 + \frac{1}{Q} u_2$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{C}{Q} u_1 + \frac{Q' - A}{Q} u_2.$$

Les équations sont bien de la forme (2).

Il est aisé de voir maintenant que si on développe l'intégrale v_i suivant les puissances des $A_{ik\lambda}$, le coëfficient d'un terme quelconque sera une somme de fonctions telles que A où les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ ne seront autre chose que les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se succédant dans un ordre quelconque et chacun d'eux pouvant d'ailleurs être répété un nombre quelconque de fois.

§ 4. *Fonctions inverses.*

Nous avons jusqu'ici étudié les invariants fondamentaux comme fonctions des coëfficients de l'équation (1); mais si au contraire on regarde les coëfficients comme des fonctions des invariants fondamentaux, on est conduit à des transcendantes intéressantes qui jouent par rapport aux équations linéaires le même rôle que la fonction modulaire par rapport aux intégrales algébriques.

Mais ici il importe de faire une remarque; reprenons l'équation

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum \varphi_k \frac{d^k v}{dx^k} \tag{1}$$

et considérons les infinis des coëfficients φ_k; ils seront de deux sortes: les uns seront des points singuliers proprement dits et quand la variable x décrira un contour fermé autour d'un de ces points, les intégrales subiront une substitution linéaire; les autres seront de simples pôles des intégrales ou bien encore si a est un pareil point, toutes les intégrales se mettront sous la forme

$$(x-a)^{\lambda}\varphi(x),$$

λ étant une constante qui est la même pour toutes les intégrales et $\varphi(x)$ étant holomorphe. Il en résulte que quand x décrit un contour fermé autour du point a toutes les intégrales sont multipliées par un même facteur et que leurs rapports reprennent leurs valeurs primitives. Ces points s'appelleront des *points à apparence singulière*. Pour qu'un infini des coëfficients φ_k soit un point à apparence singulière, il faut $\frac{(p+2)(p-1)}{2}$ conditions.

Supposons donc une équation de la forme (1) admettant n points singuliers outre le point ∞, savoir $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et q points à apparence singulière $b_1, b_2, \ldots, b_q$.

Je suppose que les intégrales soient partout régulières. L'équation (1) s'écrira alors:

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum_{k=0}^{k=p-2} \frac{P_k}{Q^{p-k}} \frac{d^k v}{dx^k}.$$

Nous posons:

$$Q = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_q)$$

et P_k est un polynôme d'ordre

$$(p-k)(n+q-1).$$

L'équation (1) contient alors

$$\frac{p(p+1)}{2}(n+q) - \frac{p(p-1)}{2}$$

paramètres, à savoir:

1°. Les $n+q$ infinis $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_q$.

2°. Les

$$\frac{(n+q-1)(p+2)(p-1)}{2} + p - 1$$

coëfficients des polynômes P_k.

Mais nous avons

$$q\frac{(p+2)(p-1)}{2}$$

conditions exprimant que les points b sont à apparence singulière. Il reste donc

$$n\frac{p(p+1)}{2}+q-\frac{p(p-1)}{2}$$

paramètres indépendants.

Remarquons de plus qu'on peut toujours supposer

$$a_1=0,\quad a_2=1$$

car si cela n'était pas, on ferait un changement linéaire de variable. Il faut donc encore de ce chef, retrancher deux paramètres.

Si nous supposons de plus qu'il n'y a pas de points à apparence singulière, il restera enfin

$$n\frac{p(p+1)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}-2 \tag{2}$$

paramètres. Mais le groupe G de l'équation (1) est dérivé de n substitutions et nous avons vu au § 1 qu'un pareil groupe G, si on ne le regarde pas comme distinct de ses transformés par les diverses substitutions linéaires, dépend de

$$(n-1)(p^2-1) \tag{3}$$

invariants fondamentaux.

Si $p=2$ les expressions (2) et (3) se réduisent toutes deux à $3n-3$. Le nombre des paramètres de l'équation est alors égal au nombre des paramètres du groupe; d'où la conséquence suivante:

On peut *en général* trouver une équation du 2^d ordre, sans points à apparence singulière qui admette un groupe donné.

Je veux dire par là que pour que cette équation existe, il n'est pas nécessaire qu'il y ait aucune relation entre les invariants du groupe et que si on doit leur imposer certaines conditions, ce ne sont que des conditions d'inégalité. D'ailleurs on pourra trouver une infinité d'équations du 2^d ordre qui auront des points à apparence singulière et qui admettront un même groupe.

Supposons maintenant $p > 2$ et bien entendu $n > 1$. On voit aisément que l'expression (2) est toujours plus petite que l'expression (3); d'où cette conséquence:

On ne peut pas en général trouver une équation d'ordre supérieur au secoud, sans points à apparence singulière et qui admette un groupe donné.

Il faut donc en général, si l'on veut construire une équation ayant un groupe donné, lui donner, des points à apparence singulière.

C'est pour éviter ces points qui compliqueraient notablement les résultats et les démonstrations que je me bornerai ici au cas des équations du 2^d ordre. Je supposerai donc que j'ai affaire à une équation du 2^d ordre sans point à apparence singulière.

Considérons sur la sphère les $n + 1$ points singuliers

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1} = \infty$$

et joignons les par n coupures

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_n a_{n+1}.$$

Considérons deux intégrales quelconques de l'équation (1) et leur rapport z; quand x parcourra la sphère sans franchir les coupures, z parcourra une certaine région R. Cette région sera analogue aux polygones générateurs des groupes fuchsiens et kleinéens, mais elle pourra se recouvrir partiellement elle-même; elle aura $2n$ côtés:

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n\alpha_{n+1}$$

et

$$\alpha_1\beta_2, \quad \beta_2\beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_n\alpha_{n+1}$$

répondant aux n coupures:

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_n a_{n+1}.$$

Les côtés $\beta_i\beta_{i+1}$ et $\alpha_i\alpha_{i+1}$ seront conjugués et on passera de l'un à l'autre par une substitution linéaire S_i. Les sommets α_1 et α_{n+1} formeront chacun un cycle. Il y aura $n - 1$ autres cycles formés respectivement des sommets α_i et β_i. La somme des angles α_i et β_i est alors égale à

$$2\pi(1 - 2\lambda_i)$$

λ_i étant la plus petite racine de l'équation déterminante relative au point singulier a_i. De même les angles α_1 et α_{n+1} sont égaux à

$$2\pi(1 - 2\lambda_1) \quad \text{et} \quad 2\pi(1 - 2\lambda_{n+1}).$$

Quand on connait les valeurs de

$$(4) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$$

les substitutions S_i sont entièrement déterminées et comme ce sont les substitutions fondamentales du groupe G, les invariants fondamentaux de ce groupe s'exprimeront aisément en fonctions des quantités (4). Nous regarderons donc les coëfficients de l'équation (1) comme des fonctions des quantités (4).

La région R n'est pas entièrement déterminée quand on se donne les quantités (4); en effet on peut faire varier arbitrairement la forme des côtés $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\ldots$, $\alpha_n\alpha_{n+1}$ et il s'en suit des variations correspondantes des côtés conjugués $\alpha_1\beta_2$, $\beta_2\beta_3$, $\ldots$, $\beta_n\alpha_{n+1}$. Toutefois toutes les régions R obtenues de la sorte sont *équivalentes,* au sens donné à ce mot au § 3 du *mémoire sur les groupes kleinéens* (Acta Mathematica, T. 3, p. 63). On pourra d'ailleurs tracer les coupures

$$a_1a_2, \ldots, a_na_{n+1}$$

de telle façon que les côtés

$$\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_n\alpha_{n+1}$$

aient telle forme que l'on veut.

Il résulte de là, que s'il existait deux équations (1) conduisant à un même système de valeurs des quantités (4), on pourrait toujours tracer les coupures de telle façon que la région R soit la même pour l'une et pour l'autre équation.

Imaginons maintenant des fonctions de z jouissant des propriétés suivantes: 1° elles seront uniformes quand z parcourra la région R; il est clair que si la région R se recouvre partiellement elle-même, à deux points z_0 et z_1 de cette région pourra correspondre un même point du plan; dans ce cas la fonction pourra prendre deux valeurs différentes aux points z_0 et z_1; 2° elles reprendront la même valeur en deux points correspondants du périmètre de R; 3° elles n'auront d'autre singularité que des pôles (et des points singuliers logarithmiques dans le cas où quelques-uns des angles α ou β sont nuls).

Il est clair que toutes ces fonctions s'exprimeront rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles. (Cf. SCHOTTKY, J. de CRELLE, T. 83 et *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta Mathematica, T. 1, p. 228.)

Si l'on regarde maintenant x comme une fonction de z, ce sera précisément une des fonctions dont nous venons de parler, et il est clair que toutes les autres seront rationnelles en x.

Supposons maintenant qu'il y ait deux équations (1) qui conduisent à un même système de valeurs des quantités (4) et par conséquent à une même région R. Soient x et x_1 les variables correspondantes que nous regarderons comme des fonctions de z. D'après ce qui précède, x sera rationnel en x_1 et x_1 en x et par conséquent on aura entre ces variables une relation de la forme:

$$Axx_1 + Bx + Cx_1 + D = 0.$$

Soient maintenant a_i et a_i^1 les valeurs de x et de x_1 qui correspondent à la valeur $z = \alpha_i$. Ce seront des points singuliers des deux équations (1) et par hypothèse on aura:

$$a_1 = a_1^1 = 0, \qquad a_2 = a_2^1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_{n+1}^1 = \infty.$$

C'est à dire qu'on aura:

$$x = x_1$$

pour $z = \alpha_1$, $z = \alpha_2$, $z = \alpha_{n+1}$.

Il en résulte que x sera identiquement égal à x_1. Les deux équations (1) dont nous avions supposé l'existence seront donc identiques.

Il résulte de là que quand les quantités (4) sont entièrement déterminées il en est de même de l'équation (1) et que *les coëfficients de cette équation sont des fonctions uniformes des quantités* (4).

Ainsi nous sommes conduits à une nouvelle classe de fonctions uniformes de plusieurs variables. Ces fonctions demeurent invariables quand on fait subir aux quantités (4) certaines substitutions dont je vais dire quelques mots.

Reprenons pour cela le polygone R défini plus haut et appelons S_k la substitution linéaire qui change $\beta_k \beta_{k+1}$ en $\alpha_k \alpha_{k+1}$. Convenons en outre de poser pour plus de symétrie dans les notations:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_{i+n+1} = \alpha_i, \quad \beta_{i+n+1} = \beta_i.$$

La substitution suivante:

$$(5) \qquad \left| \begin{matrix} \alpha_i, & \beta_{k+1-i} S_k \\ \beta_i, & \alpha_{k+1-i} \\ \lambda_i, & \lambda_{k+1-i} \end{matrix} \right|$$

appliquée aux quantités (4) laissera inaltérée la fonction dont nous nous occupons. Nous avons, grâce au tableau (5) les nouvelles valeurs des quantités α, β et λ en fonctions des anciennes, car les coëfficients de la substitution linéaire S_k s'obtiennent aisément en fonctions des α, des β et des λ.

§ 5. *Énoncé du deuxième problème.*

Nous avons montré dans les quatre paragraphes précédents comment on peut résoudre le problème suivant:

Trouver le groupe d'une équation donnée, soit au point de vue du calcul numérique, soit au point de vue de la théorie des fonctions.

Voici le second problème que j'ai à résoudre avant d'aller plus loin.

On donne une équation du second ordre:

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v$$

ou φ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique

$$(2) \qquad \psi(x, y) = 0.$$

On suppose que la fonction φ dépend d'un certain nombre de paramètres et on demande de disposer de ces paramètres de telle manière que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales. Nous dirons alors pour abréger que l'équation (1) est *fuchsienne.*

Nous ne nous occuperons dans ce qui va suivre que des fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental (1ère, 2e et 6e familles). Nous laissons donc systématiquement de côté les fonctions fuchsiennes qui existent dans tout le plan.

Pour que l'équation (1) soit fuchsienne, il faut qu'elle remplisse d'une part certaines conditions algébriques, d'autre part un certain nombre de conditions transcendantes.

Commençons par énoncer les conditions algébriques.

Les points singuliers de l'éqation (1) sont de deux sortes:

1°. Les points où y cesse d'être une fonction holomorphe de x et les points où x ou y cessent d'être finis.

2°. Les points singuliers proprement dits.

Il n'y a pas à s'inquiéter des premiers, car on peut poser:

$$x = \theta(x', y'), \qquad y = \theta_1(x', y')$$

θ et θ_1 étant des fonctions rationnelles, et s'arranger de telle façon que dans le voisinage du point considéré, les nouvelles variables x' et y' restent finies et que y' soit holomorphe en x'.

Quant aux points singuliers proprement dits, à chacun d'eux correspond une équation déterminante et *la différence des racines de cette équation doit être nulle ou une partie aliquote de l'unité.* Ce sont là les conditions algébriques qu'il s'agissait d'énoncer et quand elles seront remplies, je dirai que l'équation (1) est *normale.*

Considérons d'abord deux équations normales:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v, \qquad \frac{d^2v}{dx_1^2} = \varphi_1(x_1)v$$

où nous supposerons que φ et φ_1 sont des fonctions rationnelles de x et de x_1. Si l'on peut passer de la première de ces équations à la seconde en posant

$$x = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}$$

nous ne regarderons pas ces deux équations comme distinctes.

Considérons maintenant une équation normale plus générale:

(1) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad (2) \quad \psi(x, y) = 0$$

et posons:

(3) $$x' = \theta(x, y), \qquad y' = \theta_1(x, y).$$

Si on laisse de côté certains cas exceptionnels, on pourra tirer des équations (2) et (3) x et y en fonctions rationnelles de x' et de y'. Je supposerai que ces cas exceptionnels ne se présentent pas.

On trouvera alors

(1') $$\frac{d^2v}{dx'^2} = \varphi'(x', y')v \qquad (2') \quad \psi'(x', y') = 0.$$

Je ne regarderai pas comme distinctes les équations (1) et (1').

Je dirai que deux équations

(1) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad (2) \quad \psi(x, y) = 0$$

(1') $$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v \qquad (2') \quad \psi_1(x, y) = 0$$

appartiennent au même *type* si les deux relations (2) et (2') sont identiques et si les points singuliers des équations (1) et (1') sont les mêmes ainsi que les équations déterminantes relatives à chacun d'eux.

Il va sans dire que si une équation

(1'') $$\frac{d^2v}{dx'^2} = \varphi_1'(x', y')v \qquad (2'') \quad \psi_1'(x', y') = 0$$

ne doit pas être regardée comme distincte de (1') en vertu de la convention faite plus haut, je dirai encore que (1) et (1'') appartiennent au même type.

Voici le problème qu'il s'agit de résoudre.

1°. *Reconnaître si parmi les équations d'un type donné, il y a une équation fuchsienne.*

2°. *Trouver cette équation si elle existe.*

Mais il faut d'abord faire une distinction et classer les types d'équations normales en types fuchsiens, elliptiques et rationnels.

Supposons que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation (1); cette fonction admettra un polygone générateur R_0 qui aura $2n$ côtés et $2n$ sommets de la première sorte. La somme des angles du polygone devra être plus petite que

$$\pi(2n - 2).$$

Soit q le genre de la relation (2); p le nombre des points singuliers de l'équation (1); $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ces points singuliers; α_i la différence des racines de l'équation déterminante relative au point a_i.

Si $p > 0$, les sommets de R_0 se répartiront en cycles; on aura:

$$n = 2q + p - 1$$

et la somme des angles sera égale à

$$2\pi \sum \alpha_i .$$

On doit donc avoir l'inégalité:

$$\sum \alpha_i < 2q + p - 2 . \tag{4}$$

Si $p = 0$, les sommets de R_0 formeront un seul cycle et la somme des angles sera 2π. On aura:

$$n = 2q$$

d'où l'inégalité

$$q > 1 . \tag{4'}$$

Si les inégalités (4) ou (4') sont satisfaites, le type considéré sera un type *fuchsien*.

Supposons maintenant que x soit fonction doublement périodique du rapport des intégrales de (1), on aura les égalités

$$\sum \alpha_i = 2q + p - 2 , \tag{5}$$

ou bien

$$q = 1, \qquad p = 0 . \tag{5'}$$

Le type sera alors *elliptique*.

Voici d'ailleurs l'énumération des types elliptiques: (¹)

$$q = 1 \qquad p = 0$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{3}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{4} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{6}$$

$$q = 0 \qquad p = 4 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}.$$

Supposons enfin que x soit fonction rationnelle de z, on aura les inégalités

$$\Sigma \alpha_i > 2q + p - 2, \tag{6}$$

l'hypothèse $p = q = 0$ devant être rejetée.

Le type est alors *rationnel*. Voici l'énumération des types rationnels, d'ailleurs bien connus:

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{n}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{3}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{5}.$$

Cela posé, les équations d'un même type dépendent d'un certain nombre P de paramètres arbitraires, de telle sorte que ce type se compose de ∞^P équations distinctes.

(¹) Si $q = 0$, on ne peut supposer $p = 0$ ni $p = 1$. Si on suppose $p = 2$, on est amené à l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Av}{(x-a)^2}.$$

Ces P paramètres étant complexes, correspondent à $2P$ paramètres réels. Or le nombre de ces paramètres réels est précisément celui des conditions transcendantes auxquelles doit satisfaire l'équation (1) (qui est supposée appartenir au type donné) pour que x soit fonction fuchsienne de z (ou bien fonction doublement périodique, ou rationnelle dans le cas d'un type elliptique ou rationnel).

(Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta Mathematica, T. 1, p. 234, 257, 262 et 272.)

Si au lieu de conditions transcendantes, il s'agissait de conditions algébriques, on pourrait conclure de là que parmi les équations d'un même type, il y en a toujours une qui est fuchsienne. Mais ici cette conclusion n'est pas légitime et une démonstration spéciale est nécessaire. C'est cette démonstration qui fait l'objet principal du problème qui nous occupe.

Il est aisé d'en comprendre l'importance.

Supposons en effet que l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad\qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

soit fuchsienne. Soient

$$(x = a_1, \ y = b_1), \ (x = a_2, \ y = b_2), \ \ldots, \ (x = a_p, \ y = b_p)$$

les points singuliers de l'équation (1) et $\frac{1}{k_i}$ la différence des racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i). k_i sera un nombre entier positif ou bien infini.

Considérons une fonction de x et de y n'admettant d'autres points singuliers que les points

$$(a_1, b_1), \ (a_2, b_2), \ \ldots, \ (a_p, b_p)$$

et cela de telle façon qu'elle revienne à sa valeur primitive quand le point analytique (x, y) a décrit k_i tours autour du point singulier (a_i, b_i). Cette dernière condition doit être supprimée quand $k_i = \infty$.

Cette fonction sera uniforme en z.

Il en sera ainsi des intégrales de l'équation:

$$(7) \qquad \frac{d\,w}{dx^q} = \sum \varphi_k(x, y)\frac{d^kw}{dx^k}$$

si les fonctions φ_k sont rationnelles en x et y et s'il n'y a d'autres points singuliers que

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$$

de telle sorte que toutes les racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i) soient des multiples de $\frac{1}{k_i}$ (cette dernière condition étant supprimée quand $k_i = \infty$).

Il en sera de même de toute fonction rationnelle de x et de y et d'un grand nombre de fonctions algébriques.

Par conséquent, si on démontre que dans tout type fuchsien il y a une équation fuchsienne, on aura fait voir:

1°. Qu'étant donnée une équation linéaire quelconque à coëfficients algébriques, la variable et les intégrales peuvent s'exprimer en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire z.

2°. Qu'étant donnée une courbe algébrique quelconque, les coordonnées x et y d'un point de cette courbe s'expriment en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire z.

§ 6. *Subordination des types.*

Considérons deux équations normales:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \tag{1}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v. \tag{1'}$$

Les coëfficients φ et φ_1 sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y qui sont liées entre elles par une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0 \tag{2}$$

que *je suppose être la même pour les deux équations* (1) *et* (1').

Je suppose que l'équation (1) admette p points singuliers:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$$

de telle façon que la différence des racines de l'équation déterminante relative à (a_i, b_i) soit $\frac{1}{k_i}$.

Je suppose que l'équation (1′) admette les mêmes points singuliers $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$ que l'équation (1) et en outre q autres points singuliers:

$$(a_{p+1}, b_{p+1}), (a_{p+2}, b_{p+2}), \ldots, (a_{p+q}, b_{p+q})$$

et cela de telle sorte que la différence des racines de l'équation déterminante relative à (a_i, b_i) soit $\frac{1}{N_i}$.

Je suppose enfin que N_1 soit divisible par k_1, N_2 par $k_2, \ldots, N_p$ par k_p. Si k_i est infini, N_i devra être aussi infini. Si $N_i = \infty$, la condition de divisibilité sera regardée comme remplie, quel que soit k_i.

Je dirai alors que le type dont fait partie l'équation (1′) est subordonné au type dont fait partie l'équation (1).

Soit un type fuchsien T' subordonné à un autre type fuchsien T. Je suppose que chacun d'eux contienne une équation fuchsienne; le premier l'équation E' et le second l'équation E. Soit z le rapport des intégrales de l'équation E' et t celui des intégrales de l'équation E. Il est aisé de voir que t est une fonction uniforme de z. Cette fonction n'existe évidemment que quand z est intérieur au cercle fondamental. De son côté t ne peut prendre aucune valeur extérieure à ce cercle; t prend au contraire une infinité de fois toute valeur intérieure au cercle fondamental.

Soient encore $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$ les points singuliers du type T et $\frac{1}{k_i}$ la différence des racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i). Soit F une fonction du point analytique (x, y) qui ne présente d'autre point singulier que les points $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$ et de telle façon qu'après k_i tours autour du point (a_i, b_i) la fonction reprenne sa valeur primitive. F sera par exemple une intégrale de l'équation linéaire (7) du paragraphe précédent. F sera une fonction uniforme de t et par conséquent de z.

Mais supposons qu'on ne sache pas si le type T contient une équation fuchsienne, qu'on ne puisse pas, par conséquent, démontrer l'existence de t, mais qu'au contraire on sache que T' contient une équation fuchsienne et que la fonction z existe. Il est aisé de voir que F est encore une fonction uniforme de z.

Ainsi pour démontrer le résultat suivant: *Les intégrales d'une équation linéaire à coëfficients rationnels en x et y peuvent s'exprimer ainsi que x et y en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire,* il n'est pas nécessaire de faire voir que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne; il suffit de montrer que parmi les types subordonnés à un type fuchsien donné, il en est toujours un qui contient une équation fuchsienne.

De là l'importance de cette notion de la subordination des types.

En particulier, considérons une équation E à coëfficients rationnels et soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

ses points singuliers. Soit k_i un nombre entier tel que toutes les racines de l'équation déterminante relative au point a_i soient des multiples de $\frac{1}{k_i}$. S'il n'existe pas de pareil nombre entier, on fera $k_i = \infty$.

Au lieu d'envisager le type T qui admet les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de telle façon que les différences des racines des équations déterminantes soient $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$, on pourra envisager un type T' subordonné à T. On supposera par exemple que T' admette outre les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, p autres points singuliers quelconques $b_1, b_2, \ldots, b_p$, et que chacune des $p + n$ équations déterminantes correspondant à ces divers points singuliers ait une racine double.

Supposons que ce type T' contienne une équation fuchsienne E'; alors x sera une fonction fuchsienne du rapport z des intégrales de cette équation. La propriété caractéristique de cette fonction fuchsienne c'est de ne pouvoir prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_p$, et, si elle existe, il est évident que les intégrales de l'équation E seront des fonctions uniformes de z.

Ainsi il suffit de démontrer que l'on peut toujours trouver une fonction fuchsienne qui ne puisse pas prendre n valeurs données $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pour faire voir que toutes les équations linéaires à coëfficients rationnels peuvent s'intégrer en n'employant que certaines fonctions uniformes que je me réserve d'ailleurs d'étudier dans un mémoire ultérieur.

Il en est de même des équations à coëfficients algébriques, car on sait que l'intégration d'une équation à coëfficients algébriques se ramène à celle d'une équation d'ordre plus élevé à coefficients rationnels.

§ 7. *Lemme fondamental.*

Aucun type fuchsien ne peut contenir plusieurs équations fuchsiennes distinctes.

Supposons en effet qu'un type T contienne deux équations fuchsiennes E et E'; soit z le rapport de deux intégrales u_1 et u_2 de l'équation E; soit t le rapport de deux intégrales u'_1 et u'_2 de l'équation E'.

On sait que z ne peut prendre d'autres valeurs que celles qui sont intérieures à un certain cercle fondamental. On peut toujours choisir les intégrales u_1, u_2, u'_1 et u'_2 de telle façon: 1° que le cercle fondamental relatif à z, de même que le cercle fondamental relatif à t, ait pour centre le point o et pour rayon l'unité; 2° que les deux variables z et t s'annullent en même temps, pour $x = a$ par exemple; 3° que pour une autre valeur de x, pour $x = b$, l'argument de z soit égal à celui de t.

Il est clair que z sera fonction uniforme de t, et réciproquement que t sera fonction uniforme de z. Il résulte alors des hypothèses faites plus haut que $\frac{t}{z}$ considéré, soit comme fonction de z, soit comme fonction de t, n'existe pas à l'extérieur du cercle fondamental et qu'à l'intérieur de ce cercle, ce rapport reste holomorphe et ne peut s'annuller.

Considérons par exemple $\frac{t}{z}$ comme fonction de z. Posons:

$$z = \xi + i\eta$$

$$u = \log \operatorname{mod} \frac{t}{z};$$

u sera une fonction de ξ et de η, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental et satisfaisant à l'équation:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2} = 0. \tag{1}$$

Considérons dans le plan des z un cercle C concentrique au cercle fondamental et ayant pour rayon $r < 1$.

Le long de ce cercle, t est constamment de module inférieur à l'unité, et par conséquent on a:

$$u < \log \operatorname{mod} \frac{1}{r}. \tag{2}$$

Mais toute fonction holomorphe satisfaisant à l'équation (1) ne peut devenir, à l'intérieur d'un contour quelconque, supérieure à la plus grande des valeurs qu'elle prend le long de ce contour. L'inégalité (2) subsiste donc pour tous les points intérieurs au cercle C.

Mais je puis prendre le rayon de ce cercle C aussi voisin que je veux de l'unité. Quand je fais tendre r vers l'unité, le second membre de l'inégalité (2) tend vers 0. Il résulte de là qu'à l'intérieur du cercle fondamental, u ne peut prendre aucune valeur positive; d'où:

$$\operatorname{mod} \frac{t}{z} \leqq 1.$$

Or rien ne distingue t de z; on peut donc écrire aussi:

$$\operatorname{mod} \frac{z}{t} \leqq 1$$

d'où

$$\operatorname{mod} z = \operatorname{mod} t$$

d'où

$$t = ze^{i\theta}$$

θ étant une constante.

Mais, par hypothèse, t et z ont même argument pour $z = b$; on a donc

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad t = z.$$

Ainsi les deux équations E et E' ne sont pas distinctes.

C. Q. F. D.

Ce lemme important a été énoncé d'abord par moi dans une communication faite à l'Académie des Sciences de Paris (17 Octobre 1881, *Comptes Rendus*, T. 93, page 582). Il l'a été depuis par M. Klein

(Mathematische Annalen, Bd XXI, p. 209). M. KLEIN l'étendait d'ailleurs au cas des fonctions qui existent dans un domaine limité par une infinité de cercles. (Cf. *Mémoire sur les groupes kleinéens,* § 9, Acta Mathematica, T. 3, p. 83). Mais je ne dirai rien ici de cette extension qui ne me serait pas utile pour mon objet.

§ 8. *Premier aperçu de la méthode de continuité.*

M. KLEIN et moi, nous avons été conduits indépendamment l'un de l'autre à une méthode qui permet de démontrer que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne et que l'on peut appeler méthode de continuité. Nous avons fait de cette méthode différentes applications. (Voir Comptes Rendus, T. 92, p. 1200 et 1486; KLEIN, Mathematische Annalen, Bd XIX p. 565, XX p. 49, et XXI p. 211; POINCARÉ, Comptes Rendus, T. 94, p. 1038.) Voici quels sont les principes fondamentaux de cette méthode.

Supposons d'abord une variable réelle x et une fonction réelle y de cette variable; je suppose que pour toutes les valeurs finies ou infinies de x, il y ait une valeur de y et une seule, et que cette valeur soit une fonction analytique de x, (holomorphe ou méromorphe); que y ne puisse pas reprendre deux fois la même valeur. On pourra évidemment en conclure que y prend une fois et une seule toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Supposons au contraire que la variable x, par sa nature même, ne puisse varier qu'entre deux limites a et b; que pour toutes les valeurs comprises entre a et b, on sache que y est une fonction analytique de x, mais que pour ces limites elles-mêmes, on ne sache rien; que y ne puisse jamais reprendre deux fois la même valeur. Quand x tendra vers a, y tendra vers une certaine limite A et quand x tendra vers b, y tendra vers B. On sait alors seulement que y est constamment croissant ou décroissant et peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre A et B.

Au lieu d'une seule variable indépendante, considérons-en n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et n fonctions réelles de ces n variables, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Je suppose que pour toutes les valeurs des x, les y soient des fonctions analytiques et que ces fonctions ne puissent jamais reprendre deux fois le même système de valeurs. Cela suffit pour que l'on soit certain que les y peuvent prendre tous les systèmes de valeurs possibles. Soit en particulier $n = 2$. Regardons x_1 et x_2 comme définissant la position d'un point sur une sphère S; y_1 et y_2 comme définissant la position d'un point sur une sphère S'. A chaque point de la sphère S correspond un point et un seul de la sphère S' et à aucun point de S' ne peut correspondre plus d'un point de S. Cela suffit pour qu'à tout point de S' corresponde un point de S.

Il en est encore de même si S et S' au lieu d'être deux sphères sont deux surfaces fermées quelconques. Mais supposons maintenant que S n'est pas une surface fermée, mais une surface ouverte, présentant une sorte de bord, de frontière. Supposons que les coordonnées de chaque point m' de S' soient des fonctions analytiques des coordonnées du point correspondant m de S, lorsque ce point m n'est pas sur le bord de cette surface, mais que nous ne sachions rien lorsque le point m vient sur le bord de S. Il ne sera pas possible alors de conclure des hypothèses faites plus haut qu'à tout point de S' correspond un point de S.

La même chose arrivera, lorsque S et S' seront regardées comme des surfaces situées dans l'espace à plus de trois dimensions, seront des *Mannigfaltigkeiten* (multiplicités) à plus de deux dimensions, comme disent les Allemands.

Supposons toujours qu'à tout point m de S corresponde un point m' et un seul de S' de telle façon que les coordonnées de m' soient des fonctions analytiques de celles de m, à moins que m ne vienne sur le bord de la multiplicité S, dans le cas où cette multiplicité en aurait un. Supposons qu'à aucun point de S' ne puisse correspondre plus d'un point de S. Si S est une *multiplicité fermée* nous serons certains qu'à tout point de S' correspondra un point de S. Si au contraire S est une *multiplicité ouverte* présentant un *bord,* une *frontière,* nous ne pouvons rien affirmer.

Appliquons maintenant ce qui précède au problème qui nous occupe.

Nous dirons que deux types:

(1) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v$$ (2) $$\psi(x, y) = 0$$

(1') $$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v$$ (2') $$\psi_1(x, y) = 0$$

appartiennent à la même classe lorsque les deux relations (2) et (2') seront de même genre, et lorsque les deux équations (1) et (1') auront le même nombre de points singuliers, de telle façon que ces points singuliers se correspondent chacun à chacun et que les équations déterminantes relatives à deux points singuliers correspondants soient les mêmes.

Cela posé, à chaque type d'une même classe C', nous ferons correspondre un point d'une certaine multiplicité S'.

De même nous dirons que deux groupes fuchsiens (des 1ère et 2e ou 6e familles) appartiennent à une même classe lorsque le polygone générateur aura le même nombre de côtés, et lorsque les sommets se répartiront en un même nombre de cycles, de telle façon que ces cycles se correspondent chacun à chacun et que la somme des angles de deux cycles correspondants soit la même.

À chaque classe C' de types correspond une classe C de groupes, de telle façon que si une équation fuchsienne appartient à la classe C', son groupe appartienne à la classe C.

À chaque groupe de la classe C, faisons correspondre un point d'une multiplicité S.

À chaque point de S correspondra un point et un seul de S'; il suffit pour le voir de se reporter à la théorie des fonctions fuchsiennes qui montre qu'à chaque groupe fuchsien correspond une équation fuchsienne.

De plus, en vertu du lemme fondamental, à aucun point de S' ne peut correspondre plus d'un point de S.

Il resterait à faire voir qu'à tout point de S' correspond un point de S.

Pour cela, d'après ce qui précède, il suffit que S soit une multiplicité *fermée,* qu'elle n'ait pas de *bord.* *Cela n'est nullement évident a priori.*

En effet, parmi les groupes d'une classe, il y en a une infinité qui pourraient être des *groupes limites,* correspondant à des points du *bord* de la multiplicité S. Ce sont les groupes dont le polygone générateur présente un ou plusieurs côtés infinitésimaux. On voit en effet qu'on peut toujours construire un polygone générateur dont un des côtés soit aussi petit que l'on veut. Cela ne suffit pas d'ailleurs pour que S soit une multiplicité ouverte; car, en vertu du § 9 du *Mémoire sur les groupes fuchsiens,* un même groupe peut être engendré par une infinité de polygones équivalents et il est possible que parmi ces polygones, on puisse toujours en choisir un dont tous les côtés soient supérieurs à une limite donnée.

Ainsi, il n'est pas évident que S est une multiplicité fermée et il est nécessaire de le démontrer, par une discussion spéciale à chaque cas particulier, avant d'affirmer qu'à tout point de S' correspond un point de S. C'est ce que M. Klein a négligé de faire. *Il y a là une difficulté dont on ne peut triompher en quelques lignes.*

§ 9. *Deuxième lemme.*

Supposons que nous fassions varier notre polygone R_0 d'une façon continue et de telle manière que les éléments de ce polygone soient des fonctions continues d'un certain paramètre t. Envisageons maintenant l'équation fuchsienne que l'on peut former à l'aide de R_0 et le type T auquel appartient cette équation. Soit:

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad\qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0 \text{ (de genre } p)$$

cette équation fuchsienne. Le type T sera défini quand on connaîtra les $3p - 3$ modules de la relation (2) et les points singuliers de l'équation (1); ces quantités s'appelleront les paramètres du type.

J'ai fait voir au § 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* que les fonctions θ que l'on peut former à l'aide de R_0 sont des fonctions continues de t et l'on peut en conclure que les paramètres du type T sont aussi des fonctions continues de t, ce qui est fort important au point de vue de l'application de la méthode de continuité.

Je vais pousser la chose plus loin. Je suppose que lorsque t tend vers 0, deux ou plusieurs côtés décroissent indéfiniment. (Il s'agit ici de leur longueur géométrique et non de leur L.) Je supposerai par exemple que deux côtés conjugués, ou que $2q$ côtés, conjugués deux à deux, deviennent infiniment petits, de telle façon que ceux des côtés de R_0 qui restent finis soient encore conjugués deux à deux. R_0 est alors un de ces polygones limites que nous étudierons en détail un peu plus loin.

Passons à la limite, et faisons $t = 0$, de telle façon que les $2q$ côtés infinitésimaux de R_0 s'annullent absolument et que R_0 se réduise par conséquent à un autre polygone R'_0 n'ayant que $2n - 2q$ côtés conjugués deux à deux. Considérons le groupe G engendré par R_0. À chaque paire de côtés conjugués de R_0 correspond une substitution de G, c'est celle qui change l'un de ces deux côtés en son conjugué, et le groupe G est précisément dérivé des n substitutions qui correspondent ainsi aux divers côtés de R_0. Parmi ces substitutions nous en distinguerons $n - q$ qui correspondront aux $n - q$ paires de côtés de R_0 qui restent finis. Le groupe dérivé de ces $n - q$ substitutions s'appellera G'' et sera contenu dans G. Soit G' le groupe engendré par R'_0; il sera isomorphe à G'' puisqu'à chacun des côtés *finis* de R_0 correspond un côté de R'_0. Lorsque t tend vers 0, le transformé de R_0 par une substitution quelconque de G'', tend vers le transformé de R'_0 par la substitution correspondante de G'.

Nous appellerons A la portion du cercle fondamental qui est occupée par les transformés de R_0 par les substitutions de G'' et B celle qui est occupée par les transformés de R_0 par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G''.

Le polygone R_0 est par hypothèse de la 1ère famille, ou du 1er ordre de la 2e ou de la 6e familles; à la limite, le polygone R'_0 appartiendra à la 2e ou à la 6e familles, mais il pourra appartenir au 1er ou au 2d ordre de ces familles, c'est à dire qu'il pourra ne pas admettre ou admettre des cycles hyperboliques.

Dans le premier cas, R_0 sera de la 1ère catégorie, dans le second de la 2e catégorie.

Dans le premier cas, les transformés de R'_0 par les substitutions de G' remplissent tout le cercle fondamental (cf. *Mémoire sur les groupes fuchsiens* § 6). Par conséquent, lorsque t tendra vers 0, la superficie totale de B tendra vers 0, et en même temps la plus petite distance de B à l'origine tendra vers 1, c'est à dire vers le rayon du cercle fondamental.

Dans le second cas, ce sera l'inverse et la superficie de B ne tendra pas vers 0.

Supposons donc que R_0 soit de la 1ère catégorie. Dans ce cas R'_0 engendrera une équation fuchsienne

$$(1') \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi'(x, y)v \qquad\qquad (2') \qquad \psi'(x, y) = 0$$

qui appartiendra à un type T' moins compliqué que T. Supposons pour fixer les idées $q = 1$. Dans ce cas R'_0 aura deux côtés de moins que R_0. Il arrivera alors, ou bien que l'équation (1') aura un point singulier de moins que l'équation (1), ou bien que la relation (2') sera de genre $p - 1$ au lieu d'être de genre p et que l'équation (1') admettra deux points singuliers de plus que l'équation (1). (Vide infra page 262.)

Supposons par exemple, pour fixer les idées que ce soit le premier cas qui se présente. Je dis que les modules de la relation (2) vont tendre vers ceux de la relation (2') et que les points singuliers de l'équation (1) vont tendre vers ceux de l'équation (1') de telle façon que parmi les points singuliers de l'équation (1) il y en ait deux qui tendent vers un seul et même point singulier de l'équation (1').

Je vais montrer d'abord que les fonctions thétafuchsiennes engendrées par R_0 tendent vers celles qui sont engendrées par R'_0.

Considérons les séries:

$$\theta(z, H) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

$$\theta'(z, H) = \sum H\left(\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)(\gamma'_i z + \delta'_i)^{-2m}$$

où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle quelconque et où $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ et $\left(z, \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)$ désignent respectivement une substitution quelconque du groupe G et du groupe G'. Je dis que

$$\lim_{t=0} \theta(z) = \theta'(z).$$

On peut trouver un contour C entourant le point z et assez petit pour qu'il soit intérieur à R_0 et à R'_0 et qu'il reste intérieur à R_0 pour toutes les valeurs suffisamment petites de t. On appellera σ la S de ce contour, λ la L du plus grand arc de cercle orthogonal au cercle fondamental qui puisse être tracé à l'intérieur de C; on appellera r une quantité quelconque, A la L de la droite $0z$ et on posera comme dans le § 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (Acta Mathematica, T. 1, p. 206)

$$K = \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda + 2mr}$$

Appelons S_n et S'_n la somme des termes des séries θ et θ' qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ et $\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}$ situés à l'intérieur du cercle M dont le centre est l'origine et dont le R est $(n - 1)r$. Soit:

$$\theta = S_n + R_n, \qquad \theta' = S'_n + R'_n.$$

Soit h la plus grande valeur que puisse prendre le module de H pour des transformés du point z; nous aurons:

$$\operatorname{mod} R_n < \frac{Khe^{n(1-m)r}}{1 - e^{(1-m)r}}, \qquad \operatorname{mod} R'_n < \frac{Khe^{n(1-m)r}}{1 - e^{(1-m)r}}.$$

Nous pourrons donc prendre n assez grand pour que:

$$\operatorname{mod} R_n < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \operatorname{mod} R'_n < \frac{\varepsilon}{3}$$

ε étant une quantité donnée.

Le nombre n est désormais fixe et par conséquent le cercle M.

Nous pourrons maintenant prendre τ assez petit pour que t variant de τ à o, aucun des transformés de z ne sorte du cercle M ou n'entre dans ce cercle et pour que les divers transformés de z par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G'' soient tous extérieurs à ce cercle.

Alors t variant de τ à o, S_n sera une fonction continue de t puisque c'est une somme d'un nombre fini de fonctions continues de t; pour $t = 0$, S_n se réduira à S'_n; on pourra donc prendre t assez petit pour que:

$$\operatorname{mod} (S'_n - S_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura alors:

$$\operatorname{mod} (\theta - \theta') < \varepsilon$$

quelque petit que soit ε.

C. Q. F. D.

Les fonctions fuchsiennes x et y qui entrent dans l'équation (1) peuvent être choisies arbitrairement; nous poserons

$$x = \frac{\theta(z, H)}{\theta(z, H_1)}, \qquad y = \frac{\theta(z, H_2)}{\theta(z, H_1)}$$

H, H_1 et H_2 étant trois fonctions rationnelles arbitrairement choisies. Faisons de même:

$$x_1 = \frac{\theta'(z,\ H)}{\theta'(z,\ H_1)}, \qquad y_1 = \frac{\theta'(z,\ H_2)}{\theta'(z,\ H_1)}$$

il viendra

$$x_1 = \lim_{t=0} x, \qquad y_1 = \lim_{t=0} y.$$

On voit donc qu'à la limite, la relation qui lie x et y se réduira à celle qui lie x_1 et y_1 et que par conséquent les modules de la relation (2) se réduisent à ceux de la relation (2').

De même nous aurons:

$$\lim\left[\frac{1}{2}\frac{x'''x'}{(x')^4} - \frac{3}{4}\frac{(x'')^2}{(x')^4}\right] = \frac{1}{2}\frac{x_1'''x_1'}{(x_1')^4} - \frac{3}{4}\frac{(x_1'')^2}{(x_1')^4}$$

x', x'', ... désignant les dérivées première, seconde, ... de x par rapport à z.

Il résulte de là:

$$\lim \varphi(x,\ y) = \varphi'(x_1,\ y_1)$$

et par conséquent les points singuliers de l'équation (1) tendront vers ceux de (1').

C. Q. F. D.

Rien de tout cela ne reste vrai si le polygone R_0 est de la 2^e^ catégorie.

Dans le cas où le polygone R_0 est symétrique, la chose peut se démontrer d'une manière toute différente.

Supposons par exemple un quadrilatère curviligne $\alpha\beta\gamma\delta$, dont les côtés soient des arcs de cercle orthogonaux au cercle fondamental, et dont les angles soient des parties aliquotes de π; je les appelle α, β, γ, δ. Si nous prenons le symétrique de ce quadrilatère par rapport au côté $\beta\gamma$, nous obtiendrons, en adjoignant ces deux quadrilatères l'un à l'autre, un hexagone qui engendrera un système de fonctions fuchsiennes. Mais on peut aussi engendrer ces mêmes fonctions en cherchant à faire la représentation conforme du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ sur un cercle de centre o et de rayon I. Si z est un point intérieur au quadrilatère et x le point correspondant du cercle, x est une fonction fuchsienne de z.

Supposons maintenant que le côté $\gamma\delta$ devienne infiniment petit, puis s'annulle, le quadrilatère se réduira à un triangle $\alpha\beta\gamma$, dont le sommet γ sera sur le cercle fondamental et de telle façon que l'angle $\alpha\gamma\beta$ soit nul. Considérons donc le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$; je suppose que le côté $\gamma\delta$ soit déjà très petit, mais ne soit pas encore nul. On peut mener une infinité de cercles $\beta_i\gamma_i$ tangents en γ_i au cercle $\beta\gamma$ et coupant en β_i le cercle $\alpha\beta$ sous un angle égal à β. Menons un de ces cercles $\beta_1\gamma_1$, de telle façon que le triangle $\alpha\beta_1\gamma_1$ soit tout entier intérieur au quadrilatère, mais soit d'ailleurs aussi grand que possible. Menons encore un autre de ces cercles $\beta_2\gamma_2$, de telle façon que le quadrilatère soit tout entier intérieur au triangle $\alpha\beta_2\gamma_2$, mais que ce triangle soit d'ailleurs aussi petit que possible.

Soit z_0 un point intérieur à $\alpha\beta_1\gamma_1$. Supposons qu'on fasse sur le cercle de rayon I et de centre O, la représentation conforme de $\alpha\beta_1\gamma_1$, puis de $\alpha\beta\gamma\delta$, puis de $\alpha\beta_2\gamma_2$, de telle façon qu'au point z_0 corresponde le centre O. Soient respectivement x_1, x et x_2 les points du cercle qui correspondent à un point z de $\alpha\beta_1\gamma_1$, ou de $\alpha\beta\gamma\delta$, ou de $\alpha\beta_2\gamma_2$. On aura:

$$\operatorname{mod} x_1 > \operatorname{mod} x > \operatorname{mod} x_2.$$

Lorsque le côté $\gamma\delta$ s'annullera tout à fait les deux triangles $\alpha\beta_1\gamma_1$ et $\alpha\beta_2\gamma_2$ se confondront et il est aisé de montrer qu'on aura:

$$\lim \operatorname{mod} x_1 = \lim \operatorname{mod} x_2$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod} x_1 = \lim \operatorname{mod} x$$

$$\lim x_1 = \lim x.$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration dont je n'ai d'ailleurs donné qu'un aperçu ne s'appliquerait pas au cas où R_0 ne serait pas symétrique.

§ 10. *Types symétriques.*

Je vais appliquer d'abord à un cas simple la méthode de continuité. Soit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v$$

une équation telle que φ soit rationnel en x, que les points singuliers soient tous réels et que l'équation déterminante relative à chacun d'eux ait une racine double. Le type T dont fait partie cette équation sera dit symétrique, parce que si ce type contient une équation fuchsienne, le polygone générateur correspondant est symétrique.

Je dis que tout type symétrique contient une équation fuchsienne.

Si le nombre des points singuliers est égal à 3, on peut toujours, par un changement linéaire de variable, supposer que ces points sont précisément 0, 1 et ∞; alors on sait qu'il existe une équation fuchsienne dans le type T, car cette équation est précisément celle qui définit le carré du module d'une transcendante elliptique en fonction du rapport des périodes.

Supposons maintenant que le type T admette 4 points singuliers; on peut toujours par un changement linéaire de variable supposer que ces quatre points sont

$$0, \ 1, \ a \ \text{et} \ \infty$$

a étant une quantité réelle positive plus grande que 1.

Soient maintenant α, β, γ, δ quatre points situés sur le cercle fondamental, et je suppose qu'en parcourant ce cercle, on les rencontre précisément dans l'ordre α, β, γ, δ. Décrivons quatre cercles, orthogonaux au cercle fondamental, et passant respectivement par les points α et β, β et γ, γ et δ, δ et α. Nous aurons ainsi un certain quadrilatère. Construisons le quadrilatère symétrique du premier par rapport au cercle $\delta\alpha$ par exemple; l'ensemble de ces deux quadrilatères formera un polygone R_0 qui engendrera un groupe fuchsien symétrique de genre 0 et de la 2^e^ famille que j'appelle G.

Formons les fonctions fuchsiennes correspondantes et en particulier la fonction:

$$x = f(z)$$

à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Pour achever de définir cette dernière fonction nous écrirons:

$$f(\alpha) = 0, \qquad f(\beta) = 1, \qquad f(\delta) = \infty$$

et nous poserons:

$$f(\gamma) = c.$$

c sera réel positif et plus grand que 1. Alors z sera défini en fonction de x comme le rapport de deux intégrales de l'équation fuchsienne:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v$$

où φ est rationnel en x, où les points singuliers seront 0, 1, c et ∞ et de telle sorte que chaque équation déterminante ait une racine double.

Pour faire voir que T contient une équation fuchsienne, il suffit donc de montrer qu'on peut choisir α, β, γ, δ de telle sorte que

$$c = a.$$

Supposons donc que les points α, β, δ restent fixes et qu'on fasse décrire au point γ, l'arc $\beta\delta$ du cercle fondamental, depuis le point β jusqu'au point δ.

Voici ce qui se passera:

1°. Les séries thétafuchsiennes définies au § 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* seront des fonctions continues de γ, car elles sont uniformément convergentes, comme je l'ai fait voir dans ce paragraphe.

2°. Il en sera donc de même des fonctions fuchsiennes elles-mêmes et par conséquent de c.

3°. En vertu du lemme fondamental, c ne pourra prendre deux fois la même valeur.

4°. Lorsque le point γ se rapprochera indéfiniment du point β, le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ se réduira au triangle $\alpha\beta\delta$, et le polygone R_0 se réduira au quadrilatère R'_0 formé de ce triangle et du triangle symétrique par rapport au cercle $\alpha\delta$. Le second lemme nous apprend donc que c tendra vers l'unité.

5°. Pour la même raison quand γ tendra vers δ, c tendra vers l'infini.

En résumé, quand γ variera en suivant le cercle fondamental depuis β jusqu'à δ, c croîtra d'une façon continue depuis 1 jusqu'à l'infini. c prendra donc la valeur a qui est comprise entre 1 et l'infini.

C. Q. F. D.

Supposons maintenant un type T admettant non plus 4, mais 5 points singuliers. On pourra toujours supposer par un changement linéaire de variables que ces 5 points singuliers sont:

$$0, \; 1, \; a, \; b, \; \infty$$

avec les inégalités

$$1 < a < b \tag{1}$$

a et b étant des quantités réelles.

Si nous regardons a et b comme les coordonnées d'un point dans le plan, nous verrons qu'à chaque type T correspond un point d'une région plane limitée par les deux droites $a = 1$, $a = b$ et par la droite $b = \infty$. Cette région n'est autre chose que la multiplicité S' définie dans le paragraphe 8. On voit qu'avec notre manière de considérer les choses, cette multiplicité est *ouverte*.

Prenons maintenant sur le cercle fondamental cinq points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ se succédant sur ce cercle précisément dans cet ordre. Il en résulte que l'on a:

$$\arg \alpha > \arg \beta > \arg \gamma > \arg \delta > \arg \varepsilon.$$

Construisons le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, puis le pentagone symétrique par rapport au côté $\alpha\varepsilon$ et nous aurons un polygone R_0 qui engendrera un groupe fuchsien G. Parmi les fonctions fuchsiennes correspondant à ce groupe, appelons $x = f(z)$ celle à l'aide de laquelle les autres s'expriment rationnellement et qui de plus est telle que

$$f(\alpha) = 0, \qquad f(\beta) = 1, \qquad f(\varepsilon) = \infty.$$

Les quantités

$$f(\gamma) = a, \qquad f(\delta) = b$$

sont réelles positives et telles que

$$1 < a < b.$$

Lorsque $\gamma - \beta$ tendra vers 0, a tendra vers 1; lorsque $\gamma - \delta$ tendra vers 0, $a - b$ tendra vers 0; enfin lorsque $\delta - \varepsilon$ tendra vers 0, b croîtra indéfiniment. De plus lorsque α, β et ε restant fixes, on fera varier γ et δ, a et b seront des fonctions continues de γ et de δ.

Si l'on considère les arguments de γ et de δ comme les coordonnées d'un point dans un plan, ces arguments étant soumis aux inégalités:

$$\arg\beta < \arg\gamma < \arg\delta < \arg\varepsilon$$

le point correspondant sera situé à l'intérieur d'un triangle limité par les trois droites

$$\arg\beta = \arg\gamma, \qquad \arg\gamma = \arg\delta, \qquad \arg\delta = \arg\varepsilon.$$

Ce triangle ne sera autre chose que la multiplicité S qui sera ouverte comme la multiplicité S'.

Cela posé, à chaque point de S correspond un point et un seul de S'; à chaque point de S' ne peut correspondre plus d'un point de S. À chaque point de la périphérie de S correspond un point de la périphérie de S'. Il résulte de là nécessairement qu'à tout point de S' correspond un point de S.

En d'autres termes, on peut toujours choisir le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, de telle façon que a et b aient des valeurs données, c'est à dire que tout type fuchsien symétrique n'admettant que 5 points singuliers contient une équation fuchsienne.

La démonstration est absolument la même pour un plus grand nombre de points singuliers; d'où cette conclusion:

Tout type fuchsien symétrique contient une équation fuchsienne.

On voit que dans le cas particulier des types symétriques l'application de la méthode de continuité ne présente aucune difficulté.

On peut tirer de ce qui précède une conclusion importante.

Considérons une fonction y de x, qui ne peut cesser d'être holomorphe en x que si x prend une des n valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$; supposons de plus que ces n valeurs sont réelles.

Considérons le type fuchsien symétrique qui admet les n points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il contient une équation fuchsienne et dans cette équation la variable est une fonction fuchsienne du rapport z des intégrales:

$$x = f(z).$$

Cette fonction n'existe pas à l'extérieur du cercle fondamental; si nous supposons $a_n = \infty$ elle est holomorphe à l'intérieur de ce cercle et elle ne peut prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Il résulte de là qu'à l'intérieur du cercle fondamental y est holomorphe en z.

Donc *si y est une fonction de x admettant seulement un nombre fini de points singuliers qui soient tous réels, on peut trouver une variable z telle que y et x exprimées en fonctions de z n'existent pas à l'extérieur du cercle fondamental et soient holomorphes à l'intérieur de ce cercle.*

On peut supposer en particulier que y est une fonction algébrique, ou l'intégrale d'une équation linéaire à coëfficients algébriques, telle que tous les points singuliers soient réels.

§ 11. *Généralisation du théorème précédent.*

Nous n'avons encore appliqué la méthode de continuité qu'aux types symétriques, mais avant d'aborder l'étude de types plus compliqués, nous allons tirer du résultat obtenu tout le parti possible. Soit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v$$

une équation telle que $\varphi(x)$ soit rationnel en x, que les points singuliers soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mais ne soient pas tous réels et que chaque équation déterminante ait une racine double.

Appelons T le type dont fait partie cette équation.

Je démontrerai plus loin que ce type contient une équation fuchsienne, mais ce n'est pas cela que j'ai en vue pour le moment; je veux faire voir qu'il y a un type subordonné à T qui contient une équation fuchsienne; en d'autres termes, qu'il existe une fonction fuchsienne, qui ne peut prendre à l'intérieur du cercle fondamental aucune des valeurs $a_1, a_1, \ldots, a_n$ et qui de plus ne peut prendre non plus certaines autres valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Nous nous regardons donc comme libres d'adjoindre au tableau des quantités a, telles quantités qu'il nous conviendra d'y ajouter. Nous pouvons toujours supposer que si le tableau des nombres a contient une quantité imaginaire, il contient aussi sa conjuguée; car si cette conjuguée n'y était pas contenue, on l'y adjoindrait.

Je suppose que le théorème soit vrai quand le tableau des quantités a ne contient que $q - 1$ couples de valeurs imaginaires et je vais faire voir qu'il est vrai quand ce tableau contient q semblables couples. Cela suffira, car dans le paragraphe précédent, j'ai démontré le théorème pour le cas où toutes les quantités a sont réelles.

Supposons donc que le tableau des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ contient $n - 2q$ quantités réelles

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_{n-2q}$$

et $2q$ quantités imaginaires conjuguées deux à deux

$$(2) \qquad a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2q}.$$

Posons:

$$\varphi(x) = (x - a'_1)(x - a'_2) \ldots (x - a'_{2q});$$

$\varphi(x)$ sera un polynôme entier à coëfficients réels. L'équation:

$$\varphi'(x) = 0$$

aura au moins une racine réelle, et par conséquent au plus $q - 1$ couples de racines imaginaires. Soient

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2q-1}$$

les racines de cette équation. Posons:

$$n - 2q = p, \qquad 2q - 1 = m.$$

Parmi les quantités suivantes

$$(4) \qquad 0, \ \varphi(a_1), \ \varphi(a_2), \ \ldots, \ \varphi(a_p); \ \varphi(c_1), \ \varphi(c_2), \ \ldots, \ \varphi(c_m)$$

il y aura au plus $q - 1$ couples de valeurs imaginaires.

On peut donc construire une fonction fuchsienne $F(z)$ qui ne peut prendre aucune de ces valeurs puisque le théorème est supposé vrai pour un système de valeurs ne contenant que $q - 1$ couples de quantités imaginaires conjuguées.

Posons

$$\varphi(x) = F(z).$$

On voit d'abord que x est fonction uniforme de z; en effet cela ne pourrait cesser d'avoir lieu que si l'on avait:

$$\varphi'(x) = 0$$

d'où

$$x = c_i, \qquad F(z) = \varphi(c_i)$$

ce qui est impossible.

De plus x ne peut prendre aucune des valeurs

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_p$$

sans quoi l'on aurait:

$$F(z) = \varphi(a_i)$$

ce qui est impossible, ni aucune des valeurs:

$$a'_1, \ a'_2, \ \ldots, \ a'_{2q}$$

sans quoi l'on aurait

$$F(z) = 0$$

ce qui est impossible.

La dérivée de x par rapport à z ne peut jamais s'annuller, sans quoi celle de F par rapport à z s'annullerait également, ce qui n'a jamais lieu.

D'ailleurs x est une fonction fuchsienne de z. En effet soit:

$$F(z) = \varphi(x) = y, \qquad v = \sqrt{\frac{dF}{dz}}$$

on aura, puisque F est une fonction fuchsienne

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \psi(y)v$$

$\psi(y)$ étant une fonction rationnelle en y.

Si nous posons ensuite

$$w = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

d'où

$$v = w\sqrt{\varphi'(x)}$$

il viendra:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left\{[\varphi'(x)]^2\psi[\varphi(x)] + \frac{3}{4}\left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)}\right\}w \tag{5}$$

où le coëfficient de w est une fonction rationnelle en x.

Ainsi x est une fonction uniforme de z, c'est à dire du rapport des deux intégrales de l'équation (5). C'est donc une fonction fuchsienne.

Ainsi x est une fonction fuchsienne qui ne peut prendre aucune des valeurs (1) et (2), mais qui de plus ne peut prendre non plus aucune des valeurs telles que $\varphi(x) = \varphi(a_i)$ ou $\varphi(x) = \varphi(c_i)$.

Appelons

$$b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_k$$

ces valeurs.

L'équation (5) qui est une équation fuchsienne admet comme points singuliers

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_p, \ \ a'_1, \ a'_2, \ \ldots, \ a'_{2q}, \ \ b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_k$$

et de telle sorte que toutes les équations déterminantes aient une racine double. Elle appartient donc à un type subordonné à T.

Ainsi il est toujours possible de trouver une fonction fuchsienne $x = f(z)$ qui ne peut prendre n valeurs *données*

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n$$

et qui ne peut prendre non plus k autres valeurs non données

$$b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_k.$$

À cette fonction fuchsienne correspond une équation fuchsienne dont les points singuliers sont les a et les b et dont toutes les équations déterminantes ont une racine double. Cette équation fait partie d'un type subordonné à T.

Soit maintenant y une fonction de x qui n'admet d'autre point singulier que les a. Si on pose $x = f(z)$, y sera fonction uniforme de z.

C'est ce qui arrivera en particulier lorsque y sera l'intégrale d'une équation linéaire à coëfficients algébriques.

Ainsi on peut toujours trouver une variable z, dont la variable x et les intégrales d'une pareille équation sont des fonctions uniformes.

§ 12. *Polygones limites.*

Je dirai que deux polygones générateurs R_0 et R'_0 de deux groupes fuchsiens G et G' appartiennent à une même classe lorsqu'ils satisferont aux conditions suivantes:

1°. Le nombre des côtés des deux polygones est le même.

2°. Si deux côtés de R_0 sont conjugués, les deux côtés de même rang de R'_0 sont également conjugués. Il en résulte que les sommets des deux polygones se répartissent en un même nombre de cycles de telle façon qu'à chaque cycle de R_0 corresponde un cycle de R'_0 et réciproquement.

3°. La somme des angles de deux cycles correspondants est la même.

Les polygones d'une même classe dépendent d'un certain nombre de paramètres. Supposons par exemple pour fixer les idées qu'ils soient complètement définis (¹) lorsqu'on se donne trois paramètres x, y, z, mais que ces trois paramètres ne soient pas indépendants et soient liés entre eux par une relation

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

(¹) Il reste bien entendu que deux polygones ne sont pas distincts lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une substitution linéaire qui n'altère pas le cercle fondamental.

Si nous regardons x, y et z comme les coordonnées d'un point dans l'espace, à chaque polygone de la classe correspond un point d'une surface S_1 définie par l'égalité (1) de sorte qu'à la classe tout entière correspond cette surface ou une portion de cette surface.

Mais en général, pour que le polygone R_0 puisse être le polygone générateur d'un groupe fuchsien, x, y et z doivent satisfaire non seulement à l'égalité (1), mais encore à certaines inégalités (2). Aussi à la classe considérée correspond seulement une partie de la surface S_1 et cette partie est limitée par certaines courbes frontières dont on obtient l'équation en remplaçant dans une des inégalités (2) le signe de l'inégalité par celui de l'égalité.

Prenons un exemple. Soit un polygone R_0 de la seconde famille et du genre 0; ce sera par exemple un hexagone *abcdef*. Les côtés *ab* et *bc*, *cd* et *de*, *ef* et *fa* sont conjugués de telle sorte qu'il y a quatre cycles b, d, f et *ace*. Les six sommets devront satisfaire à la relation suivante:

$$-(a-b)(c-d)(e-f)=(b-c)(d-e)(f-a).$$

Soit $\varphi(\mu)$ le rapport anharmonique de μ par rapport aux trois points b, d et f de telle sorte que:

$$\varphi(b)=\infty, \qquad \varphi(d)=0, \qquad \varphi(f)=1.$$

Posons

$$\varphi(a)=y, \qquad \varphi(c)=x, \qquad \varphi(e)=z.$$

Le polygone R_0 sera entièrement défini quand on connaîtra x, y et z; mais entre ces trois paramètres nous avons la relation suivante:

$$(1') \qquad x(1-z)=z(1-y).$$

C'est l'équation d'un paraboloïde.

Mais x, y et z doivent satisfaire en outre aux inégalités

$$(2') \qquad x<0<z<1<y$$

de sorte qu'on ne doit conserver qu'une portion du paraboloïde (1'). Cette portion doit être regardée comme limitée par les six droites suivantes

$$(3) \qquad x = z = 0$$

$$(4) \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$(5) \qquad y = z = 1$$

$$(6) \qquad z = 1 \qquad x = \infty$$

$$(7) \qquad x = y = \infty$$

$$(8) \qquad y = \infty \qquad z = 0.$$

Ce seront les courbes frontières de la portion utile du paraboloïde; à chaque point de cette portion utile correspondra *un* polygone de la classe envisagée et réciproquement.

Supposons maintenant que, dans la classe considérée, il faille p paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pour définir complètement le polygone R_0 et que ces p paramètres satisfassent d'une part à une égalité (1), d'autre part à certaines inégalités (2). Si l'on regarde $x_1, x_2, \ldots, x_p$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à p dimensions, cette égalité et ces inégalités définiront une portion de surface, une multiplicité (*Mannigfaltigkeit*), comme disent les Allemands. J'appellerai M_1 cette multiplicité qui aura $p - 1$ dimensions. Elle sera en général *ouverte* et sera limitée par des multiplicités frontières de $p - 2$ dimensions, puisque les x satisfont non seulement à une égalité, mais encore à des inégalités. Ces multiplicités frontières sont analogues aux courbes frontières dont il a été parlé plus haut et on obtient leurs équations en remplaçant dans l'une des inégalités (2) le signe de l'inégalité par celui de l'égalité.

Considérons un point de la multiplicité M_1 qui soit infiniment voisin de l'une des multiplicités frontières. À ce point correspondra un polygone dont certains éléments seront infinitésimaux et que j'appellerai pour cette raison polygone limite.

Nous allons envisager d'abord une classe de polygones R_0, du genre 0, de la 2[e] famille; le nombre des côtés sera $2n$; chaque côté de rang impair sera le conjugué du côté dont le rang est plus élevé d'une unité (le côté de rang $2p - 1$ sera le conjugué du côté de rang $2p$). De cette façon, si je désigne par la notation α_p le sommet qui sépare les côtés de rang p et de rang $p - 1$, chaque sommet d'indice impair formera un cycle à lui tout seul, pendant que tous les sommets d'indice pair formeront un seul cycle. Il y aura donc en tout $n+1$ cycles et tous les sommets seront d'ailleurs sur le cercle fondamental. Pour définir un pareil polygone il suffit de se donner $2n-3$ de ces sommets, les trois autres étant supposés fixes. D'ailleurs entre ces $2n-3$ paramètres nous avons la relation:

$$(1'') \quad -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_{2n-1}-\alpha_{2n})=(\alpha_{2n}-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_{2n-2}-\alpha_{2n-1})$$

outre les inégalités:

$$(2'') \qquad \arg\alpha_1<\arg\alpha_2<\arg\alpha_3<\ldots<\arg\alpha_{2n}<\arg\alpha_1+2\pi.$$

Je considère d'autre part les fonctions fuchsiennes engendrées par R_0 et parmi elles, une de celles à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. Je l'appelle $f(z)$. Les points singuliers de l'équation fuchsienne correspondante sont alors au nombre de $n+1$; ce sont:

$$f(\alpha_1),\quad f(\alpha_3),\quad \ldots,\quad f(\alpha_{2n-1})$$

et

$$f(\alpha_2)=f(\alpha_4)=\ldots=f(\alpha_{2n}).$$

Je vais chercher quels sont les polygones limites de la classe en question. Pour les trouver il faut dans l'une des inégalités (2″) remplacer le signe de l'inégalité par celui de l'égalité; d'où:

$$\arg\alpha_i=\arg\alpha_{i+1}\,; \qquad \alpha_i=\alpha_{i+1}$$

c'est à dire qu'un des côtés du polygone R_0 doit devenir infiniment petit. Mais en vertu de l'équation (1″) si un côté de rang pair devient infiniment petit, il faut qu'un côté de rang impair le devienne également, et réciproquement. Il y aura donc toujours au moins deux côtés qui s'annulleront. De là trois espèces de polygones limites.

1°. Ceux dont deux côtés conjugués s'annullent.

2°. Ceux dont deux côtés non conjugués s'annullent.

3°. Ceux dont plus de deux côtés s'annullent à la fois.

Ainsi dans le cas du paraboloïde (1′), les droites frontières (3), (5) et (7) correspondent à des polygones limites de la 1ère espèce; les droites (4), (6) et (8) à des polygones de la 2e espèce et les points:

$$x=z=0,\quad y=1\,;\qquad x=0,\quad y=z=1\,;\ \text{etc.},$$

qui appartiennent à la fois à deux de ces droites frontières correspondent à des polygones de la 3e espèce.

Les polygones limites de la 3e espèce sont évidemment des cas particuliers de ceux des deux premières. Laissons les pour un instant de côté et cherchons à montrer que ceux de la 2e espèce se ramènent à ceux de la 1ère.

En effet si nous envisageons un polygone de la 2e espèce, l'un de ses côtés infinitésimaux sera de rang pair. Je puis supposer que l'on ait numéroté les côtés de telle façon que ce soit précisément le côté de rang 2, $\alpha_1\alpha_2$. L'autre côté infinitésimal sera par exemple $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$. Ces deux côtés seront séparés par $p-1$ paires de côtés conjugués $\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_3\alpha_4$; $\alpha_4\alpha_5$ et $\alpha_5\alpha_6$; etc.; $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$ et $\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}$. Joignons, par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, α_{2p-1} à α_1; nous partagerons ainsi le polygone R_0 en deux autres r_0 et r_0'; r_0 contiendra par exemple le sommet α_{2p} et r_0' le sommet α_2. Soit r_0'' le transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$ en $\alpha_{2p}\alpha_{2p-1}$, et posons

$$R_0' = r_0 + r_0''.$$

Le polygone R_0' sera équivalent à R_0, il admettra deux côtés infinitésimaux, à savoir $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ et le transformé de $\alpha_1\alpha_2$. Ces deux côtés ne seront plus séparés que par $p-2$ paires de côtés conjugués. En opérant sur R_0' comme on a opéré sur R_0, on obtiendra un polygone R_0'' où les deux côtés infinitésimaux ne seront plus séparés que par $p-3$ paires de côtés conjugués, et en continuant de la sorte, on finira par arriver à un polygone S_0, équivalent à R_0 et dont les deux côtés infinitésimaux seront consécutifs. Tous les polygones R_0, R_0', R_0'', ..., S_0 auront une partie commune qui sera r_0. Le côté infinitésimal $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ et son conjugué $\alpha_{2p+1}\alpha_{2p+2}$ appartiendront donc à S_0. Le second côté infinitésimal sera par exemple $\beta\alpha_{2p}$. Joignons maintenant $\beta\alpha_{2p+1}$ par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Le polygone S_0 se trouvera divisé en deux parties; le triangle $\alpha_{2p}\beta\alpha_{2p+1} = s_0'$ et $s_0 = S_0 - s_0'$. Soit γ le transformé de β par la substitution qui change $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ en $\alpha_{2p+2}\alpha_{2p+1}$ et soit $\alpha_{2p+2}\gamma\alpha_{2p+1} = s_0''$ le triangle transformé de s_0' par cette substitution. Le polygone $S_0' = s_0 + s_0''$ sera équivalent à S_0 et il est aisé de voir qu'il n'a que deux côtés infinitésimaux, à savoir $\beta\alpha_{2p+1}$ et $\gamma\alpha_{2p+1}$ qui sont conjugués.

Il est vrai que le polygone S_0' quoique équivalent à R_0 n'appartient pas à la même classe, parce que les paires de côtés conjugués sont distribuées d'une autre manière; mais il est aisé, par des transformations convenables, de ramener le polygone S_0' à un polygone équivalent S_0'' admettant comme S_0' les côtés infinitésimaux conjugués $\beta\alpha_{2p+1}$ et $\gamma\alpha_{2p+1}$ et dont chaque côté de rang impair est conjugué du côté pair qui le suit.

Nous sommes ainsi amenés à nous occuper principalement des polygones limites de la 1ère espèce.

Considérons un pareil polygone dont les deux côtés conjugués soient $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_1$. Nous distinguerons deux catégories de polygones de la 1ère espèce.

1°. Ceux de la 1ère catégorie seront tels que

$$\frac{a_1 - a_2}{a_{2n} - a_1} = 1,$$

2° et ceux de la 2e catégorie seront tels que

$$\frac{a_1 - a_2}{a_{2n} - a_1} \gtrless 1.$$

Dans le premier cas, on a entre les sommets du polygone les relations suivantes

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{2n} \tag{9}$$

$$-(\alpha_3 - \alpha_4) \ldots (\alpha_{2n-1} - \alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1}). \tag{1^a}$$

Le polygone R_0 se réduit donc (lorsque passant à la limite on annulle ses côtés infinitésimaux) à un polygone R_0' tout à fait analogue, mais dont le nombre des côtés n'est plus que $2n-2$ au lieu de $2n$.

Disons quelques mots des groupes G et G' engendrés par ces deux polygones R_0 et R_0'. Appelons S_i la substitution parabolique qui change $\alpha_{i-1}\alpha_i$ en $\alpha_{i+1}\alpha_i$ (i étant essentiellement impair). Le groupe G sera dérivé des n substitutions

$$S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}.$$

La résultante

$$S_1S_3S_5 \ldots S_{2n-1}$$

sera parabolique et admettra le point double α_{2n}.

Lorsque R_0 se réduit à R'_0, les substitutions $S_3, \ldots, S_{2n-1}$ deviennent $S'_3, \ldots, S'_{2n-1}$ et restent paraboliques, mais la substitution S_1 devient illusoire et n'a plus aucun sens. Le groupe G' est donc dérivé des $n-1$ substitutions

$$S'_3, \ldots, S'_{2n-1}.$$

En vertu de la relation (1[a]) la résultante

$$S'_3 \ldots S'_{2n-1}$$

est parabolique.

Donc les sommets d'ordre pair de R'_0 forment un cycle parabolique (3[e] sous-catégorie) et par conséquent R'_0 et ses transformés par les diverses substitutions de G' rempliront tout le cercle fondamental (cf. *Théorie des groupes fuchsiens* § 6).

Alors en appliquant le 2[d] lemme, on verrait que la différence

$$f(\alpha_1) - f(\alpha_2)$$

tend vers 0 et que le type T, dont fait partie l'équation fuchsienne engendrée par R_0, se réduit à un type T' plus simple n'admettant plus que n points singuliers.

Supposons maintenant que deux côtés $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_1$ tendent vers 0 de telle façon que

$$\lim \frac{a_1 - a_2}{a_{2n} - a_1} \lesseqgtr 1.$$

La relation (1[a]) cessera d'avoir lieu. La résultante

$$S''_3 S''_5 \ldots S''_{2n-1}$$

sera hyperbolique et non parabolique; les sommets d'ordre pair de R'_0 formeront un cycle hyperbolique (4[e] sous-catégorie) et par conséquent les transformés de R'_0 par les substitutions de G' ne rempliront pas tout le cercle fondamental, mais seulement une portion de cercle limitée par une infinité de circonférences. (Cf. *Théorie des groupes fuchsiens* § 6.)

Le 2[d] lemme n'est donc pas applicable, ce qui montre quelle différence profonde sépare les polygones limites de la 1[ère] et de la 2[e] catégories.

On pourrait faire une théorie tout à fait analogue des polygones limites de la 3ᵉ espèce qui ne sont que des cas particuliers de ceux de la 1ère et de la 2ᵉ.

Comme deuxième exemple, nous considérerons un polygone R_0 du genre 0, dont les côtés seront disposés comme dans l'exemple précédent, mais qui appartiendra à la 1ère famille et dont par conséquent tous les sommets seront à l'intérieur du cercle fondamental et tous les cycles seront elliptiques (1ère catégorie).

Nous appellerons

$$a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$$

les angles de ce polygone qui ont leurs sommets en

$$\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-1}$$

et b la somme des autres angles du polygone. Ces divers angles doivent être des parties aliquotes de 2π; je les regarderai comme donnés; la classe à laquelle appartient R_0 est alors parfaitement définie. Dans ce qui va suivre, nous envisagerons la L des côtés de ce polygone et non leur longueur géométrique. Dans l'exemple précédent, quand nous disions qu'un côté était infiniment petit, cela s'entendait de sa longueur; ici au contraire cela s'entendra de sa L (qui n'est autre chose que la longueur au point de vue de la géométrie non-euclidienne; cf. *Groupes fuchsiens* § 1; *Fonctions fuchsiennes* § 1).

Cela posé, comment peut-on concevoir que le polygone R_0 devienne un polygone limite? Cela pourrait se concevoir de trois manières.

1°. Si un côté devenait infiniment petit.

2°. Si un angle s'annullait.

3°. Si un côté devenait infiniment grand.

Il est aisé de voir que les deux premiers cas ne se présenteront jamais, sans que le troisième se présente également; examinons donc le troisième.

Supposons qu'un côté de R_0, $\alpha_{2n}\alpha_1$ par exemple, devienne infini; il en sera de même du conjugué $\alpha_1\alpha_2$. Mais l'angle de ces deux côtés qui est a_1 est donné et fini. Donc la diagonale $\alpha_{2n}\alpha_2$ est infinie. Mais cette diagonale est plus petite que la somme des $2n - 2$ autres côtés. Donc l'un de ces côtés est infini. Ce sera par exemple $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$ et il en sera de même par conséquent de son conjugué $\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}$. Joignons par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, les deux sommets α_1, α_{2p-2}. Nous aurons ainsi divisé R_0 en deux polygones partiels: r_0 qui comprendra le sommet α_2, et r_0' qui comprendra le sommet α_{2n}. Soit maintenant r_0'' le transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_1\alpha_2$ en $\alpha_1\alpha_{2n}$. Le polygone $R_0' = r_0' + r_0''$ qui est équivalent à R_0 a comme lui quatre côtés infinis, mais ces quatre côtés sont consécutifs. Il résulte de là que nous pouvons toujours supposer que les 4 côtés infinis de R_0 sont $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$. C'est ce que nous ferons.

On peut supposer aussi que R_0 a plus de quatre côtés infinis; mais ce n'est qu'un cas particulier que nous laisserons de côté pour le moment; nous supposerons donc que les $2n - 4$ autres côtés sont finis. Dans ce cas, on peut démontrer sans trop de difficultés que la diagonale $\alpha_1\alpha_3$ est finie. Appelons r_0 le triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et r_0' le reste de R_0. Appelons r_0'' le triangle $\alpha_3\beta\alpha_4$ transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_3\alpha_2$ en $\alpha_3\alpha_4$. Le polygone $R_0' = r_0' + r_0''$ sera équivalent à R_0 et il n'aura plus que deux côtés infinis $\alpha_1\alpha_{2n}$ et $\beta\alpha_4$ qui seront conjugués, pendant que les deux côtés conjugués $\alpha_1\alpha_3$ et $\alpha_3\beta$ seront finis. Ces deux derniers côtés ont leur L finie, mais leur longueur géométrique est infiniment petite. Supposons que nous passions à la limite et que ces deux côtés s'annullent. Le polygone R_0' se réduira alors à un polygone R_0'' qui n'aura plus que $2n - 2$ côtés par suite de la confusion des trois sommets α_1, α_3 et β. Parmi ces côtés, il y en a $2n - 4$ qui ne diffèrent pas de ceux de R_0; les deux autres sont les côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_4$ qui sont conjugués; le sommet α_1 qui est situé sur le cercle fondamental, forme à lui tout seul un cycle qui peut être parabolique ou hyperbolique.

S'il est parabolique, ce qui arrive lorsque le cercle qui passe par $\alpha_1\alpha_{2n}$ et α_4 est tangent au cercle fondamental, le polygone limite est de la 1ère catégorie.

S'il est au contraire hyperbolique, le polygone limite est de la 2e catégorie.

Les propriétés des deux catégories sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Ainsi si G est le groupe engendré par R_0, ce groupe sera dérivé de n substitutions elliptiques:

$$S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}$$

de telle façon que S_i ait pour point double α_i. Le groupe dérivé de

$$S_5, \; S_7, \; \ldots, \; S_{2n-1} \quad \text{et de} \quad S_1 S_3$$

s'appellera G''. Lorsque R_0 se réduira à R_0'', les substitutions $S_5, S_7, \ldots, S_{2n-1}$ tendront vers des substitutions elliptiques $S_5', S_7', \ldots, S_{2n-1}'$ et $S_1 S_3$ tendra vers une certaine substitution Σ. S_1 et S_3 deviendront illusoires. Le groupe G' engendré par R_0'' sera dérivé de

$$S_5', \; S_7', \; \ldots, \; S_{2n-1}' \quad \text{et} \quad \Sigma$$

et sera isomorphe à G''.

Si le polygone est de la 1ère catégorie, Σ sera parabolique; les transformés de R_0'' par le groupe G' rempliront tout le cercle fondamental. Lorsque R_0' tendra vers R_0'', le transformé de R_0' par une substitution de G'' tendra vers le transformé de R_0'' par la substitution correspondante de G', et la surface recouverte par les transformés de R_0' par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G'', tendra vers o. En appliquant le deuxième lemme et en conservant les mêmes notations que plus haut, on verrait que la différence $f(\alpha_1) - f(\alpha_3)$ tend en même temps vers o.

Si au contraire le polygone est de la 2e catégorie, Σ est hyperbolique et les transformés de R_0'' ne remplissent pas tout le cercle fondamental. Les déductions précédentes ne sont donc plus possibles et l'on ne peut affirmer que $f(\alpha_1) - f(\alpha_3)$ tende vers o.

On traiterait de même le cas où il y a plus de quatre côtés infinis.

Comme troisième exemple, nous choisirons un polygone R_0 de genre p, de la 1ère famille, de $4p$ côtés, dont les côtés opposés sont conjugués et dont tous les sommets forment un seul cycle, pendant que la somme des angles est égale à 2π.

Ici encore on pourrait concevoir trois cas où le polygone deviendrait polygone limite.

1°. Si l'un des côtés s'annullait (cela s'entend toujours de la L de ce côté).

2°. Si un angle s'annullait.

3°. Si un côté devenait infini.

Comme dans l'exemple précédent, les deux premiers cas ne se présenteront jamais sans que le troisième se présente en même temps et c'est ce troisième cas qu'il nous reste à examiner.

J'appelle comme plus haut α_i le sommet de rang i et je suppose que le côté $\alpha_{4p}\alpha_1$ et son conjugué $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ deviennent infinis. Soit β_1 le milieu de $\alpha_{4p}\alpha_1$. (J'entends par là que la L de $\alpha_{4p}\beta_1$ est égale à celle de $\beta_1\alpha_1$) et β_2 le milieu de $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$. Joignons $\beta_1\beta_2$ par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Ce sera une sécante de notre polygone R_0 et *cette sécante sera finie.* Cette sécante partagera le polygone R_0 en deux autres: r_0 qui contiendra le sommet α_1, et r_0' qui contiendra le sommet α_{4p}. Soit maintenant S_p la substitution qui change $\alpha_p\alpha_{p+1}$ en son conjugué $\alpha_{3p}\alpha_{3p+1}$. Cette substitution changera

$$r_0 = \beta_1\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2p-1}\alpha_{2p}\beta_2$$

en

$$r_0'' = \beta_1'\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{2p-1}'\alpha_{2p}'\beta_2'$$

où:

$$\alpha_p' = \alpha_{3p+1}, \qquad \alpha_{p+1}' = \alpha_{3p}.$$

Le polygone $R_0' = r_0' + r_0''$ sera équivalent à R_0; il aura $4p+2$ sommets qui se succèderont dans l'ordre suivant:

$$\beta_1'\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_p'\alpha_{3p+2}\alpha_{3p+3} \ldots \alpha_{4p}\beta_1\beta_2\alpha_{2p+1}\alpha_{2p+2} \ldots \alpha_{3p}\alpha_{p+2}'\alpha_{p+3}' \ldots \alpha_{2p}'\beta_2'.$$

Ces $4p+2$ sommets forment deux cycles qui sont d'ailleurs tels que la somme des angles de chacun d'eux est égale à 2π. Quatre côtés sont infinis à savoir $\beta_1'\alpha_1'$, $\alpha_{4p}\beta_1$, $\beta_2\alpha_{2p+1}$, $\alpha_{2p}'\beta_2'$. La L des côtés $\beta_1\beta_2$ et $\beta_1'\beta_2'$ est finie et leur longueur géométrique est infiniment petite.

Si nous passons à la limite cette longueur s'annullera absolument et les sommets β_1 et β_2, β_1' et β_2' se confondront. Le polygone R_0' se réduira alors à un autre polygone R_0'' qui n'aura plus que $4p$ sommets, deux sur le cercle fondamental β_1 et β_1' et $4p-2$ en dehors de ce cercle. Chacun des sommets β_1 et β_1' forme à lui tout seul un cycle qui peut être parabolique ou hyperbolique.

Étudions maintenant le groupe G engendré par le polygone R_0 ou ce qui revient au même par R_0'. Si nous appelons S_i la substitution qui change le côté $\alpha_i\alpha_{i+1}$ de R_0 en son conjugué $\alpha_{2p+i}\alpha_{2p+i+1}$, le groupe G sera dérivé des $2p$ substitutions

$$S_1, \; S_2, \; \ldots, \; S_{2p}$$

entre lesquelles nous avons la relation

$$S_1 S_2 \ldots S_{2p} = S_{2p} S_{2p-1} \ldots S_2 S_1 .$$

Quelles sont les substitutions de G qui changent chaque côté de R_0' en son conjugué? Ce seront:

$$\begin{array}{llll}
S_p & \text{qui change} & \beta_1\beta_2 & \text{en } \beta_1'\beta_2' \\
S_{2p} & \text{»} \quad \text{»} & \alpha_{2p+1}\beta_2 & \text{en } \alpha_{4p}\beta_1 \\
S_p^{-1} S_{2p} S_p & \text{»} \quad \text{»} & \beta_2'\alpha_{2p}' & \text{en } \beta_1'\alpha_1'
\end{array}$$

et

$$S_p^{-1} S_i \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \alpha_i'\alpha_{i+1}' \quad \text{en } \alpha_{2p+i}\alpha_{2p+i+1} .$$

Lorsque le polygone R_0' se réduit à R_0'', la substitution S_p devient illusoire et les substitutions S_{2p}, $S_p^{-1} S_{2p} S_p$ et $S_p^{-1} S_i$ se réduisent à certaines substitutions Σ, Σ' et S_i'. De ces substitutions dérive un groupe G' qui est précisément engendré par R_0'' et de telle façon que Σ et Σ' sont les deux substitutions qui changent la première $\alpha_{2p+1}\beta_1$ en $\alpha_{4p}\beta_1$, la seconde $\alpha_{2p}'\beta_1'$ en $\alpha_1'\beta_1'$.

Si les multiplicateurs de Σ et de Σ' sont égaux à 1, ces deux substitutions sont paraboliques; le polygone R_0'' sera dit alors de la 1ère catégorie et ses transformés recouvriront tout le cercle fondamental. On en conclut, comme dans les deux exemples qui précèdent, que le deuxième lemme est applicable et que par conséquent les fonctions fuchsiennes engendrées par R_0' tendent vers les fonctions fuchsiennes engendrées par R_0'', quand R_0' tend vers R_0''.

Entrons dans plus de détails. Soient x et y deux fonctions fuchsiennes engendrées par R_0'; il y aura entre ces deux fonctions une relation algébrique

$$\varphi(x, y) = 0$$

qui sera de genre p, puisque R_0' est de genre p. Si cette relation est regardée comme l'équation d'une courbe de degré m, cette courbe aura

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

points doubles. Lorsque R_0' se réduira à R_0'', le genre de cette courbe devra diminuer d'une unité, puisque le polygone R_0'' est de genre $p - 1$; c'est à dire que la *courbe devra acquérir un nouveau point double*. A ce point double correspondront en réalité deux points analytiques différents (selon que le point double sera regardé comme appartenant à l'une ou à l'autre des branches de courbe qui y passent) et par conséquent *deux points réellement distincts du polygone* R_0''. Ces deux points seront β_1 et β_1' qui sont comme on le sait sur la circonférence du cercle fondamental. Il résulte de là que les deux fonctions fuchsiennes $\lim x$ et $\lim y$ ne peuvent prendre à l'intérieur du cercle fondamental les deux valeurs qui correspondent au nouveau point double.

Il ne peut pas arriver que l'un des multiplicateurs de Σ et de Σ' soit égal à 1 et l'autre différent de 1, de telle façon que l'une de ces substitutions soit parabolique et l'autre hyperbolique. En effet l'on a:

$$\text{mult}\, S_{2p} = \text{mult}\, S_p^{-1} S_{2p} S_p$$

d'où:

$$\lim \text{mult}\, S_{2p} = \lim \text{mult}\, S_p^{-1} S_{2p} S_p$$

et

$$\text{mult}\, \Sigma = \text{mult}\, \Sigma'.$$

Il peut arriver au contraire que les deux multiplicateurs soient différents de 1 et les deux substitutions hyperboliques. Dans ce cas R_0'' est dit de la 2e catégorie. Le deuxième lemme n'est plus applicable et les fonctions fuchsiennes engendrées par R_0' ne tendent pas vers celles qui sont engendrées par R_0''.

On traiterait de même le cas où plus de deux côtés de R_0 deviendraient infinis.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour montrer comment doit être traitée dans chaque cas, la question des polygones limites.

Dans le cas du second exemple, nous dirons que le polygone limite R_0 est:

1° de la 1ère espèce s'il n'a que 4 côtés infinis et qu'ils soient consécutifs.

2° de la 2ᵉ espèce s'il n'a que 4 côtés infinis et qu'ils ne soient pas consécutifs. (Nous avons vu qu'un polygone de la 2ᵉ espèce peut toujours être ramené à un polygone de la 1ère).

3° de la 3ᵉ espèce s'il a plus de 4 côtés infinis; on démontrerait aisément qu'on peut toujours ramener au cas où tous les cotés infinis sont consécutifs.

Dans le cas du troisième exemple, nous dirons que le polygone limite R_0 est:

1° de la 1ère espèce s'il n'a que 2 côtés infinis.

2° de la 3ᵉ espèce, s'il a plus de deux côtés infinis.

§ 13. *Polygones réduits.*

Nous avons vu qu'aux différents polygones d'une même classe correspondaient un par un les différents points d'une multiplicité M_1. Mais à un même groupe fuchsien correspondent une infinité de polygones générateurs et par conséquent une infinité de points de M_1. En effet le procédé du § 9 du *Mémoire sur les groupes fuchsiens* permet de transformer le polygone R_0 en un autre R'_0 équivalent à R_0 et engendrant le même groupe fuchsien. De là une infinité de transformations qui changent un polygone en un autre équivalent, et par conséquent un point de M_1 en un autre point de cette multiplicité. Ces substitutions forment un groupe que j'appelle Γ et qui est évidemment discontinu. La multiplicité M_1 va se trouver partagée en une infinité de domaines $D_0, D_1, \ldots, D_i, \ldots$, de telle façon qu'à chaque substitution de Γ corresponde un de ces domaines et que ce domaine soit précisément le transformé de D_0 par cette substitution. Cette subdivision de M_1 à l'aide du groupe Γ est tout à fait analogue à la subdivision du cercle fondamental en une infinité de polygones $R_0, R_1, \ldots$ à l'aide d'un groupe fuchsien quelconque. Nous allons d'ailleurs éclaircir ce qui précède par une comparaison simple.

Supposons que dans le plan des xy, le point x, y représente la quantité imaginaire $z = x + iy$ et considérons un parallélogramme rectiligne R_0, ayant pour sommets 0, z_1, z_2 et $z_1 + z_2$. On pourra subdiviser le plan en une infinité de parallélogrammes égaux à R_0 et on engendrera ainsi le groupe $(z, z + \alpha z_1 + \beta z_2)$ où α et β sont des entiers quelconques; de ce groupe dériveront les fonctions doublement périodiques qui ont pour période z_1 et z_2. Mais ce parallélogramme peut être remplacé par un autre dont les sommets soient:

$$0, \ \alpha z_1 + \beta z_2, \ \gamma z_1 + \delta z_2, \ (\alpha + \gamma) z_1 + (\beta + \delta) z_2$$

où α, β, γ, δ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ce second parallélogramme est équivalent au premier; je l'appellerai R_0'. Pour définir R_0, nous nous donnerons le rapport $\frac{z_2}{z_1} = \omega$. Aux différents parallélogrammes possibles correspondront différents points du plan des ω ou plutôt de la partie de ce plan qui est au dessus de l'axe des quantités réelles, partie que j'appellerai partie positive du plan. À R_0' correspondra le point $\frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha}$, de sorte que la partie positive du plan des ω va se trouver partagée en une infinité de domaines qui se transformeront les uns dans les autres quand on appliquera à ω la substitution $\left(\omega, \frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha}\right)$. À toute fonction doublement périodique correspondra un point de chacun de ces domaines et un seul. Mais parmi tous les parallélogrammes équivalents à R_0, il y en a un qui est plus simple que tous les autres; c'est celui qui est tel que la forme quadratique positive:

$$\operatorname{mod}^2(\xi z_1 + \eta z_2)$$

où ξ et η sont des indéterminées entières, soit une forme réduite. On peut dire alors que ce parallélogramme est lui même réduit. On pourra définir ce parallélogramme réduit de la façon suivante:

1°. Il devra être tel que la partie imaginaire de ω soit aussi grande que possible.

2°. Et parmi ceux qui correspondent à ce maximum de la partie imaginaire de ω et qui sont en nombre infini, il devra être tel que la valeur absolue de la partie réelle de ω soit aussi petite que possible.

On voit aisément alors que ω doit satisfaire aux inégalités

$$-\frac{1}{2} < \text{partie réelle de } \omega < \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{mod} \omega > 1.$$

Les points ω qui correspondent à des parallélogrammes réduits sont alors compris dans un domaine D_0 défini par ces inégalités et limité par deux droites et un cercle. Ce domaine D_0 et ses transformés par les diverses substitutions du groupe $\left(\omega, \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right)$ remplissent alors toute la partie positive du plan des ω.

Nous pouvons opérer tout à fait de même dans le problème qui nous occupe car il est tout à fait analogue, si ce n'est que les parallélogrammes sont remplacés par des polygones générateurs d'un groupe fuchsien, les fonctions doublement périodiques par des fonctions fuchsiennes, et la partie positive du plan des ω par la multiplicité M_1.

Parmi les polygones équivalents à R_0, il y en aura un que nous regarderons comme plus simple que tous les autres et que nous appellerons *polygone réduit*. Voici comment nous pourrons définir ce polygone réduit. Soit φ une fonction des coordonnées d'un point de la multiplicité M_1. Je supposerai que cette fonction est constamment comprise entre 0 et 1, et qu'elle n'atteint la valeur 0 que sur les frontières de la multiplicité M_1, c'est à dire aux points qui correspondent aux polygones limites. Elle pourra d'ailleurs être choisie arbitrairement. Cela posé, aux différents polygones équivalents à R_0, correspondront différents points de M_1 et par conséquent différentes valeurs de φ. Le polygone que nous appellerons réduit sera celui qui correspondra à la plus grande valeur de φ.

Cela posé, les points de M_1 qui correspondront aux polygones réduits rempliront un certain domaine que j'appelle D_0. Ce domaine et ses transformés par les diverses substitutions de Γ rempliront toute la multiplicité M_1. Le domaine D_0 sera limité par un certain nombre de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_q$ qui auront $p - 1$ dimensions, si je suppose que M_1 en a p. Voyons quelle sera la forme des équations de ces multiplicités frontières. Soit α un point de M_1, $\alpha . S$ le transformé de α par une substitution S convenablement choisie dans le groupe Γ; les équations cherchées seront de la forme suivante:

$$(1) \qquad \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha . S)$$

φ désignant la fonction définie plus haut. Si nous considérons un point α appartenant à l'une des multiplicités frontières $m_1, m_2, \ldots, m_q$, par exemple à celle qui est définie par l'équation (1), ce point correspondra à un polygone réduit, et il en sera de même du point $\alpha . S$ qui correspondra à un polygone réduit équivalent au premier et qui appartiendra aussi à une multiplicité frontière. C'est ainsi que certaines classes de formes quadratiques contiennent deux formes réduites et qu'à un point d'un côté du polygone générateur d'un groupe fuchsien, correspond un point *équivalent* du côté conjugué. Les multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_q$ se répartissent donc en paires de multiplicités conjuguées à la façon des côtés du polygone R_0. Ces multiplicités m sont limitées par des multiplicités m' de $p-2$ dimensions; celles-ci le sont elles-même par des multiplicités m'' de $p-3$ dimensions et ainsi de suite. Ces multiplicités m', m'', etc. se répartissent en cycles à la façon des sommets du polygone R_0. Ces cycles peuvent d'ailleurs contenir une, deux, ou plusieurs d'entre elles: si un de ces cycles en contient plus de deux, il y aura plus de deux polygones réduits équivalents à un polygone donné.

Ainsi, en général, il n'y a qu'un polygone réduit équivalent à un polygone donné, mais dans certains cas exceptionnels il peut y en avoir deux ou plusieurs. C'est tout à fait ce qui arrive pour les formes quadratiques définies. On peut présenter la chose d'une autre manière. En général, parmi les valeurs de φ qui correspondent à une infinité de polygones équivalents, il y en a une qui est plus grande que toutes les autres; mais il peut arriver exceptionnellement qu'il y en ait deux ou plusieurs qui soient égales entre elles et plus grandes que toutes les autres.

Nous allons maintenant nous occuper d'une question fort importante: quand un polygone limite est-il réduit? et nous examinerons successivement les trois exemples du paragraphe précédent.

Reprenons d'abord le polygone R_0 du 1[er] exemple, en supposant que les deux côtés conjugués $\alpha_{2n}\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_2$ sont infiniment petits. Nous avons vu qu'en laissant de côté le cas exceptionnel des polygones limites de la 3[e] espèce, tous les polygones limites pouvaient être ramenés à ce cas. Nous négligerons donc devant les quantités finies, les quantités de l'ordre de $\alpha_1\alpha_2$ et de $\alpha_1\alpha_{2n}$.

Je joins $\alpha_{2n-1}\alpha_2$. (Il faut entendre par là, ici comme dans tout ce qui va suivre, que je trace un arc de cercle passant par ces deux points et orthogonal au cercle fondamental.) Je divise ainsi le polygone R_0 en deux autres: $r_0 = \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2$ et $r'_0 = R_0 - r_0$.

Transformons r_0 par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}$ en $\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}$; nous obtiendrons pour transformé un quadrilatère

$$r_0'' = \alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}\alpha_{1.1}\alpha_{2.1}.$$

Posons maintenant:

$$R_{0.1} = r_0' + r_0''.$$

Le polygone $R_{0.1}$ qui sera équivalent à R_0 aura pour sommets α_{2n-1}, α_{2n}, α_2, α_3, $\ldots$, α_{2n-3}, α_{2n-2}, $\alpha_{1.1}$, $\alpha_{2.1}$. On voit que $R_{0.1}$ a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \alpha_{2n-2}$$

et trois sommets infiniment voisins de α_{2n-2}. Quant à la longueur des côtés infiniment petits, elle sera donnée par la relation:

$$(2) \qquad \alpha_{1.1} - \alpha_{2.1} = (\alpha_1 - \alpha_2)\frac{(a_{2n-2} - a_{2n-1})^2}{(a_{2n-1} - a_{2n})^2}.$$

Joignons maintenant $\alpha_{2.1}\alpha_{2n-3}$, nous partagerons le polygone $R_{0.1}$ en deux autres: $r_{0.1} = \alpha_{1.1}\alpha_{2.1}\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-3}$ et $r'_{0.1} = R_{0.1} - r_{0.1}$. Soit maintenant $r''_{0.1} = \alpha_{1.2}\alpha_{2.2}\alpha_{2n-4}\alpha_{2n-3}$ le transformé de $r_{0.1}$ par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n-3}\alpha_{2n-2}$ en $\alpha_{2n-3}\alpha_{2n-4}$. Soit enfin $R_{0.2} = r'_{0.1} + r''_{0.1}$. Il est aisé de voir que $R_{0.2}$, qui est équivalent à $R_{0.1}$, a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \alpha_{2n-2}$$

et trois sommets α_{2n-4}, $\alpha_{2.1}$, $\alpha_{2.2}$ infiniment voisins de α_{2n-4}. On aura d'ailleurs:

$$(2') \qquad \alpha_{1.2} - \alpha_{2.2} = (\alpha_1 - \alpha_2)\left[\frac{(a_{2n-2} - a_{2n-1})(a_{2n-4} - a_{2n-3})}{(a_{2n} - a_{2n-1})(a_{2n-2} - a_{2n-3})}\right]^2.$$

Nous allons opérer sur $R_{0.2}$ comme nous avons opéré sur R_0 et sur $R_{0.1}$. C'est à dire que nous joindrons $\alpha_{2.2}\alpha_{2n-5}$ et que nous poserons, en appelant $r''_{0.2}$ le transformé de $r_{0.2}$ par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n-4}\alpha_{2n-5}$ en $\alpha_{2n-6}\alpha_{2n-5}$

$$r_{0.2} = \alpha_{2n-4}\alpha_{2n-5}\alpha_{1.2}\alpha_{2.2}, \qquad r'_{0.2} = R_{0.2} - r_{0.2}$$

$$R_{0.3} = r'_{0.2} + r''_{0.2}.$$

On opérera ensuite sur $R_{0.3}$ comme sur $R_{0.2}$ et ainsi de suite.

Il est aisé de voir que $R_{0.i}$ a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-2}$$

et trois infiniment voisins de α_{2n-2i}.

Considérons en particulier le polygone $R_{0.n-1}$. Il aura trois sommets infiniment voisins de α_2 et par conséquent de α_{2n}. Ce seront les sommets α_2, $\alpha_{1.n-1}$ et $\alpha_{2.n-1}$ (qu'il ne faut pas confondre avec α_{2n-1}). Il résulte de là que $R_{0.n-1}$ différera infiniment peu de R_0. Ces deux polygones sont d'ailleurs équivalents, d'où il résulte que la transformation T qui change R_0 en $R_{0.n-1}$ appartient au groupe Γ.

Posons

$$H = \frac{(a_2 - a_3)(a_4 - a_5)\cdot\ldots(a_{2n-2} - a_{2n-1})}{(a_3 - a_4)(a_5 - a_6)\ldots(a_{2n-1} - a_{2n})}.$$

Nous aurons la relation suivante qui est au polygone $R_{0.n-1}$ ce que les relations (2) et (2') sont aux polygones $R_{0.1}$ et $R_{0.2}$:

$$\alpha_{1.n-1} - \alpha_{2.n-1} = (\alpha_1 - \alpha_2)H^2$$

et de même

$$\alpha_2 - \alpha_{1.n-1} = (\alpha_{2n} - \alpha_1)H^2.$$

Cela posé, reprenons notre fonction φ et supposons qu'elle se comporte régulièrement, ce qui ne présente pas de difficulté puisque cette fonction est presque entièrement arbitraire. Pour un polygone qui a des côtés infiniment petits, la fonction φ est infiniment petite par hypothèse. Nous supposerons qu'elle est du 1^er^ ordre ainsi que $\alpha_1 - \alpha_2$. En négligeant les infiniment petits du 2^d^ ordre, on peut dire que les trois quantités φ, $\alpha_1 - \alpha_2$ et $\alpha_1 - \alpha_{2n}$ sont proportionnelles. On a donc pour le polygone R_0

$$\varphi = (\alpha_1 - \alpha_2)F$$

F ne dépendant que de la position des points

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}$$

et non de la longueur des côtés infiniment petits $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_{2n}$.

Appelons φ' et F' les valeurs de φ et de F qui correspondent à $R_{0.n-1}$; nous aurons:

$$F' = F \text{ à des inf. petits près du } 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

$$\varphi' = \varphi . H^2 \text{ à des inf. petits près du } 2^{\text{d}} \text{ ordre.}$$

Si donc $H^2 > 1$, la substitution T transforme R_0 en un polygone équivalent qui correspond à une valeur de φ plus grande. *Le polygone R_0 n'est donc pas réduit.*

Si au contraire $H^2 < 1$, la substitution inverse de T transformera R_0 en un polygone équivalent correspondant à une valeur de φ plus grande, de sorte que R_0 ne sera pas non plus réduit.

Reste le cas où $H^2 = 1$. Mais H est essentiellement négatif. On aura donc $H = -1$. Mais cette relation qui n'est autre que la relation (1^{a}) du paragraphe précédent, exprime que le polygone R_0 est de la $1^{\text{ère}}$ catégorie.

Ainsi *un polygone limite ne peut être réduit que s'il est de la $1^{\text{ère}}$ catégorie.*

Nous allons obtenir le même résultat dans les 2^{d} et 3^{e} exemples. Nous allons traiter d'abord le 2^{d} exemple, en supposant pour fixer les idées:

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n-1}.$$

Je définirai dans le 2^{d} comme dans le 3^{e} exemple, le polygone réduit de la manière suivante. Parmi les polygones équivalents à un polygone donné, j'appellerai ainsi celui qui sera tel que le plus grand de ses côtés soit aussi petit que possible. S'il y en a plusieurs qui satisfassent à cette condition, je choisirai parmi eux celui qui sera tel que le 2^{d} côté (par ordre de grandeur décroissante) soit aussi petit que possible et ainsi de suite. (Ici comme dans le paragraphe précédent, en ce qui concerne le 2^{d} et le 3^{e} exemple, quand je dis qu'un côté est grand ou petit, il s'agit de sa L et non de sa longueur géométrique.)

Voici une proposition que je me borne à énoncer, et que je vais appliquer à mon dessein.

Soit un triangle ABC qui se déforme de telle façon que ses trois sommets tendent respectivement vers trois points A', B' et C' situés le premier sur le cercle fondamental, les deux autres à l'intérieur de ce cercle. Les deux côtés AB et AC croissent indéfiniment, pendant que BC reste fini; mais la différence des deux côtés AB et AC tend vers une limite finie λ:

$$\lim (AB - AC) = \lambda.$$

Cette limite ne dépend que de la position des trois points A', B', C' et non de la manière dont A, B, C tendent vers A', B', C'. Par les points B' et C' on peut faire passer deux cercles tangents intérieurement au cercle fondamental. Soient M et N les points de contact. Joignons MN par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Cet arc de cercle coupera $B'C'$ en un point P tel que la L de PB' soit égale à celle de PC'; je supposerai que B' est à gauche de MN et C' à droite. La limite λ sera positive si A' est à droite de MN, négative si A' est à gauche; elle sera nulle si A' est en M ou bien en N.

Considérons donc le polygone R_0 dont nous allons faire croître indéfiniment les côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$ comme on l'a vu au paragraphe précédent. Il arrivera alors que les deux sommets α_{2n} et α_4 tendront vers deux points B' et C' intérieurs au cercle fondamental, pendant que α_1 tendra vers un point A' situé sur ce cercle lui-même. En même temps, les points α_2 et α_3 tendent aussi vers A', car les côtés $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_2\alpha_3$ qui ont leur L infiniment grande, ont leur longueur géométrique infiniment petite.

Nous pourrons trouver sur le cercle fondamental les points M et N définis plus haut; nous joindrons MN; je suppose d'abord que A' soit comme B' à gauche de MN. On aura en vertu du lemme que je viens d'énoncer

$$\lim \alpha_{2n} = B', \qquad \lim \alpha_4 = C', \qquad \lim \alpha_1 = \lim \alpha_2 = \lim \alpha_3 = A'$$

$$\alpha_2\alpha_4 > \alpha_2\alpha_{2n}, \qquad \alpha_3\alpha_4 > \alpha_3\alpha_{2n}.$$

Dans les deux triangles $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_{2n}$ on a

$$\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3\alpha_4, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_{2n}$$

$$\text{angle}\, \alpha_2\alpha_1\alpha_{2n} = \text{angle}\, \alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

et

$$\alpha_2\alpha_4 > \alpha_2\alpha_{2n}$$

d'où

$$\alpha_3\alpha_4 > \alpha_1\alpha_2.$$

Le côté $\alpha_3\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3$ est donc le plus grand côté de R_0 puisque tous les autres que $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_{2n}$ sont finis.

Je dis qu'on peut trouver un polygone équivalent à R_0 dont le plus grand côté soit plus petit que $\alpha_3\alpha_4$.

Joignons $\alpha_3\alpha_{2n}$, nous aurons partagé le polygone R_0 en deux autres:

$$r_0 = \alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad r_0' = \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \ldots \alpha_{2n}.$$

Transformons r_0' par la substitution qui change $\alpha_3\alpha_4$ en $\alpha_3\alpha_2$. Nous obtiendrons

$$r_0'' = \alpha_3'\alpha_4'\alpha_5' \ldots \alpha_{2n}'$$

avec

$$\alpha_3' = \alpha_3, \qquad \alpha_4' = \alpha_2.$$

Le polygone $R_0' = r_0 + r_0''$ est équivalent à R_0. Il a $2n - 4$ côtés égaux aux $2n - 4$ côtés finis de R_0. Il admet aussi deux côtés infinis

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_{2n}$$

qui appartiennent à R_0 et les deux côtés infinis

$$\alpha_3\alpha_{2n} = \alpha_3\alpha_{2n}'$$

qui n'appartiennent pas à R_0. Si $\alpha_3\alpha_{2n} > \alpha_1\alpha_2$, c'est $\alpha_3\alpha_{2n}$ qui est le plus grand côté de R_0' et on a:

$$\alpha_3\alpha_{2n} < \alpha_3\alpha_4.$$

C. Q. F. D.

Si $\alpha_3\alpha_{2n} < \alpha_1\alpha_2$, c'est $\alpha_1\alpha_2$ qui est le plus grand côté de R'_0 et on a

$$\alpha_1\alpha_2 < \alpha_3\alpha_4.$$

C. Q. F. D.

Ainsi, si le point A' est à gauche de MN, le polygone R_0 n'est pas réduit; mais comme rien ne distingue la gauche de la droite, il n'est pas réduit non plus si A' est à droite de MN. Il faut donc que A' soit en M ou en N. Mais alors le cercle $A'B'C'$ est tangent au cercle fondamental, ce qui veut dire que le polygone limite est de la 1ère catégorie.

Ainsi tout polygone limite réduit est de la 1ère catégorie.

Passons au 3e exemple, c'est à dire à un polygone R_0 de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués. Joignons les sommets opposés; nous obtiendrons ainsi $4p$ diagonales. Je dis que si R_0 est réduit, le plus grand des $4p$ côtés du polygone est plus petit que la plus petite de ces $4p$ diagonales. J'appelle δ cette plus petite diagonale; si ce côté était plus grand que δ, on partagerait le polygone R_0 en deux autres r_0 et r'_0 en traçant la diagonale δ. On appellerait ensuite r''_0 le transformé de r_0 par la substitution qui change le plus grand des côtés de R_0 en son conjugué. Le polygone $R'_0 = r'_0 + r''_0$ serait équivalent à R_0; il aurait ses côtés opposés conjugués; de plus il admettrait tous les côtés de R_0 sauf le plus grand qui serait remplacé par la diagonale δ, qui par hypothèse est plus petite. Le plus grand côté de R'_0 serait donc plus petit que celui de R_0 et R_0 ne serait pas réduit.

Cela posé, supposons, comme dans le paragraphe précédent, que les deux côtés $\alpha_{4p}\alpha_1$ et $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ croissent indéfiniment; il en sera de même des diagonales $\alpha_{4p}\alpha_{2p}$ et $\alpha_1\alpha_{2p+1}$; tous les autres côtés resteront finis. Supposons que les sommets α_{4p} et α_{2p+1} tendent vers deux points B' et C' intérieurs au cercle fondamental. Les sommets $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$ tendront vers un même point A' situé sur la circonférence de ce cercle et ce point A' est également celui avec lequel tendent à se confondre les sommets β_1 et β_2 du polygone R'_0. De ce fait résulte l'identité suivante:

$$\lim(\alpha_1\alpha_{4p} - \alpha_1\alpha_{2p+1}) = \lim(\alpha_{2p}\alpha_{4p} - \alpha_{2p}\alpha_{2p+1}).$$

Mais si le polygone R_0 est réduit, on a d'autre part, puisque les côtés sont plus petits que les diagonales

$$\alpha_1\alpha_{4p} \leqq \alpha_1\alpha_{2p+1}, \qquad \alpha_{2p}\alpha_{4p} \leqq \alpha_{2p}\alpha_{2p+1}.$$

Donc on a

$$\lim (\alpha_1 \alpha_{4p} - \alpha_1 \alpha_{2p+1}) = 0.$$

On en conclut, comme dans l'exemple précédent, que le cercle $A'B'C'$ est tangent au cercle fondamental et que le polygone R_0 est de la 1ère catégorie.

Ainsi tout polygone limite réduit est de la 1ère catégorie.

Tout ce qui précède ne s'applique qu'aux polygones de la 1ère espèce.

Passons d'abord aux polygones de la 2e espèce qui peuvent comme nous l'avons vu être ramenés à un polygone limite de la 1ère espèce. Supposons donc que P_0 soit un polygone de la 2e espèce; ce polygone sera équivalent à un autre R_0 de la 1ère espèce; si R_0 n'est pas de la 1ère catégorie, je dis que P_0 n'est pas réduit.

En effet envisageons la fonction φ définie plus haut; cette fonction dans le cas du 2d et du 3e exemple sera, pour fixer les idées, l'inverse du plus grand côté de R_0.

La fonction φ correspondant soit au polygone P_0, soit au polygone R_0 sera infiniment petite. Soient a et b les points de M_1 qui correspondent à R_0 et à P_0; chacun de ces deux points sera infiniment près d'une des frontières de la multiplicité M_1; soient c et d les points de ces frontières qui sont respectivement le plus rapprochés l'un de a et l'autre de b. Les coordonnées du point a sont fonctions de celles du point b, puisque les deux polygones correspondants R_0 et P_0 dérivent l'un de l'autre d'après une loi déterminée. Si a et b sont très voisins des frontières, comme nous le supposons ici, la position du point c dépend de celle du point d, de telle façon que les coordonnées d'un de ces points soient fonctions continues de celles de l'autre. Maintenant si les points c et d restant fixes, *à des infiniment petits près,* le point a se rapproche du point c de telle façon que la distance infiniment petite ac diminue de moitié par exemple, la distance infiniment petite bd diminuera aussi de moitié.

Si nous appelons φ_1 et φ_2 les valeurs de φ qui répondent aux points a et b, nous aurons à des infiniment petits près du 2d ordre

$$\varphi_1 = \overline{ac} \cdot f_1(c), \qquad \varphi_2 = \overline{bd} \cdot f_2(d)$$

les fonctions f_1 et f_2 étant des fonctions finies, en général et ne dépendant que de c et de d.

Si donc les points c et d restant fixes ou ne variant qu'infiniment peu, la distance ac diminue dans un certain rapport, les deux fonctions infiniment petites φ_1 et φ_2 diminueront dans le même rapport.

Cela posé, nous avons vu que si R_0 n'est pas de la 1ère catégorie, ce polygone n'est pas réduit et qu'on peut trouver un polygone équivalent R'_0 correspondant à une plus grande valeur de φ. Soit P'_0 le polygone de la 2de espèce qui dérive de R'_0 comme P_0 de R_0; soient a', b', c', d' les points qui sont à R'_0 et P'_0 ce que les points a, b, c, d sont à R_0 et à P_0; soient φ'_1 et φ'_2 les valeurs de φ qui correspondent à R'_0 et à P'_0. Les points c' et d', il est aisé de le constater, différeront infiniment peu de c et de d; on aura donc

$$\frac{ac}{a'c'} = \frac{bd}{b'd'}$$

$$\varphi'_1 = a'c'f_1(c') = a'c'f_1(c)$$

$$\varphi'_2 = b'd'f_2(d') = b'd'f_2(d)$$

à des infiniment petits près et par conséquent

$$\frac{\varphi_1}{\varphi'_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi'_2}.$$

Mais on a

$$\varphi'_1 > \varphi_1$$

on aura donc

$$\varphi'_2 > \varphi_2$$

et par conséquent le polygone P_0 ne sera pas réduit.

Ainsi, *un polygone limite de la 2e espèce ne peut être réduit que s'il est équivalent à un polygone de la 1ère espèce et de la 1ère catégorie.*

Le cas des polygones de la 3e espèce qui sont un cas particulier de ceux de la 1ère et de la 2e se traiterait d'après les mêmes principes. Nous n'allons étudier ici qu'un seul exemple. Nous fixerons ainsi les idées, et le lecteur se rendra mieux compte de la façon dont nous surmontons les différentes difficultés que si nous étudiions directement le cas général.

Nous choisirons le polygone R_0 du 2[d] exemple en supposant que les six côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\alpha_5$ et $\alpha_5\alpha_6$ croissent indéfiniment.

Nous supposerons que ce polygone est réduit, et nous allons faire voir qu'il est de la 1[ère] catégorie, c'est à dire que les cinq sommets α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 tendent à se confondre en un seul point situé sur la circonférence du cercle fondamental, et cela de telle sorte que le cercle $\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_6$ soit tangent au cercle fondamental.

Pour cela nous nous appuierons sur les deux principes suivants:

1°. Si le polygone R_0 est réduit, les côtés issus d'un sommet de rang impair sont plus petits que la diagonale qui joint ce sommet à un sommet quelconque de rang pair. En effet, soit C le côté $\alpha_1\alpha_2$, par exemple, et D une diagonale joignant α_1 à un sommet quelconque de rang pair. Il est aisé de construire un polygone R'_0 équivalent à R_0 et admettant mêmes côtés (en grandeur) que R_0, sauf que le côté C est remplacé par D. Si l'on avait $C > D$, le plus grand côté de R_0 serait plus grand que le plus grand côté de R'_0 et R_0 ne serait pas réduit.

2°. Supposons que les trois sommets d'un triangle ABC tendent respectivement vers trois points A', B', C', situés, le premier à l'intérieur du cercle fondamental, et les deux autres sur la circonférence de ce cercle. *Si les deux points B' et C' sont distincts l'un de l'autre,* les trois côtés croîtront indéfiniment, l'angle BAC tendra vers une limite finie, ainsi que la différence

$$AB + AC - BC$$

et par conséquent le côté BC sera plus grand que chacun des deux autres.

Cela posé, supposons que dans le polygone réduit R_0, les deux sommets α_{2n} et α_6 tendent vers deux points fixes B' et C' du plan. Les cinq sommets α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 dont la distance à α_6 est infinie, tendront vers certains points du cercle fondamental.

Si on avait:

$$\lim \alpha_4 \gtrless \lim \alpha_5$$

on aurait en vertu du 2[d] principe

$$\alpha_5\alpha_4 > \alpha_5\alpha_{2n}$$

ce qui est contraire au premier principe.

De même si on avait:

$$\lim \alpha_4 \gtrless \lim \alpha_3, \qquad \lim \alpha_3 \gtrless \lim \alpha_2 \qquad \text{ou} \quad \lim \alpha_2 \gtrless \lim \alpha_1$$

on aurait

$$\alpha_3\alpha_4 > \alpha_3\alpha_{2n}, \qquad \alpha_2\alpha_3 > \alpha_3\alpha_{2n} \qquad \text{ou} \quad \alpha_2\alpha_1 > \alpha_1\alpha_6$$

ce qui serait contraire au premier principe.

Donc les cinq sommets $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ tendent vers un seul et même point A' du cercle fondamental.

Joignons les deux points M et N définis plus haut. Si A' était à gauche de MN (c'est à dire du même côté que B') on aurait:

$$\alpha_5\alpha_{2n} < \alpha_5\alpha_6$$

et s'il était à droite

$$\alpha_1\alpha_6 < \alpha_1\alpha_{2n}$$

ce qui serait contraire au premier principe.

Ainsi A' est en M ou en N, c'est à dire que le cercle $A'B'C'$ est tangent au cercle fondamental, c'est à dire que R_0 est de la 1ère catégorie.

C. Q. F. D.

§ 14. *Méthode de continuité.*

Tous les lemmes que nous avons établis vont nous permettre d'appliquer avec toute rigueur la méthode de continuité.

Considérons une infinité de types T appartenant à une même classe et définis par un certain nombre de paramètres qui seront, si l'équation générale du type s'écrit

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad\qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

les modules de la relation (2) et les points singuliers de l'équation (1). Soit q le nombre de ces paramètres. Ces paramètres vont définir un point d'une certaine multiplicité M à q dimensions. Je dis que cette multiplicité est fermée et ne présente pas de frontière. En effet RIEMANN a démontré que si une multiplicité à q dimensions était limitée par une autre multiplicité, cette autre multiplicité devrait être à $q - 1$ dimensions. C'est ainsi qu'une surface, par exemple, ne peut être *découpée* (zerschnitten) que par une ligne et non par un point.

Or en faisant varier les paramètres du type, on ne pourrait arriver à la frontière de M qu'en atteignant certains points singuliers de cette multiplicité, correspondant au cas où le type T se réduit à un type T' plus simple (cf. § 9, page 238). Or cela ne peut arriver que de deux manières:

1° ou bien, si deux points singuliers de (1) venaient à se confondre; mais il faut pour cela une condition *complexe,* c'est à dire deux conditions *réelles.*

2° ou bien, si le genre de la relation (2) s'abaisse d'une unité, c'est à dire si la courbe représentée par cette relation acquiert un nouveau point double. Mais ici encore il faut pour cela deux conditions réelles.

Ainsi dans l'un comme dans l'autre cas, il faut s'imposer deux conditions, et les points singuliers qui satisfont à ces conditions forment une multiplicité à $q - 2$ dimensions qui ne peut servir de frontière à M qui en a q. J'appellerai σ_1, σ_2, ... ces multiplicités à $q - 1$ dimensions que je viens de définir.

Considérons maintenant le domaine D_0 défini au § 13. À chacun des points de ce domaine correspond un polygone R_0 et par conséquent une équation fuchsienne. Considérons les paramètres du type auquel elle appartient: ils définiront un certain point de la multiplicité M. Ainsi à tout point de D_0 correspondra un point de M et un seul. D'autre part, à tout point μ de M correspondant à un type fuchsien qui contient une équation fuchsienne, correspondra un point δ de D_0 et un seul. Il y a exception toutefois si le point δ se trouve sur l'une des multiplicités m_1, m_2, ... qui séparent D_0 du reste de la multiplicité M_1. Dans ce cas en effet, il y a deux ou plusieurs polygones équivalents réduits, de sorte qu'au point μ correspondent deux ou plusieurs points δ. Au domaine D_0 tout entier correspondra ou bien une portion de M, ou bien cette multiplicité tout entière.

Je dis que le premier cas ne se présentera pas. En effet, s'il se présentait, la multiplicité M serait partagée en deux parties, celle qui correspond à D_0 et celle qui ne correspond pas à D_0, et ces deux parties devraient être séparées l'une de l'autre par une multiplicité frontière, qui devrait avoir, d'après le théorème de RIEMANN, $q - 1$ dimensions.

Or comment pourrait-il arriver que, le point δ de D_0 se mouvant dans ce domaine, le point correspondant μ de M atteignît cette multiplicité frontière hypothétique?

Est-ce parce que le déterminant fonctionnel des coordonnées de μ par rapport à celles de δ s'annullerait? Mais cela n'arrivera jamais puisque le lemme du § 7 montre qu'à tout point μ ne peut correspondre qu'un seul point δ.

Est-ce parce que le point δ atteindrait l'une de ces multiplicités m_1, m_2, ... qui séparent le domaine D_0 des autres parties de la multiplicité M_1? Mais supposons, par exemple, que le point δ franchisse une multiplicité m_1 qui sépare le domaine D_0 d'un autre domaine D_1. Le point μ franchira alors une certaine multiplicité μ_1 qui correspondra à m_1; mais le point δ étant entré dans le domaine D_1 qui fait encore partie de la multiplicité M_1, à ce point δ correspondra encore un polygone R_0 et par conséquent une équation fuchsienne et un point de la multiplicité M. La multiplicité μ_1 ne sépare donc pas les types fuchsiens qui contiennent des équations fuchsiennes, de ceux qui n'en contiennent pas.

Est-ce enfin parce que le point δ atteindrait la limite même de la multiplicité M_1? Il arriverait alors que le polygone R_0 correspondant deviendrait un *polygone limite.* Mais comme δ est intérieur à D_0, le polygone R_0 est réduit et par conséquent *de la 1ère catégorie ou équivalent à un polygone de la 1ère catégorie.* Mais le 2d lemme nous a fait voir que lorsque R_0 tendait à se réduire à un polygone limite de la 1ère catégorie, le type correspondant T tendait à se réduire à un type plus simple T', c'est à dire que deux des points singuliers de (1) tendaient à se confondre, ou bien que le genre de (2) tendait à s'abaisser d'une unité. Donc lorsque le point δ en restant intérieur à D_0, tend vers une des frontières de M_1, le point correspondant μ tend vers l'une des multiplicités σ_1, σ_2, ... Mais ces multiplicités n'ont que $q - 2$ dimensions. Elles ne peuvent donc partager M en deux parties.

Donc M ne se partage pas en deux parties, l'une correspondant à D_0, l'autre ne correspondant pas à D_0.

Donc *tout type fuchsien contient une équation fuchsienne.*

§ 15. *Application particulière.*

Nous allons donner des principes qui précèdent une application particulière. Nous choisirons pour cela le cas le plus simple qui puisse se présenter, c'est à dire le 1^{er} exemple du § 12, en supposant que R_0 n'a que 6 côtés. C'est le cas du paraboloïde (1') du § 12. Cet exemple facilitera l'intelligence de ce qui précède.

Dans le cas qui nous occupe, la multiplicité M_1 est représentée comme on l'a vu par le paraboloïde (1'). Voyons ce que devient la multiplicité M.

L'équation fuchsienne engendrée par R_0 admet 4 points singuliers et de telle façon que les 4 équations déterminantes aient chacune une racine double.

Soient α, β, γ, δ ces quatre points singuliers. Soit $\psi(\mu)$ le rapport anharmonique de μ par rapport aux trois points β, γ, δ de telle sorte que

$$\psi(\beta) = 0, \qquad \psi(\gamma) = 1, \qquad \psi(\delta) = \infty.$$

Posons:

$$\psi(\alpha) = X.$$

Le type auquel appartient l'équation fuchsienne considérée est entièrement défini quand on connaît X. La multiplicité M se réduit donc à la sphère ou au plan représentatif de la quantité complexe X.

Quand on permute de toutes les manières possibles les quatre points singuliers, on obtient pour X les 6 valeurs suivantes:

$$(1) \qquad \left[X,\ 1 - X,\ \frac{1}{X},\ \frac{1}{1-X},\ 1 - \frac{1}{X},\ \frac{X}{X-1}\right].$$

On peut partager le plan des X en 6 régions

$$\rho_0 + \rho_0',\ \rho_1 + \rho_1',\ \rho_2 + \rho_2',\ \rho_3 + \rho_3',\ \rho_4 + \rho_4',\ \rho_5 + \rho_5'.$$

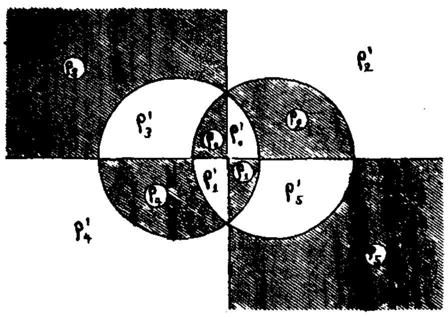
La figure 1 indique cette subdivision; les deux cercles et les droites qui y sont représentées ont pour équations:

$$\operatorname{mod} X = 1, \quad \operatorname{mod}(1 - X) = 1, \quad \text{partie réelle de } X = \frac{1}{2}$$

$$\text{partie imag. de } X = 0.$$

On voit aisément que si X est intérieur à ρ_0 et si X_0 est la quantité imaginaire conjuguée de X, les quantités $1 - X$, $\frac{1}{1-X}$, $\frac{X}{X-1}$, $1 - \frac{1}{X}$, $\frac{1}{X}$, $1 - X_0$, X_0, $\frac{1}{X_0}$, $1 - \frac{1}{X_0}$, $\frac{X_0}{X_0 - 1}$, $\frac{1}{1 - X_0}$ font respectivement partie de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho'_0, \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4, \rho'_5$.

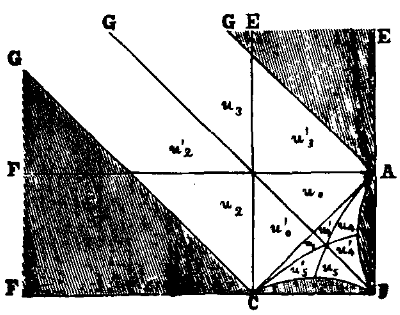
Fig. 1.



Maintenant il s'agit de subdiviser le paraboloïde (1') en une infinité de domaines D_0, D_1, ... comme il a été dit au § 13, c'est à dire de telle façon que D_0 contienne les points de ce paraboloïde qui correspondent à des polygones R_0 réduits et qu'à chaque point de M corresponde un point et un seul de chacun de ces domaines. Ce ne sera pas tout. De même que M se partage en 12 régions ρ et ρ', de même D_0 se partagera en 12 régions partielles qui correspondront respectivement aux 12 régions de M; et il en sera de même de chacun des domaines D_1, D_2, etc.

La figure 2 représente le paraboloïde (1') projeté sur le plan des xy; la droite BCF a pour équation $y = 1$ et la droite BAE, $x = 0$. La droite $x = 0$, $y = 1$ se projette tout entière au point B. La partie non hachée représente la projection de D_0. Cette projection est limitée par les droites CG et AG et par les paraboles AB et BC. Elle est subdivisée en douze régions par les droites AC, CE, AF, BG et par deux courbes.

Fig. 2.



Ces droites ont pour équations:

$$CG,\ x + y = 0;\quad BG,\ x + y = 1;\quad AG,\ x + y = 2;\quad AC,\ x - y = -1;$$
$$AF,\ y = 2;\quad CE,\ x = -1.$$

Les deux paraboles AB et BC sont tangentes aux droites AC et BG. Enfin les deux autres courbes tracées sur cette figure sont des arcs de coniques. On voit que le domaine D_0 est divisé en 12 régions u_i et u'_i correspondant respectivement aux 12 régions ρ_i et ρ'_i.

Voici comment il faut s'y prendre pour démontrer que quand le point δ parcourt sur la multiplicité M_1 le domaine u_i ou u'_i, le point correspondant μ de la multiplicité M parcourt la région ρ_i ou ρ'_i.

Soit R'_0 le polygone symétrique de R_0 par rapport à sa diagonale be. J'appellerai $a'b'c'd'e'f'$ les sommets de R'_0, mais afin qu'ils se présentent dans le même ordre circulaire que ceux de R_0, a' sera le symétrique de c, c' celui de a; d' sera le symétrique de f, f' celui de d; quant à b' et e' ils ne différeront pas de b et e. Grâce à ces conventions, on voit aisément que les nouvelles valeurs de x, y, z sont respectivement:

$$1 - y, \qquad 1 - x, \qquad 1 - z.$$

Soit maintenant X' la valeur de X qui correspond au polygone R'_0, on voit aisément que l'on a:

$$X' = 1 - X_0.$$

Si en particulier le polygone R_0 est symétrique par rapport à be, il ne diffère pas de R'_0; on a:

$$x + y = 1, \qquad z = \frac{1}{2}$$
$$X = 1 - X_0.$$

Si donc le point δ décrit la droite BG, le point μ décrira la droite:

$$\text{partie réelle de } X = \frac{1}{2}.$$

On voit de même que si on change R_0 dans le polygone symétrique par rapport à la diagonale cf, x, y et z se changent en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{y}$ et

X en $\frac{1}{X_0}$. On en conclut que si R_0 est symétrique par rapport à cf, c'est à dire si le point δ décrit la droite CE, le point μ décrit le cercle:

$$\operatorname{mod} X = 1 .$$

Le polygone R_0 est équivalent à un polygone R_0' qu'on obtient en joignant bf, et en transformant le triangle baf par la substitution qui change ba en bc. On obtient ainsi un polygone $bfedcf'$; f' étant le transformé de f par la substitution en question. Prenons le symétrique de R_0' par rapport à la diagonale bd. Ce symétrique pourra être regardé comme dérivé d'un certain polygone R_0'' de la même façon que R_0' de R_0. On voit aisément qu'en changeant R_0 en R_0'', on change x, y et z en $\frac{z^2}{x}$, $1 + \frac{z(z-1)}{x}$ et z et X en X_0.

Si donc le point δ décrit la droite AC, le point μ décrira la droite

$$X = X_0, \qquad \text{partie imaginaire de } X = 0.$$

Le problème suivant: Étant donné un type fuchsien, trouver le groupe fuchsien qui engendre une équation fuchsienne contenue dans ce type, est un problème très compliqué dont nous dirons quelques mots plus loin.

Mais, d'après ce qui précède, dans les cas particuliers suivants:

$$X = \frac{1}{2}, \quad X = -1, \quad X = 2, \quad X = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad X = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

il se résout par de simples considérations de symétrie, et on trouve respectivement pour les paramètres qui définissent le polygone générateur du groupe fuchsien correspondant:

$$\begin{array}{lll}
x = -\frac{1}{2} & y = \frac{3}{2} & z = \frac{1}{2} \\[1ex]
x = -1 & y = 3 & z = \frac{1}{3} \\[1ex]
x = -2 & y = 2 & z = \frac{2}{3} \\[1ex]
x = -1 & y = 2 & z = \frac{1}{2} \\[1ex]
x = -\frac{1}{4} & y = \frac{3}{4} & z = \frac{1}{2}.
\end{array}$$

J'appelle S_1, S_2 et S_3 les opérations dont il a été question plus haut et dont voici la définition d'après les changements qu'elles font subir à x, y, z et X.

$$S_1 \qquad (x,\ y,\ z;\ 1-y,\ 1-x,\ 1-z) \qquad (X,\ 1-X_0)$$

$$S_2 \qquad \left(x,\ y,\ z;\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{y}\right) \qquad \left(X,\ \frac{1}{X_0}\right)$$

$$S_3 \qquad \left(x,\ y,\ z;\ \frac{z^2}{x},\ 1+\frac{z(z-1)}{x},\ z\right) \qquad (X,\ X_0).$$

Envisageons:

1°. Le groupe Γ_1 dérivé de ces trois substitutions. Si on transforme le triangle u_0 par toutes les substitutions de ce groupe, on obtiendra une infinité de triangles analogues qui rempliront toute la multiplicité M_1.

2°. Le groupe Γ_2 formé de toutes les combinaisons *en nombre pair* des substitutions S_1, S_2 et S_3. Ce que ce groupe a de remarquable, c'est qu'il est isomorphe au groupe

$$\left(z,\ \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

où α, β, γ, δ sont des entiers tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

3°. Le groupe Γ formé de toutes celles des substitutions du groupe Γ_1 qui n'altèrent pas X. Si l'on applique à D_0 toutes les transformations de Γ, on obtient une série de domaines D_1, D_2, etc. qui remplissent toute la multiplicité M_1. Le groupe Γ est isomorphe au groupe des substitutions

$$\left(z,\ \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

où α, β, γ, δ sont entiers et où:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \qquad \alpha\equiv\delta\equiv 1, \qquad \beta\equiv\gamma\equiv 0 \qquad (\text{mod } 2)$$

c'est à dire au groupe que l'on rencontre dans l'étude de la fonction modulaire.

Chacun des domaines D_1, D_2, etc. est divisé en 12 régions de la même façon que D_0 est divisé en u_i et u_i'. Mais D_0 peut être regardé aussi comme divisé en 2 triangles:

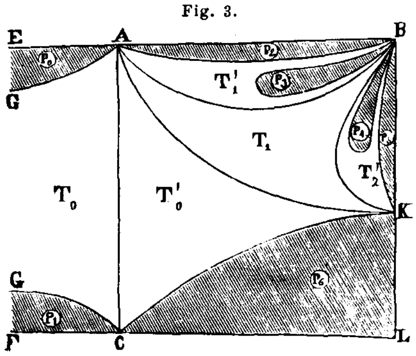
$$T_0 = u_0 + u_0' + u_2 + u_2' + u_3 + u_3'$$

et

$$T_0' = u_1 + u_1' + u_4 + u_4' + u_5 + u_5'.$$

De même chacun des domaines D_1, D_2, etc. seront regardés comme partagés en 2 triangles T_1 et T_1', T_2 et T_2' etc. C'est ce mode de subdivision que nous avons adopté dans les figures 3, 4 et 5 qui représentent en perspective des portions du paraboloïde (1').

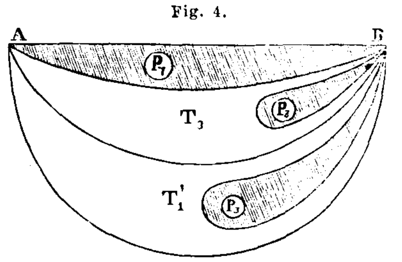
Fig. 3.



Dans la figure 3 la droite BKL représente la génératrice $x = 0$, $y = 1$ qui dans la figure 1 n'était représentée que par le point B. On remarquera aussi dans cette figure les cinq triangles T_0, T_0', T_1, T_1', T_2' non hachés, et les portions P_0 à P_6 du paraboloïde où la subdivision n'est pas représentée et qui sont couvertes de hachures. On verra aussi que chacun des deux triangles T_1' et T_2' a deux de ses sommets confondus en B.

La figure 4 représente à plus grande échelle la subdivision de la région $T_1' + P_2 + P_3$. La portion P_2 a été divisée en un triangle T_3 et deux régions hachées P_7 et P_8. Les régions hachées sont dans les quatre figures 2, 3, 4 et 5 celles où la subdivision n'est pas représentée.

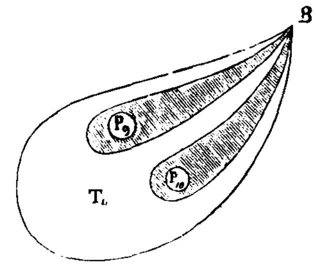
Fig. 4.



Enfin la figure 5 représente le détail de la région P_3 qui est divisée en un triangle T_4 et deux régions hachées P_9 et P_{10}. On voit que le triangle T_4 a ses trois sommets confondus en B.

Ces figures suffisent pour qu'on se rende compte de toutes les particularités de la subdivision. En effet la région P_6 ou CKL se traite comme la région AKB; les régions P_0 et P_1 se traitent comme la région $ABLC$, sauf qu'une partie de la figure est rejetée à l'infini. Les régions

Fig. 5.



P_5 et P_7 se traitent comme P_2; enfin P_4, P_8, P_9 et P_{10} se traitent comme P_3.

Les points des droites BE et FL correspondent à des polygones de la 1^ère^ espèce, et sur ces droites, les points A et C sont les seuls qui correspondent à des polygones de la 1^ère^ catégorie; ce sont les seuls aussi qui fassent partie de D_0. Sur la droite BL qui correspond à des polygones de la 2^e^ espèce, le point K est le seul qui fasse partie de D_0. Et en effet la substitution S_3 le change dans le point

$$x = y = \infty, \qquad z = \frac{1}{2}$$

qui correspond à un polygone de la 1^ère^ catégorie.

§ 16. *Théorie des sous-groupes.*

Nous venons de démontrer que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne; il faut maintenant trouver l'équation fuchsienne contenue dans un type fuchsien donné, ou bien encore trouver le groupe fuchsien correspondant.

Mais avant d'aborder ce problème, il faut dire quelques mots des sous-groupes contenus dans un groupe fuchsien donné.

Ces sous-groupes sont de deux sortes:

1°. Les sous-groupes d'indice fini, c'est à dire ceux qui sont tels qu'on peut obtenir toutes les substitutions du groupe principal en multipliant toutes les substitutions du sous-groupe par un nombre fini de substitutions.

2°. Les sous-groupes d'indice infini.

A un autre point de vue, les sous-groupes sont encore de deux sortes:

1°. Les sous-groupes distingués (*ausgezeichnet*) comme disent les Allemands, c'est à dire ceux qui sont permutables à toutes les substitutions du groupe principal.

2°. Les sous-groupes non distingués.

(Cf. Klein, Mathematische Annalen, Bd XVII; Walther Dyck, *Ueber reguläre Riemannsche Fläche, Gruppentheoretische Studien.* Mathematische Annalen.)

Les sous-groupes d'indice fini ne sont autre chose que des groupes fuchsiens: Soit G le groupe principal et g le sous-groupe qui y est contenu. Soit R_0 le polygone générateur de G; R_1, R_2, ... ses divers transformés par les diverses substitutions de ce groupe. Soit P_0 le polygone générateur de g. Il est aisé de voir que P_0 est formé par la réunion d'un certain nombre de polygones $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Choisissons d'une manière quelconque $n+1$ polygones parmi les polygones:

$$R_0, R_1, R_2, \ldots$$

Soient par exemple $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_n$ ces $n+1$ polygones et supposons que leur ensemble forme un seul tout simplement connexe. Soit P_0 cet ensemble. Un certain nombre de côtés des polygones R resteront libres; ce seront les côtés de P_0. Il reste à voir comment ces côtés doivent être distribués en paires de côtés conjugués. Soit a_0b_0 un côté de R_0, $a'_0b'_0$ son conjugué; soient a_1b_1, $a'_1b'_1$ les côtés homologues de R_1; a_2b_2, $a'_2b'_2$ ceux de R_2, etc. Parmi les $n+1$ côtés a_ib_i, il y en aura un certain nombre p qui resteront libres; de même parmi les $n+1$ côtés $a'_ib'_i$ il y en aura p, c'est à dire un nombre précisément égal, qui resteront libres. Nous pourrons alors conjuguer chacun des côtés a_ib_i restés libres à l'un des côtés $a'_ib'_i$ restés libres et cela d'une manière arbitraire Tous les côtés de P_0 se trouveront ainsi répartis en paires de côtés conjugués.

Il y a encore une condition pour que P_0 puisse engendrer un groupe discontinu; c'est que si l'on répartit ses sommets en cycles, la somme des angles de chaque cycle soit une partie aliquote de 2π. Si cette condition est remplie, P_0 engendrera un groupe fuchsien qui sera un sous-groupe de G. On obtiendra d'ailleurs de la sorte tous les sous-groupes d'indice fini de G.

Soient maintenant:

$$X = F_1(z), \quad Y = F_2(z), \quad F_3(z), \ldots \tag{1}$$

les fonctions fuchsiennes engendrées par G et

(2) $$x = f_1(z), \quad y = f_2(z), \quad f_3(z), \ \dots$$

les fonctions fuchsiennes engendrées par g. La classe des fonctions fuchsiennes (2) contiendra la classe des fonctions (1) tout entière comme cas particulier.

Supposons d'abord que G et g soient tous deux de genre 0. Alors toutes les fonctions (1) s'expriment rationnellement en X, toutes les fonctions (2) rationnellement en x. On en conclut que X est une fonction rationnelle de x. Il est d'ailleurs facile de trouver les coëfficients de cette fonction rationnelle, quand on connaît les valeurs de X pour les différents sommets de R_0.

Si maintenant G est de genre 0 et g de genre p, toutes les fonctions (1) sont rationnelles en X et X est rationnel en x et en y.

Il peut arriver enfin que ni G, ni g ne soient de genre 0. Dans ce cas X et Y sont rationnels en x et y et la réciproque n'est pas vraie.

Il est à remarquer que cette théorie est tout à fait analogue à celle de la transformation des fonctions elliptiques. Qu'est-ce en effet que cette transformation? Elle consiste à étudier la relation qui a lieu entre les fonctions elliptiques engendrées par le groupe

(3) $(z, m\omega_1 + n\omega_2)$ (ω_1, ω_2 périodes données; m, n entiers quelconques)

et les fonctions elliptiques engendrées par le groupe

(4) $$(z, m\Omega_1 + n\Omega_2)$$

en choisissant ces nouvelles périodes Ω_1, Ω_2 de telle sorte que ce second groupe soit un sous-groupe du premier. Remarquons également que si l'on applique ces principes aux fonctions fuchsiennes engendrées par l'équation de la série hypergéométrique, on retrouvera sans peine les résultats obtenus par M. Goursat dans sa remarquable thèse.

Dans le cas particulier où g est un sous-groupe distingué, la subdivision de P_0 en $n + 1$ polygones R est régulière, même après qu'on a plié et déformé P_0 de façon à recoller ensemble les côtés conjugués et à faire de ce polygone une surface fermée. De plus les relations entre X, Y, x et y sont d'une nature particulière. Ainsi, si par exemple G et

g sont tous deux de genre o, le groupe de l'équation algébrique qui lie X et x est une seule fois transitif.

Considérons en particulier un exemple qui nous sera utile dans la suite. Supposons que R_0 soit un polygone

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}\beta_n\beta_{n-1} \ldots \beta_3\beta_2$$

symétrique par rapport à sa diagonale $\alpha_1\alpha_{n+1}$ de telle sorte que β_i soit symétrique de α_i. Je suppose de plus que les côtés symétriques sont conjugués et que tous les sommets sont sur le cercle fondamental et tous les angles nuls. Soit $X = F(z)$ une des fonctions fuchsiennes engendrées par R_0 et à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. On aura pu choisir $F(z)$ de telle façon que cette fonction reste réelle sur tout le périmètre de R_0 et sur la diagonale $\alpha_1\alpha_{n+1}$. (Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta Mathematica, T. 1, p. 232 et 272.)

Cette fonction donnera alors la représentation conforme du polygone

$$r_0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_1$$

sur un demi-plan. Soit maintenant R_1 le transformé de R_0 par la substitution qui change $\beta_i\beta_{i+1}$ en $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Ce polygone sera symétrique de R_0 par rapport à $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Considérons maintenant le polygone $P_0 = R_0 + R_1$ et regardons comme conjugués deux côtés de ce polygone s'ils sont symétriques par rapport à $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Tous les cycles de ce polygone étant paraboliques, il engendrera un système de fonctions fuchsiennes. Je choisirai parmi elles une de celles à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et qui de plus restent réelles sur tout le périmètre de R_0 et de R_1.

Je l'appellerai $x = f(z)$. Cette fonction donnera la représentation conforme sur un demi-plan, non plus de r_0 comme dans le cas précédent, mais du polygone R_0 tout entier.

Pour achever de définir x je supposerai:

$$f(\alpha_1) = 0, \qquad f(\alpha_{n+1}) = \infty$$

et j'aurai:

$$x = \pm \sqrt{\frac{X - F(\alpha_1)}{X - F(\alpha_{n+1})}}.$$

Nous pourrons prendre indifféremment le signe $+$ ou le signe $-$.

Poussons la chose plus loin. Soit P_1 le polygone symétrique de P_0 par rapport à un de ses côtés que j'appelle C. Soit $Q_0 = P_0 + P_1$ et regardons comme conjugués deux côtés de Q_0 symétriques par rapport à C. Soit y une fonction fuchsienne engendrée par Q_0 et à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Je suppose que y soit réel le long du périmètre de Q_0 et par conséquent le long de C.

Je pose d'ailleurs:

$$y = \varphi(z), \qquad \varphi(\alpha_i) = 0, \qquad \varphi(\alpha_{i+1}) = \infty$$

d'où:

$$y = \sqrt{\frac{x - f(a_i)}{x - f(a_{i+1})}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{X - F(a_1)}{X - F(a_{n+1})}} - \sqrt{\frac{F(a_i) - F(a_1)}{(F(a_i) - F(a_{n+1})}}}{\sqrt{\frac{X - F(a_1)}{X - F(a_{n+1})}} - \sqrt{\frac{F(a_{i+1}) - F(a_1)}{F(a_{i+1}) - F(a_{n+1})}}}}.$$

Cet exemple montre quelle est la nature des relations qui existent entre les fonctions fuchsiennes dérivées d'un groupe fuchsien G et celles qui dérivent d'un sous-groupe de G.

Nous allons maintenant dire quelques mots des groupes distingués d'indice fini ou infini. Voici comment on peut être conduit à envisager de tels groupes. Soit

$$(5) \qquad \frac{d^p w}{dx^p} + \varphi_{p-1}\frac{d^{p-1}w}{dx^{p-1}} + \ldots + \varphi_0 w = 0$$

une équation linéaire où les coëfficients φ soient rationnels en x. Supposons que les points singuliers de cette équation soient:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

et de telle façon que les racines de l'équation déterminante relative à a_i soient toutes des multiples de $\frac{1}{K_i}$, K_i étant un entier positif. Si on ne peut trouver aucun nombre entier tel que ces racines soient multiples de $\frac{1}{K_i}$, on fera $K_i = \infty$.

Nous pourrons en vertu des § 8 à 14, trouver une équation fuchsienne:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \psi(x)v \tag{6}$$

admettant pour points singuliers

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_n$$

et de telle façon que la différence des racines de l'équation déterminante relative à a_i soit $\frac{1}{K_i}$. Cette équation fuchsienne appartiendra à un type fuchsien que j'appelle T.

Soit z le rapport des intégrales; x sera une fonction fuchsienne de z et j'appelle G le groupe de cette fonction. Les intégrales

$$w_1, \; w_2, \; w_3, \; \ldots, \; w_p$$

de l'équation (5) sont des fonctions uniformes de z. Soit S une substitution de G. Quand nous appliquerons à z cette substitution, les intégrales w deviendront:

$$w_1^1, \; w_2^1, \; w_3^1, \; \ldots, \; w_p^1$$

et il est clair que les w_i^1 sont des fonctions linéaires des w_i; j'appellerai Σ la substitution linéaire qui fait passer des w_i aux w_i^1 et j'écrirai pour abréger:

$$w(z \,.\, S) = [w(z)]\Sigma. \tag{7}$$

Cette équation exprimera que quand z subit la substitution S, les w subissent la substitution Σ.

Les substitutions Σ formeront un groupe Γ qui sera isomorphe à G; mais cet isomorphisme pourra être holoèdrique ou mériédrique. S'il est mériédrique, il y aura une infinité de substitutions:

$$S_1, \; S_2, \; \ldots, \; S_p, \; \ldots \tag{8}$$

du groupe G auxquelles correspondra la substitution unité dans le groupe Γ. Ces substitutions (8) formeront un sous-groupe g du groupe G. Je dis que ce sous-groupe est distingué. En effet soit s une substitution de

G ne faisant pas partie de g, et σ la substitution correspondante du groupe Γ. Soit S_1 une substitution de g; je dis que $s^{-1}S_1s$ fera aussi partie de g. En effet nous aurons:

$$w(zS_1) = w(z)$$
$$w(zs^{-1}S_1) = w(zs^{-1})$$
$$w(zs) = [w(z)]\sigma$$
$$w(zs^{-1}S_1s) = [w(zs^{-1}S_1)]\sigma = [w(zs^{-1})]\sigma$$
$$w(z) = w(zs^{-1}s) = [w(zs^{-1})]\sigma$$

ou enfin

$$w(zs^{-1}S_1s) = w(z).$$

C. Q. F. D.

Nous sommes ainsi conduits à envisager des groupes g distingués et à indice fini ou infini et des fonctions w de z qui ne sont pas altérées par les substitutions de ces sous-groupes. Supposons que l'équation (5) s'intègre algébriquement, alors le groupe des substitutions Σ est d'ordre fini; donc g est un sous-groupe d'indice fini. Ainsi la question de l'intégration algébrique des équations linéaires se ramène à celle des sous-groupes distingués d'indice fini et de la transformation des fonctions fuchsiennes. Nous nous occuperons de tout cela plus tard.

Lorsque g est d'indice infini, on peut trouver néanmoins quelque chose d'analogue au polygone générateur d'un groupe fuchsien. Soient en effet

$$(9) \qquad 1,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_p,\ \ldots$$

une infinité de substitutions de G, choisies de telle sorte que si

$$(10) \qquad 1,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots,\ \sigma_p,\ \ldots$$

sont les substitutions correspondantes de Γ, le tableau (10) contienne chacune des substitutions de Γ et ne la contienne qu'une fois.

Soient maintenant

$$R_0,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots,\ R_p,\ \ldots\ .$$

les polygones analogues à R_0 et correspondant aux diverses substitutions du tableau (9). L'ensemble de ces polygones formera une région Q_0 qui sera une sorte de polygone générateur du groupe g.

Si en particulier l'équation (5) est du 2[d] ordre et que nous appelions t le rapport des intégrales, t sera une fonction uniforme de z, inaltérée par les substitutions de g. Supposons maintenant que (5) appartienne au type T et que x soit une fonction kleinéenne de t n'existant que dans un de ces domaines D dont la limite n'est pas une courbe analytique et dont il a été question dans le *Mémoire sur les groupes kleinéens*. Alors le groupe g se réduira à la substitution unité et t ne pourra prendre qu'une fois et une seule chacune des valeurs intérieures à D. La relation entre t et z nous donne alors la représentation conforme de D sur un cercle.

J'arrive au point le plus important. Je suppose que (5) soit une équation fuchsienne appartenant à un type T' et que le type T soit subordonné à T'. Alors x est fonction fuchsienne de t. Il arrive alors que t est fonction uniforme de z inaltérée par g. Elle peut prendre toutes les valeurs intérieures au cercle fondamental et n'en peut prendre d'autres. Elle ne peut prendre d'ailleurs chacune d'elles qu'une seule fois à l'intérieur de Q_0, mais elle peut prendre chacune d'elles une infinité de fois à l'intérieur du cercle fondamental.

Il reste à examiner ce qui se passe quand les coëfficients φ de l'équation (5) au lieu d'être rationnels en x, sont rationnels en x et y, ces deux variables étant liées par la relation:

$$\theta(x, y) = 0. \tag{11}$$

Je vais considérer une équation (6)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \psi(x)v \tag{6}$$

où ψ est rationnel en x et qui admet pour points singuliers non seulement ceux de l'équation (5) mais encore ceux de l'équation (11), c'est à dire les valeurs de x pour lesquelles $\frac{d\theta}{dy} = 0$. Si b est un point singulier de cette espèce et si dans le voisinage de ce point singulier λ valeurs de y se permutent entre elles de la manière bien connue, la différence des racines de l'équation déterminante de (6) devra être $\frac{1}{K}$, K étant un multiple de λ. Remarquons bien ce qui suit pour éviter toute confusion; à chaque valeur de x correspondent plusieurs points de la surface de RIEMANN (11). Si l'un de ces points est un point singulier de (5), en général il n'en sera pas de même des autres, et cependant tous ces points analytiques sont alors des points singuliers de (6); car $\psi(x)$ est rationnel en x et indépendant de y et par conséquent, il n'y a pas lieu de s'inquiéter de savoir à quel feuillet de la surface de RIEMANN, appartient le point analytique correspondant.

Cela posé, soit G le groupe de l'équation (6), z le rapport des intégrales, x sera une fonction fuchsienne de z; y sera une fonction uniforme de z, mais elle ne restera pas inaltérée par toutes les substitutions de G. Si j'appelle g' le groupe formé par toutes les substitutions de G qui n'altèrent pas y, ce groupe sera un sous-groupe d'indice fini de G; mais il ne sera pas distingué en général. (À moins que le groupe de l'équation algébrique (11) ne soit une seule fois transitif.)

Si au contraire je considère à la fois les m valeurs de y qu'on peut tirer de l'équation (11) en la supposant de degré m en y, et si j'appelle g'' le groupe formé par les substitutions de G qui n'altèrent *aucune* de ces m valeurs, g'' sera un sous-groupe distingué.

Appelons enfin g le groupe formé par les substitutions de G qui n'altèrent pas les intégrales de l'équation (5), ce sera un sous-groupe d'ordre fini de G et de g'. Considéré comme sous-groupe de G, il ne sera pas distingué; comme sous-groupe de g', il sera distingué.

Nous pourrons regarder le groupe g' comme engendré par un polygone P_0' formé par la réunion de m polygones transformés de R_0; le groupe g sera engendré par une région Q_0 formée par la réunion d'une infinité de polygones transformés de P_0'. Quant à g'', il sera engendré par un polygone P_0'' formé par la réunion de ω polygones transformés de R_0, ω étant l'ordre du groupe de l'équation algébrique (11). Si ce dernier groupe est une seule fois transitif, $\omega = m$ et g' et g'' ne diffèrent pas l'un de l'autre.

§ 17. *Troisième problème. Types symétriques.*

On a vu au § 10 avec quelle facilité on démontre que tout type fuchsien symétrique contient une équation fuchsienne; nous allons faire voir maintenant comment on peut calculer, avec une approximation indéfinie, les coëfficients de cette équation.

Considérons un type symétrique T:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \phi(x)v. \tag{1}$$

$\phi(x)$ étant rationnel en x, tous les points singuliers de cette équation sont réels et toutes les équations déterminantes ont une racine double. Soient:

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n$$

les points singuliers réels en question. Au lieu de supposer que ces points singuliers sont réels, nous supposerons qu'ils sont tous situés sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. Il est aisé en effet de passer d'un cas à l'autre par un changement linéaire de la variable x. Il s'agit de déterminer les coëfficients restés arbitraires dans l'équation (1) de telle façon que cette équation soit fuchsienne. Supposons le problème résolu. Soit z le rapport des intégrales. La variable x sera une fonction fuchsienne de z et le polygone générateur R_0 de cette fonction sera symétrique et aura tous ses sommets sur le cercle fondamental. Il sera partagé par une de ses diagonales en deux polygones symétriques r_0 et r'_0. Je suppose que le centre du cercle fondamental soit intérieur à r_0 et j'appelle b un certain point que je suppose *réel* et intérieur également à r_0. La fonction:

$$x = f(z)$$

sera une des fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. J'achèverai de la définir par les conditions suivantes:

$$\begin{array}{rl}
\operatorname{mod} x = 1, & \text{quand } z \text{ est situé sur le périmètre de } r_0 \\
x = 0, & \text{pour } z = 0 \\
\arg x = 0, & \text{pour } z = b.
\end{array}$$

La fonction $x = f(z)$ nous donne alors la représentation conforme du polygone r_0 sur le cercle de centre o et de rayon 1. Cela posé, soient R_1, R_2, ... les divers transformés de R_0 par le groupe engendré par ce polygone. Ces polygones rempliront tout le cercle fondamental et chacun d'eux sera subdivisé en deux parties symétriques r_1 et r_1', r_2 et r_2', etc. Considérons un certain nombre de polygones r_i et r_k' dont l'ensemble forme un seul tout simplement connexe. Soit P_0 le polygone formé pas cet ensemble. Considérons la fonction

$$y = \theta(z)$$

qui donne la représentation conforme de P_0 sur le cercle de centre o et rayon 1. Pour achever de définir y, je suppose:

$$\theta(0) = 0, \qquad \arg\theta(b) = 0.$$

Cette fonction $\theta(z)$ sera une fonction fuchsienne dont le groupe g sera un sous-groupe du groupe G de la fonction $f(z)$. Il résulte de là que x est une fonction $\varphi(y)$ rationnelle en y. Il est d'ailleurs facile (et nous reviendrons sur ce point un peu plus loin) de trouver les coëfficients de la fonction $\varphi(y)$, quand on connaît les points singuliers a et la situation relative des différents polygones r_i et r_k' dont l'ensemble constitue P_0. Or les quantités a nous sont données et nous pouvons disposer arbitrairement de la situation relative des polygones r_i et r_k'. Les coëfficients de la fonction rationnelle $\varphi(y)$ peuvent donc être regardés comme connus.

Nous pourrons toujours, à la condition de prendre un assez grand nombre de polygones r_i et r_k', choisir ces polygones de telle sorte que le cercle de centre o et de rayon ρ soit tout entier intérieur à P_0, et cela quelque grand que soit ρ pourvu, bien entendu, que ce rayon reste inférieur à 1. On aura alors l'inégalité suivante:

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y < \frac{\operatorname{mod} z}{\rho}.$$

On pourra donc choisir un rayon ρ suffisamment voisin de 1 et par conséquent un polygone P_0 suffisamment grand pour que la différence entre $\operatorname{mod} z$ et $\operatorname{mod} y$ soit aussi petite que l'on veut. En d'autres termes quand ρ tend vers l'unité on a

$$\lim \operatorname{mod} y = \operatorname{mod} z.$$

Mais ce n'est pas tout. Soit:

$$z = \xi + i\eta, \qquad u = \log \operatorname{mod} \frac{y}{z}, \qquad v = \arg \frac{y}{z}$$

Supposons que z soit un certain point tel que:

$$\operatorname{mod} z < \rho_1 < \rho < 1$$

ρ_1 étant une quantité positive convenablement choisie.

Nous aurons à l'intérieur du cercle de rayon ρ

$$0 < u < \log \frac{1}{\rho}.$$

On en conclut qu'à l'intérieur du cercle de rayon ρ_1, on a

$$\left|\frac{du}{d\xi}\right| < \frac{4 \log \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)^2} > \left|\frac{du}{d\eta}\right|.$$

Mais:

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{dv}{d\eta}, \qquad \frac{du}{d\eta} = \frac{dv}{d\xi}.$$

On en conclut que $\frac{dv}{d\xi}$ et $\frac{dv}{d\eta}$ tendent *uniformément* vers 0 quand ρ tend vers 1. Or pour $z = b$, on a $v = 0$; on peut donc écrire:

$$v = \int_b^z \left\{\frac{dv}{d\xi} d\xi + \frac{dv}{d\eta} d\eta\right\}$$

d'où l'on conclut:

$$\lim v = 0, \qquad \text{pour } \lim \rho = 1$$

et

$$\lim (u + iv) = 0$$

$$\lim \frac{y}{z} = 1, \qquad \lim y = z.$$

Je vais maintenant démontrer que pour une valeur quelconque de z, la limite de la fonction rationnelle $\varphi(z)$ (qui n'est autre que $\varphi(y)$ où y est remplacé par z) est précisement la fonction fuchsienne $f(z)$. Nous avons

$$y = \theta(z).$$

Posons de même

$$z = \theta(z_1).$$

Je dis que

$$\lim z_1 = z.$$

En effet lorsque z est à l'intérieur du cercle de centre o et de rayon ρ_1, nous avons:

$$\operatorname{mod}\frac{dy}{dz} > 1 - \frac{\log\left(\frac{1}{\rho}\right)\sqrt{32}}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)^2}.$$

J'appelle pour abréger K le second membre de cette inégalité. Or nous avons:

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y$$

et par conséquent

$$\operatorname{mod} z_1 < \operatorname{mod} z < \rho_1.$$

Il vient donc

$$|z_1 - z| < |y - z|\frac{1}{K}.$$

Or

$$\lim|y - z| = 0 \quad \text{donc} \quad \lim|z - z_1| = 0.$$

Nous avons d'ailleurs:

$$\varphi(z) = f(z_1).$$

Mais $f(z)$ est une fonction continue et comme la différence $z - z_1$ tend vers o, nous aurons:

$$\lim f(z_1) = f(z)$$

ou

$$\lim \varphi(z) = f(z).$$

C. Q. F. D.

On démontrerait de même que la limite de la dérivée n^e de $\varphi(z)$ est la dérivée n^e de $f(z)$.

Il s'agit de profiter de ce qui précède pour calculer les coëfficients restés arbitraires dans l'équation (1). Soit p le nombre de ces coëfficients que nous appellerons pour abréger les coëfficients c. Soient v_1 et v_2 deux intégrales de l'équation (1) définie comme il suit:

$$\text{pour } x = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad \frac{dv_1}{dx} = 1$$

$$\text{pour } x = 0, \qquad v_2 = 1, \qquad \frac{dv_2}{dx} = 0.$$

Le rapport $\frac{v_1}{v_2}$ est alors une fonction de x parfaitement définie. Calculons dans le développement de cette fonction les coëfficients de

$$x^2, \; x^3, \; x^4, \; \ldots, \; x^{p+3}.$$

Ces $p + 2$ coëfficients s'exprimeront rationnellement en fonctions des coëfficients c et des points singuliers a. Mais nous aurons

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{az}{z + \gamma} \tag{2}$$

α et γ étant deux constantes que nous ne connaissons pas encore. Nous avons dans l'identité (2) une relation entre $x = f(z)$ et z. On peut en tirer les $p + 2$ premiers coëfficients du développement de $f(z)$ suivant les puissances de z en fonctions rationnelles de α, de γ, des c et des a. On peut donc avoir réciproquement les c, α et γ en fonctions rationnelles des a et des $p + 2$ premiers coëfficients du développement de $f(z)$. Or les a nous sont donnés, les coëfficients du développement de $f(z)$ peuvent aussi être regardés comme connus puisque ce sont les limites des coëfficients du développement de $\varphi(z)$; les coëfficients c peuvent donc aussi être calculés avec une approximation indéfinie.

On peut se proposer, au lieu de calculer les coëfficients de l'équation (1), de trouver directement le groupe de cette équation. Voici comment on peut opérer.

Supposons que x décrive dans le sens positif un contour fermé autour du point singulier a_i; z se changera en $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, la substitution

$$S_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

étant parabolique; en même temps y se changera en y_i. Si la valeur initiale de z est o, sa valeur finale sera: $\frac{\beta_i}{\delta_i} = \lambda_i$; si la valeur initiale de y est o, sa valeur finale s'appellera μ_i. La connaissance de λ_i suffit pour déterminer la substitution S_i; mais quand on connait la fonction rationnelle $\varphi(y)$ la détermination de μ_i n'est qu'une question d'algèbre. On a d'ailleurs:

$$\lambda_i = \lim \mu_i.$$

On déterminera ainsi toutes les substitutions S_i et par conséquent le groupe G. Il y a d'autre part entre les λ_i une relation algébrique qui facilitera le calcul.

Il reste maintenant à entrer plus profondément dans la question et à voir comment on peut effectivement calculer les coëfficients de la fonction rationnelle $\varphi(y)$. Le calcul dépend naturellement du choix des polygones r_i et r'_k dont l'ensemble constitue P_0. Mais ce choix est lui-même à peu près arbitraire et nous sommes forcés pour fixer les idées, de choisir certains exemples particuliers. Il est bien entendu que ce ne sont là que des exemples, et nous ne voulons pas dire que le choix que nous allons faire soit le meilleur et le plus simple. Il est même probable que l'expérience et la pratique conduiront à faire un choix différent.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les sommets de r_0 correspondant respectivement aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Considérons le polygone P_0^1 formé de r_0 et du polygone symétrique de r_0 par rapport à l'un de ses côtés, à $\alpha_1\alpha_n$ par exemple. Appelons y_1 la fonction y qui est engendrée par ce polygone P_0^1, et z_1 une fonction liée à y_1 par une relation linéaire convenablement choisie et dont nous déterminerons plus tard les coëfficients. Nous aurons alors:

$$z_1 = \sqrt{\frac{x - a_1}{x - a_n}}, \qquad y_1 = \frac{A_1 z_1 + B_1}{C_1 z_1 + D_1}.$$

Considérons maintenant un polygone P_0^2 formé de P_0^1 et du polygone symétrique de P_0^1 par rapport à un de ses côtés que j'appelle C. J'appelle y_2 et z_2 des fonctions qui sont à P_0^2 ce que y_1 et z_1 sont à P_0^1 et j'appelle b et c les valeurs de z_1 aux extrémités du côté C. Nous aurons alors:

$$z_2 = \sqrt{\frac{z_1 - c}{z_1 - d}}, \qquad y_2 = \frac{A_2 z_2 + B_2}{C_2 z_2 + D_2}.$$

On opérera sur P_0^2 comme on a opéré sur P_0^1 et ainsi de suite ad inf. On calculera ainsi successivement les valeurs de

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_i,\ \ldots$$

Pour passer de z_i à y_i, il faut connaître les coëfficients de la relation linéaire:

$$y_i = \frac{A_i z_i + B_i}{C_i z_i + D_i}.$$

On déterminera ces coëfficients de telle façon que y_i s'annulle avec x, ait son module égal à 1 en même temps que x, et soit réel pour une certaine valeur réelle de x.

Il reste encore quelque chose d'arbitraire dans le mode de génération des polygones P_0^1, P_0^2, ... Pour former P_0^i à l'aide de P_0^{i-1}, on annexe à ce polygone son symétrique par rapport à un de ses côtés C; comment choisir ce côté C? Il conviendra de choisir celui des côtés de P_0^{i-1} dont on suppose que la longueur géométrique doit être la plus grande.

Je repète que je n'ai voulu donner ici qu'un exemple et que mon intention n'est pas de recommander ce mode de génération des polygones P_0 de préférence à tout autre. Je crois au contraire qu'il serait plus avantageux de s'arranger de façon que le groupe de la fonction fuchsienne $\theta(z)$ soit toujours un sous-groupe distingué de G.

Dirigé de la sorte, le calcul des coëfficients c de l'équation (1) ne laisserait pas d'être assez long si l'on voulait pousser l'approximation très-loin. Mais on peut pour la plupart des applications se contenter d'une approximation grossière. En effet si les coëfficients c, au lieu d'avoir exactement les valeurs qui conviendraient à l'équation fuchsienne, sont seulement suffisamment voisins de ces valeurs, la variable x n'est plus fonction fuchsienne du rapport z des intégrales, mais elle en est encore fonction kleinéenne, ce qui suffit dans presque tous les cas.

Voici comment ce que l'on vient de voir peut s'appliquer au cas des types non symétriques. Soit:

$$(3) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \phi(x, y)v \qquad\qquad (4) \qquad \theta(x, y) = 0$$

une équation appartenant à un type T. Ce type contient une équation fuchsienne et, si j'appelle t le rapport des intégrales de cette équation fuchsienne, les variables x et y seront des fonctions fuchsiennes de t. Mais nous ne nous proposons pas pour le moment de trouver les coëfficients de cette équation fuchsienne elle-même; nous voulons seulement trouver une équation fuchsienne dans un type T' subordonné à T. Pour cela soit:

$$(5) \qquad a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n$$

le tableau des points singuliers de l'équation (3) et de ceux de la relation (4). Nous avons vu au § 11 qu'il existe toujours une équation fuchsienne

$$(6) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = F(x)v$$

où $F(x)$ est rationnel et qui admet pour points singuliers non seulement les n quantités données (5), mais encore k autres quantités non données $b_1, b_2, \ldots, b_k$. De plus toutes les équations déterminantes ont une racine double.

Or, si l'on se reporte à ce qui a été dit dans ce § 11, on verra que nous avons formé cette équation (6) à l'aide d'une autre équation fuchsienne dont tous les points singuliers étaient réels et qui, par conséquent, appartenait à un type symétrique. D'ailleurs nous venons de voir que les coëfficients d'une équation fuchsienne contenue dans un type symétrique donné peuvent être regardés comme connus. Il en sera donc de même de ceux de l'équation (6).

Cela posé, soit z le rapport des intégrales de (6); x sera une fonction fuchsienne de z, ayant pour groupe G. D'ailleurs y sera une fonction uniforme de z. Si g' est le groupe des substitutions de G qui n'altèrent pas y (cf. § précédent), y sera une fonction fuchsienne de z ayant pour groupe g'; le groupe g' engendrera alors une équation fuchsienne qui ne sera autre que:

$$(6) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = F(x)v \qquad \text{avec la relation} \qquad (4) \quad \theta(x, y) = 0.$$

Cette nouvelle équation fuchsienne (que je regarde comme différente de l'équation (6) non accompagnée de la relation (4)) fera partie d'un type T'' subordonné à T' et nous avons vu que ses coëfficients sont connus. Le problème que nous nous proposions est donc résolu.

§ 18. *Troisième problème; cas général.*

Reprenons les équations (3), (4) et (6) du § précédent. Appelons R_0 le polygone générateur de G, P_0 celui de g'. Le groupe g formé des substitutions de g' qui n'altèrent pas les intégrales de l'équation (3) est un sous-groupe distingué de g'. Il est parfaitement déterminé et il est engendré par une région Q_0 qui joue le rôle de polygone générateur, mais qui a une infinité de côtés. Ces côtés sont conjugués deux à deux de telle façon qu'un côté soit le transformé de son conjugué par une des substitutions du groupe g. Deux points appartenant à ces deux côtés conjugués seront dits *correspondants* lorsque l'un d'eux sera le transformé de l'autre par cette substitution.

Maintenant il s'agit de déterminer les coëfficients restés arbitraires dans l'équation (3) de telle façon que cette équation soit fuchsienne. Soit t le rapport des intégrales de l'équation (3) supposée fuchsienne et z le rapport des intégrales de l'équation (6); *il s'agit de déterminer t en fonction de z.*

Je suppose pour déterminer complètement t, qu'il s'annulle en même temps que z. Alors t sera une fonction uniforme de z, inaltérée par les substitutions de g et de telle sorte que

$$\operatorname{mod} t < 1.$$

En outre t pourra prendre toutes les valeurs dont le module est inférieur à 1.

Ceci étant posé, je dis que l'on a l'identité suivante

$$\text{(7)} \qquad \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} = \sum_i \log \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}.$$

Dans cette identité, les substitutions $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ sont les substitutions de g et le signe Σ se rapporte à toutes les substitutions de ce groupe. Cela posé, considérons une infinité de cercles

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

ayant tous pour centre le point o et dont les rayons $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ vont en croissant avec n et tendent vers 1 quand n croît indéfiniment.

Parmi les termes de la série (7), il y en aura un certain nombre p qui deviendront infinis à l'intérieur du cercle C_n. J'appelle leur somme θ_n. Il s'agit de démontrer que

$$\lim \theta_n = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} \qquad \text{pour } n = \infty.$$

Je remarque de plus que $\log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$, le terme général de la série (7) $\log \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}$, et par conséquent θ_n sont essentiellement *réels* et *positifs*.

Soit

$$z = \xi + i\eta;$$

soit u_n une fonction réelle de ξ et de η qui à l'intérieur de C_n satisfasse à l'équation:

$$\text{(8)} \qquad \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0,$$

qui soit nulle le long de la circonférence de ce cercle, et qui enfin soit telle que la différence

$$\log \operatorname{mod} \frac{1}{t} - u_n$$

soit holomorphe à l'intérieur de ce même cercle. Nous aurons les inégalités:

$$o < u_n < \log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$$

et de plus

$$u_n < u_{n+1}$$

et on en conclut que u_n est constamment croissant avec n et constamment inférieur à $\log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$, ce qui veut dire que pour $n = \infty$, u_n tend vers une limite finie que j'appelle u.

J'ai inséré dans un des derniers Bulletins de la Société Mathématique de France (Paris, Gauthier-Villars 1883) un petit travail intitulé »*Sur un théorème de la théorie générale des fonctions*» dans lequel je démontre que si y est une fonction quelconque non uniforme de x, on peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient des fonctions uniformes de z. On n'a qu'à répéter ici la suite des raisonnements que j'ai faits dans ce travail pour voir que u est une fonction analytique de ξ et de η et qu'on peut trouver une seconde fonction v de ξ et de η telle que $u + iv$ soit une fonction analytique monogène de z. On aura d'ailleurs l'inégalité:

$$\log \operatorname{mod} \frac{1}{t} \geqq u.$$

Il s'agit de faire voir que c'est le signe $=$ qu'il faut prendre et non le signe de l'inégalité $>$. Pour cela, étudions de plus près la fonction u. Je dis que cette fonction n'est pas altérée par les substitutions de g. En effet soit:

$$S = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

l'une de ces substitutions et posons:

$$u'_n(z) = u_n\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Il y a une autre manière de définir la fonction u'_n. En effet soit C'_n le cercle transformé de C_n par la substitution inverse de S. La fonction

u'_n satisfera comme u_n à l'équation (8); elle sera nulle le long de C'_n et la différence:

$$\log \bmod \frac{1}{t} - u'_n$$

sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle.

Nous aurons donc une infinité de cercles:

$$C'_1, C'_2, \ldots, C'_n, \ldots$$

et une infinité de fonctions

$$u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots$$

engendrées à l'aide de ces cercles comme les u_i le sont à l'aide des cercles C_i. Nous aurons d'ailleurs

$$\lim u'_n(z) = u\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \qquad \text{pour} \quad n = \infty.$$

Cela posé quelque grand que soit n, on pourra trouver un cercle C'_p tout entier extérieur à C_n et un cercle C_q tout entier extérieur à C'_p. On aura alors:

$$u_n(z) < u'_p(z) < u_q(z).$$

Mais pour $n = \infty$, on a $p = q = \infty$. Donc:

$$\lim u_n = \lim u_q = u$$

donc:

$$\lim u'_p(z) = u(z)$$

et enfin

$$u(z) = u\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

C. Q. F. D.

On en conclut

$$v\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = v(z) + \text{const.}$$

Considérons maintenant la fonction:

$$V = \log \bmod \frac{1}{t} - u$$

dans le plan des t et posons:

$$t = \xi_1 + i\eta_1.$$

La fonction V sera une fonction uniforme de t. En effet quand t, après avoir décrit un contour quelconque, revient à sa valeur initiale, z est revenu à sa valeur initiale ou bien a subi une des substitutions du groupe g. Dans l'un et l'autre cas la fonction u et par conséquent V n'ont pas été altérées.

D'ailleurs V satisfait à l'équation

$$\frac{d^2V}{d\xi_1^2} + \frac{d^2V}{d\eta_1^2} = 0. \tag{8'}$$

Considérons dans le plan des t le cercle:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \rho^2$$

ρ étant une constante plus petite que 1.

La fonction V sera holomorphe(¹) à l'intérieur de ce cercle; d'ailleurs elle sera *le long de la circonférence de ce cercle* toujours comprise entre 0 et $\log\frac{1}{\rho}$. Donc en vertu d'une propriété bien connue de l'équation (8'), on aura *à l'intérieur de ce même cercle:*

$$0 \leqq V \leqq \log\frac{1}{\rho}.$$

Mais ρ peut être choisi aussi voisin que l'on veut de l'unité; il faut donc que l'on ait:

$$V = 0$$

ou

$$\log \operatorname{mod} \frac{1}{t} = u.$$

C. Q. F. D.

(¹) En effet il ne pourrait y avoir doute à ce sujet que pour certains points isolés qui correspondent à des sommets de R_0 situés sur le cercle fondamental. Mais on sait que si une fonction V est holomorphe à l'intérieur d'un cercle, sauf en certains points isolés pour lesquels on ne sait rien, si elle satisfait à l'équation (8'), si enfin elle est uniforme et qu'elle reste comprise entre deux limites données, cette fonction reste holomorphe même pour les points isolés en question.

Mais d'autre part nous avons les inégalités suivantes faciles à démontrer

$$\log \operatorname{mod} \frac{1}{t} > \theta_n > u_n.$$

Or pour $n = \infty$, $\lim u_n = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$, on a donc aussi

$$\lim \theta_n = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t}.$$

Ce qui démontre l'identité

$$(7) \qquad \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} = \sum \log \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \beta_i}{\alpha_i z + \delta_i}$$

qui donne t en fonction de z.

Ainsi en supposant l'existence de l'équation fuchsienne (3) et par conséquent de la fonction t, nous avons démontré que la série (7) est convergente et que la somme de cette série est précisément $\log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$. Réciproquement, en supposant la convergence de la série (7), on pourrait démontrer que la somme de cette série définit le logarithme du module du rapport des intégrales d'une équation fuchsienne appartenant au type T. On démontrerait par conséquent que ce type contient une équation fuchsienne. Mais cette démonstration serait fort longue et serait d'ailleurs inutile.

On pourrait toutefois en faire un usage sur lequel je voudrais dire quelques mots. Soit T'' un type tel que T soit subordonné à T''; T' qui est subordonné à T, sera subordonné à T''. Supposons que l'on sache que T'' contient une équation fuchsienne; soit (3') cette équation et t_1 le rapport de ses intégrales. Soit g_1 le groupe des substitutions de G qui n'altèrent pas t_1; g sera un sous-groupe de g_1. Nous aurons d'après ce qui précède:

$$(7') \qquad \log \operatorname{mod} \frac{1}{t_1} = \sum \log \operatorname{mod} \frac{c_i z + d_i}{a_i z + b_i}$$

$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)$ étant la substitution générale du groupe g_1. Mais la série (7) peut s'obtenir en supprimant certains termes de la série (7'). Elle est donc convergente et par conséquent le type T contient une équation fuchsienne.

Ainsi tout type subordonné à un autre type qui contient une équation fuchsienne contient lui-même une équation fuchsienne. Ce principe dispenserait dans un très grand nombre de cas de l'application de la méthode de continuité.

§ 19. *Réflexions sur la convergence de la série précédente.*

Voici comment on pourrait chercher à démontrer directement la convergence de la série (7) du § précédent.

Au § 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* nous avons démontré la convergence de la série suivante:

$$\sum \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

où $\left(z, \dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ est la substitution générale d'un groupe fuchsien G. En revanche, toujours dans le cas d'un groupe fuchsien, la série

$$\sum \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2} \tag{9}$$

n'est pas convergente. Mais elle peut l'être quand il s'agit non plus d'un groupe fuchsien, mais d'un sous-groupe d'indice infini contenu dans un groupe fuchsien, par exemple du groupe g dont nous nous occupons ici.

Je dis que si la série (9) est convergente, il en est de même de la série (7). En effet soit:

$$\rho_i = \operatorname{mod} \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

nous aurons:

$$\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2} = \frac{1 - \rho_i^2}{1 - \operatorname{mod}^2 z}$$

et:

$$\frac{\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\log \frac{1}{\rho_i}} = \frac{\rho_i - 1}{\log \rho_i} \frac{\rho_i + 1}{1 - \operatorname{mod}^2 z}.$$

Quand i croît indéfiniment ρ_i tend vers l'unité et on a:

$$\lim \frac{\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\log \frac{1}{\rho_i}} = \frac{2}{1 - \operatorname{mod}^2 z}.$$

Ainsi le rapport d'un terme de (9) au terme correspondant de (7) tend vers une limite finie, quand l'ordre du terme considéré croît indéfiniment.

Donc les deux séries sont convergentes ou divergentes en même temps.

Cela posé, soit z un point quelconque intérieur à Q_0. Considérons un cercle C dont la S soit:

$$\frac{\pi}{4}(e^{2R} + e^{-2R} - 2) \tag{10}$$

et qui contienne à son intérieur le point z; soit $F(R)$ la S de la partie de ce cercle qui est intérieure à Q_0. Soit maintenant $f(R)$ la plus petite valeur que puisse prendre $F(R)$ quand on fait varier le cercle C, sa S restant toujours constante, et le point z restant toujours à l'intérieur de C. Alors $f(R)$ sera une fonction continue de R, croissant constamment et indéfiniment avec R.

Soit N le nombre des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ qui sont intérieurs au cercle qui a pour centre le point o et dont la S est précisément égale à l'expression (10). Nous aurons:

$$N < \frac{\pi}{4f(R)}(e^{2R} + e^{-2R} - 2).$$

Soient maintenant $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ une série de valeurs de R, positives et d'ailleurs croissant constamment et indéfiniment avec n. Soit K_n le cercle qui a pour centre le point o et dont le R est R_n. Soit U_n la somme de tous les termes de la série (9) qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ extérieurs à K_{n-1} et intérieurs à K_n.

La série (9) pourra être remplacée par la série

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \tag{11}$$

où nous aurons

$$U_n < K\frac{e^{2R_n} + e^{-2R_n} + 2}{f(R_n)(e^{2R_{n-1}} + e^{-2R_{n-1}} + 2)} < K'\frac{e^{2(R_n - R_{n-1})}}{f(R_n)}$$

K et K' étant deux constantes convenablement choisies.

Les séries (7), (9) et (11) seront donc convergentes si l'on peut choisir les R_n de telle façon que la série:

$$\sum \frac{e^{2(R_n - R_{n-1})}}{f(R_n)} \tag{12}$$

soit convergente. Or c'est ce qui a lieu si l'intégrale:

$$\int_a^\infty \frac{dR}{f(R)} \tag{13}$$

a une valeur finie.

Telle est donc la condition suffisante de la convergence de la série (7). Il faudrait donc chercher à démontrer que l'intégrale (13) est finie, ce qui pourra se faire en étudiant la forme de la région Q_0.

Lorsqu'on l'aura fait, cette démonstration dispensera dans tous les cas de l'application de la méthode de continuité.

§ 20. *Résumé.*

Dans ce mémoire, après avoir montré à calculer les paramètres du groupe d'une équation linéaire donnée, j'ai exposé quelques propriétés de ces paramètres considérés comme fonctions des coëfficients de cette équation, ou inversement de ces coëfficients regardés comme fonctions des paramètres du groupe.

J'ai abordé ensuite un autre problème. Considérons une équation de la forme suivante:

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad\qquad (2) \qquad \theta(x, y) = 0$$

où φ et θ sont rationnels en x et y. Je suppose que la relation (2) est donnée ainsi que les points singuliers de l'équation (1) et l'équation déterminante relative à chacun d'eux, mais que tous les autres coëfficients de l'équation (1) restent arbitraires. Je suppose de plus que la différence des racines de chaque équation déterminante est nulle ou est une partie aliquote de l'unité. J'appelle z le rapport des intégrales et je considère x comme fonction de z.

J'ai montré qu'on peut disposer *d'une manière et d'une seule* de ces coëfficients restés arbitraires de telle façon que x soit fonction fuchsienne de z, n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle et j'ai fait voir comment il fallait diriger le calcul des coëfficients.

On peut disposer de ces mêmes coëfficients *d'une infinité de manières* de telle façon que x soit fonction kleinéenne de z *n'existant pas dans tout le plan.* Enfin on peut encore disposer de ces coëfficients *d'une manière* *et d'une seule,* de telle sorte que x soit fonction fuchsienne ou kleinéenne de z, *existant dans toute l'étendue du plan.* Ce dernier point n'a pas été démontré; il faudrait pour le faire appliquer la méthode de continuité.

Considérons maintenant une équation linéaire quelconque:

$$\frac{d^m v}{dx^m} = \sum \varphi_p \frac{d^p v}{dx^p}, \qquad \theta(x, y) = 0$$

les φ et θ étant rationnels en x et y. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les intégrales de cette équation. On peut trouver une variable z de telle façon que z soit le rapport des intégrales d'une équation du second ordre à coëfficients rationnels en x et y, et que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ainsi que x et y soient des fonctions uniformes de z. Il peut arriver d'ailleurs que x, considéré comme fonction de z, soit ou une fonction rationnelle, ou une fonction doublement périodique, ou une fonction fuchsienne n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle, ou une fonction kleinéenne n'existant pas dans tout le plan, ou enfin une fonction fuchsienne ou kleinéenne existant dans tout le plan. Nous laisserons de côté ce dernier cas.

Alors, ce dernier cas étant laissé de côté, on pourra choisir cette variable z d'une infinité de manières en satisfaisant à toutes les conditions énoncées plus haut. J'appelle $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ les différentes variables z obtenues de la sorte. Mais parmi toutes ces variables, on peut en choisir une et une seule que j'appelle z_1 et qui est plus simple que toutes les autres. En général x sera fonction fuchsienne de z_1 (n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle) mais dans certains cas particuliers, elle pourra en être fonction rationnelle ou doublement périodique. Dans tous les cas z_1 sera fonction uniforme des autres variables $z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ce qui explique pourquoi x, y et les v qui sont uniformes en z_1 sont aussi uniformes en $z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$

Ainsi nous pouvons exprimer les intégrales d'une équation linéaire à coëfficients algébriques par des fonctions uniformes d'une variable z.

Il reste à étudier les propriétés de ces fonctions uniformes et à les développer en séries. C'est ce que je ferai dans le prochain mémoire qui sera le dernier de cette série.

Paris, 20 Octobre 1883.

Corrections et additions aux trois mémoires antérieurs. (¹)

THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS.

P. 54 l. 14 et 15, au lieu de: les substitutions S_1, S_4, S_5, S_3 s'écriront, lire: les substitutions S_1, S_4^{-1}, S_5^{-1}, S_3^{-1} s'écriront.

P. 54 l. 18, au lieu de: la combinaison des quatre substitutions S_3, S_5, S_4, S_1, lire: la combinaison des quatre substitutions S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1.

P. 56 l. 15, de même au lieu de S_3, S_5, S_4, S_1, lire: S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1.

P. 56 l. 17, mettre le signe — devant le second membre de l'égalité (4).

MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS FUCHSIENNES.

P. 229 l. 6, après ces mots: le genre de la relation (1), intercaler ce qui suit: est précisément ce que j'ai appelé dans le Mémoire en question, le genre du groupe G. Si donc le groupe G est de genre 0, il en sera de même de la relation (1) . . .

P. 229 l. 17, au lieu de:

$$\frac{4\dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - 3\left(\dfrac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)}$$

lire:

$$\frac{2\dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - 3\left(\dfrac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^4}.$$

MÉMOIRE SUR LES GROUPES KLEINEENS.

P. 61 l. 20, au lieu de:

$$S'_1 = S^{-1}S'_1 s$$

lire:

$$S'_1 = S^{-1}S'_1 S.$$

P. 77 l. 22, mettre le signe — devant le second membre de la relation.

P. 85 dernière ligne, au lieu de: c'est le signe +, lire: c'est le signe —.

P. 86 l. 3, mettre le signe — devant le second membre de la relation.

(¹) Dans le numérotage des lignes, j'ai compté les formules pour des lignes, mais je n'ai pas compté les titres de paragraphes.