SUR LA GÉNÉRALISATION
D'UNE FORMULE D'ABEL

PAR

N. SONINE
à VARSOVIE.

La formule dont il s'agit se rapporte au calcul inverse des intégrales définies; elle a été deux fois établie par ABEL et présentée sous deux formes équivalentes: [1]

$$(1) \qquad \psi(a) = \int\limits_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}, \qquad s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\psi(xt)\,.\,dt}{(1-t)^{1-n}};$$

$$(2) \qquad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int\limits_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int\limits_0^a \frac{f'(z)\,.\,dz}{(a-z)^n}.$$

La généralisation que nous allons présenter de cette formule peut être effectuée de la manière suivante.

Considérons l'intégrale

$$\omega = \int\limits_a^x f(\xi)\,.\,d\xi$$

et multiplions la fonction $f(\xi)$ par l'unité représentée par une intégrale

(1) Voir les Nos II et IX de la nouvelle édition des Oeuvres complètes d'ABEL.

définie contenant x, ξ. Par un choix convenable de variable on peut toujours réduire ce multiplicateur à la forme

$$(3) \qquad 1 = \int_{\xi}^{x} \varphi(\lambda, \xi, x) d\lambda$$

et alors on pourra écrire, en vertu d'une formule élementaire,

$$(4) \qquad \omega = \int_{a}^{x} f(\xi) \cdot d\xi \int_{\xi}^{x} \varphi(\lambda, \xi, x) d\lambda = \int_{a}^{x} d\lambda \int_{a}^{\lambda} f(\xi) \cdot \varphi(\lambda, \xi, x) d\xi.$$

Telle est l'expression la plus générale de l'intégrale ω par une intégrale double. En comparant cette formule à la formule (2) on est conduit à supposer:

$$\varphi(\lambda, \xi, x) = \sigma(\lambda - \xi) \cdot \psi(x - \lambda),$$

les fonctions σ, ψ devant être déterminées au moyen de la condition (3), qui devient

$$1 = \int_{\xi}^{x} \sigma(\lambda - \xi) \cdot \psi(x - \lambda) \cdot d\lambda,$$

ou, en posant $\lambda = \xi + (x - \xi)\mu$ et désignant $x - \xi$ par z,

$$(5) \qquad 1 = z \int_{0}^{1} \sigma(z\mu) \psi(z - z\mu) d\mu.$$

Pour que cette égalité puisse avoir lieu en faisant $z = 0$ il faut nécessairement admettre que le produit $\sigma(x) \cdot \psi(x)$ soit infini du premier ordre pour $x = 0$; la convergence de l'intégrale aux limites exige en outre que les fonctions $\sigma(x)$, $\psi(x)$ pour $x = 0$ ne soient infinies que d'un ordre inférieur à l'unité. On peut donc poser

$$\sigma(x) = x^{-p}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots), \qquad 0 < p < 1,$$

$$\psi(x) = x^{-q}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots), \qquad 0 < q < 1,$$

$$p + q = 1.$$

L'égalité (5) devient par la substitution de ces valeurs

$$1 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} z^{m+n} a_m b_n \int_0^1 \mu^{m-p}(1-\mu)^{n-q} . d\mu,$$

ou

$$1 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^{m+n}}{\Pi(m+n)} a_m \Pi(m-p) b_n \Pi(n-q).$$

En posant $a_m \Pi(m-p) = c_m$, $b_n \Pi(n-q) = d_n$, on trouve de là

$$c_0 d_0 = 1,$$

$$c_m d_0 + c_{m-1} d_1 + \dots + c_1 d_{m-1} + c_0 d_m = 0, \qquad m > 0.$$

Ces conditions font voir qu'on peut supposer: $c_0 = d_0 = 1$ et qu'alors on doit avoir pour y arbitraire

$$(1 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots)(1 + d_1 y + d_2 y^2 + \dots) = 1.$$

Nous parvenons ainsi au résultat définitif suivant: Ayant choisi deux nombres positifs p et q dont la somme est égale à l'unité, prenons une série quelconque

$$1 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots = \varphi(y)$$

et formons le développement

$$\frac{1}{\varphi(y)} = 1 + d_1 y + d_2 y^2 + \dots;$$

alors on aura

$$(6) \quad \sigma(x) = x^{-p}\left(\frac{1}{\Pi(-p)} + \frac{c_1 xy}{\Pi(1-p)} + \frac{c_2 x^2 y^2}{\Pi(2-p)} + \dots\right) = x^{-p} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{c_m x^m y^m}{\Pi(m-p)},$$

$$(7) \quad \psi(x) = x^{-q}\left(\frac{1}{\Pi(-q)} + \frac{d_1 xy}{\Pi(1-q)} + \frac{d_2 x^2 y^2}{\Pi(2-q)} + \dots\right) = x^{-q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d_n x^n y^n}{\Pi(n-q)},$$

$$(8) \quad \int_a^x f(\xi) . d\xi = \int_a^x \psi(x-\lambda) . d\lambda \int_a^\lambda f(\xi) . \sigma(\lambda - \xi) . d\xi.$$

Nous avons obtenu cette généralisation de la formule d'ABEL, il y a déjà plus de deux ans, par une méthode différente dans une recherche qui n'est pas encore publiée. Le changement de l'ordre des intégrations effectué dans la formule (4) a été appliqué pour la démonstration de la formule d'ABEL par M. JOACHIMSTHAL, en 1860 [1], et par M. LÉTNIKOFF, en 1874 [2].

Soit maintenant

$$\varphi(y) = e^y, \qquad \frac{1}{\varphi(y)} = e^{-y}, \qquad c_n = \frac{1}{\Pi(n)}, \qquad d_n = \frac{(-1)^n}{\Pi(n)};$$

nous avons alors:

$$\sigma(x) = x^{-p}\sum_0^\infty \frac{(xy)^n}{\Pi(n)\,.\,\Pi(n-p)}, \qquad \psi(x) = x^{-q}\sum_0^\infty \frac{(-xy)^n}{\Pi(n)\,.\,\Pi(n-q)},$$

et ces deux fonctions s'expriment aisément par les fonctions cylindriques à savoir

$$\sigma(x) = (2x)^{-p}\,\frac{J^{-p}(2i\sqrt{yx})}{(2i\sqrt{yx})^{-p}}, \qquad \psi(x) = (2x)^{-q}\,\frac{J^{-q}(2\sqrt{yx})}{(2\sqrt{yx})^{-q}};$$

en particulier pour $p = q = \frac{1}{2}$ on aura

$$\sigma(x) = \frac{\cos(2i\sqrt{yx})}{\sqrt{\pi x}}, \qquad \psi(x) = \frac{\cos(2\sqrt{yx})}{\sqrt{\pi x}}.$$

Soit encore $\varphi(y) = (1+y)^{-r}$, $\frac{1}{\varphi(y)} = (1+y)^r$,

$$c_n = (-1)^n\,\frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{\Pi(n)}, \qquad d_n = \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{\Pi(n)};$$

---

(1) JOACHIMSTHAL: *Ueber ein Attractionsproblem.* CRELLE's Journal, T. 58, p. 135.

(2) А. В. Лѣтниковъ: Изслѣдованія относящіяся къ теоріи интеграловъ вида: $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du$. — Математическій сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ, T. VII (1874), p. 1—206.

nous obtiendrons:

$$\sigma(x) = x^{-p} \sum_0^\infty \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{\Pi(n)\,.\,\Pi(n-p)} (-yx)^n = \rho(x,\ p,\ r),$$

$$\psi(x) = x^{-q} \sum_0^\infty \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{\Pi(n)\,.\,\Pi(n-q)} (yx)^n = \rho(x,\ q,\ -r);$$

et pour $r = q = 1 - p$ on aura

$$\sigma(x) = \frac{x^{-p}}{\Pi(-p)} e^{-yx}, \qquad \psi(x) = \frac{1}{\Pi(-q-1)} \int_\infty^x \frac{e^{-yx}\,dx}{x^{1+q}}, \text{ etc.}$$

Supposons que les coefficients c_m, d_n ne dépendent pas de p, q et considérons les fonctions (6) et (7) en omettant complètement les restrictions imposées à p, q; pour mettre en évidence leur dépendance de p, q nous les désignerons $\sigma_{-p}(x)$, $\psi_{-q}(x)$. Si l'on considère maintenant l'intégrale $\int_\xi^x \sigma_r(\lambda-\xi)\,.\,\psi_s(x-\lambda)d\lambda$ qui se transforme en $z\int_0^1 \sigma_r(z\mu)\,.\,\psi_s(z-z\mu)d\mu$, on remarque tout de suite qu'en vertu des relations qui existent entre les coefficients c et d, cette intégrale se réduit à un seul terme

$$\frac{z^{1+r+s}}{\Pi(r)\,.\,\Pi(s)} \int_0^1 \mu^r(1-\mu)^s\ d\mu = \frac{(x-\xi)^{1+r+s}}{\Pi(1+r+s)},$$

où l'on suppose naturellement $r > -1$, $s > -1$. Ainsi on peut écrire

$$(9) \qquad \int_a^x f(\xi)\,.\,\frac{(x-\xi)^{1+r+s}}{\Pi(1+r+s)} = \int_a^x \psi_s(x-\lambda)\,.\,d\lambda \int_a^\lambda f(\xi)\,.\,\sigma_r(\lambda-\xi)\,.\,d\xi.$$

Soit enfin

$$C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + \ldots = (A + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots)(B + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots),$$

en sorte que $C_n = A_n B_0 + A_{n-1} B_1 + \ldots + A_1 B_{n-1} + A_0 B_n$. Posant

$$(10) \qquad \Sigma_s(x) = x^s \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n (yx)^n}{\Pi(n+s)},$$

$$(11) \qquad \Psi_r(x) = x^r \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{B_n (yx)^n}{\Pi(n+r)},$$

$$(12) \qquad \Phi_t(x) = x^t \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{C_n (yx)^n}{\Pi(n+t)},$$

on trouve pour $r > -1$, $s > -1$,

$$\Phi_{r+s+1}(x-\xi) = z\int_0^1 \Sigma_s(z\mu)\Psi_r(z - z\mu)\,.\,d\mu = \int_\xi^x \Sigma_s(\lambda - \xi)\,.\,\Psi_r(x-\lambda)\,.\,d\lambda;$$

donc

$$(13) \qquad \int_a^x f(\xi)\,.\,\Phi_{r+s+1}(x-\xi)d\xi = \int_a^x \Psi_r(x-\lambda)d\lambda\,.\int_a^\lambda f(\xi)\,.\,\Sigma_s(\lambda-\xi)\,.\,d\xi.$$

Remarquons en terminant que les cinq fonctions $\sigma_s(x)$, $\psi_s(x)$, $\Sigma_s(x)$, $\Psi_s(x)$, $\Phi_s(x)$ possèdent la propriété exprimée par l'égalité

$$(14) \qquad \frac{du_s(x)}{dx} = u_{s-1}(x),$$

et que cette propriété appartient aussi aux fonctions

$$v_s = \int_a^x f(\xi)\,.\,u_s(x-\xi)\,.\,d\xi.$$

Varsovie, le 20 Juin 1883.