EXTRAIT D'UN MÉMOIRE INÉDIT DE HENRI POINCARÉ SUR LES FONCTIONS FUCHSIENNES[1].

Dans la dernière livraison du Journal de BORCHARDT[2] M. FUCHS a publié un Mémoire dont le résumé se trouve dans une lettre à M. HERMITE insérée aux Comptes rendus[3]. Ce Mémoire se rapporte aux équations du second ordre. Je supposerai que l'équation différentielle considérée est ramenée à la forme canonique

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Qy.$$

---

[1] L'Académie des Sciences à Paris avait proposé pour sujet d'un grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880 la question suivante: „Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante". Le Mémoire qu'on va lire a été présenté au Concours; il est très intéressant parce qu'il nous permet de suivre les idées de POINCARÉ sur les fonctions fuchsiennes depuis leur toute première origine.

Le Mémoire se compose de deux parties distinctes. La première Partie, que nous ne reproduirons pas, contient les recherches sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires que POINCARÉ a développées avec plus de détails dans deux Mémoires insérés respectivement dans l'American Journal of Mathematics t. 7 (1885), p. 203—258 et dans les Acta mathematica t. 8 (1886), p. 295—344. Quant à la deuxième Partie POINCARÉ dit qu'il contient les réflexions que lui a inspirées la lecture d'un Mémoire de L. FUCHS. POINCARÉ a reçu ce Mémoire au commencement du mois de mai 1880 et son Mémoire est arrivé à l'Académie le 28 mai 1880. On voit par là l'extrême rapidité avec laquelle travaillait POINCARÉ.

En désignant par $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre et en posant

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = z$$

FUCHS avait fait remarquer que, à certaines conditions, x est une fonction méromorphe de z. POINCARÉ démontre que les conditions énoncées par FUCHS ne sont pas suffisantes. POINCARÉ s'occupe surtout du cas où l'intégration de l'équation peut se faire à l'aide des fonctions doublement périodiques et du cas où l'équation différentielle n'admet que deux points singuliers à distance finie. C'est par une étude approfondie de ces deux cas que POINCARÉ a été amené à créer la théorie générale des fonctions qu'il a désignées par le nom de FUCHS. N. E. NÖRLUND.

[2] t. 89 (1880), p. 151—169.

[3] t. 90 (1880), p. 678—680.

M. Fuchs démontre que, *à certaines conditions*, si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux intégrales de l'équation proposée: 1° si l'on pose

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = z,$$

x est fonction méromorphe de z;

2° Si l'on pose

$$\int_0^x f(x)\,dx + \int_0^{x_1} f(x_1)\,dx_1 = u_1,$$
$$\int_0^x \varphi(x)\,dx + \int_0^{x_1} \varphi(x_1)\,dx_1 = u_2,$$

toute fonction rationnelle symétrique de x et de x_1 est fonction méromorphe de u_1 et de u_2.

Ce dernier résultat lui permet de définir des fonctions analogues aux fonctions abéliennes; mais je ne m'occuperai ici que du premier qui permet de définir des fonctions analogues aux fonctions doublement périodiques.

Pour que ce premier résultat soit vrai, les conditions de M. Fuchs ne sont pas nécessaires et suffisantes; en effet il faut, pour que x soit fonction méromorphe, que pour tous les points singuliers, y compris le point ∞, la différence des racines de l'équation déterminante soit une partie aliquote de l'unité.

En effet, soit une valeur quelconque de z,

$$z = a,$$

ne correspondant pas à un point singulier de l'équation proposée. On a

$$f(x) - z\varphi(x) = 0,$$

d'où l'on tire x ordonné suivant les puissances de $z - a$, à moins que les deux expressions

$$f(x) - a\varphi(x),$$
$$f'(x) - a\varphi'(x)$$

ne s'annulent à la fois. Mais comme nous avons supposé que la valeur $z = a$, correspondait à une valeur de x qui n'est pas un point singulier de l'équation proposée, ces deux expressions ne pourraient s'annuler pour cette valeur de x, qu'à la condition que

$$f(x) - a\varphi(x)$$

fut identiquement nul, c'est-à-dire que $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne fussent pas linéairement indépendants, ce que je n'ai pas supposé.

Supposons maintenant que a corresponde à un point singulier $x = b$ situé à distance finie: on a alors $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant des fonctions de x, holomorphes et $\gtrless 0$ pour $x = b$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des constantes; ϱ_1 et ϱ_2 étant les racines de l'équation déterminante,

$$\alpha(x-b)^{\varrho_1}f_1(x) + \beta(x-b)^{\varrho_2}f_2(x) + z[\gamma(x-b)^{\varrho_1}f_1(x) + \delta(x-b)^{\varrho_2}f_2(x)] = 0,$$

ou si partie réelle de $\varrho_1 >$ partie réelle de ϱ_2

$$(x-b)^{\varrho_1-\varrho_2}f_1(x)(\alpha+\gamma z) + f_2(x)(\beta+\delta z) = 0.$$

Pour $z = a$, on doit avoir $x = b$, c'est-à-dire que

$$\beta + \delta a = 0.$$

D'ailleurs on a

$$\alpha + \gamma a \gtrless 0,$$

sans quoi on aurait,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},$$

ce que nous n'avons pas supposé, on a donc

$$(x-b)^{\varrho_1-\varrho_2} = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\,\frac{\delta(z-a)}{\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)}$$

ou

$$(\varrho_1-\varrho_2)L(x-b) = L(z-a) + L\frac{-\delta f_2(x)}{f_1(x)[\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)]}$$

ou

$$\frac{L(z-a)}{L(x-b)} = \varrho_1-\varrho_2 - \frac{L\dfrac{-\delta f_2(x)}{f_1(x)[\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)]}}{L(x-b)}$$

ou pour $z = a$, $x = b$,

$$\lim\frac{L(z-a)}{L(x-b)} = \varrho_1-\varrho_2,$$

or si x est fonction holomorphe de z pour $z = a$; on a

$$x - b = A_n(z-a)^n + A_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots,$$

ou

$$\lim\frac{L(z-a)}{L(x-b)} = \frac{1}{n}$$

donc,

$$\varrho_1-\varrho_2 = \frac{1}{n}.$$

Donc *il faut que la différence des racines de l'équation déterminante soit une partie aliquote de l'unité.*

Réciproquement, si

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{1}{n},$$

il vient

$$F(x, z) = (x-b) f_1^n(x)(\alpha+\gamma z)^n + (-1)^{n-1} f_2^n(x)(\beta+\delta z)^n = 0$$

et l'on en tirera x en fonction holomorphe de z; car pour $z = a$,

$$\frac{dF}{dx} = f_1^n(x)(\alpha+\gamma a)^n$$

n'est pas nulle.

Même raisonnement, si pour $z = a$, $x = \infty$.

Conséquence: Pour que x soit fonction méromorphe de z, toutes les fois que z prendra une valeur correspondant: soit à une valeur finie de x qui ne soit pas un point singulier; soit à une valeur finie de x qui soit un point singulier; soit à une valeur infinie de x;

il faut et il suffit que pour tous les points singuliers y compris le point ∞, $\varrho_1 - \varrho_2$ soit une partie aliquote de l'unité.

Ces conditions sont donc nécessaires pour que x soit fonction méromorphe de z dans toute l'étendue du plan.

Sont-elles suffisantes? elles le seraient si l'on pouvait faire voir que l'on peut obtenir toutes les valeurs de z en faisant décrire à x un nombre *fini* de fois des contours *finis* sur la sphère. C'est ce que M. Fuchs semble avoir admis sans démonstration.

Si cela était, si x décrivant dans le plan un contour quelconque en ne franchissant chacune des coupures (qu'on y peut pratiquer entre les points singuliers) qu'un nombre fini de fois, z prenait toutes les valeurs possibles, alors la fonction x de z serait non seulement méromorphe dans toute l'étendue du plan, mais *dans toute l'étendue de la sphère,* et par conséquent *rationnelle.*

Il s'en suivrait que l'équation (1) admettrait une intégrale algébrique, ce qui arrive quelquefois, mais ce qui n'arrive pas toujours, M. Fuchs lui-même l'a démontré.

Donc en décrivant un certain contour donné, (enveloppant plus d'un point singulier) un nombre infini de fois, on arrivera pour z à une certaine valeur singulière qu'on ne pourrait obtenir en décrivant des contours finis un nombre fini de fois.

S'il n'y a sur la sphère qu'une ou deux de ces valeurs singulières de z, il n'y a pas de difficulté.

Soient en effet α et β, ces deux valeurs singulières, on posera

$$z = \frac{\beta e^{it} + \alpha}{e^{it} + 1}.$$

Alors z ne pourra être égal à α ou à β pour aucune valeur finie de t; donc pour toutes les valeurs finies de t, x est fonction méromorphe de z et par conséquent de t. Donc x est fonction monodrome de t dans toute l'étendue du plan et par conséquent dans toute l'étendue de la sphère. On est donc par un changement de variables, ramené au cas où x est méromorphe dans toute l'étendue du plan; seulement c'est de t et non de z que x est fonction méromorphe; pour qu'il le fût également de z, il faudrait que x considéré comme fonction de t, admît la période 2π, ce qu'on ne peut prévoir *a priori*.

S'il y a sur la sphère plus de deux valeurs singulières, un pareil artifice n'est plus applicable. Quel que soit le changement de variable qu'on effectue, il restera toujours au moins un point singulier à distance finie, et pour que x soit fonction monodrome dans toute l'étendue du plan, il faudra que x soit fonction monodrome dans le voisinage de ce point singulier. Or *la démonstration de M. Fuchs ne s'applique pas à de pareils points.*

Cette objection ne se présente pas pour les démonstrations analogues qu'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques ou abéliennes. Soit en effet par exemple,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = z.$$

On démontre aisément que x est méromorphe en z pour toutes les valeurs de z que l'on peut obtenir en faisant décrire à x un nombre fini de fois un contour fini sur la sphère. On peut en conclure que x est monodrome dans toute l'étendue du plan, et par conséquent dans toute l'étendue de la sphère; car quand on fait décrire à x un contour quelconque un nombre infini de fois, z tend vers l'∞.

Rien de pareil n'a lieu dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Je crois avoir montré que la démonstration de M. Fuchs est insuffisante. Considérons cependant encore la question à un autre point de vue.

L'équation différentielle peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Qy, \tag{1}$$

Q étant fonction de x.

En posant $\frac{dy}{dx} = t$, on trouve entre les fonctions x, y, z, t les équations différentielles suivantes:

$$\frac{dx}{dz} = y^2, \quad \frac{dy}{dz} = ty^2, \quad \frac{dt}{dz} = Qy^3.$$

Pour que x soit fonction méromorphe de z; il faut et il suffit que *toutes les fois que z est fini, toutes* les relations entre x et z tirées de ces équations différentielles soient de la forme

$$x = \text{fonction monodrome de } z,$$

ou

$$z = \text{constante.}$$

Or x, y, t sont méromorphes en z, sauf
1° quand $Q = \infty$;
2° quand $x = \infty$;
3° quand $y = \infty$;
4° quand $t = \infty$.

M. Fuchs n'a examiné que les deux premières exceptions; il reste à examiner les deux autres. Soit donc $y = \infty$. Comment y, peut-il devenir infini? Supposons que x décrive une infinité de fois un certain contour C; que quand x décrit une fois ce contour, il y ait deux intégrales f et φ de l'équation (1) qui se changent respectivement en αf et en $\beta\varphi$; que

$$y = \lambda f + \mu\varphi.$$

Quand x décrira m fois le contour C, y se changera en

$$\lambda\alpha^m f + \mu\beta^m\varphi,$$

mais d'après la forme particulière de l'équation (1),

$$\alpha\beta = 1.$$

Donc à moins que mod. $\alpha = 1$,

$$\text{limite de } y \text{ (pour } m = \infty) = \infty.$$

Soit donc $y = \infty$. Posons alors $y = \dfrac{1}{\eta}$, les équations différentielles deviennent

$$\frac{dx}{\eta} = \frac{d\eta}{-\eta^3 t} = \frac{dt}{Q} = \frac{dz}{\eta^3},$$

dont les intégrales, si $Q \gtreqless 0$, $t \gtreqless \infty$, se réduisent à

$$\eta = 0, \quad x = \text{const.}, \quad z = \text{const.}$$

La relation entre x et z se réduisant ici à $z = \text{const.}$ il n'y a pas de difficultés.

Supposons donc $Q = 0$, et posons

$$\eta = \eta_1 z^{\frac{1}{2}}, \quad t = t_1 z^{-\frac{1}{2}},$$

il vient

$$\frac{dz}{\eta_1^3 z} = \frac{dz}{\eta_1} = \frac{d\eta_1}{-\eta_1^3 t_1 - \frac{1}{2}\eta_1^4} = \frac{dt_1}{Q + \frac{1}{2} t_1 \eta_1^3}.$$

Il reste à démontrer que x reste holomorphe en z; quand on a

$$\eta_1 = Q = 0, \quad t_1 \gtrless \infty,$$

et c'est ce que M. Fuchs n'a pas fait.

Il faudrait ensuite examiner les cas suivants:

$$\begin{aligned} &t = \infty, \\ &y = Q = \infty, \quad y = t = q = \infty, \quad y = x = \infty, \\ &y = t = x = \infty. \end{aligned}$$

Ces considérations montrent, je pense, l'insuffisance de la démonstration de M. Fuchs et la nécessité d'une étude plus approfondie de la question.

Envisageons d'abord un exemple cité par M. Fuchs, à savoir l'équation (1), *Journal de Borchardt*, 2e Heft, 89e Band, p. 168.

Cette équation admet trois points singuliers:

$$a_1, \ a_2 \text{ et } \infty.$$

La différence des racines de l'équation fondamentale déterminante est

$$\begin{aligned} &\text{pour } a_1 \quad \tfrac{1}{3}, \\ &\text{pour } a_2 \quad \tfrac{1}{6}, \\ &\text{pour } \infty \quad \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Traçons sur la sphère représentative des x, deux coupures, allant l'une de a_2 à a_1, l'autre de a_2 à l'infini.

Soit $z = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux intégrales de l'équation (1), que l'on aura toujours pu choisir de telle sorte que z se change en $-z$, quand x tourne autour de l'infini; c'est-à-dire quand il décrira un contour fermé en franchissant la seconde coupure.

Quand x franchira la première coupure, de façon à tourner autour de a_1, z se changera en z', z' étant lié à z par une équation de la forme,

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{z - \alpha}{z - \beta}.$$

Donc quand x tournera autour de a_2 de façon à franchir successivement les deux coupures; z se changera en z'', où

$$\frac{z''-\alpha}{z''-\beta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{z+\alpha}{z+\beta}. \tag{2}$$

Or les racines de l'équation déterminante relative à a_2 ayant pour différence $\frac{1}{6}$, z doit être lié à z'', par une équation de la forme

$$\frac{z''-\gamma}{z''-\delta} = e^{\frac{\pi i}{3}} \frac{z-\gamma}{z-\delta}. \tag{3}$$

En identifiant les équations (2) et (3) on trouve par des calculs algébriques faciles,

$$\alpha \text{ ou } \beta = 0, \quad \text{soit } \alpha = 0$$

et

$$\gamma = 0.$$

Posons alors

$$z = \frac{1}{t},$$

x sera une fonction de t qui ne changera pas, quand on changera

$$t \text{ en } -t,$$
$$t \text{ en } \beta + e^{\frac{2i\pi}{3}}(t-\beta),$$
$$t \text{ en } \delta + e^{\frac{i\pi}{3}}(t-\delta),$$

d'où l'on conclut que cette fonction ne change pas quand on change

$$t \text{ en } t+4\beta\left(1-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

ou

$$t \text{ en } t+4\beta\left(t-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

De plus en faisant un nombre infini de changements

$$\text{de } t \text{ en } -t,$$

ou

$$\text{de } t \text{ en } \beta + e^{\frac{2i\pi}{3}}(t-\beta),$$

ou

$$\text{de } t \text{ en } \delta + e^{\frac{i\pi}{3}}(t-\delta),$$

ou bien l'on fait tendre t vers l'infini, ou bien l'on tourne toujours dans un cycle formé d'un nombre fini de valeurs de t. Il en résulte qu'il n'y a qu'un seul point singulier

$$t = \infty.$$

Or x ne peut cesser d'être monodrome en t que pour les valeurs de t qui correspondent à des points singuliers; x est donc monodrome pour toutes les valeurs finies de t; x est donc méromorphe dans tout le plan.

Par conséquent x est une fonction doublement périodique de t.

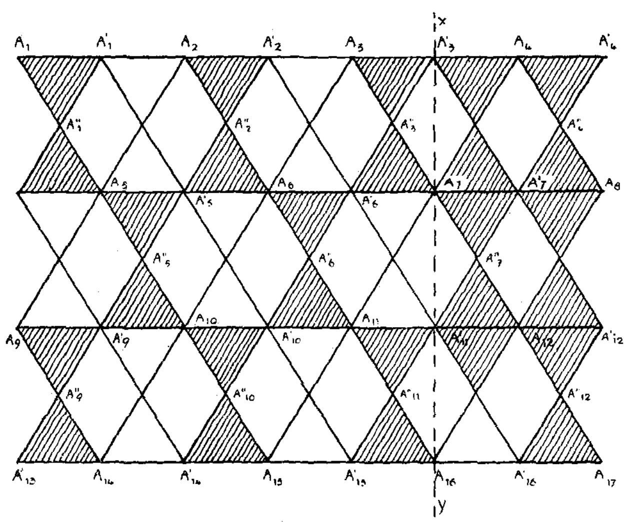

Figure 1.

La figure donnera une idée des propriétés de cette fonction.

Je prie de négliger la partie située à droite de la ligne XY, partie où les hachures ont été mal placées. Dans cette figure les parallélogrammes des périodes sont

$$A_1 A_2 A_5 A_6, \quad A_2 A_3 A_6 A_7, \quad A_5 A_6 A_{10} A_{11}, \text{ etc.}$$

Les parallélogrammes sont des losanges formés de deux triangles équilatéraux. On décompose chacun d'eux en deux triangles équilatéraux (égaux à la 8^e partie de la surface du parallélogramme) que l'on couvre de hachures, et en un hexagone régulier qui reste blanc.

La fonction x ne change pas quand t tourne:

1° de 180° autour du sommet d'un des triangles couverts de hachures;

2° ou bien de 120° autour du centre d'un de ces triangles;

3° ou bien de 60° autour du centre d'un des hexagones réguliers restés en blanc.

Quand on connaît x en fonction de t, l'équation (1) s'intègre aisément; on a en effet pour intégrales:

$$\sqrt{\frac{dx}{dt}}, \quad t\sqrt{\frac{dx}{dt}}.$$

Or si x est une fonction doublement périodique de t, x sera lié à $\frac{dx}{dt}$ par une équation algébrique. *L'une des intégrales sera donc algébrique en x.* Si en effet, on forme l'équation (1), on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[-\frac{2}{9(x-a_1)^2} + \frac{5}{36(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{35}{144(x-a_2)^2}\right]y$$

dont les l'intégrales sont évidemment

$$y_1 = (x-a_1)^{\frac{1}{3}}(x-a_2)^{\frac{5}{12}}$$

et

$$y_2 = (x-a_1)^{\frac{1}{3}}(x-a_2)^{\frac{5}{12}}\int(x-a_1)^{-\frac{2}{3}}(x-a_2)^{-\frac{5}{6}}dx.$$

On a donc

$$\frac{y_2}{y_1} = t = \int(x-a_1)^{-\frac{2}{3}}(x-a_2)^{-\frac{5}{6}}dx,$$

d'où l'on tire effectivement x en fonction doublement périodique de t.

Remarque. L'équation (1) n'admet donc qu'une intégrale algébrique et en admet une, elle fait partie en effet d'une classe très nombreuse d'équations différentielles qui ont une intégrale algébrique et une seule.

Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\sum\frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum\frac{2B_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)}\right]. \tag{4}$$

Cette équation admettra une intégrale algébrique pourvu que l'on ait

$$B_{ik} = \left[\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+A_i}\right]\left[\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+A_k}\right].$$

La seconde intégrale se trouve par une simple quadrature.

L'exemple qui précède fait voir que dans certains cas le théorème de M. Fuchs est exact, et que x est fonction doublement périodique de z.

Cherchons comment cela peut avoir lieu; proposons-nous de trouver dans quel cas x est une fonction de z susceptible d'être ramenée aux fonctions doublement périodiques.

Cherchons, ce qui revient au même, dans quel cas x est une fonction de z telle qu'il n'y ait sur la sphère représentative des z que *un* ou que *deux* points singuliers.

Supposons que le théorème de M. Fuchs soit vrai, c'est-à-dire que x soit fonction monodrome de z; ce sera une fonction de z qui se reproduira quand on changera z en z'; où

$$z' = \frac{az+b}{a'z+b'} \tag{5}$$

(et cela pour une infinité de systèmes de valeurs de a, b, a', b').

Or la relation (5) entre z et z' peut toujours se mettre sous la forme:

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta} \tag{6}$$

ou sous la forme

$$\frac{1}{z'-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda. \tag{7}$$

Premier cas.

Supposons que x ne change pas quand on change z en z'_0, ou en z'_1, ou en $z'_2, \dots$; et que *toutes* les quantités $z'_0, z'_1, z'_2, \dots$ soient liées à z par des relations qui peuvent se mettre sous la forme (6) et de telle façon que

$$\lambda = e^{2i\pi h}$$

h étant commensurable. Dans ce cas, le nombre des quantités z'_0, z'_1, z'_2, etc. sera forcément limité et x sera une fonction rationnelle de z. L'équation (1) sera intégrable algébriquement.

Deuxième cas.

x ne change pas quand on change z en z' où

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad \text{mod}\, \lambda \gtreqless 1.$$

Posons

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = t,$$

x sera une fonction monodrome de t qui ne changera pas quand on changera t en λt.

Il y aura alors deux points singuliers,

$$t = 0, \quad t = \infty.$$

Il ne pourrait y en avoir davantage sans qu'il y en eût une infinité; car les points $t = 0$, et $t = \infty$ sont les seuls qui se reproduisent quand on change t en λt. Quand x tourne autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se change en t', où

$$\frac{t'-a}{t'-b} = \lambda_1 \frac{t-a}{t-b}; \tag{8}$$

ici

$$\lambda_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

n étant entier. Si l'on veut qu'il n'y ait qu'un nombre fini de points singuliers, il faut que la substitution (8) reproduise le système des points:

$$t = 0, \quad t = \infty.$$

Or cela peut arriver de deux manières:

1° Si la substitution (8) reproduit le point $t = 0$, et reproduit également le point $t = \infty$.

Pour cela il faut que la substitution (8) s'écrive,

$$t' = t e^{\frac{2i\pi}{n}};$$

2° Si la substitution (8) change le point $t = 0$, en $t = \infty$, et le point $t = \infty$ en $t = 0$.

Un pareil échange ne peut avoir lieu que si la substitution (8) change t en t' et t' en t; c'est-à-dire si

$$\lambda_1 = -1.$$

Si dans l'équation (8), on fait

$$\lambda_1 = -1, \quad t = 0, \quad t' = \infty,$$

il vient

$$\frac{a}{b} = -1,$$

d'où

$$\frac{t'-a}{t'+a} = -\frac{t-a}{t+a},$$

ou

$$tt' - a^2 = 0,$$

ou

$$t' = \frac{a^2}{t}.$$

Pour qu'on n'ait qu'un nombre fini de points singuliers, il faut donc que quand x tourne autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se change soit en

$$te^{\frac{2i\pi}{n}} \quad \text{soit en} \quad \frac{a^2}{t},$$

Nous aurons donc une fonction monodrome de t qui ne changera pas, quand on changera

$$t \text{ en } \lambda t,$$

ou t en

$$te^{\frac{2i\pi}{n_1}}, \quad te^{\frac{2i\pi}{n_2}}, \quad \ldots, \quad te^{\frac{2i\pi}{n_h}},$$

ou t en

$$\frac{K_1}{t}, \quad \frac{K_2}{t}, \quad \ldots, \quad \frac{K_p}{t}$$

ou par conséquent quand on multipliera t par

$$\frac{K_1}{K_2}, \quad \frac{K_1}{K_3}, \quad \ldots, \quad \frac{K_1}{K_p}$$

ou encore par

$$e^{\frac{2i\pi}{m}}$$

m étant le plus petit commun multiple de $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Posons maintenant

$$t = e^u,$$

x sera une fonction monodrome de u qui ne changera pas quand on changera

$$u \text{ en } u + L\lambda,$$
$$u \text{ en } u + \frac{2i\pi}{m},$$

ou

$$u \text{ en } u + LK_1 - LK_2 \text{ ou en } u + LK_1 - LK_3, \ \ldots,$$

ou en

$$u + LK_1 - LK_p.$$

Cette fonction admet donc un certain nombre de périodes il faut que ces périodes soient compatibles, c'est-à-dire qu'on puisse trouver des quantités commensurables

$$\alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \alpha_p$$

telles que

$$\alpha_2 L\lambda + LK_1 - LK_2, \quad \alpha_3 L\lambda + LK_1 - LK_3, \quad \ldots, \quad \alpha_p L\lambda + LK_1 - LK_p$$

soient commensurables avec $2i\pi$.

On peut toujours supposer

$$\lambda = \frac{K_1}{K_2}$$

car on a pris pour λ *l'une quelconque* des quantités par lesquelles on peut multiplier t sans altérer x. Il faut alors que l'on puisse trouver des quantités commensurables $\alpha_3, \ldots, \alpha_p$ telles que,

$$\alpha_3 L\frac{K_2}{K_1} + L\frac{K_3}{K_1}, \quad \alpha_4 L\frac{K_2}{K_1} + L\frac{K_4}{K_1}, \quad \ldots, \quad \alpha_p L\frac{K_2}{K_1} + L\frac{K_p}{K_1}$$

soient commensurables avec $2i\pi$. Donc

Condition I. — 1° Les logarithmes des modules $\frac{K_2}{K_1}, \frac{K_3}{K_1}, \cdots,$ doivent être commensurables entre eux.

Condition II. — 2° Les quantités

$$-\frac{L \operatorname{mod} \frac{K_3}{K_1}}{L \operatorname{mod} \frac{K_2}{K_1}} L\frac{K_2}{K_1} + L\frac{K_3}{K_1}, \ \cdots,$$

doivent être commensurables avec $2i\pi$.

Si ces conditions sont remplies, x sera une fonction doublement périodique de u.

Continuons cette discussion et tout d'abord remarquons qu'il ne peut jamais arriver que lorsque x tourne autour d'un point singulier a de l'équation (1),

t se change en

$$te^{\frac{2i\pi}{n}},$$

comme il semblait au premier abord que cela pourrait se faire.

En effet, si cela était, pour $x = a$, t serait égal à 0 ou à l'infini c'est-à-dire irait en un point singulier, *ce qui est absurde.*

Toutes les fois que x tournera autour d'un point singulier de l'équation (1), t se changera en $\frac{K_1}{t}$, ou $\frac{K_2}{t}$, $\cdots$, ou $\frac{K_p}{t}$.

Donc pour tous les points singuliers de l'équation (1) la différence des racines de l'équation déterminante fondamentale est égale à $\frac{1}{2}$.

Problème. — Une fonction doublement périodique peut-elle donner naissance à une équation différentielle linéaire du second ordre?

Soient h et k les deux périodes de x considérées comme fonction doublement périodique de u, nous écrirons

$$A \equiv 0, \qquad \bmod (h, k)$$

quand on aura

$$A = mh + nk,$$

m et n étant des entiers réels.

On devra avoir

$$LK_1 - LK_2 \equiv LK_1 - LK_3 \equiv \cdots \equiv LK_1 - LK_p \equiv 0 \qquad \bmod (h, k)$$
$$2i \equiv 0 \qquad \bmod (h, k).$$

Pour une même valeur de x, u pourra prendre une infinité de valeurs; soit u_1 l'une de ces valeurs; les autres devront satisfaire à l'une des congruences,

$$u \equiv u_1, \quad u \equiv LK_1 - u_1, \quad u \equiv LK_2 - u_1, \quad \ldots, \quad u \equiv LK_p - u_1, \qquad \bmod (h, k)$$

c'est-à-dire à l'une des deux congruences:

$$u \equiv u_1, \quad u \equiv LK_1 - u_1, \qquad \bmod (h, k),$$

car on a évidemment

$$LK_1 - u_1 \equiv LK_2 - u_1 \equiv \cdots \equiv LK_p - u_1 \qquad \bmod (h, k).$$

Il n'y a dans le parallélogramme des périodes que deux valeurs satisfaisant à ces congruences. Donc x est une fonction doublement périodique de u à deux infinis, nous supposerons que ces infinis sont $-a$ et $+a$; c'est-à-dire que

$$LK_1 = 0,$$

nous pouvons toujours le faire, car si cela n'était pas on n'aurait qu'à multiplier t par un facteur convenable.

Nous poserons alors

$$x = A(u),$$

on a

$$\frac{dx}{du} = 0,$$

toutes les fois que

$$u \equiv 0 \quad \text{ou} \quad u \equiv \frac{h}{2}$$

ou

$$u \equiv \frac{k}{2} \quad \text{ou} \quad u \equiv \frac{h+k}{2} \qquad \text{mod}\,(h, k).$$

Toutes les fois que $\frac{dx}{du} \gtrless 0$, u se développe suivant les puissances croissantes de $x - a$, si x est fini, ou de $\frac{1}{x}$, si x est infini.

Supposons au contraire $u = 0$ et soit

$$A(0) = \alpha.$$

Quand x tourne autour du point α, u se change en $-u$; et u est égal à 0 pour $x = \alpha$; enfin on a

$$x - \alpha = A_2 u^2 + A_3 u^3 + \cdots,$$

où $A_2 \gtrless 0$; c'est-à-dire que l'on a

$$u = \sqrt{x-\alpha}\,(B_0 + B_1(x-\alpha) + B_2(x-\alpha)^2 + \cdots)$$

où $B_0 \gtrless 0$.

Soit de même

$$A\left(\frac{h}{2}\right) = \beta, \quad A\left(\frac{k}{2}\right) = \gamma, \quad A\left(\frac{h+k}{2}\right) = \delta,$$

en aura

$$\begin{aligned}
u - \frac{h}{2} &= \sqrt{x-\beta}\,(B_0' + B_1'(x-\beta) + B_2'(x-\beta)^2 + \cdots),\\
u - \frac{k}{2} &= \sqrt{x-\gamma}\,(B_0'' + B_1''(x-\gamma) + B_2''(x-\gamma)^2 + \cdots),\\
u - \frac{h+k}{2} &= \sqrt{x-\delta}\,(B_0''' + B_1'''(x-\delta) + \cdots)
\end{aligned}$$

où

$$B_0' \gtrless 0, \quad B_0'' \gtrless 0, \quad B_0''' \gtrless 0.$$

Soit maintenant

$$y_1 = e^{-\frac{u}{2}} \sqrt{\frac{dA}{du}},$$

$$y_2 = e^{\frac{u}{2}} \sqrt{\frac{dA}{du}}.$$

A une même valeur de x correspondent une infinité de valeurs de u; soit u_0 l'une d'entre elles; les autres seront

$$u_0 + mh + nk,$$
$$-u_0 + mh + nk,$$

où m et n sont entiers. On aura

$$\Delta(u_0 + mh + nk) = \Delta(u_0),$$
$$\Delta(-u_0 + mh + nk) = +\Delta(u_0),$$

d'où l'on tire par différentiation,

$$\Delta'(u_0 + mh + nk) = \Delta'(u_0),$$
$$-\Delta'(-u_0 + mh + nk) = +\Delta'(u_0).$$

Si l'on fait $u = u_0$ dans les formules qui donnent y_1 et y_2 on trouve pour ces fonctions des valeurs

$$y_{10} \text{ et } y_{20}.$$

Si maintenant on fait

$$u = u_0 + mh + nk,$$

on trouve

$$y_1 = \pm y_{10} e^{-\frac{mh+nk}{2}},$$
$$y_2 = \pm y_{20} e^{+\frac{mh+nk}{2}},$$

Faisons maintenant

$$u = -u_0 + mh + nk,$$

il viendra

$$y_1 = \pm \sqrt{-1}\, y_{20} e^{-\frac{mh+nk}{2}},$$
$$y_2 = \pm \sqrt{-1}\, y_{10} e^{\frac{mh+nk}{2}}$$

Donc y_1 et y_2 sont des fonctions de x qui peuvent prendre une infinité de valeurs pour chaque valeur de x; mais si y_{10} et y_{20} sont un système de valeurs de ces fonctions, toutes les autres seront de la forme

$$y_1 = \alpha y_{10} + \beta y_{20},$$
$$y_2 = \alpha' y_{10} + \beta' y_{20},$$

et de plus le déterminant

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta$$

sera toujours égal à 1. C'est dire que y_1 et y_2 satisfont à une équation de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Uy,$$

où U est une fonction de x monodrome dans tout le plan.

Pour étudier la fonction U il faut donner à x toutes les valeurs possibles sur la sphère et il suffit de les lui donner une seule fois; c'est ce que nous arriverons à faire en donnant à u toutes les valeurs comprises dans l'intérieur du parallélogramme des périodes.

Donnons d'abord à u une valeur telle que

$$\frac{dx}{du} \gtrless 0,$$

il est clair que y_1 et y_2 sont développables suivant les puissances de $x-a$, si x est fini. De plus ni y_1, ni y_2 sont nuls. C'est dire que U est holomorphe en x si x est fini.

Faisons maintenant $u = 0$, on a alors

$$u = \sqrt{x-\alpha}\,(B_0 + B_1(x-\alpha) + \cdots),$$
$$x - \alpha = A_2 u^2 + A_3 u^3 + \cdots,$$

d'où

$$\frac{dx}{du} = 2A_2 u + 3A_3 u^2 + \cdots,$$

ou

$$\frac{dA}{du} = \frac{dx}{du} = \sqrt{x-\alpha}\,(C_0 + C_1(x-\alpha) + \cdots)$$

où

$$C_0 \gtrless 0,$$

ou

$$\sqrt{\frac{dA}{du}} = \sqrt[4]{x-\alpha}\,(D_0 + D_1(x-\alpha) + \cdots),$$

où

$$D_0 \gtrless 0.$$

De plus

$$e^{-\frac{u}{2}} = (E_0 + E_1(x-\alpha) + \cdots) + \sqrt{x-\alpha}\,(F_0 + F_1(x-\alpha) + \cdots),$$

où

$$E_0 \gtrless 0, \qquad F_0 \gtrless 0,$$

ou enfin

$$y_1 = \sqrt[4]{x-\alpha}\,(a_0 + a_1(x-\alpha) + \cdots) + \sqrt{x-\alpha}\,\sqrt[4]{x-\alpha}\,(b_0 + b_1(x-\alpha) + \cdots)$$

et

$$y_2 = \sqrt[4]{x-\alpha}\,(a_0 + a_1(x-\alpha) + \cdots) - \sqrt{x-\alpha}\,\sqrt[4]{x-\alpha}\,(b_0 + b_1(x-\alpha) + \cdots).$$

Ici

$$a_0 \gtreqless 0, \qquad b_0 \gtreqless 0.$$

Donc pour $x = \alpha$, U présente un infini double; le point $x = \alpha$, est donc un point singulier de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Uy,$$

et les racines de l'équation déterminante correspondante sont

$$\tfrac{1}{4} \text{ et } \tfrac{3}{4}.$$

On arrive au même résultat en faisant

$$u = \frac{h}{2}, \quad u = \frac{k}{2}, \quad u = \frac{h+k}{2},$$

et par conséquent

$$x = \beta, \quad x = \gamma, \quad x = \delta.$$

Conséquence. — U est une fonction méromorphe de x dans toute l'étendue de la sphère; c'est donc une fonction rationnelle.

L'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Uy$$

est donc à coefficients rationnels; elle admet quatre points singuliers à distance finie, et pour ces quatre points singuliers, les racines de l'équation déterminante sont

$$\tfrac{1}{4} \text{ et } \tfrac{3}{4}.$$

On conclut de là:

On peut toujours former une équation différentielle linéaire, à coefficients rationnels et s'intégrant à l'aide d'une fonction doublement périodique donnée à deux infinis.

Si l'on choisit cette fonction doublement périodique (avec des périodes h et k) de telle façon que

$$2i\pi \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(h, k),$$

x sera une fonction monodrome de u admettant la période $2i\pi$; *ce sera donc une fonction monodrome de t et par conséquent de z.*

Par conséquent, il existe des cas où le théorème de M. Fuchs est vrai.

Si au contraire, on choisit cette fonction doublement périodique de telle façon que l'on n'ait pas

$$2i\pi \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(h, k)$$

x sera une fonction monodrome de u, mais n'admettant pas la période $2i\pi$, *elle ne sera pas monodrome en t ni par conséquent en z.*

Donc il existe des cas où le théorème de M. Fuchs est faux bien que les conditions posées par ce géomètre soient remplies.

Cherchons à former des équations différentielles linéaires qui satisfassent aux conditions précédentes.

Ces équations s'écriront:

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^2} + \frac{D_2}{(x-\delta)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{C_1}{x-\gamma} + \frac{D_1}{x-\delta}.$$

Pour que relativement aux quatre points singuliers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les racines de l'équation déterminante soient $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, il faut que

$$A_2 = B_2 = C_2 = D_2 = -\frac{3}{16}. \tag{9}$$

Faisons maintenant $x = \frac{1}{z}$, et étudions l'équation dans le voisinage de $z = 0$; il vient

$$z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz} = \left[\frac{A_2z^2}{(1-\alpha z)^2} + \frac{B_2z^2}{(1-\beta z)^2} + \frac{C_2z^2}{(1-\gamma z)^2} + \frac{D_2z^2}{(1-\delta z)^2} + \frac{A_1z}{1-\alpha z} + \frac{B_1z}{1-\beta z} + \frac{C_1z}{1-\gamma z} + \frac{D_1z}{1-\delta z}\right]y.$$

1° Dans le voisinage de $z = 0$, les intégrales de l'équation doivent être régulières; donc dans le développement du second membre, le coefficient de z doit être nul; donc

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 0; \tag{10}$$

2° Les racines de l'équation déterminante doivent être égales à 0 et à -1; donc dans le développement du second membre, le coefficient de z^2 doit être nul; d'où

$$A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0; \tag{11}$$

3° Les développements des intégrales ne doivent pas contenir de logarithmes; donc le coefficient de z^3 doit encore être nul, c'est-à-dire que l'on a

$$2A_2\alpha + 2B_2\beta + 2C_2\gamma + 2D_2\delta + A_1\alpha^2 + B_1\beta^2 + C_1\gamma^2 + D_1\delta^2 = 0. \tag{12}$$

L'équation ainsi formée dépend encore de cinq paramètres. En effet nous avions primitivement douze paramètres,

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1. \end{array}$$

Et nous avons trouvé entre ces douze paramètres les sept équations (9), (10), (11), (12).

Considérons maintenant une fonction doublement périodique quelconque à deux infinis. Cette fonction peut s'écrire $AZ(u-a)-AZ(u-b)+B = \Delta(u)$. Cette fonction dépend de six paramètres, à savoir

1° Les deux périodes h et k;

2° Les deux infinis a et b;

3° Le résidu relatif aux deux infinis c'est-à-dire A;

4° La constante B. Si deux fonctions $\Delta(u)$ ne diffèrent, ni par les périodes h et k, ni par les quantités A et B; mais seulement par les infinis a et b, si de plus $a-b$ a la même valeur pour les deux fonctions, ces fonctions donneront naissance à une même équation différentielle.

Si au contraire les deux fonctions diffèrent de tout autre manière elles ne pourront donner naissance à une même équation différentielle.

Donc la fonction $\Delta(u)$ la plus générale donne naissance à une équation différentielle dépendant de cinq paramètres et de cinq seulement.

Donc pour que l'équation

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^2} + \frac{D_2}{(x-\delta)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{C_1}{x-\gamma} + \frac{D_1}{x-\delta} \tag{13}$$

soit intégrable par des fonctions doublement périodiques il faut et il suffit qu'il y ait entre les douze paramètres qui y entrent les relations (9), (10), (11) et (12).

Avec une condition de plus, on pourrait déterminer les périodes de $\Delta(u)$ de telle façon que le théorème de M. Fuchs soit vrai. Mais cela n'a pas lieu en général.

Troisième cas.

x est une fonction monodrome de z qui ne change pas quand on change z en z', où

$$\frac{1}{z'-\alpha} = \lambda + \frac{1}{z-\alpha}.$$

Faisons

$$\frac{1}{z-\alpha} = t,$$

x sera une fonction monodrome de t, admettant la période λ; il n'y aura qu'un point singulier

$$t = \infty,$$

car s'il y en avait davantage, il y en aurait une infinité.

Quand x tournera autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se changera en t' où

$$\frac{t'-\gamma}{t'-\delta} = e^{\frac{2i\pi}{n}} \frac{t-\gamma}{t-\delta}. \tag{14}$$

Et cette substitution (14) devra reproduire le point singulier unique $t = \infty$; elle devra donc s'écrire

$$t' - \gamma = e^{\frac{2i\pi}{n}} (t-\gamma).$$

x sera donc une fonction de t, monodrome et qui ne changera pas quand t se changera en

$$t + \lambda,$$

ou en

$$\gamma_1 + e^{\frac{2i\pi}{n_1}} (t-\gamma_1), \quad \gamma_2 + e^{\frac{2i\pi}{n_2}} (t-\gamma_2), \quad \ldots, \quad \gamma_p + e^{\frac{2i\pi}{n_p}} (t-\gamma_p).$$

Il est aisé de voir qu'on peut, en combinant de toutes les façons possibles ces différentes substitutions, faire voir que x admet un certain nombre de périodes différentes.

Il faut donc que ces périodes soient compatibles et si elles le sont, x est fonction doublement périodique de t.

On pourrait maintenant discuter la compatibilité de ces périodes. Je ne le ferai pas; car dans le cas qui nous occupe, *l'équation différentielle* (1) *admet toujours une intégrale algébrique et une autre que l'on peut trouver par quadrature*, ainsi que je vais le faire voir.

Supposons que l'on ait

$$x = A(t),$$

$A(t)$ étant une fonction doublement périodique de t; on aura alors

$$y_1 = \sqrt{\frac{dA}{dt}},$$
$$y_2 = t\sqrt{\frac{dA}{dt}},$$

pour les deux intégrales de l'équation (1). Il est clair que y_1 est lié à x par une relation algébrique, et que t, et par conséquent y_2, peut se calculer en fonction de x par quadrature.

Donc d'après ce qu'on a vu plus haut, si l'équation différentielle linéaire donnée (1) peut s'écrire

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{2B_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)}$$

(*voir* page 67), on devra avoir les relations

$$B_{ik} = \left[\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+A_i}\right]\left[\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+A_k}\right]. \tag{15}$$

Remarquons que si les conditions (15) sont remplies et s'il en est de même des conditions de M. FUCHS, le théorème de M. FUCHS sera toujours vrai.

Exemple: l'équation que nous avons étudiée plus haut pages 66 et suivantes.

Résumé. — Résumons cette longue discussion:

Pour que l'équation (1) soit intégrable à l'aide d'une fonction doublement périodique, il faut et il suffit:

1° Ou bien qu'elle satisfasse aux conditions (15) et en outre aux conditions de M. FUCHS;

2° Ou bien qu'elle soit de la forme (13) et satisfasse aux conditions (9), (10), (11), (12); d'où il résultera par surcroît qu'elle satisfera aux conditions de M. FUCHS.

Dans le premier cas, il y a toujours une intégrale algébrique et le théorème de M. FUCHS est toujours vrai. Dans le second cas, il n'y a pas d'intégrale algébrique, et le théorème de M. FUCHS est tantôt vrai et tantôt faux.

Cas particulier.

Nous allons maintenant faire une étude spéciale d'un cas particulier fort important, c'est celui où l'on n'a à distance finie que deux points singuliers a_1 et a_2. Alors l'équation (1) s'écrit

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{2B}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2}.$$

Soient ρ_1, ρ_2 et r les différences des racines des équations déterminantes relatives respectivement à

$$x = a_1, \quad x = a_2 \quad \text{et} \quad x = \infty,$$

A_1, B et A_2 sont parfaitement déterminés en fonction de ρ_1, ρ_2 et r.

Si les conditions de M. FUCHS sont remplies, on a

$$\varrho_1 = \frac{1}{n_1}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{n_2}, \quad r = \frac{1}{p},$$

où n_1, n_2 et p sont des entiers. *Ne supposons pas pour le moment qu'elles le soient.*

Soient, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent, $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux solutions de l'équation (1) et

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = z.$$

On aura toujours pu choisir $f(x)$ et $\varphi(x)$ de telle sorte que, quand x tourne autour de a_1, z se change en λz, où

$$\lambda = e^{2i\pi\varrho_1}.$$

Cela posé quand x tournera autour de a_2, z se changera en z', où

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \mu\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \quad \mu = e^{2i\pi\varrho_2}. \tag{16}$$

On aura aussi toujours pu choisir $f(x)$ et $\varphi(x)$ de façon que $\alpha = 1$ par exemple (ou $\beta = 1$, $\alpha = 0$). Quand x tournera autour de ∞, z se changera en z'' où

$$\frac{z''-\gamma}{z''-\delta} = \nu\frac{z-\gamma}{z-\delta}, \quad \nu = e^{2i\pi r}. \tag{17}$$

Si x tourne autour de a_1, puis autour de a_2 c'est comme s'il tournait autour de l'infini; donc z se change en z'', or z se change d'abord en λz quand x tourne autour de a_1; donc quand x tourne autour de a_2, λz doit se changer en z''; c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{z''-\alpha}{z''-\beta} = \mu\frac{\lambda z-\alpha}{\lambda z-\beta}. \tag{18}$$

Identifions les équations (17) et (18). Si l'équation (17) développée s'écrit

$$azz'' + bz + cz'' + d = 0,$$

on aura

$$\nu^2 - \nu\frac{b^2+c^2-2ad}{ad-bc} + 1 = 0.$$

Or l'équation (18) développée s'écrit

$$zz''\lambda(1-\mu) + z\lambda(\beta\mu-\alpha) + z''(\alpha\mu-\beta) + \alpha\beta(1-\mu) = 0.$$

On a donc

$$\frac{a}{\lambda(1-\mu)} = \frac{b}{\lambda(\beta\mu-\alpha)} = \frac{c}{\alpha\mu-\beta} = \frac{d}{\alpha\beta(1-\mu)}$$

et par conséquent

$$(\nu^2+1)[\alpha\beta\lambda(1-\mu)^2-\lambda(\beta\mu-\alpha)(\alpha\mu-\beta)]-\nu[\lambda^2(\beta\mu-\alpha)^2+(\alpha\mu-\beta)^2-2\alpha\beta\lambda(1-\mu)^2]=0$$

ou

$$\alpha^2[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)]+\beta^2[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2\mu^2+1)] \\ -2\alpha\beta[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)],$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ est alors donné par une équation du second degré. Formons le discriminant de cette équation, nous aurons

$$\varDelta = [(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)]^2 \\ -[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)][(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2\mu^2+1)]$$

ou

$$\varDelta = \nu(\nu^2+1)\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\lambda+4\lambda\mu-2\lambda\mu^2-2\mu\lambda^2-2\mu) \\ +2\nu^2\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\lambda+4\lambda\mu-2\lambda\mu^2-2\mu\lambda^2-2\mu)$$

ou enfin

$$\varDelta = \lambda\mu\nu(\nu+1)^2(\lambda-1)^2(\mu-1)^2$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)\pm(\nu+1)(\lambda-1)(\mu-1)\sqrt{\lambda\mu\nu}}{(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)}.$$

Laquelle des deux racines faut-il choisir? La question est facile à décider. Supposons d'abord en effet que $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\mu_0$, $\nu=\nu_0$; λ_0, μ_0 et ν_0 étant tels que l'équation (1) admette une intégrale algébrique. Alors le choix de la racine se fera sans difficulté. On fera ensuite varier d'une façon continue λ, μ, ν depuis les valeurs initiales λ_0, μ_0, ν_0 jusqu'à des valeurs quelconques et faisons varier de même $\frac{\alpha}{\beta}$ d'une façon continue; nous ne serons encore jamais embarrassés pour savoir quelle est celle des deux valeurs de $\frac{\alpha}{\beta}$ qui nous convient.

Soient deux équations E et E' de la forme (1), supposons que pour la première les différences des racines des équations déterminantes relatives à a_1, a_2 et ∞ soient respectivement,

$$\varrho_1, \quad \varrho_2, \quad r$$

et que pour la seconde ces différences soient

$$\varrho_1', \quad \varrho_2', \quad r'.$$

Supposons que les quantités $\varrho_1-\varrho_1'$, $\varrho_2-\varrho_2'$, $r-r'$ soient des nombres entiers, alors λ, μ, ν auront les mêmes valeurs pour les deux équations E et E'. L'équation du second degré en $\frac{\alpha}{\beta}$ sera la même pour les deux équations différentielles E et E'. Devra-t-on choisir la même racine?

Remarquons que les deux racines de l'équation en $\frac{\alpha}{\beta}$ se permutent quand λ, μ ou ν décrit un contour simple autour du point 0. On retombera donc d'une racine sur l'autre, ou bien on retombera sur la même racine selon que le nombre des contours simples décrits autour du point 0, soit par λ, soit par μ, soit par ν sera impair ou pair.

Or quand λ décrit un contour simple autour du point 0, ϱ_1 se change en ϱ_1+1 ou ϱ_1-1; quand μ tourne autour de 0, ϱ_2 se change en ϱ_2+1 ou ϱ_2-1; quand ν tourne autour de 0, r se change en $r+1$ ou $r-1$.

Donc on devra prendre pour $\frac{\alpha}{\beta}$ la même valeur ou deux valeurs différentes pour les deux équations E et E' selon que

$$\varrho_1-\varrho_1'+\varrho_2-\varrho_2'+r-r' \equiv 0, \quad \mod 2,$$

ou

$$\varrho_1-\varrho_1'+\varrho_2-\varrho_2'+r-r' \equiv 1, \quad \mod 2.$$

Si donc $\varrho_1-\varrho_1'$, $\varrho_2-\varrho_2'$, $r-r'$ sont entiers et si la somme de ces entiers est paire, on pourra choisir deux intégrales de l'équation E,

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad f(x)$$

et deux intégrales de l'équation E',

$$\varphi'(x) \quad \text{et} \quad f'(x)$$

telles que quand x décrit un contour fermé quelconque les valeurs finales de $\varphi'(x)$ et $f'(x)$ s'expriment linéairement à l'aide des valeurs initiales de ces mêmes intégrales *par la même formule* qui exprime les valeurs finales de $\varphi(x)$ et $f(x)$ en fonctions linéaires des valeurs initiales de ces mêmes intégrales.

Remarque. — D'après ce qui précède, on aura toujours le moyen, quand l'équation (1) n'admet que deux points singuliers à distance finie, d'exprimer les valeurs finales des intégrales de cette équation en fonctions linéaires des valeurs initiales en supposant que x ait décrit un contour fermé quelconque et par conséquent *de reconnaître si* ces intégrales sont algébriques.

Discussion.

Supposons que les conditions de M. Fuchs soient remplies; on a

$$\lambda = \cos 2\pi\varrho_1 + i\sin 2\pi\varrho_1, \quad \mu = \cos 2\pi\varrho_2 + i\sin 2\pi\varrho_2, \quad \nu = \cos 2\pi r + i\sin 2\pi r,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)-\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+2\pm\left(\sqrt{\nu}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\left(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\sqrt{\mu}-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)}{\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)-\left(\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\mu}{\lambda}\right)},$$

ou

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos 2\pi r - \cos 2\pi\varrho_1 - \cos 2\pi\varrho_2 + 1 \mp 4\cos\pi r \sin\pi\varrho_1 \sin\pi\varrho_2}{\cos 2\pi r - \cos 2\pi(\varrho_1 - \varrho_2)}.$$

Dans cette formule $\frac{\alpha}{\beta}$ s'exprime par une fonction monodrome de ϱ_1, ϱ_2 et r. Donc par raison de continuité, la racine qui conviendra à la question sera ou bien *toujours* celle qui correspond au signe $+$ ou bien *toujours* celle qui correspond au signe $-$. En prenant pour exemple une équation ayant une intégrale algébrique on déciderait aisément lequel des deux signes on doit prendre.

Soit donc

$$y = (x-a_1)^{\frac{1}{2}-\frac{\varrho_1}{2}}(x-a_2)^{\frac{1}{2}-\frac{\varrho_2}{2}}$$

Cette fonction satisfait à l'équation différentielle,

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\varrho_1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\varrho_1}{2}\right)}{(x-a_1)^2} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-\frac{\varrho_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\varrho_2}{2}\right)}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\varrho_2}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\varrho_2}{2}\right)}{(x-a_2)^2}$$

et il est clair que la différence des racines de l'équation déterminante est ici

$$\begin{array}{ll} \text{pour } a_1, & \varrho_1 \\ \text{pour } a_2, & \varrho_2 \\ \text{pour } \infty, & 1-\varrho_1-\varrho_2. \end{array}$$

Posons donc $r = 1-\varrho_1-\varrho_2$, il viendra

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(1-\cos 2\pi\varrho_1)(1-\cos 2\pi\varrho_2) - \sin 2\pi\varrho_1 \sin 2\pi\varrho_2 \mp [-\sin 2\pi\varrho_1 \sin 2\pi\varrho_2 + (1-\cos 2\pi\varrho_1)(1-\cos 2\pi\varrho_2}{-2\sin 2\pi\varrho_1 \sin 2\pi\varrho_2}$$

or il est clair que dans le cas particulier qui nous occupe, on doit avoir $\frac{\alpha}{\beta} = 0$; donc toutes les fois que

$$r = 1-\varrho_1-\varrho_2$$

c'est le signe $-$ qu'on doit prendre; et par raison de continuité, c'est le signe $-$ qu'on doit prendre, quels que soient r, ϱ_1 et ϱ_2.

Donc quels que soient r, ϱ_1 et ϱ_2, on a

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos 2\pi r - \cos 2\pi\varrho_1 - \cos 2\pi\varrho_2 + 1 - 4\cos\pi r \sin\pi\varrho_1 \sin\pi\varrho_2}{\cos 2\pi r - \cos 2\pi(\varrho_1 - \varrho_2)}.$$

Si les conditions de M. Fuchs sont remplies, cette valeur est réelle.

Supposons en particulier,

$$\varrho_2 = \tfrac{1}{2}$$

il vient

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos 2\pi r - \cos 2\pi \varrho_1 + 2 - 4\cos \pi r \sin \pi \varrho_1}{\cos 2\pi r + \cos 2\pi \varrho_1}.$$

Ne supposons plus

$$\varrho_2 = \tfrac{1}{2}$$

et revenons à l'expression générale; nous verrons qu'elle peut se simplifier et se mettre sous la forme suivante

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 - r) \cos \frac{\pi}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + r)}{\cos \frac{\pi}{2}(\varrho_1 - \varrho_2 + r) \cos \frac{\pi}{2}(\varrho_1 - \varrho_2 - r)}$$

ou bien encore

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos \pi r + \cos \pi(\varrho_1 + \varrho_2)}{\cos \pi r + \cos \pi(\varrho_1 - \varrho_2)}.$$

Soient en général $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux intégrales d'une équation du second ordre. Quand x décrit un certain contour fermé, les valeurs finales de ces intégrales sont données en fonctions linéaires des valeurs initiales par les formules

$$\alpha\varphi(x) + \beta f(x),$$
$$\gamma\varphi(x) + \delta f(x).$$

En général, on ne sait pas calculer α, β, γ, δ. Mais si le contour fermé ne contient qu'un seul point singulier, on saura toujours trouver les racines de l'équation en ω

$$(\alpha - \omega)(\delta - \omega) - \beta\gamma = 0.$$

On ne peut plus le faire en général quand le contour contient plus d'un point singulier.

Cependant, on vient de le voir, s'il n'y a que deux points singuliers à distance finie, on pourra toujours faire ce calcul, quelque soit le contour considéré; on pourra même, en faisant attention au choix des intégrales $\varphi(x)$ et $f(x)$, calculer les coefficients α, β, γ, δ eux-mêmes.

Cette circonstance va nous permettre de discuter plus complètement, dans ce cas particulier, le théorème de M. Fuchs.

Supposons pour fixer les idées

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{4}, \quad \varrho_2 = \tfrac{1}{2}, \quad r = \tfrac{1}{6},$$

x ne changera pas quand on changera

$$z \text{ en } iz,$$

ou

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} \text{ en } -\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

ou

$$\frac{z-\gamma}{z-\delta} \text{ en } e^{\frac{2i\pi}{6}} \frac{z-\gamma}{z-\delta}.$$

Le premier de ces changements nous l'appellerons l'opération L, le second l'opération M, le troisième l'operation N et nous désignerons par exemple l'opération complexe qui consiste à faire l fois l'opération L, puis m fois l'opération M, puis n fois l'opération N, puis de nouveau l_1 fois l'opération L, par la notation

$$L^l M^m N^n L^{l_1}.$$

On aura

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ est donc positif; on verrait aisément que $\frac{\gamma}{\alpha}$ a pour argument $\frac{\pi}{4}$.

Je suppose maintenant que sur le plan représentatif des x, on fasse deux coupures en ligne droite l'une de a_1 à a_2, l'autre de a_2 à l'infini. Supposons a_1 et a_2 réels. Supposons que les intégrales $\varphi(x)$ et $f(x)$ aient été choisies de telle sorte que si

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = z,$$

$z = 0$ pour $x = a_1$ et $z = 1$ pour $x = a_2$ ou $\alpha = 1$.

Toutes ces suppositions peuvent toujours être faites.

Quand x suivra la coupure de a_1 à a_2 d'un certain côté de cette coupure, du côté que nous appellerons α, $\varphi(x)$ et $f(x)$ resteront réels et par conséquent z sera réel, et variera en ligne droite de 0 à α c'est-à-dire de 0 à 1. Quand x suivra cette même coupure de l'autre côté, l'argument de

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = z,$$

expression qui contient en facteur

$$(x-a_1)^{\frac{1}{4}},$$

sera constant et égal à $\frac{\pi}{2}$; z variera donc de 0 à $\alpha\sqrt{-1}$ ou de 0 à $\sqrt{-1}$. Quand x suivra la coupure de a_2 à l'infini du côté α de cette coupure, l'argument de

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

qui était 0 quand x suivait du côté α la coupure $a_1 a_2$, devient $\frac{\pi}{2}$, puisque l'expression

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

contient $(x-a_2)^{\frac{1}{2}}$ en facteur, et que quand en suivant la droite $a_1 a_2 \infty$, on dépasse le point a_2 on voit l'argument de $x-a_2$ augmenter de π.

Quand x décrira cette coupure $a_2 \infty$, z décrira donc dans son plan un arc du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre, arc allant de α à β.

On démontrerait de même que quand x décrit cette même coupure de l'autre côté, z suit un arc du cercle décrit sur $\alpha\sqrt{-1}\,\beta\sqrt{-1}$ comme diamètre, arc allant de $\alpha\sqrt{-1}$ à γ.

Il en résulte que si x *décrit tout son plan sans franchir aucune coupure,* z *restera à l'intérieur du quadrilatère mixtiligne* $\alpha 0 \alpha' \gamma$.

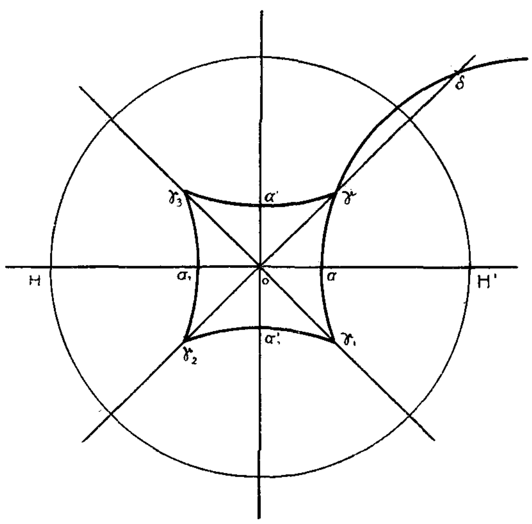

Figure 2.

Dans la figure 2, α représente la quantité imaginaire α; α', α_1, α'_1, représentent les quantités $\alpha\sqrt{-1}$, $-\alpha$, $-\alpha\sqrt{-1}$; γ, γ_1, γ_2, γ_3 représentent γ, $-\gamma\sqrt{-1}$, $-\gamma$, $\gamma\sqrt{-1}$.

Le cercle $\gamma_1\alpha\gamma\delta$ est le cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. Permettons maintenant à x de franchir la coupure $a_1 a_2$; alors pour voir quelle sera la région où z restera confiné, appliquons au polygone $\alpha 0 \alpha' \gamma$ les opérations

$$L,\ L^2,\ L^3$$

et nous obtiendrons le quadrilatère curviligne

$$\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3;$$

les cercles qui le forment se coupent aux sommets du quadrilatère sous des angles de 60°.

Du point 0 comme centre décrivons un cercle HH' coupant orthogonalement le cercle $\alpha\gamma\delta$.

Ce cercle n'est pas altéré par les opérations L, M, N.

Or le quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ est tout entier intérieur à ce cercle. Si x décrit dans son plan un contour quelconque, z reste dans ce quadrilatère ou dans le transformé de ce quadrilatère par une des opérations combinées à l'aide de

L, M, N. Or tous ces transformés sont intérieurs au cercle HH' puisque le transformé d'un point intérieur à ce cercle est intérieur à ce cercle. *Donc quel que soit le contour décrit par x dans son plan, z ne pourra jamais sortir du cercle HH'.*

Une autre remarque, c'est que tous les transformés des cercles $\gamma\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_3$, etc. par une opération quelconque combinée à l'aide de L, M, N coupent orthogonalement le cercle HH'.

Cela posé, je suppose que l'on permette à x de franchir un plus grand nombre de coupures; alors la région décrite par z ira en s'étendant de plus en plus. Pour s'en rendre compte il faut ajouter au quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ un certain nombre de ces transformés obtenus par les opérations L, M, N répétées un certain nombre de fois.

Quelques définitions d'abord. J'appellerai conjugué d'un point a, le point a_1 qui sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point a sur la polaire du point a par rapport au cercle HH'.

J'appelle opération S par rapport au point a, l'opération qui consiste à changer

$$\frac{z-a}{z-a_1} \text{ en } e^{\frac{2i\pi}{6}} \frac{z-a}{z-a_1}.$$

Si a est le transformé de γ par une opération combinée à l'aide de L, M, N l'opération S sera une des opérations combinées à l'aide de L, M, N.

J'appelle quadrilatères Q les différents quadrilatères curvilignes qui sont les transformés du quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ par une opération combinée à l'aide de L, M, N.

Considérons un polygone curviligne P quelconque, susceptible d'être décomposé en un certain nombre de quadrilatères Q. J'applique aux différents quadrilatères Q qui composent ce polygone, les opérations S, S^2, S^3, S^4, S^5 par rapport à chacun de leurs sommets; sauf pour les quadrilatères qui ont un sommet sur le périmètre du polygone, ces opérations ne feront que reproduire des quadrilatères Q faisant déjà partie du polygone P. Mais appliquée aux quadrilatères qui ont un sommet sur le périmètre du polygone, ces opérations conduisent à des quadrilatères nouveaux, que *j'annexerai* au polygone P de façon à former un polygone plus grand P'. *Cette transformation de P en P' s'appellera l'opération T.*

Cela posé appliquons l'opération T au quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, j'obtiendrai un premier polygone P_1; j'applique de nouveau l'opération T à ce polygone et j'obtiens un second polygone P_2, puis un troisième P_3, etc. Les polygones P_m sont des régions que z peut parcourir sans qu'on fasse franchir à x des coupures en nombre infini.

Je dis que le polygone P_1 a ses angles égaux à 60° ou à 120°. En effet considérons la figure 3 qui représente grossièrement la décomposition du polygone P_1 en quadrilatères Q. Sur cette figure les arcs de cercle ont été remplacés par des droites. Comme les quadrilatères Q ont tous leurs angles égaux à 60°, on voit que les angles du polygone P_1

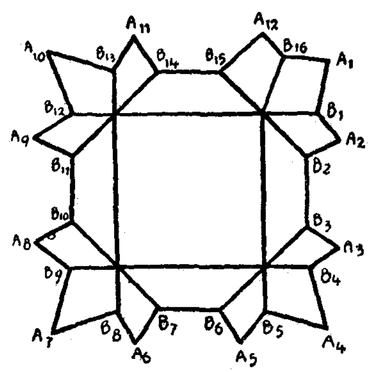

Figure 3.

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{12} \text{ sont de } 60°,$$

et

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{16} \text{ sont de } 120°$$

C. Q. F. D.

De plus, on n'a jamais deux angles de 60° de suite. Passons au polygone P_2.

Sur les figures 4 et 5, les angles marqués A sont de 60°, les angles marqués B de 120°.

En général les quadrilatères *annexés* au polygone P_1 se divisent en deux catégories: 1° ceux qui n'ont qu'un sommet commun avec P_1 et trois avec P_2; en ces trois sommets les angles de P_2 sont un de 60° et deux de 120°; 2° ceux qui ont deux sommets communs avec P_1 et deux avec P_2; les deux angles correspondants de P_2 sont de 120°.

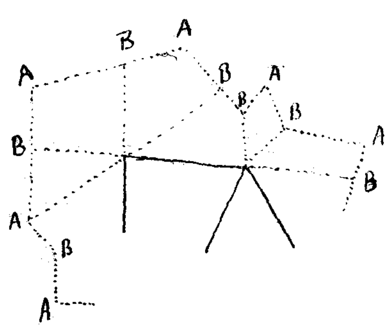

Figure 4.

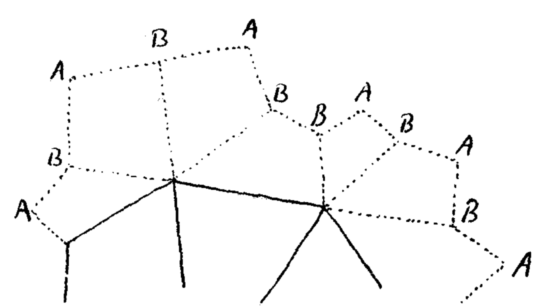

Figure 5.

Sur les figures 4 et 5 les traits pleins représentent une portion du polygone P_1 partagé en quadrilatères Q, et les quadrilatères en pointillé sont ceux qu'on doit *annexer* au polygone P_1 pour former le polygone P_2. Sur la figure à gauche on envisage une portion du périmètre de P_1 où un angle de 120° succède à un angle de 60°, sur la figure à droite une portion de ce périmètre où deux angles de 120° se succèdent. On voit à la seule inspection des figures que les angles du polygone P_2 sont encore de 60° et de 120°.

On démontrerait de la même façon qu'il en est de même des angles du polygone P_3, et en général du polygone P_m.

Conséquence. — Les polygones P_m sont des polygones curvilignes dont les côtés sont formés par les arcs de certains cercles qui coupent orthogonalement le cercle HH', et dont les angles sont tous saillants.

Ces préliminaires établis, nous pouvons nous poser maintenant la question suivante:

La fonction

$$x = \Theta(z)$$

qui, nous l'avons vu, *n'existe pas* quand le module de z est plus grand que OH, reste-t-elle méromorphe quand le module de z est plus petit que OH?

Pour résoudre cette question, reportons-nous à ce qui a été dit dans la Note 6[1]. On se rappelle qu'on a considéré dans cette Note, certaines régions

[1] Note 6. On peut se rendre compte de la manière suivante de l'insuffisance de la demonstration de M. FUCHS. Je suppose que sur la sphère représentative des x je joigne chaque point singulier au point ∞ par une coupure. Si l'on fait décrire à x un chemin qui soit assujetti à ne pas traverser les diverses coupures plus de n fois, le point représentatif de z décrira un chemin qui sera assujetti à rester dans une certaine région R_m de la sphère. Quand m va augmenter, la région R_m va s'étendre de plus en plus.

Si en s'étendant, la région R_m arrive à se recouvrir en partie elle-même, de telle sorte que le point représentatif de z puisse venir de deux manières différentes en un certain point de la sphère, il est clair que x ne sera pas fonction monodrome de z; si au contraire cela ne peut avoir lieu, x sera monodrome en z.

Or on peut concevoir de deux manières différentes que la région R_m se recouvre en partie elle-même, comme l'indiquent les figures qui suivent:

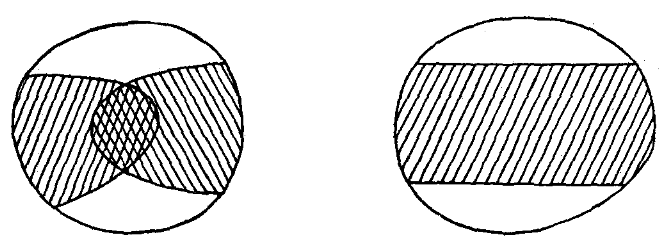

Figure 6.

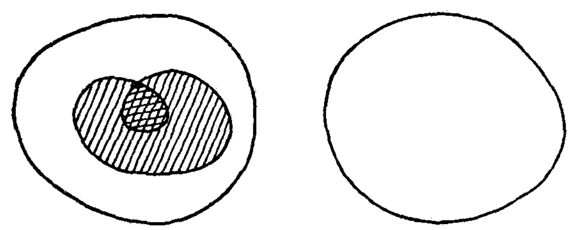

Figure 7.

Dans ces figures, les deux cercles représentent les deux hémisphères, les parties restées en blanc sont les portions de la sphère qui ne font partie de la région R_m; la région R est couverte

R_m et j'ai montré que la condition pour que x reste monodrome en z, c'est que cette région R_m n'arrive jamais à se recouvrir partiellement elle-même. Nous avons vu en outre que cette région R_m peut se recouvrir partiellement elle-même de deux manières différentes; ou bien en laissant tout le reste de la sphère d'un même côté de son contour; ou bien en formant une sorte d'anneau de telle façon que la portion de la sphère qui ne fait pas partie de R_m soit divisée en deux régions bien distinctes et qu'on ne puisse aller de l'une à l'autre sans traverser R_m.

La démonstration de M. Fuchs signifie, je le rappelle, que la région R_m ne peut se recouvrir elle-même de la première manière. Cherchons donc si elle peut se recouvrir elle-même de la seconde manière.

Or ici les régions R_m sont représentées par les polygones P_m, ou du moins les polygones P_m peuvent jouer dans la démonstration identiquement le même rôle.

Considérons la sphère qui a pour grand cercle le cercle HH', projetons *stéréographiquement* la figure qui est dans le plan de ce grand cercle sur cette sphère. Les polygones P_m vont se projeter suivant des polygones curvilignes sphériques H_m dont les côtés seront des petits cercles coupant orthogonalement HH' et par conséquent situés dans des plans perpendiculaires à celui de ce grand cercle et dont les angles seront tous saillants.

Projetons encore la figure *orthogonalement* sur le plan de ce grand cercle HH'; les polygones H_m vont se projeter suivant des polygones rectilignes K_m dont les angles seront tous saillants.

Or il est clair qu'un polygone rectiligne dont tous les angles sont saillants ne peut se recouvrir partiellement de la seconde manière.

Donc ni les polygones K_m, ni par conséquent les polygones P_m ne peuvent se recouvrir partiellement de la seconde manière.

Donc x est méromorphe en z dans l'intérieur des polygones P_m.

Mais quand m tend vers l'infini, les polygones P_m re rapprochent de plus en plus du cercle HH'. En effet si cela n'était pas, quand m tend vers l'infini le polygone P_m tendrait vers un certain contour P qui devrait être un contour fermé sans point double et reproductible par toutes les opérations combinées à l'aide de L, M, N ce qui n'est possible que du cercle HH'.

---

de hachures et l'on observe deux couches de hachures dans les portions de la sphère où la région R_m se recouvre elle-même.

M. Fuchs a démontré que la région R_m ne peut pas se recouvrir partiellement elle-même *de la première manière,* puisqu'il a fait voir que quand z décrit *dans l'intérieur de la région* R_m un cercle infiniment petit, x revient à la même valeur.

Mais il n'a pas démontré que la région R_m *ne peut pas se recouvrir partiellement elle-même de la seconde manière.*

Donc x est méromorphe en z dans l'intérieur du cercle HH'.

La fonction x, nous l'avons vu, n'existe pas dans toute l'étendue du plan, de sorte qu'on ne peut pas dire positivement que ce soit une *fonction analytique* de z; mais c'est une *fonction parfaitement déterminée* de cette variable. C'est ainsi qu'on doit entendre *dans ce cas* le théorème de M. Fuchs, et cela d'ailleurs suffit pour les conséquences que ce géomètre en tire.

Faisons quelques remarques sur la fonction x.

D'abord elle peut être représentée par une série convergente. $\frac{1}{x-\lambda}$ est en effet si λ est convenablement choisi, une fonction méromorphe de z qui reste finie tout le long du périmètre du quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ et par conséquent tout le long du périmètre du polygone P_m. De plus quand m tend vers l'infini le périmètre de ce polygone reste fini.

Donc l'intégrale

$$\int \frac{d\zeta}{(x-\lambda)(z-\zeta)}$$

prise le long du polygone P_m reste finie quand m tend vers l'infini.

Or cette intégrale est égale d'une part à une série convergente ordonnée suivant les puissances de z; d'autre part à $-f(z)$ plus une série de termes en

$$\frac{A}{z-a}$$

faciles à former. En effet, soit a l'un des infinis de la fonction $\frac{1}{x-\lambda}$; nous aurons un terme en

$$\frac{1}{z-a}.$$

Supposons que l'on sache que x ne change pas quand on change

$$z \text{ en } \frac{hz+k}{h'z+k'}$$

alors nous aurons un autre infini

$$z = -\frac{k-ak'}{h-ah'}$$

avec le résidu

$$\frac{k'h-h'k}{(h-ah')^2}$$

ce qui nous donne le terme

$$\frac{k'h-h'k}{(h-ah')^2}\,\frac{1}{z+\frac{k-ak'}{h-ah'}}.$$

La somme de tous ces termes diminuée de $f(z)$ et multipliée par $2i\pi$ représente l'intégrale considérée. Bien entendu, on ne doit prendre que les termes relatifs aux infinis situés à l'intérieur de P_m.

On a alors

$$f(z) = \sum \frac{A}{z-a} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe en z; quand m tend vers l'infini $\varphi(z)$, qui est égal à l'intégrale divisée par $2i\pi$, tend vers une limite finie, en même temps que $\sum \frac{A}{z-a}$ devient une série infinie. Cette série infinie est donc convergente.

Donc $f(z)$ peut se mettre sous la forme suivante,

$$\sum \frac{A}{z-a} + \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est holomorphe dans l'intérieur du cercle HH' et où $\sum \frac{A}{z-a}$ est une série convergente dont le terme général est facile à former.

Une autre remarque: Soit une équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{2B+2}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2}\right]$$

telle que

$$\rho_1 = 1+\tfrac{1}{4}, \quad \rho_2 = 1+\tfrac{1}{2}, \quad r = 2+\tfrac{1}{6},$$

par exemple.

Pour ne pas confondre la variable x qui rentre dans cette nouvelle équation, avec celle qui entrait dans l'ancienne, appelons-la x_1; mais continuons, à poser

$$z = \frac{\varphi_1(x_1)}{f_1(x_1)}$$

$\varphi_1(x_1)$ et $f_1(x_1)$ étant des intégrales convenablement choisies de la nouvelle équation; z sera une fonction de x_1 qui aura une infinité de valeurs; mais on les obtiendra toutes en appliquant à l'une d'elles toutes les opérations combinées à l'aide de L, M, N (*voir* page 85) or x est une fonction monodrome de z qui ne change pas quand on applique à cette variable l'une de ces opérations. *Donc x est monodrome en x_1; seulement ici encore, x n'existe pas pour toutes les valeurs de x_1; cette fonction n'existe que pour les valeurs de x_1 telles que z soit à l'intérieur du cercle HH'.*

Dernières remarques.

Le mode de discussion que nous venons d'employer peut être utilisé toutes les fois que l'on n'a que deux points singuliers. La difficulté augmente avec le nombre de ces points. Voyons comment on devrait aborder la question, si l'on avait trois points singuliers par exemple.

Soient a_1 et a_2 deux de ces points singuliers, supposons qu'ils sont réels et que les coefficients de l'équation différentielle sont également réels; réunissons ces deux points par une coupure en ligne droite, et joignons de même les autres points singuliers par des coupures.

Quand x décrira d'un certain côté la coupure $a_1 a_2$, z restera réel et variera de α à β; quand on appliquera aux différents points de ce segment de droite, les diverses opérations qui ne font pas varier x quand on les applique à la variable z, les transformés successifs de ce segment de droite seront une infinité d'arcs de cercle.

Pour que le théorème de M. Fuchs soit vrai, il faut et il suffit qu'aucun de ces arcs de cercle ne vienne couper le segment de droite.