ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN SUMMABILITÄTSEIGENSCHAFTEN DIRICHLETSCHER REIHEN UND IHREM FUNKTIONENTHEORETISCHEN CHARAKTER.

Von

WALTER SCHNEE

in Breslau.

Einleitung.

In einer ganzen Anzahl neuerer Arbeiten, die sich mit den Eigenschaften der Dirichletschen Reihen

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

und den damit aufs engste zusammenhängenden Problemen der analytischen Zahlentheorie beschäftigen, hat sich immer mehr die grundlegende Bedeutung der Beziehungen herausgestellt, die zwischen dem asymptotischen Verhalten der Funktion $f(s)$ auf vertikalen Geraden (d. h. bei konstanter Abscisse $\Re(s)=\sigma$ und ins Unendliche wachsender Ordinate t) einerseits und den Summabilitätseigenschaften der Zahlenfolge a_n andererseits bestehen. Der am nächsten liegende Satz dieser Art ist zwar seit langem bekannt und durch das bekannte Hilfsmittel der partiellen Summation leicht beweisbar:

Ist die Reihe $f(s)$ in der Halbebene $\Re(s)>\lambda_0$ konvergent und in der Halbebene $\Re(s)>l$, wo $l>\lambda_0$ ist, absolut konvergent, dann lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\varepsilon>0$ eine Konstante A so angeben, dass für jedes σ des Intervalls $\lambda_0+\varepsilon\leqq\sigma\leqq l+\varepsilon$ nebst beliebigem $|t|\geqq 1$[1] die Beziehung

[1] An Stelle von 1 könnte natürlich auch jede andere positive Konstante stehen.

$$|f(s)| = |f(\sigma + ti)| < A|t|^{\frac{l+\varepsilon-\sigma}{l-\lambda_0}}$$

gilt.[2]

Auf der Geraden $\sigma = \lambda_0 + \varepsilon$ hat also die Funktion $f(s)$ in Bezug auf die Ordinate höchstens die Grössenordnung 1, da ja dann $\frac{l+\varepsilon-\sigma}{l-\lambda_0} = 1$ ist, und auf der Geraden $\sigma = l + \varepsilon$ hat sie die Grössenordnung 0, während für die zwischen diesen beiden Werten gelegenen Abscissen der rechts auftretende Exponent linear von 1 bis 0 abnimmt. Hieraus folgt, dass bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ für alle $\sigma \geqq \lambda_0 + \varepsilon$ gleichmässig

$$\lim_{t=\pm\infty} \frac{f(\sigma+ti)}{t} = 0$$

ist; für $\sigma \geqq l + \varepsilon$ ist nämlich sogar (bei beliebigem t)

$$|f(s)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{l+\varepsilon}} = A.$$

Die umgekehrte Frage gehört nun aber zu den tiefsten und schwierigsten Problemen aus der Theorie der Dirichletschen Reihen; gerade hierauf aber kommt es bei den Anwendungen in der analytischen Zahlentheorie an, da es sich dort meistens darum handelt, aus bekannten funktionentheoretischen Eigenschaften von $f(s)$ Folgerungen über die Konvergenzeigenschaften der Reihe $f(s)$, d. h. die Grenzeigenschaften der Grössenfolge a_n zu ziehen. Nachdem Herr LANDAU[3] zuerst einen Satz dieser Art entdeckt hatte, habe ich, hierdurch angeregt, den folgenden Satz[4] bewiesen:

I. Es sei für jedes $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle an

$$|a_n| < n^\delta,$$

[2] Ein ausführlicher Beweis dieses Satzes findet sich z. B. in der Habilitationsschrift von Herrn BOHR: »Bidrag til de Dirichletske Rækkers Theori» (Kopenhagen 1910), S. 20.

[3] »Beiträge zur analytischen Zahlentheorie», Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26, 2. Semester 1908 (S. 169—302), S. 252—255.

[4] »Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen», Mathematische Annalen, Bd. 66, 1909, S. 337—349. Ich behandle dort gleich den allgemeineren Reihentypus

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die λ_n eine beliebige Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Zahlen sind, die gewissen Einschränkungen genügen. Um die Beweise nicht durch formale Schwierigkeiten zu verdunkeln, gehe ich in dieser Arbeit nicht auf die allgemeineren Reihen ein.

so dass die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > 1$ absolut konvergiert. Es sei ferner die durch die Reihe $f(s)$ in der Halbebene $\Re(s) > 1$ dargestellte Funktion noch für $\Re(s) \geqq \eta$ regulär, wo $\eta < 1$ ist, und es existiere eine Zahl $0 \leqq k < 1$, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|^k$$

gilt, in der A irgend eine Konstante bedeutet. Dann ist die Reihe $f(s)$ mindestens für $\Re(s) > \frac{\eta + k}{1 + k}$ konvergent.

Diese Zahl $\frac{\eta + k}{1 + k}$ gehört bei jedem $0 \leqq k < 1$ dem Intervall von η bis $\frac{\eta + 1}{2}$ an und nähert sich für $k = 0$ dem Werte η, für $k = 1$ dem Werte $\frac{\eta + 1}{2}$, der den Mittelpunkt des Intervalls von η bis 1 darstellt. Den an der zitierten Stelle gegebenen Beweis hat dann weiter Herr LANDAU[5] durch die Anwendung eines unterdessen von den Herren PHRAGMÉN und LINDELÖF[6] entdeckten Satzes allgemein funktionentheoretischer Natur, den ich in der Folge vollständig angeben werde, wesentlich vereinfacht und gezeigt, dass der Satz I unverändert auch für den Fall $k \geqq 1$ gilt, den ich nicht untersucht hatte; doch blieb auch bei dieser Beweisführung genau die Schranke $\frac{\eta + k}{1 + k}$ bestehen. Herr BOHR[7] hat ferner durch ein passend konstruiertes Beispiel die Möglichkeit widerlegt, dass eine bestimmte Zahl $0 < k_0 < 1$, etwa $k_0 = \frac{1}{2}$, existiert mit der Eigenschaft, dass aus der obigen Voraussetzung über a_n und der Annahme, dass $f(s)$ für $\Re(s) \geqq \eta$ regulär und höchstens von der Grössenordnung k_0 ist, die Konvergenz der Reihe für $\Re(s) > \eta$ folgt. Nur dann, wenn die Funktion $f(s)$ für alle $\sigma \geqq \eta$ absolut genommen unterhalb einer festen Schranke liegt oder wenn wenigstens nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ sich stets eine Konstante A finden lässt, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|^\delta$$

---

[5] »Über das Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen», Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 28, 1909, S. 113—151. Vergl. auch die ausführliche Darstellung in Herrn LANDAU's »Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen», Bd. II, S. 838—861.

[6] Vergl. besonders die Arbeit von Herrn LINDELÖF: »Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$» (Bulletin des Sciences mathématiques, Ser. 2, Bd. 32, Teil 1, 1908; S. 341—356) sowie die ausführliche Darstellung in dem soeben zitierten »Handbuch», Bd. II, S. 849—853.

[7] »Über die Summabilität Dirichletscher Reihen», Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1909, S. 247—262. Vergl. auch die zitierte Habilitationsschrift, S. 29—36.

gilt, ergibt sich unter der obigen Voraussetzung über a_n die Konvergenz unserer Reihe für $\Re(s) > \eta$; diese unmittelbare Folgerung aus Satz I hatte ich übrigens schon in der zitierten Arbeit besonders betont.

Nun lässt sich vermuten, dass ebenso wie z. B. das formal gebildete Produkt zweier für $\Re(s) > \lambda_0$ konvergenten Dirichletschen Reihen dort zwar nicht notwendig konvergiert, aber doch stets summabel von der ersten Ordnung ist, auch unter den Voraussetzungen von Satz I und unter der Annahme $k \leq 1$ die Reihe stets in der ganzen Halbebene $\Re(s) > \eta$ wenigstens summabel von der ersten Ordnung ist; einen solchen Satz hat Herr M. Riesz[8] ohne Beweis in einer kurzen Note in den Comptes rendus ausgesprochen, auf die ich noch zurückkommen werde. Im Folgenden soll dieser Satz in einer im Vergleich zu Satz I etwas allgemeineren Fassung bewiesen werden:

II. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiet dargestellte Funktion für $\sigma \geq \eta$ regulär, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geq \eta$, $|t| \geq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|$$

gilt. Dann ist die Reihe $f(s)$ für $\sigma > \eta$ wenigstens summabel von der ersten Ordnung.

Der aufgestellte Satz lässt sich nun aber noch wesentlich verallgemeinern. Ebenso wie man eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ summabel von genau der ersten Ordnung mit der Summe S nennt, wenn bei ganzem x zwar nicht die Definition der Konvergenz

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{x} \alpha_n = \lim_{x=\infty} s_x = S$$

erfüllt ist, aber doch der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} s_n = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} S_x'$$

existiert, so kann man die Summenbildung fortsetzen:

$$s_n = S_n^{(0)} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,\quad S'_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n,\quad S''_n = S'_1 + S'_2 + \cdots + S'_n,\quad \cdots,$$
$$S_n^{(r)} = S_1^{(r-1)} + S_2^{(r-1)} + \cdots + S_n^{(r-1)},$$

und eine Reihe summabel von genau der r. Ordnung nennen, wenn zwar nicht die Grenzwerte

[8] »Sur les séries de Dirichlet», Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 21. Juni 1909, Bd. 148, S. 1658—1660.

$$\lim_{x=\infty} s_x, \lim_{x=\infty} \frac{S'_x}{x}, \ldots, \lim_{x=\infty} \frac{(r-1)!\, S_x^{(r-1)}}{x^{r-1}},$$

wohl aber der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \frac{r!\, S_x^{(r)}}{x^r} = S$$

existiert; daraus folgt dann, wie leicht zu beweisen ist, dass die Reihe auch von der Ordnung $r+1, r+2, \ldots$ mit derselben Summe S summabel ist. Summabilität 0. Ordnung ist gleichbedeutend mit Konvergenz. Dass dieser zuerst von CESÀRO eingeführte Begriff,[9] der sich in der modernen Analysis als sehr fruchtbringend erwiesen hat, auch für die Theorie der Dirichletschen Reihen von grosser Bedeutung ist, hat namentlich Herr BOHR gezeigt, indem er eine umfassende Summabilitätstheorie der Dirichletschen Reihen aufgestellt und in der schon zitierten Habilitationsschrift im Zusammenhang dargelegt hat. Ebenso wie das Konvergenzgebiet einer Dirichletschen Reihe stets eine Halbebene ist, in dem Sinne, dass für $\sigma > \lambda_0$ Konvergenz, für $\sigma < \lambda_0$ Divergenz stattfindet,[10] so gibt es auch allgemein für jedes r eine Konstante λ_r, so dass, wenn $a_n = \frac{a_n}{n^s}$ gesetzt wird, die Reihe für $\sigma > \lambda_r$ wenigstens summabel von der r. Ordnung, dagegen in jeden Punkt der Halbebene $\sigma < \lambda_r$ nur von höherer Ordnung summabel oder überhaupt nicht summabel ist. Herr BOHR hat ferner bewiesen, dass die Breite des Streifens der Summabilität von genau der r. Ordnung höchstens 1 ist,[11] d. h. dass für jedes $r = 1, 2, \ldots$ stets $1 \geqq \lambda_{r-1} - \lambda_r$ ist, und hat weiter gezeigt, dass für jedes $r = 1, 2, \ldots$ die Differenz $\lambda_{r-1} - \lambda_r \geqq \lambda_r - \lambda_{r+1}$ ist, d. h. dass die Breite der Summabilitätsstreifen, wenn man von rechts nach links geht, niemals zunimmt. Die λ_r sind also eine

---

[9] Herr HÖLDER hat einen ähnlichen Begriff durch fortgesetzte Mittelwertbildung:

$$s'_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}, \quad s''_n = \frac{s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_n}{n}, \ldots, \quad s_n^{(r)} = \frac{s_1^{(r-1)} + s_2^{(r-1)} + \cdots + s_n^{(r-1)}}{n}$$

eingeführt; in einer Arbeit in den Mathematischen Annalen (»Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes», Bd. 67, 1909, S. 110—125) habe ich gezeigt, dass diese Begriffe identisch sind, d. h. dass für jede beliebige Grössenfolge a_n und für jedes r die Grenzwerte $\lim_{x=\infty} s_x^{(r)}$ und $\lim_{x=\infty} \frac{r!\, S_x^{(r)}}{x^r}$ entweder zugleich existieren und denselben Wert haben oder beide nicht existieren.

[10] Natürlich kann die Dirichletsche Reihe auch überall konvergieren oder nirgends konvergieren; dann ist eben $\lambda_0 = -\infty$ bezw. $\lambda_0 = +\infty$.

[11] Die erste Publikation geschieht in der Arbeit: »Sur la série de Dirichlet», Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 11. Januar 1909, Bd. 148, S. 75—80.

Folge von Zahlen, die bei wachsendem r niemals zunehmen, und für die die Ungleichungen bestehen:

$$1 \geqq \lambda_0 - \lambda_1 \geqq \lambda_1 - \lambda_2 \geqq \lambda_2 - \lambda_3 \geqq \ldots \geqq 0.$$

Ist also einmal nicht $\lambda_{r-1} > \lambda_r$, sondern $\lambda_{r-1} = \lambda_r$, so haben auch alle folgenden Zahlen $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots$ denselben Wert. Natürlich können sogar sämtliche Zahlen λ_r von $r = 0$ an zusammenfallen; dies ist z. B. stets dann der Fall, wenn die Reihe in der ganzen Ebene konvergiert, so dass $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = -\infty$ ist, oder wenn auf der im Endlichen gelegenen Konvergenzgeraden $\sigma = \lambda_0$ oder in beliebiger Nähe derselben ein singulärer Punkt der durch die Reihe dargestellten analytischen Funktion liegt. Wird der stets vorhandene $\lim\limits_{r=\infty} \lambda_r = \varLambda$ gesetzt, wo die Zahl $\varLambda$, wenn die Reihe überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt, entweder endlich oder $= -\infty$ ist, so wird im Falle eines endlichen $\varLambda < \lambda_0$ die in der Konvergenzhalbebene $\sigma > \lambda_0$ durch die Reihe dargestellte analytische Funktion durch die Summabilitätswerte bis zur Geraden $\sigma = \varLambda$ fortgesetzt, d. h. die Funktion ist in der ganzen Halbebene $\sigma > \varLambda$ regulär. Im Falle $\varLambda = -\infty$ ergibt sich, dass die durch die Reihe in der Konvergenzhalbebene dargestellte Funktion eine ganze transzendente Funktion ist; dies ist z. B. für die Funktion

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

der Fall, obwohl die Reihe rechts nur für $\sigma > 0$ konvergiert.

Was nun das den Gegenstand dieser Arbeit bildende Problem anbetrifft, so hat Herr Bohr ohne grössere Schwierigkeiten in der zitierten Habilitationsschrift den folgenden Satz beweisen können:

Es sei die Reihe $f(s)$ für $\sigma > \lambda_r$ summabel von der r. Ordnung und für $\sigma > l$ absolut konvergent, wo $l > \lambda_r$ ist. Dann lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Konstante A so angeben, dass für jedes σ des Intervalls $\lambda_r + \varepsilon \leqq \sigma \leqq l + \varepsilon$ nebst jedem $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|^{(r+1)\frac{l-\sigma+\varepsilon}{l-\lambda_r}} \tag{1}$$

gilt.

Der Exponent auf der rechten Seite nimmt also im Intervall $\lambda_r + \varepsilon \leqq \sigma \leqq l + \varepsilon$ von $r+1$ bis 0 ab. Was nun die Umkehrung des Problems anbetrifft, so werde ich für $r \geqq 1$ die folgenden beiden Sätze beweisen, von denen der erste eine Verallgemeinerung von Satz II, der zweite eine Verallgemeinerung von Satz I darstellt:

III. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiete dargestellte Funktion für $\sigma \geqq \eta$ regulär, wo $\eta < \lambda_{r-1}$ ist, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < A\,|t|^r \tag{2}$$

ist. Dann ist die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \eta$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung.

IV. Wenn die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \eta$ regulär ist, wo $\eta < \lambda_{r-1}$ ist, und wenn für alle $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < A\,|t|^{r+k}$$

ist, wo k irgend eine Konstante $\geqq 0$ bedeutet, so ist die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \frac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung.

Der Satz III ist als Spezialfall $k = 0$ in IV enthalten; für $k = 1$ nimmt die in IV auftretende Konstante $\frac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$ den Wert $\frac{\eta + \lambda_{r-1}}{2}$ an, welcher den Mittelpunkt des Intervalls von η bis λ_{r-1} darstellt, und für $k = \infty$ nähert sie sich zunehmend der Grenze λ_{r-1}. Die Einschränkung $\sigma > \lambda_{r-1} - 1$ in beiden Sätzen ist an sich ganz selbstverständlich, da ja die Breite eines jeden Summabilitätsstreifens höchstens 1 beträgt, also die Reihe $f(s)$ gewiss für kein s, dessen reeller Teil $< \lambda_{r-1} - 1$ ist, summabel von der r. Ordnung sein kann. Unter den Voraussetzungen von Satz III z. B. ist also entweder die Reihe $f(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > \eta$ summabel von der r. Ordnung, d. h. $\lambda_r \leqq \eta$, was im Falle $\eta \geqq \lambda_{r-1} - 1$ eintritt, oder es ist $\lambda_r = \lambda_{r-1} - 1$, was in dem durch meine Beweisführung nicht ausgeschlossenen Fall[12] $\eta < \lambda_{r-1} - 1$ eintritt. Im letzteren Falle müssten alle Sum-

---

[12] In der schon zitierten Abhandlung hat Herr M. Riesz ohne Beweis einen Satz ausgesprochen, der meinem Satze III ungefähr entspricht und den folgenden Wortlaut hat:

Lorsque la fonction définie dans une portion du plan par la série convergente

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

est régulière aux points du demi-plan $\Re(s) \geqq c$ et y satisfait à la condition

$$\lim_{|s|=\infty} \frac{f(s)}{|s|^k} = 0, \tag{3}$$

uniformément avec $|s|$, la série $\Sigma a_n n^{-s}$ est sommable par les moyennes arithmétiques d'ordre k' (k' désignant un nombre quelconque $> k$) en tout point de la droite $\Re(s) = c$ et du demi-plan $\Re(s) > c$. La sommabilité est uniforme en toute bande du domaine $\Re(s) \geqq c$ qui est parallèle à mabilitätsstreifen von $\lambda_0 \cdots \lambda_1$ ab bis zu $\lambda_{r-1} \cdots \lambda_r$ ihre Maximalbreite 1 haben. Nur im Satze II, d. h. für den speziellen Wert $r = 1$, ist die entsprechende Einschränkung nicht notwendig, da dann im Beweise gewisse Glieder gar nicht erst auftreten, zu deren Behandlung ich im allgemeinen Falle (Satz III und IV) die Annahme nicht entbehren kann, dass der reelle Punkt γ, in welchem die Summabilität r. Ordnung nachgewiesen werden soll, von der Summabilitätsabscisse $(r-1)$. Ordnung einen geringeren Abstand als 1 hat.[13] Ich füge noch hinzu, dass beide Sätze natürlich auch dann richtig bleiben, wenn λ_{r-1} nicht die genaue Grenzabscisse der Summabilität $(r-1)$. Ordnung, sondern nur irgend eine Zahl bedeutet, welche die Eigenschaft hat, dass die Reihe für jede grössere Abscisse summabel von mindestens der $(r-1)$. Ordnung ist.

Was nun den Satz IV anbetrifft, so hat sich zuerst Herr BOHR[14] damit beschäftigt, meinen Satz I auf die Summabilitätstheorie der Dirichletschen Reihen zu übertragen. Da er sich aber nur das Ziel steckt, nach gewissen Reihenumformungen den Satz I anzuwenden, so erhält er den Satz IV nur mit einer sehr wesentlichen Einschränkung, die z. B. nicht gestattet, den Satz III daraus abzuleiten; in der Tat kann, da Herr BOHR auf neue funktionentheoretische Ent-

---

l'axe réel.

Da die Annahme (3) für $k > 0$ von der Bedingung

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{f(s)}{|t|^k} = 0 \text{ (gleichmässig für alle } \sigma \geqq c) \tag{4}$$

nur formal verschieden ist, so ist in diesem Satze genau mein Satz III enthalten. Aus (2) folgt nämlich nach dem oben zitierten PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satze, dass, wenn ε eine beliebig kleine Zahl > 0 ist, die Bedingung (4) gleichmässig für alle $\sigma \geqq \eta + \varepsilon = c$ gilt, wenn nur der Exponent $k < r$ der Zahl r hinreichend nahe liegt. Die Reihe $f(s)$ ist daher, wenn (2) vorausgesetzt wird, nach dem RIESZ'schen Satze in der Halbebene $\sigma \geqq \eta + \varepsilon$ und also auch in der Halbebene $\sigma > \eta$ summabel von der r. Ordnung, und der RIESZ'sche Satz besagt sogar etwas mehr als mein Satz III, da eben durch seinen Wortlaut die Möglichkeit, dass $\eta < \lambda_{r-1} - 1$ sein kann, von vonherein ausgeschlossen wird. Herr RIESZ hat mir mitgeteilt, wie ich mit seiner Zustimmung hier erwähne, dass er demnächst in zwei auf einander folgenden Noten zuerst einen allgemeinen Grenzwertsatz und sodann, darauf gestützt, seinen oben mitgeteilten Satz beweisen werde. Aus diesem Brief ersehe ich, dass die Beweisführung von Herrn RIESZ, über die er an der zitierten Stelle nur eine kurze und sehr allgemeine Andeutung macht, von den in der vorliegenden Abhandlung gegebenen Entwicklungen verschieden ist, da ein anderer Integrationsfaktor benutzt wird; überhaupt scheint das im Satze I behandelte Problem, das dann in dem allgemeinen Satze IV, der II und III als Spezialfälle enthält, weiter verfolgt wird und den Ausgangspunkt der vorliegenden Abhandlung bildet, nicht in der Richtung der RIESZ'schen Gedankenanordnung zu liegen. Übrigens soll in den versprochenen Abhandlungen das Entsprechende auch für den auf nicht ganzzahliges r verallgemeinerten Summabilitätsbegriff bewiesen werden, von dem ja schon in dem oben zitierten RIESZ'schen Satze die Rede ist.

[13] Vergl. indessen den Schlussparagraphen 5.

[14] Vergl. die in Anmerkung 7 zitierte Arbeit sowie die in Anmerkung 2 zitierte Habilitationsschrift.

wicklungen verzichtet, sein Resultat in funktionentheoretischem Sinne nicht tiefer liegen als der Satz I. Indessen hat auch das von Herrn BOHR erzielte Resultat ihm gestattet, eine sehr wichtige spezielle Folgerung daraus abzuleiten, die den innigen Zusammenhang zwischen den Summabilitätseigenschaften der Reihe $f(s)$ und dem analytischen Verhalten der Funktion $f(s)$ ins hellste Licht stellt. Indem ich diese Folgerung nunmehr anstatt an IV lieber an den einfacheren Satz III anknüpfe, definiere ich mit Herrn BOHR neben der Konstanten $\varLambda = \lim_{r=\infty} \lambda_r$, der Abscisse der Summabilitätsgrenzgeraden, in ähnlicher Weise mittelst eines DEDEKIND'schen Schnittes eine Konstante M folgendermassen: Ist ε eine beliebig kleine Zahl > 0, so soll die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq M + \varepsilon$ regulär sein, und es sollen sich stets zwei Konstanten K und A angeben lassen, so dass für $\sigma \geqq M + \varepsilon$, $|t| \geqq 1$

$$(5) \qquad |f(s)| < A\, |t|^K$$

ist, während in jeder Halbebene $\sigma \geqq M - \varepsilon$ die Funktion entweder nicht mehr regulär bleibt oder doch nicht mehr dieser Bedingung genügt. Nun führt die Annahme $\varLambda < M$ zu einem Widerspruch. Denn wenn $\varLambda < N < M$ bei endlichem N ist, so wäre nach dem Satz mit der Formel (1) für alle $\sigma \geqq N$, $|t| \geqq 1$ bei hinreichend grossem K die Ungleichung (5) erfüllt, weil wegen $N > \varLambda$ die Reihe $f(s)$ sogar noch in einem gewissen Intervall links von N summabel ist; dies steht aber im Gegensatz zum zweiten Teil der Definition von M, da ja $N < M$ ist. Andererseits führt auch die Annahme $\varLambda > M$ zu einem Widerspruch; denn wenn $M < N < \varLambda$ bei endlichem N ist, so wäre wegen $N > M$ nach dem ersten Teil der Definition von M die Beziehung (5) für alle $\sigma \geqq N, |t| \geqq 1$ erfüllbar; nimmt man in dieser $K = r$ ganzzahlig an und wählt r so gross, dass $\lambda_{r-1} - \varLambda < 1$ ist, was wegen $\lim_{r=\infty} \lambda_r = \varLambda$ möglich ist, so würde nach dem Satze III folgen, dass die Reihe $f(s)$ entweder für $\sigma > N$ oder für $\sigma > \lambda_{r-1} - 1$ summabel von der r. Ordnung ist. Da aber diese beiden Zahlen $< \varLambda$ sind, so wäre die Reihe $f(s)$ im Widerspruch zu der Definition von $\varLambda$ noch in einem gewissen Intervall links von $\varLambda$ summierbar. *Es bleibt daher nur $\varLambda = M$ übrig,* d. h. in nicht ganz präziser Ausdrucksweise: die Reihe $f(s)$ ist stets so weit und nur so weit summierbar, als die durch sie dargestellte Funktion regulär bleibt und in Bezug auf die Ordinate höchstens von endlicher Grössenordnung unendlich wird. Damit ist derjenige Satz für die Summabilitätsgrenzgerade festgestellt, dessen Analogon sich für die Konvergenzgerade als unrichtig erwies. Ich erwähne noch, dass Herr BOHR an Beispielen gezeigt hat, dass alle denkbaren Fälle vorkommen können: Besitzt die Reihe $f(s)$ überhaupt ein Konvergenzgebiet, so ist sie entweder in der ganzen

Ebene summabel, und es ist die dargestellte ganze transzendente Funktion in der ganzen Ebene nur von endlicher Grössenordnung in Bezug auf die Ordinate, oder es existiert eine im Endlichen gelegene vertikale Gerade, welche einerseits die Summabilitätsgrenzgerade ist und andererseits funktionentheoretisch die folgenden Eigenschaften besitzt: Entweder enthält sie selbst einen singulären Punkt der Funktion oder singuläre Punkte in beliebiger Nähe, oder die Funktion ist noch in einer Halbebene über diese Grenzgerade hinaus regulär, hört aber auf der Grenzgeraden auf, in dem bei der Definition von M angegebenen Sinne in Bezug auf die Ordinate von endlicher Grössenordnung zu sein.

Für diesen letzten Fall hat ferner Herr BOHR,[15] an bekannte funktionentheoretische Untersuchungen anknüpfend, nachgewiesen, dass die Funktion $f(s)$ in dem beliebig schmalen vertikalen Streifen $M-\varepsilon<\sigma<M+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ jeden reellen oder komplexen Wert annimmt, mit Ausnahme von höchstens einem einzigen Werte.

Zu den Sätzen III und IV zurückkehrend, definiere ich nunmehr neben der Folge der Summabilitätsabscissen λ_r eine weitere Folge von Grössen μ_r $(r=0, 1, 2, \ldots)$ folgendermassen: Es soll die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma>\mu_r$ regulär sein, und es soll sich, wenn δ und ε irgend zwei beliebig kleine Zahlen >0 sind, stets eine Konstante $A=A(\delta;\varepsilon)$ so bestimmen lassen, dass für alle $\sigma \geqq \mu_r+\varepsilon$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)|<A\,|t|^{r+\delta} \tag{6}$$

ist; dagegen soll in jeder Halbebene $\sigma \geqq \mu_r-\varepsilon$ die Funktion entweder nicht mehr überall regulär sein, oder es soll doch im Gebiet $\sigma \geqq \mu_r-\varepsilon$, $|t| \geqq 1$ nicht mehr für beliebig kleines $\delta>0$ die obige Ungleichung erfüllbar sein. μ_r ist also als die kleinste Zahl der angegebenen Eigenschaften definiert. Der Beweis, dass eine solche Konstante immer existiert, sobald die Reihe überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt, lässt sich leicht mit Hilfe der bekannten Gedankenanordnung des DEDEKIND'schen Schnittes führen, indem man zur zweiten Klasse alle reellen Zahlen σ_1 mit der Eigenschaft rechnet, dass die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \sigma_1$ regulär ist und dass nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta>0$ sich immer eine Konstante $A=A(\sigma_1;\delta)$ bestimmen lässt, für welche im Gebiet $\sigma \geqq \sigma_1$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)|<A\,|t|^{r+\delta}$$

---

[15] »Über die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichletschen Reihen», Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem. naturw.-Klasse, Bd. 119, Abteil. II a, 1910, S. 1391—1397.

wird, während die erste Klasse alle reellen Zahlen σ_2 umfassen soll, die nicht diese Eigenschaft besitzen[16]. Aus der angegebenen Definition folgt, dass im Falle $r = 1, 2, \ldots$ bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ im Gebiet $\sigma \geqq \mu_r + \varepsilon$, $|t| \geqq 1$ sogar

$$(7) \qquad |f(s)| < A\,|t|^r$$

wird; setzt man nämlich die Ungleichung (6) z. B. für das Gebiet $\sigma \geqq \mu_r + \frac{\varepsilon}{2}$, $|t| \geqq 1$ an, so liefert der schon mehrfach zitierte PHRAGMÉN-LINDELÖF'sche Satz für das Gebiet $\sigma \geqq \mu_r + \varepsilon$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung (7), wenn nur die in (6) vorkommende Grösse δ hinreichend klein angenommen wird. Ich bemerke jedoch ausdrücklich, dass dies nicht mehr für $r = 0$ gilt. Aus der Definition folgt ferner unmittelbar, *dass die μ_r ebenso wie die λ_r mit wachsendem r niemals zunehmen*, und es folgt aus dem PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satze, wie ich in § 1 leicht werde nachweisen können, *dass für $r = 1, 2, \ldots$ auch die Differenzen $\mu_{r-1} - \mu_r$ niemals zunehmen*, so dass also

$$\mu_0 - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3 \geqq \ldots \geqq 0$$

ist. Die μ_r genügen also genau denselben Ungleichheitsbedingungen wie die Grössenfolge λ_r, nur dass für die λ_r noch die eine Ungleichung $1 \geqq \lambda_0 - \lambda_1$ hinzutritt.[17] Ferner folgt unmittelbar aus der Definition der μ_r, dass $\lim\limits_{r=\infty} \mu_r = M$ ist, wo M die oben definierte Konstante bedeutet, also auch $= \Lambda$ ist: *die beiden Grössenfolgen λ_r und μ_r haben für $r = \infty$ stets denselben Grenzwert. Weiter ist für $r = 0, 1, \ldots$ die Grösse $\lambda_r \geqq \mu_{r+1}$;* wäre nämlich einmal $\lambda_r < \mu_{r+1}$, so würde wegen $\frac{\lambda_r + \mu_{r+1}}{2} > \lambda_r$ nach der Formel (1) für alle $\sigma \geqq \frac{\lambda_r + \mu_{r+1}}{2}$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|^{r+1}$$

[16] Es bleibt natürlich möglich, dass Zahlen der ersten Klasse nicht existieren, d. h. dass schon für ein endliches r die Konstante $\mu_r = -\infty$ wird. Dies ist aber, wie man leicht sieht nur dann der Fall, wenn die Reihe in der ganzen Ebene konvergiert und also auch in der ganzen Ebene absolut konvergiert; dann haben alle Zahlen λ_r wie μ_r von $r = 0$ an den Wert $-\infty$, so dass die ganze Summabilitätstheorie gegenstandslos wird. Es ergibt sich nämlich aus der Tatsache, dass die μ_r mit wachsendem r niemals zunehmen und aus den in der Folge zu entwickelnden Ungleichungen $\mu_0 - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3 \geqq \ldots \geqq \mu_{r-1} - \mu_r$, dass im Falle $\mu_r = -\infty$ auch $\mu_{r-1} = -\infty$ und schliesslich $\mu_1 = -\infty$ wird; hieraus aber folgt wegen $\lambda_1 \leqq \mu_1$ weiter, dass auch $\lambda_1 = -\infty$ wird, und wegen $0 \leqq \lambda_0 - \lambda_1 \leqq 1$, dass schon $\lambda_0 = -\infty$ ist, womit die Konvergenz der Reihe $f(s)$ in der ganzen Ebene nachgewiesen ist.

Ich bemerke ferner, dass die Bedingung (6) *auf der Geraden $\sigma = \mu_r$ selbst* nicht einmal für alle hinreichend grossen $|t|$ erfüllt zu sein braucht, da ja z. B. auf dieser unendlich viele singuläre Punkte der Funktion $f(s)$ liegen können, die sich im Unendlichen häufen.

[17] Es ist ferner, wenn l die Grenzabscisse der absoluten Konvergenz bezeichnet, auch $1 \geqq l - \lambda_0$, wie man mit wenigen Zeilen beweisen kann, aber nicht etwa stets $l - \lambda_0 \geqq \lambda_0 - \lambda_1$.

bestehen, die wegen $\frac{\lambda_r + \mu_{r+1}}{2} < \mu_{r+1}$ dem zweiten Teil der Definition von μ_{r+1} widerspricht. *Umgekehrt ergibt sich, dass für* $r = 1, 2, \ldots$ *die Grösse* λ_r *höchstens gleich der grösseren der beiden Zahlen* μ_r *und* $\lambda_{r-1} - 1$ *ist*; setzt man nämlich $\eta = \mu_r + \varepsilon$, so folgt aus der Beziehung (7) nach dem Satz III, dass die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \mu_r + \varepsilon$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung ist. Da nun $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen werden darf, so ergibt sich $\lambda_r \leqq \text{Max.}\,(\mu_r;\ \lambda_{r-1} - 1)$. Für $r = 1$ und $r = 0$ liefern die Sätze II bezw. I sogar $\lambda_1 \leqq \mu_1$, $\lambda_0 \leqq \mu_0$. Setzt man endlich, um Satz IV anzuwenden, für irgend eine positive ganze Zahl k die dort auftretende Konstante $\eta = \mu_{r+k} + \varepsilon$, so gilt nach der Definition von μ_{r+k} für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung (7), in der nur $r + k$ statt r zu schreiben ist, und der Satz IV ergibt, dass die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \frac{(\mu_{r+k} + \varepsilon) + k\lambda_{r-1}}{1 + k}$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, von der r. Ordnung summabel ist. *Also ist für* $r = 1, 2, \ldots$ *die Abscisse* $\lambda_r \leqq \text{Max.}\left(\frac{\mu_{r+k} + k\lambda_{r-1}}{1 + k};\ \lambda_{r-1} - 1\right)$, *wo* k *irgend eine positive ganze Zahl bedeutet;* hierin ist natürlich für $k = 0$ die aus dem Satze III sich ergebende Formel enthalten.[18]

Damit ist eine Menge paralleler Eigenschaften und gegenseitiger Beziehungen zwischen den Zahlen λ_r und μ_r bewiesen, wo die λ_r die charakteristischen Abscissen für die Summabilitätseigenschaften der Reihe, die μ_r die charakteristischen Abscissen für die Grössenordnung der Funktion in Bezug auf die Ordinate sind. Alle diese Resultate beruhen nur auf der einen selbstverständlichen Voraussetzung, dass die betrachtete Reihe überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt. Zum Vergleich ziehe ich schliesslich noch diejenigen speziellen Dirichletschen Reihen heran, die in der analytischen Zahlentheorie im Mittelpunkt des Interesses stehen, nämlich die Reihe

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

und allgemein die Reihen

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wo $\chi(n)$ irgend einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter modulo k bedeutet; diese letzteren Reihen bilden bekanntlich z. B. die Grundlage des klassischen DIRICHLET'schen Beweises für den Satz, dass in jeder arithmetischen

[18] Vergl. indessen auch zu diesen Resultaten den § 5.

Progression $ky + l$ $(y = 1, 2, \ldots)$, wo k und l teilerfremd sind, unendlich viele Primzahlen vorkommen. Für diese Reihen ist

$$l = 1,\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = -1, \ldots, \lambda_r = -r, \ldots;$$

$$\frac{1}{2} \leqq \mu_0 \leqq 1,\ \mu_1 = -\frac{1}{2},\ \mu_2 = -\frac{3}{2}, \cdots, \mu_r = -r + \frac{1}{2}, \cdots.$$

Für die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

selbst fallen natürlich alle diese Zahlen in den einen Wert 1 zusammen.

§ 1. Methodische Bemerkungen und Hilfssätze.

Den zweiten Teil dieser Arbeit, in welchem ich im wesentlichen nur die Sätze II bis IV zu beweisen haben werde, beginne ich mit einer Übersicht über die hierbei anzuwendende Methode. Herr LANDAU hatte in der in Anmerkung 3 zitierten Arbeit, in der zum ersten Mal ein Satz von der Art des oben angegebenen Satzes I bewiesen wird, das Hilfsmittel der Verwendung gewisser Integrale, die in einem ganzen Intervall des Parameters verschwinden, in der folgenden Weise benutzt. Sind die beiden Zahlen c und ϑ positiv und ist ν eine ganze Zahl $\geqq 2$, so ist bei Integration über die ganze vertikale Gerade $\sigma = c$

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\vartheta^s}{s^\nu}\, ds = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 < \vartheta \leqq 1, \\ \dfrac{2\pi i}{(\nu-1)!} \log^{\nu-1} \vartheta \text{ für } \vartheta \geqq 1. \end{cases} \tag{8}$$

Hieraus folgt, wenn rein formal die unendliche Integration mit der unendlichen Summation vertauscht und unter x eine positive ganze Zahl verstanden wird:

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s f(s)}{s^\nu}\, ds = \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s^\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{1}{s^\nu} \left(\frac{x}{n}\right)^s ds = \frac{2\pi i}{(\nu-1)!} \sum_{n=1}^{x} a_n \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right),$$

so dass also der Wert des Integrals bei positivem c von c unabhängig ist; bei negativem c unterscheidet er sich von dem ausgerechneten Werte nur um eine von c und x unabhängige Konstante, wie man unter geeigneten Voraussetzungen über die Regularität von $f(s)$ und über das Unendlichwerden von $f(s)$ auf vertikalen Geraden mittelst des CAUCHY'schen Integralsatzes leicht beweisen kann. Kann man nun unter Benutzung der eben erwähnten funktionentheoretischen Voraussetzungen über $f(s)$ bei passender Wahl von c nachweisen, dass das Integral links für $x=\infty$ konvergiert, so folgt, dass auch die endliche Summe rechts für $x=\infty$ konvergiert, woraus sich dann elementar die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ für gewisse Werte von s ableiten lässt. Der Kern des Beweises besteht also erstens in dem Nachweis, dass das Integral links für $x=\infty$ konvergiert, und zweitens in dem Nachweis, dass jene Vertauschung von Summation und Integration erlaubt ist; dies letztere ist um so wichtiger, als man gerade in der Theorie der Dirichletschen Reihen durch Vernachlässigung dieses Nachweises zu nachgewiesenermassen falschen Resultaten gelangt war. Die zu beiden Zwecken nötigen Abschätzungen aber beruhen ihrem Wesen nach auf der für $\nu \geqq 2$ gesicherten *absoluten* Konvergenz des Integrales (8), d. h. auf der Tatsache, dass der Ausdruck $\frac{1}{s^\nu}$ für $\nu \geqq 2$ von mindestens der zweiten Ordnung verschwindet, wenn s unendlich gross wird. Dies ist der Grund, weshalb bei vielen Entwicklungen der analytischen Zahlentheorie und auch an der zitierten Stelle die Integrale (8) verwendet werden und nicht vielmehr das schon bei RIEMANN vorkommende Integral

$$\lim_{T=\infty}\int_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{\vartheta^s}{s}\,ds=\begin{cases}0 \text{ für } 0<\vartheta<1,\\ \pi i \text{ für } \vartheta=1,\\ 2\pi i \text{ für } \vartheta>1,\end{cases} \tag{9}$$

welches formal die viel einfachere Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{T=\infty}\int_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{x^s f(s)}{s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\lim_{T=\infty}\int_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{1}{s}\left(\frac{x}{n}\right)^s ds=\sum_{n=1}^{x-1}a_n+\frac{1}{2}a_x$$

liefert, aber eben nicht absolut konvergiert. Hier steht rechts abgesehen von dem nicht störenden Summanden $\frac{1}{2}a_x$ gerade der Ausdruck, dessen Verhalten für $x=\infty$ untersucht werden soll. Meine in Anmerkung 4 zitierte Arbeit, in welcher der Satz I bewiesen wird, beruht nun auf dem Gedanken, die geschilderten Schwierigkeiten, welche alle darin begründet sind, dass in (9) der Ausdruck $\frac{1}{s}$ für $s=\infty$ nur von der ersten Ordnung verschwindet, dadurch zu vermeiden, dass ich das in dieser formalen Gleichung vorkommende T von vornherein als eine wohlbestimmte Funktion von x definiere, die zugleich mit x unendlich wird, und also die beiden successiven Grenzübergänge $T=\infty$, $x=\infty$ durch einen simultanen Grenzübergang $x=\infty$, also auch $T=\infty$ ersetze; dadurch gelingt es, mit dem Integrale

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{x^s f(s)}{s}\,ds$$

auch dann zum Ziel zu kommen, wenn zugelassen werden muss, dass die Integrationsgerade $\sigma=c$ auf der linken Seite der Konvergenzgeraden $\sigma=\lambda_0$ liegt.

Die neuen Resultate der vorliegenden Arbeit beruhen nun darauf, dass ich Integrale heranziehe, welche die Vorzüge der Integrale (8) und (9) in sich vereinigen; ich benutze nämlich anstatt dieser Integrale

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti}\vartheta^s R(s)\,ds, \tag{10}$$

wo $R(s)$, das an die Stelle von $\frac{1}{s^\nu}$ bezw. $\frac{1}{s}$ tritt, eine rationale Funktion von s ist, die im Punkte $s=0$ einen Pol von genau der ersten Ordnung besitzt, aber dennoch im Unendlichen von mindestens der zweiten Ordnung verschwindet; $R(s)$ muss dann ausserdem noch andere Pole besitzen, die ich ebenfalls von der ersten Ordnung ansetze und der Eigenart des zu beweisenden Satzes entsprechend verteile. Durch eine geeignete Festlegung der Pole lässt sich z. B. erreichen, dass bei dem Beweise des sehr komplizierten Satzes IV keinerlei formale Schwierigkeiten auftreten.

Die eigentlichen Beweisentwicklungen beginne ich mit einer Diskussion der Integrale (10), indem ich zunächst zeige, dass sich die zum Beweise von (9) dienenden und für $c>0$, $T>0$ geltenden Abschätzungen

$$\left\{\begin{aligned}
&\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{\vartheta^s}{s}\,ds-2\pi i\right|\leqq\frac{2}{T}\,\frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|}\ \text{für } \vartheta>1,\\
&\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{\vartheta^s}{s}\,ds\right|\leqq\frac{2}{T}\,\frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|}\ \text{für } 0<\vartheta<1,\\
&\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{ds}{s}-\pi i\right|\leqq\frac{2c}{T}\ (\text{für } \vartheta=1)
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

in ähnlicher Weise[19] zunächst für die Funktion

$$R(s) = \frac{1}{s(s+1)\dots(s+r)},$$

wo r eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist, aufstellen lassen. Durch dieselbe klassische Methode der Anwendung des CAUCHY'schen Integralsatzes erhalte ich nämlich unter den Voraussetzungen $c > 0$, $T > 0$ die folgenden Hilfsformeln:

$$\left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds - \frac{2\pi i}{r!}\left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)^r \right| \leqq \frac{2}{T^{r+1}} \frac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|} \text{ für } \vartheta > 1, \tag{12}$$

$$\left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds \right| \leqq \frac{2}{T^{r+1}} \frac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|} \text{ für } 0 < \vartheta < 1, \tag{13}$$

$$\left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} R(s)\, ds \right| \leqq \frac{\pi}{T^r} \text{ (für } \vartheta = 1). \tag{14}$$

Hieraus folgt natürlich unmittelbar durch den Grenzübergang $T = \infty$

$$\lim_{T=\infty} \int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds = \begin{cases} \frac{2\pi i}{r!}\left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)^r \text{ für } \vartheta \geqq 1, \\ 0 \text{ für } 0 < \vartheta \leqq 1. \end{cases}$$

Beweis: Um zunächst die Formel (12) zu beweisen, wende ich den CAUCHY'schen Integralsatz auf den Integranden $\vartheta^s R(s)$ und auf das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti, -A \pm Ti$ an, wo A eine beliebig grosse positive Zahl $> r$ sein soll. Dann ergibt sich

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds = \int_{c-Ti}^{-A-Ti} \vartheta^s R(s)\, ds + \int_{-A-Ti}^{-A+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds + \int_{-A+Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds + 2\pi i S, \tag{15}$$

wo S die Summe der Residuen der Funktion $\vartheta^s R(s)$ in dem betrachteten Rechteck sein soll. Nun konvergiert das zweite Integral rechts für $A = \infty$ gegen 0, da der

[19] Ein ausführlicher Beweis dieser Formeln findet sich z. B. in Herrn LANDAU's »Handbuch« (vergl. Anmerkung 5), Bd. I, S. 342—346.

Integrand wegen $\vartheta > 1$ gleichmässig auf dem vertikalen endlichen Integrationswege $-A - Ti \ldots -A + Ti$ gegen 0 konvergiert; es ist nämlich für alle s dieses Integrationsweges

$$|\vartheta^s R(s)| = \left|\frac{\vartheta^s}{s(s+1)\ldots(s+r)}\right| < \frac{\vartheta^{-A}}{(A-r)^{r+1}}.$$

Die beiden anderen Integrale auf der rechten Seite von (15) konvergieren für $A = \infty$ sogar absolut; es ist nämlich z. B. für das erste Integral

$$\left|\int\limits_{c-Ti}^{-A-Ti} \vartheta^s R(s)\, ds\right| < \frac{1}{T^{r+1}} \int\limits_{-A}^{c} \vartheta^\sigma\, d\sigma = \frac{1}{T^{r+1}} \frac{1}{\log \vartheta} (\vartheta^c - \vartheta^{-A}) < \frac{1}{T^{r+1}} \frac{\vartheta^c}{\log \vartheta},$$

während das dritte Integral genau derselben Abschätzung genügt. Was nun schliesslich den in (15) vorkommenden Ausdruck S anbetrifft, so ist, da der Integrand innerhalb des Integrationsgebietes die $r + 1$ Pole erster Ordnung $s = 0$, $s = -1, \ldots, s = -r$ besitzt:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{r!} + \frac{\vartheta^{-1}}{(-1)(+1)\ldots(r-1)} + \frac{\vartheta^{-2}}{(-2)(-1)(+1)\ldots(r-2)} + \cdots + \frac{\vartheta^{-r}}{-r(-r+1)\ldots(-1)} \\ &= \frac{1}{r!}\left(1 - \binom{r}{1}\vartheta^{-1} + \binom{r}{2}\vartheta^{-2} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}\vartheta^{-r}\right) \\ &= \frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)^r. \end{aligned}$$

Trägt man alle erhaltenen Resultate in die Formel (15) ein, so ergibt sich die Behauptung (12).

Ganz analog verläuft der Beweis für den Fall $\vartheta < 1$. Wendet man den CAUCHY'schen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti$, $A \pm Ti$ an, in welchem der Integrand durchweg regulär ist, so ergibt sich

$$\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds = \int\limits_{c-Ti}^{A-Ti} \vartheta^s R(s)\, ds + \int\limits_{A-Ti}^{A+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds + \int\limits_{A+Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds.$$

Auch hier ist für alle s auf dem Integrationswege des mittleren Integrals

$$|\vartheta^s R(s)| = \left|\frac{\vartheta^s}{s(s+1)\ldots(s+r)}\right| < \frac{\vartheta^A}{A^{r+1}},$$

was wegen $0 < \vartheta < 1$ für $A = \infty$ gegen 0 konvergiert, und es ist für das erste Integral rechts

$$\left|\int\limits_{c-Ti}^{A-Ti} \vartheta^s R(s)\, ds\right| < \frac{1}{T^{r+1}} \int\limits_c^A \vartheta^\sigma d\sigma = \frac{1}{T^{r+1}} \frac{1}{-\log \vartheta}(\vartheta^c - \vartheta^A) < \frac{1}{T^{r+1}} \frac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|},$$

während für das dritte Integral rechts genau dieselbe Abschätzung gilt. Damit ist auch die Formel (13) bewiesen.

Um schliesslich (14) nachzuweisen, wende ich den CAUCHY'schen Satz auf den Integranden $R(s)$ und auf das Gebiet an, welches einerseits von der geraden Linie $c - Ti \ldots c + Ti$, andererseits von dem über dieser Strecke als Durchmesser nach rechts beschriebenen Halbkreis K begrenzt wird, dessen Bogenlänge πT ist. Da der Integrand in diesem Gebiet durchweg regulär ist, so ergibt sich, wenn der Halbkreis von $c - Ti$ bis $c + Ti$ durchlaufen wird:

$$\left|\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} R(s)\, ds\right| = \left|\int\limits_K R(s)\, ds\right| = \left|\int\limits_K \frac{ds}{s(s+1)\ldots(s+r)}\right| < \pi T \cdot \frac{1}{T^{r+1}} = \frac{\pi}{T^r},$$

womit auch (14) bewiesen ist.

Die entsprechenden Formeln für die Funktion

$$\bar{R}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-i} = \frac{-i}{s(s-i)}$$

brauche ich nicht mehr besonders zu beweisen, um nicht die soeben entwickelten Rechnungen für den Spezialfall $r = 1$ mit geringen Abänderungen zu wiederholen. Es ergibt sich unter den Voraussetzungen $c > 0$, $T > 2$:

$$(16) \quad \begin{cases} \left|\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s \bar{R}(s)\, ds - 2\pi i(1 - \vartheta^i)\right| \leqq \dfrac{3}{T^2} \dfrac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|} \text{ für } \vartheta > 1, \\ \left|\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s \bar{R}(s)\, ds\right| \leqq \dfrac{3}{T^2} \dfrac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|} \text{ für } 0 < \vartheta < 1, \\ \left|\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \bar{R}(s)\, ds\right| \leqq \dfrac{2\pi}{T} \text{ für } (\vartheta = 1). \end{cases}$$

Schliesslich brauche ich noch eine Transformation der Formeln (11). Führt man anstatt der Variablen s die Variable $s - r$ ein, so ergibt sich

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{\vartheta^s}{s+r}\, ds = \vartheta^{-r} \int_{c+r-Ti}^{c+r+Ti} \frac{\vartheta^s}{s}\, ds.$$

Aus (11) ergibt sich daher für $c > -r$, also umsomehr für $c > 0$ die folgende Abschätzung, in der natürlich $T > 0$ angenommen werden muss:

$$(17) \quad \begin{cases} \left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{\vartheta^s}{s+r}\, ds - 2\pi i\, \vartheta^{-r} \right| \leqq \frac{2}{T} \frac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|} \text{ für } \vartheta > 1, \\ \left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{\vartheta^s}{s+r}\, ds \right| \leqq \frac{2}{T} \frac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|} \text{ für } 0 < \vartheta < 1. \end{cases}$$

Die entsprechende Formel für $\vartheta = 1$ wird nicht angewendet werden.

Um den Gang der Entwicklungen in den eigentlichen Beweisen der Sätze II bis IV nicht unterbrechen zu müssen, führe ich hier noch den in der Einleitung oft zitierten PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satz in der für unsere Anwendungen geeignetsten Form an:

Es sei eine beliebige analytische Funktion $F(s)$ in dem Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ regulär, und es sei für $\sigma = \sigma_1$, $|t| \geqq 1$

$$|F(s)| < A_1 |t|^k$$

sowie für $\sigma = \sigma_2$ nebst beliebigem t

$$|F(s)| < A_2;$$

schliesslich sei im Gebiet $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $|t| \geqq 1$

$$|F(s)| < A_3 |t|^K.$$

Hierbei sind k, K sowie A_1, A_2, A_3 beliebige positive Konstanten. Dann existiert eine Konstante A_4, so dass im Gebiet $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $|t| \geqq 1$

$$(18) \quad |F(s)| < A_4 |t|^{k \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1}}$$

ist.

Der Exponent auf der rechten Seite der erhaltenen Abschätzung nimmt also im Intervall $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ linear von k bis 0 ab. Ein ausführlicher Beweis dieses Satzes in genau der angegebenen Form findet sich an der in Anmerkung 6 zitierten Stelle von Herrn LANDAU's: »Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen».

Als erste Anwendung hole ich den in der Einleitung übergangenen Beweis nach, dass für die dort definierten Konstanten μ_r, die nach Definition mit wachsendem r niemals zunehmen, die Beziehung $\mu_0-\mu_1 \geqq \mu_1-\mu_2 \geqq \mu_2-\mu_3 \geqq \dots$ gilt, d. h. dass allgemein $\mu_{r-1}-\mu_r \geqq \mu_r-\mu_{r+1}$ $(r=1,2,\dots)$ ist. Hierbei darf angenommen werden, dass $\mu_{r+1}<\mu_r \leqq \mu_{r-1}$ ist; in den beiden Fällen $\mu_{r+1}=\mu_r<\mu_{r-1}$ und $\mu_{r+1}=\mu_r=\mu_{r-1}$ ist nämlich die Behauptung trivial. Ich setze nun

$$F(s)=\frac{f(s)}{(s-a)^{r-1+\delta}},\ \sigma_1=\mu_{r+1}+\varepsilon,\ \sigma_2=\mu_{r-1}+\varepsilon,$$

wo $f(s)$ die zu den Konstanten μ_r gehörige Dirichletsche Reihe bedeutet, δ und ε beliebig kleine positive Zahlen sind und endlich a irgend eine reelle Zahl ist, die entweder $<\mu_{r+1}+\varepsilon$ oder $>\mu_{r-1}+\varepsilon$ ist. Dann folgt aus der Definitionsbeziehung (6), angewandt auf die Abscissen μ_{r+1} und μ_{r-1}, dass für $\sigma \geqq \mu_{r+1}+\varepsilon$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)|<C\,|t|^{r+1+\delta}$$

und für $\sigma \geqq \mu_{r-1}+\varepsilon$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)|<C_1\,|t|^{r-1+\delta}$$

ist. Hieraus aber ergibt sich, dass für unsere Funktion $F(s)$ in dem angegebenen Intervalle $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ alle Voraussetzungen des angeführten Satzes mit $k=2$, $K=2$ erfüllt sind. Ferner ist infolge der Annahme $\mu_{r+1}<\mu_r$ für hinreichend kleines ε die Zahl $\mu_{r+1}+\varepsilon<\mu_r-\varepsilon$, so dass $\mu_r-\varepsilon$ im Innern unseres Intervalls liegt. Man darf daher in (18) den speziellen Wert $\sigma=\mu_r-\varepsilon$ einsetzen und erhält im Gebiet $\mu_r-\varepsilon \leqq \sigma \leqq \mu_{r-1}+\varepsilon$, $|t| \geqq 1$

$$\begin{aligned}|F(s)|&<C_2\,|t|^{2\cdot\frac{(\mu_{r-1}+\varepsilon)-(\mu_r-\varepsilon)}{\mu_{r-1}-\mu_{r+1}}}\\&=C_2\,|t|^{1+\frac{(\mu_{r-1}-\mu_r)-(\mu_r-\mu_{r+1})+4\varepsilon}{\mu_{r-1}-\mu_{r+1}}}.\end{aligned}$$

Wäre nun $\mu_{r-1}-\mu_r<\mu_r-\mu_{r+1}$, so könnte man ε weiter so klein annehmen, dass der Bruch im Exponenten von $|t|$ verschwindet oder negativ ist; man erhielte dann im Gebiet $\mu_r-\varepsilon \leqq \sigma \leqq \mu_{r-1}+\varepsilon$, $|t| \geqq 1$

$$|F(s)|<C_2\,|t|,$$

$$|f(s)|<C_2\,|t|\cdot|s-a|^{r-1+\delta}<C_3\,|t|^{r+\delta},$$

also im Gebiete $\sigma \geqq \mu_r-\varepsilon$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)|<(C_1+C_3)\,|t|^{r+\delta},$$

und zwar für jede beliebig kleine Zahl $\delta > 0$. Dies widerspricht aber der Definition von μ_r, womit bewiesen ist, dass für $r = 1, 2, \ldots$ stets $\mu_{r-1} - \mu_r \geq \mu_r - \mu_{r+1}$ ist.

§ 2. Beweis von Satz II.

Wir gehen nunmehr zum Beweise des folgenden Satzes über:

II. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiet dargestellte Funktion für $\sigma \geq \eta$ regulär, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geq \eta$, $|t| \geq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t| \tag{19}$$

gilt. Dann ist die Reihe $f(s)$ für $\sigma > \eta$ wenigstens summabel von der ersten Ordnung.

Beweis: Wir brauchen nur zu zeigen, dass die Reihe für jeden *reellen* Punkt $\gamma = \eta + d$, wo $d > 0$ ist, von der ersten Ordnung summabel ist. Dazu wenden wir für irgend eine positive ganze Zahl x den CAUCHY'schen Satz auf den Integranden

$$x^s \bar{R}(s) f(s+\gamma) = x^s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-i}\right) f(s+\gamma)$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $-\frac{d}{2} \pm Ti$, $l - \eta \pm Ti$ an, wo $l > \eta$ die Grenzabscisse der absoluten Konvergenz bezeichnet[20] und $T > 2$ sein soll. Dann hat der Integrand im Integrationsgebiet nur die beiden sicher darin gelegenen ev. Pole erster Ordnung $s = 0$ und $s = i$ und ist sonst überall im Integrationsgebiet regulär. Es ergibt sich daher, wenn der Integrand als selbstverständlich weggelassen wird:

$$\int_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} + \int_{l-\eta+Ti}^{-\frac{d}{2}+Ti} + \int_{-\frac{d}{2}+Ti}^{-\frac{d}{2}-Ti} + \int_{-\frac{d}{2}-Ti}^{l-\eta-Ti} = 2\pi i\,(f(\gamma) - x^i f(\gamma+i)). \tag{20}$$

Wir wenden ferner auf die Funktion $f(s)$ und die beiden Abscissen $\sigma_1 = \eta$, $\sigma_2 = l + d$ den PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satz an, dessen Voraussetzungen wegen (19) und der absoluten Konvergenz der Reihe $f(s)$ auf der Geraden $\sigma = l + d$ offenbar erfüllt sind, und zwar ist $k = 1$, $K = 1$. Es folgt die Existenz einer Konstanten $\vartheta < 1$, für welche im Gebiet $\sigma \geq \eta + \frac{d}{2}$, $|t| \geq 1$

$$|f(s)| < C\,|t|^{\vartheta}$$

[20] Im Falle $l \leq \eta$ ist nämlich der behauptete Satz trivial.

wird; dies ergibt, auf das Gebiet $\sigma \geqq \eta - \gamma + \frac{d}{2} = -\frac{d}{2}$, $|t| \geqq 1$ übertragen,

$$|f(s+\gamma)| < C\,|t|^{\vartheta}.$$

Ferner ist bei beliebigem σ für $|t| \geqq 2$

$$|\bar{R}(s)| = \left| -\frac{i}{s(s-i)} \right| \leqq \frac{2}{|t|^2}.$$

Man erhält daher für das dritte Integral auf der linken Seite von (20) die Abschätzung

$$|I_3| = \left| -\int\limits_{-\frac{d}{2}-Ti}^{-\frac{d}{2}+Ti} x^s \bar{R}(s)\, f(s+\gamma)\, ds \right| \leqq \left| \int\limits_{-\frac{d}{2}-2i}^{-\frac{d}{2}+2i} x^s \bar{R}(s)\, f(s+\gamma)\, ds \right| + 2 \int\limits_{2}^{T} x^{-\frac{d}{2}} \cdot \frac{2}{t^2} \cdot C t^{\vartheta}\, dt$$

$$< x^{-\frac{d}{2}} \left\{ C_1 + 4C \int\limits_{2}^{\infty} \frac{dt}{t^{2-\vartheta}} \right\} = C_2\, x^{-\frac{d}{2}},$$

in der C_2 eine wegen $\vartheta < 1$ endliche, von T und x unabhängige Konstante bezeichnet. Ähnlich ergibt sich für das vierte Integral auf der linken Seite von (20)

$$|I_4| = \left| \int\limits_{-\frac{d}{2}-Ti}^{l-\eta-Ti} x^s \bar{R}(s)\, f(s+\gamma)\, ds \right| \leqq \frac{2}{T^2} \cdot C T^{\vartheta} \cdot \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{l-\eta} x^{\sigma}\, d\sigma = \frac{2C}{T^{2-\vartheta}} \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{l-\eta} x^{\sigma}\, d\sigma;$$

genau derselben Abschätzung genügt das Integral I_2.

In dem ersten Integral auf der linken Seite von (20) schliesslich darf man für $f(s+\gamma)$ die Reihendarstellung einführen, die ja wegen $\Re(s+\gamma) = (l-\eta)+\gamma = l+d$ auf der ganzen Geraden $\Re(s) = l-\eta$, also auch auf dem endlichen Integrationswege von $l-\eta-Ti$ bis $l-\eta+Ti$ absolut und gleichmässig konvergiert. Infolgedessen ist es gestattet, die Integration unter dem Summenzeichen auszuführen:

$$I_1 = \int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} x^s \bar{R}(s)\, f(s+\gamma)\, ds = \int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} x^s \bar{R}(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s+\gamma}}\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\gamma}} \int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} \left(\frac{x}{n}\right)^s \bar{R}(s)\, ds.$$

Die Anwendung der Formeln (16) für $\vartheta = \frac{x}{n}$ ergibt daher

$$\left| I_1 - 2\pi i \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma}\left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|a_n|}{n^\gamma} \cdot \frac{3}{T^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{l-\eta}}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} + \frac{2\pi}{T} \frac{|a_x|}{x^\gamma}$$

$$= \frac{3x^{l-\eta}}{T^2} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|a_n|}{n^{l+d}} \cdot \frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} + \frac{2\pi}{T} \frac{|a_x|}{x^\gamma},$$

wo der Strich am Summenzeichen ausdrücken soll, dass das Glied $n = x$ von der Summation ausgeschlossen ist. Die unendliche Reihe rechts konvergiert natürlich, da der hinzutretende Faktor $\frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|}$ für $n = \infty$ sogar gegen o konvergiert.

Wir gehen nunmehr bei festem x zur Grenze $T = \infty$ über. Dann verschwindet die rechte Seite der soeben entwickelten Abschätzung über I_1, so dass also der Grenzwert von I_1 gleich der in dieser Abschätzung auf der linken Seite auftretenden endlichen Summe ist, und es verschwinden nach der erhaltenen Abschätzungsformel die Integrale I_4 und I_2. Das Integral I_3 konvergiert, wie wir gesehen haben, für $T = \infty$ sogar absolut, und zwar bleibt sein Grenzwert $\bar{I}_3$ absolut genommen unterhalb der Schranke $C_2 x^{-\frac{d}{2}}$. Nimmt man also in der durch den Grenzübergang $T = \infty$ aus (20) sich ergebenden Gleichung

$$2\pi i \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma}\left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) + \bar{I}_3 = 2\pi i \left(f(\gamma) - x^i f(\gamma + i)\right)$$

den neuen Grenzübergang $x = \infty$ vor, so bleibt nur übrig

$$\lim_{x=\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma}\left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) - f(\gamma) + x^i f(\gamma + i) \right\} = 0. \tag{21}$$

Nun ist identisch, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\nu^\gamma} = s_n$$

gesetzt wird,

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^{\gamma+i}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma} \frac{1}{n^i} = \sum_{n=1}^{x-1} s_n \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + \frac{s_x}{x^i}$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + f(\gamma) \sum_{n=1}^{x-1} \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + \frac{s_x}{x^i}$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + f(\gamma) + \frac{s_x - f(\gamma)}{x^i},$$

also

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma}\left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) = s_x - x^i \sum_{n=1}^{x-1} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) - x^i f(\gamma) - (s_x - f(\gamma)),$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma}\left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) - f(\gamma) + x^i f(\gamma+i) = -x^i \sum_{n=1}^{x-1} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + x^i (f(\gamma+i) - f(\gamma)).$$

Da nach (21) die linke Seite für $x = \infty$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch die rechte Seite gegen 0, auch dann, wenn sie mit x^{-i} multipliziert wird. Es ergibt sich daher die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) = f(\gamma + i) - f(\gamma). \tag{22}$$

Setzt man ferner

$$s_n - f(\gamma) = \sigma_n, \ \frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i} = \alpha_n, \ \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \alpha_\nu = A_n, \ f(\gamma+i) - f(\gamma) = A,$$

so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{x} \sigma_n &= \sum_{n=1}^{x} \sigma_n \alpha_n \cdot \frac{1}{\alpha_n} = \sum_{n=1}^{x} A_n \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + \frac{A_x}{\alpha_{x+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{x} (A_n - A) \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{A_x - A}{\alpha_{x+1}}. \end{aligned} \tag{23}$$

Nun ist einerseits, wie mit (22) bewiesen, $\lim_{n=\infty} (A_n - A) = 0$, andererseits ist für $n \geqq 2$

$$\alpha_n = \frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i} = \frac{1}{n^i}\left\{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-i}\right\} = \frac{i}{n^{1+i}}\left(1 + \frac{\vartheta(n)}{n}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha_n} = -i n^{1+i}\left(1 + \frac{\vartheta_1(n)}{n}\right) = -i n^{1+i} + \vartheta_2(n),$$

$$\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}} = -i(n^{1+i} - (n+1)^{1+i}) + \vartheta_2(n) - \vartheta_2(n+1) = \vartheta_3(n),$$

wo die Funktionen $\vartheta(n)$ bis $\vartheta_3(n)$ für alle n absolut genommen unterhalb einer festen Schranke liegen. Folglich ergibt sich

$$\lim_{n=\infty} (A_n - A)\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) = 0, \quad \lim_{x=\infty} (A_x - A) \cdot \frac{1}{x} \frac{1}{\alpha_{x+1}} = 0,$$

und daher nach (23)

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} \sigma_n = 0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} s_n = f(\gamma).$$

Die letztere Gleichung besagt aber, dass die Reihe $f(s)$ im Punkte $s = \gamma$ summabel von der ersten Ordnung mit dem Wert $f(\gamma)$ ist, was bewiesen werden sollte.

§ 3. Beweis von Satz III.

III. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiet dargestellte Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \eta$ regulär, wo $\eta < \lambda_{r-1}$ ist, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$

(2) $$|f(s)| < A\,|t|^r$$

ist. Dann ist die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \eta$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung.

Zum Beweise dieses Satzes läge es natürlich nahe, nachdem einmal der Satz II mit der Funktion $\bar{R}(s)$ bewiesen worden ist, im allgemeineren Falle auch allgemeinere Integrationsfaktoren $\bar{R}(s)$ einzuführen, die dann etwa die Gestalt

$$\bar{R}(s) = \frac{1}{s} - \binom{r}{1}\frac{1}{s-i} + \binom{r}{2}\frac{1}{s-2i} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}\frac{1}{s-ri}$$

oder die Gestalt

$$\bar{R}(s) = \frac{1}{s(s-i)\ldots(s-ri)}, \quad \bar{R}(s) = \frac{1}{s(s+i)\ldots(s+ri)}$$

haben würden. Alle diese rationalen Funktionen haben nur Pole erster Ordnung und verschwinden im Unendlichen von der $r+1$. Ordnung. Doch treten, welche von diesen Funktionen man auch benutzt, stets beträchtliche formale Schwierigkeiten auf, so dass es scheint, dass der Kunstgriff, der uns am Schlusse des Beweises von Satz II von dem komplizierten Grenzwert (21) zur Konvergenz der Reihe (22) führte, sich nicht leicht auf den Fall des allgemeinen r übertragen lässt. Ich verwende daher jetzt einen ganz anders gebauten Integrationsfaktor

$$R(s) = \frac{1}{s(s+1)\ldots(s+r)},$$

der dem Beweise natürlich eine völlig andere Richtung gibt. Ich bemerke ausdrücklich, dass ich auch mit der Funktion

$$\frac{1}{s(s+1)} \text{ statt } \frac{1}{s} - \frac{1}{s-i}$$

den Satz II seinem vollen Inhalt nach hätte beweisen können, wie sich am Schlusse des folgenden Beweises durch die Spezialisierung $r = 1$ leicht zeigen lässt. Ich wählte den vorgetragenen Beweis, weil es mir methodisch interessant erschien, auch einmal einen derartigen Satz mit einem Integrationsfaktor zu beweisen, dessen beide Pole auf der Achse des Imaginären liegen.

Indem ich nunmehr den Beweis von Satz III durchführe, wende ich wie in II für positives ganzes x den CAUCHY'schen Satz auf den Integranden

$$x^s R(s) f(s+\gamma) = \frac{x^s f(s+\gamma)}{s(s+1)\ldots(s+r)}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $-\frac{d}{2} \pm Ti$, $l - \eta \pm Ti$ an. Hierbei ist $T > 0$ und $\gamma = \eta + d$, wo die positive Zahl d so gewählt sei, dass $\lambda_{r-1} - 1 < \gamma \leqq \lambda_{r-1}$ ist. Ist $\lambda_{r-1} - 1$ schon $\leqq \eta$, so darf natürlich d beliebig klein angenommen werden; der Satz III ist seinem vollen Umfange nach bewiesen, wenn gezeigt werden kann, dass für jede derartige Zahl γ die Reihe von der r. Ordnung summabel ist. Da der Integrand in dem ganzen Integrationsgebiet regulär ist mit Ausnahme des sicher[21] darin gelegenen ev. Poles erster Ordnung $s = 0$ und der möglicher Weise darin gelegenen ev. Pole erster Ordnung $s = -1, s = -2, \ldots, s = -r$ (es darf natürlich angenommen werden, dass alle diese Zahlen von $-\frac{d}{2}$ verschieden sind), so ergibt sich:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} + \int_{l-\eta+Ti}^{-\frac{d}{2}+Ti} + \int_{-\frac{d}{2}+Ti}^{-\frac{d}{2}-Ti} + \int_{-\frac{d}{2}-Ti}^{l-\eta-Ti} = \\ &= 2\pi i \left\{\frac{1}{r!} f(\gamma) + \frac{x^{-1} f(\gamma-1)}{(-1)(+1)\ldots(r-1)} + \frac{x^{-2} f(\gamma-2)}{(-2)(-1)\ldots(r-2)} + \cdots\right\}, \end{aligned}\right.$$

wo auf der rechten Seite im Falle $\frac{d}{2} < 1$ nur das Glied $\frac{2\pi i}{r!} f(\gamma)$ auftritt, jeden-

[21] Es ist nämlich $\eta < \lambda_{r-1} \leqq l$, also $l - \eta > 0$, da ja l die Grenzabcisse der absoluten Konvergenz bezeichnet.

falls aber die Anzahl der Zusatzglieder höchstens r beträgt; diese etwaigen Zusatzglieder verschwinden natürlich beim Grenzübergang $x=\infty$. Nun existiert nach dem PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satze, da die Reihe $f(s)$ z. B. auf der Geraden $\sigma=l+d$ absolut genommen unterhalb einer endlichen Schranke liegt, infolge (2) eine Zahl $\vartheta<1$, so dass im Gebiet $\sigma\geqq\eta+\frac{d}{2}$, $|t|\geqq 1$

$$|f(s)|<C\,|t|^{r-1+\vartheta},$$

also im Gebiet $\sigma\geqq\eta-\gamma+\frac{d}{2}=-\frac{d}{2}$, $|t|\geqq 1$

$$|f(s+\gamma)|<C\,|t|^{r-1+\vartheta}$$

ist. Ferner ist bei beliebigem σ für jedes $t\neq 0$

$$|R(s)|=\left|\frac{1}{s(s+1)\ldots(s+r)}\right|<\frac{1}{|t|^{r+1}}.$$

Da nun genau wie beim Beweise von II die Differenz der in den beiden letzten Ungleichungen rechts auftretenden Exponenten $(r+1)-(r-1+\vartheta)=2-\vartheta>1$ ist, so ergibt sich ebenso wie dort, wenn die auf der linken Seite von (24) auftretenden Integrale fortlaufend mit I_1 bis I_4 bezeichnet werden,

$$|I_3|<C_1\,x^{-\frac{d}{2}},\quad |I_4|<\frac{C}{T^{2-\vartheta}}\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{l-\eta}x^\sigma\,d\sigma,\quad |I_2|<\frac{C}{T^{2-\vartheta}}\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{l-\eta}x^\sigma\,d\sigma,$$

wo C und C_1 von x und T unabhängige Konstanten bedeuten.

In dem Integrale I_1 dürfen wir wie in II für $f(s+\gamma)$ die Reihenentwicklung einsetzen, da ja dort $\Re(s+\gamma)=(l-\eta)+\gamma=l+d$ ist, und es darf wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe auf dem Integrationswege die Summation mit der Integration vertauscht werden. Dies ergibt

$$I_1=\int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti}x^s R(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{s+\gamma}}\,ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\gamma}\int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti}\left(\frac{x}{n}\right)^s R(s)\,ds.$$

Also ist infolge der Formeln (12), (13), (14), wenn dort $\vartheta=\frac{x}{n}$ gesetzt wird:

$$\left|I_1-\frac{2\pi i}{r!}\sum_{n=1}^{x-1}\frac{a_n}{n^\gamma}\left(1-\frac{n}{x}\right)^r\right|\leqq\frac{2x^{l-\eta}}{T^{r+1}}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{|a_n|}{n^{\gamma+l-\eta}}\,\frac{1}{\left|\log\frac{x}{n}\right|}+\frac{\pi}{T^r}\frac{|a_x|}{x^\gamma},$$

wo der Strich am Summenzeichen bedeuten soll, dass das Glied $n = x$ von der Summation ausgeschlossen ist, und wo die unendliche Reihe wegen $\gamma + l - \eta = l + d$ konvergiert. Da die rechte Seite für $T = \infty$ gegen o konvergiert, ebenso wie die Integrale I_4 und I_2, so ergibt sich aus (24) durch diesen Grenzübergang unter Berücksichtigung auch der über I_3 gewonnenen Abschätzung:

$$\frac{2\pi i}{r!}\sum_{n=1}^{x-1}\frac{a_n}{n^\gamma}\left(1-\frac{n}{x}\right)^r + h(x) = \frac{2\pi i}{r!} f(\gamma),$$

wo $h(x)$ eine gewisse Funktion von x bezeichnet, die für $x = \infty$ gegen o konvergiert. Dieser Grenzübergang liefert also

$$\lim_{x=\infty}\frac{1}{x^r}\sum_{n=1}^{x-1}\frac{a_n}{n^\gamma}(x-n)^r = f(\gamma). \tag{25}$$

Auf die linke Seite von (25) wenden wir nun fortgesetzte partielle Summation an, indem wir für $\alpha_n = \frac{a_n}{n^\gamma}$ die in der Einleitung definierten Summen s_n, S'_n, $S''_n, \ldots$ bilden. Diese partielle Summation stützt sich auf die folgende Identität, in der

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = B_n$$

gesetzt ist:

$$\sum_{n=1}^{x-1} b_n c_n = \sum_{n=1}^{x-1} B_n(c_n - c_{n+1}) + B_{x-1}c_x. \tag{26}$$

Es ergibt sich zunächst, wenn $c_n = (x-n)^r$ gesetzt wird, so dass also $c_x = 0$ ist:

$$\sum_{n=1}^{x-1}\alpha_n(x-n)^r = \sum_{n=1}^{x-1} s_n\{(x-n)^r - (x-n-1)^r\}. \tag{27}$$

Nun werde bei festem x für $n = 1, 2, \ldots, x-1$

$$\Delta_1(x-n)^r = (x-n)^r - (x-n-1)^r$$

gesetzt, während für $n = x$ der Ausdruck $\Delta_1(x-n)^r = 0$ sein soll. Ferner sei für $n = 1, 2, \ldots, x-1$

$$\Delta_2(x-n)^r = \Delta_1(x-n)^r - \Delta_1(x-n-1)^r;$$

für $n = x$ sei wiederum $\Delta_2(x-n)^r = \Delta_1(x-n)^r = 0$. Allgemein werde für $n = 1, 2, \ldots, x-1$

$$\Delta_\varrho (x-n)^r = \Delta_{\varrho-1}(x-n)^r - \Delta_{\varrho-1}(x-n-1)^r$$

gesetzt mit der für $n=x$ geltenden Ergänzung $\Delta_\varrho (x-n)^r = 0$. Dann ergibt sich unmittelbar die folgende explicite Darstellung, die man z. B. mittelst vollständiger Induktion leicht beweisen kann: es ist für $n = 1, 2, \ldots, x-\varrho$

$$\Delta_\varrho (x-n)^r = (x-n)^r - \binom{\varrho}{1}(x-n-1)^r + \binom{\varrho}{2}(x-n-2)^r - \cdots + (-1)^\varrho \binom{\varrho}{\varrho}(x-n-\varrho)^r,$$

während für $n = x-\varrho+1$, d. h. für $x-n = \varrho-1$

$$\Delta_\varrho (x-n)^r = (\varrho-1)^r - \binom{\varrho}{1}(\varrho-2)^r + \cdots + (-1)^{\varrho-1}\binom{\varrho}{\varrho-1} 0^r,$$

für $n = x-\varrho+2$, d. h. für $x-n = \varrho-2$

$$\Delta_\varrho (x-n)^r = (\varrho-2)^r - \binom{\varrho}{1}(\varrho-3)^r + \cdots + (-1)^{\varrho-2}\binom{\varrho}{\varrho-2} 0^r,$$

für $n = x-1$, d. h. für $x-n = 1$

$$\Delta_\varrho (x-n)^r = 1^r - \binom{\varrho}{1} 0^r = 1$$

und schliesslich für $n = x$

$$\Delta_\varrho (x-n)^r = 0$$

wird.

Unter Benutzung dieser Definition ergibt sich aus (27) mittelst fortgesetzter Anwendung der Formel (26), da ja bei jedem Schritt $c_x = 0$ ist:

$$\sum_{n=1}^{x-1} \alpha_n (x-n)^r = \sum_{n=1}^{x-1} s_n \Delta_1 (x-n)^r = \sum_{n=1}^{x-1} S'_n \Delta_2 (x-n)^r = \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{x-1} S_n^{(r-1)} \Delta_r (x-n)^r.$$

Nun ist für beliebiges y und jede positive ganze Zahl r

$$y^r - \binom{r}{1}(y-1)^r + \binom{r}{2}(y-2)^r - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}(y-r)^r$$

$$= y^r \left\{1 - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}\right\} - \binom{r}{1} y^{r-1}\left\{-\binom{r}{1}\cdot 1 + \binom{r}{2}\cdot 2 - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} r\right\} +$$

$$+\binom{r}{2} y^{r-2}\left\{-\binom{r}{1}\cdot 1^2+\binom{r}{2} 2^2-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r} r^2\right\}$$

$$-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}\cdot\left\{-\binom{r}{1}\cdot 1^r+\binom{r}{2} 2^r-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r} r^r\right\}=r!,$$

wie man leicht etwa durch Induktion nachweisen kann; der betrachtete Ausdruck ist also in Wirklichkeit von y unabhängig. Folglich ist insbesondere für $n=1, 2, \ldots, x-r$ der Faktor $\Delta_r(x-n)^r=r!$, so dass also

$$\begin{aligned}(28)\qquad \sum_{n=1}^{x-1} a_n (x-n)^r &= r!\sum_{n=1}^{x-r} S_n^{(r-1)} + d_{r-1} S_{x-r+1}^{(r-1)} + \cdots + d_1 S_{x-1}^{(r-1)} \\ &= r!\, S_{x-r}^{(r)} + d_{r-1} S_{x-r+1}^{(r-1)} + \cdots + d_1 S_{x-1}^{(r-1)}\end{aligned}$$

wird, wo die d gewisse ganzzahlige Koeffizienten sind, auf deren Wert es nicht ankommt. Im Falle $r=1$ treten diese Glieder nicht erst auf.

Wir wenden nunmehr den folgenden grundlegenden Satz aus der Summabilitätstheorie der Dirichletschen Reihen an: Besitzt die Reihe

$$g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\gamma}\cdot\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^s}$$

eine nicht negative Summabilitätsabscisse $r-1$. Ordnung, so ist diese gleich dem Grenzwert[22]

$$\limsup_{n=\infty}\frac{\log\left|\dfrac{(r-1)!\,S_n^{(r-1)}}{n^{r-1}}\right|}{\log n}.$$

Da in unserem Falle die Summabilitätsabscisse $r-1$. Ordnung für $f(s)$ den Wert λ_{r-1}, also für $g(s)$ den Wert $\lambda_{r-1}-\gamma$ hat, so ist der obige Grenzwert $=\lambda_{r-1}-\gamma$; also ist bei beliebig kleinem δ für alle n von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log\left|\dfrac{(r-1)!\,S_n^{(r-1)}}{n^{r-1}}\right|}{\log n}<\lambda_{r-1}-\gamma+\delta,$$

$$(29)\qquad \left|S_n^{(r-1)}\right|<n^{r-1+\lambda_{r-1}-\gamma+\delta},$$

[22] Ein ausführlicher Beweis findet sich in der in Anmerkung 2 zitierten Habilitationsschrift von Herrn Bohr, S. 85.

und da wegen $\gamma > \lambda_{r-1} - 1$ bei hinreichend kleinem δ der Exponent auf der rechten Seite der letzten Ungleichung $< r$ ist, so folgt

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(r-1)}}{n^r} = 0.$$

Aus der Identität (28) ergibt sich daher

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x^r} \sum_{n=1}^{x-1} a_n (x-n)^r = \lim_{x=\infty} r! \frac{S_{x-r}^{(r)}}{x^r},$$

was in Kombination mit (25) die Beziehungen

$$\lim_{x=\infty} r! \frac{S_{x-r}^{(r)}}{x^r} = f(\gamma),$$

$$\lim_{x=\infty} r! \frac{S_x^{(r)}}{x^r} = f(\gamma)$$

liefert. Damit aber ist der Satz III bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz IV.

IV. Wenn die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \eta$ regulär ist, wo $\eta < \lambda_{r-1}$ ist, und wenn für alle $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$

(30) $$|f(s)| < A\, |t|^{r+k}$$

ist, wo k irgend eine Konstante $\geqq 0$ bezeichnet, so ist die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \frac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung.

Es ist also zu beweisen, dass für jede Zahl γ, welche einerseits $> \frac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$, andererseits $> \lambda_{r-1} - 1$ ist, die Reihe von der r. Ordnung summabel ist. Wegen $\lambda_{r-1} > \eta$ ist dieses γ eo ipso $> \frac{\eta + k\eta}{1+k} = \eta$; ferner darf wie in § 3 andererseits $\gamma \leqq \lambda_{r-1}$ angenommen werden. Wir wenden nun bei positivem ganzem x den Cauchy'schen Satz auf den Integranden

$$x^s R(s) f(s+\gamma) = \frac{x^s f(s+\gamma)}{s(s+1)\dots(s+r)}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $-(\gamma-\eta) \pm Ti$, $a - \gamma \pm Ti$ an, wo a eine Zahl $> \lambda_{r-1}$ bedeutet und T durch die Gleichung

$$T = x^{\frac{a-\eta}{1+k}}$$

als eine Funktion von x definiert sein soll, die mit x zugleich unendlich wird (vergl. die methodischen Bemerkungen in § 1). Dann ist der Integrand wie beim Beweise von III im ganzen Integrationsgebiet regulär mit Ausnahme des sicher darin gelegenen ev. Pols erster Ordnung $s = 0$ und der möglicherweise darin gelegenen ev. Pole erster Ordnung $s = -1$, $s = -2, \ldots, s = -r$, deren Anzahl aber höchstens r ist. Es ergibt sich daher, wenn $h(x)$, $h_1(x), \ldots$ Funktionen von x bezeichnen, die für $x = \infty$ verschwinden,

$$\int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} + \int\limits_{a-\gamma+Ti}^{\eta-\gamma+Ti} + \int\limits_{\eta-\gamma+Ti}^{\eta-\gamma-Ti} + \int\limits_{\eta-\gamma-Ti}^{a-\gamma-Ti} = \frac{2\pi i}{r!} f(\gamma) + h(x).$$

Für das Integral I_3 erhalten wir im Falle[23] $k > 0$ wegen (30) und wegen der für $t \neq 0$ geltenden Beziehung

$$|R(s)| < \frac{1}{|t|^{r+1}}$$

durch Abtrennung des Intervalls $\eta - \gamma - i$ bis $\eta - \gamma + i$ die folgende Abschätzung die sich auf ins Unendliche wachsendes x bezw. T beziehen soll:

$$|I_3| = \left| -\int\limits_{\eta-\gamma-Ti}^{\eta-\gamma+Ti} x^s R(s) f(s+\gamma)\, ds \right| < C x^{\eta-\gamma} + 2 A x^{\eta-\gamma} \int\limits_1^T \frac{t^{r+k}}{t^{r+1}}\, dt$$

$$< x^{\eta-\gamma}\left(C + \frac{2A}{k} T^k\right) < C_1 x^{\eta-\gamma} T^k$$

$$= C_1 x^{\eta-\gamma+\frac{k(a-\eta)}{1+k}} = C_1 x^{\frac{\eta+ka}{1+k}-\gamma}.$$

Da unser γ eine feste Zahl $> \frac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$ bedeutet, so ist, wenn nur die Zahl $a > \lambda_{r-1}$ hinreichend nahe an λ_{r-1} angenommen wird, sogar $\gamma > \frac{\eta + ka}{1+k}$; es ist also bei geeigneter Wahl von a das Integral $I_3 = h_1(x)$.

Zur Abschätzung von I_4 benutzen wir, dass nach Voraussetzung die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq \eta$ höchstens die Grössenordnung $\eta + k$ hat und dass sie auf der Geraden $\sigma = a$ nach der Formel (1) der Einleitung höchstens die Grössenordnung r hat; der Phragmén-Lindelöf'sche Satz besagt also, dass der Maximalwert der Grössenordnung im Intervall $\eta \leqq \sigma \leqq a$ linear von $r + k$ bis r abnimmt, d. h. dass für $\eta \leqq \sigma \leqq a$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < C_2 |t|^{r + \frac{k(a-\sigma)}{a-\eta}},$$

[23] Es darf $k > 0$ angenommen werden, da ja der Fall $k = 0$ bereits mit III erledigt ist. Aber natürlich würde man für $k = 0$ durch eine ganz analoge Abschätzung ebenfalls $I_3 = h_1(x)$ erhalten.

also für $\eta - \gamma \leqq \sigma \leqq a - \gamma$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s+\gamma)| < C_2 |t|^{r + \frac{k(a-\gamma-\sigma)}{a-\eta}}$$

ist. Man erhält daher

$$|I_4| = \left| \int\limits_{\eta-\gamma-Ti}^{a-\gamma-Ti} x^s R(s) f(s+\gamma)\, ds \right| < C_2 \int\limits_{\eta-\gamma}^{a-\gamma} x^\sigma T^{k\frac{a-\gamma-\sigma}{a-\eta}-1} d\sigma.$$

Denkt man sich im Integranden des rechts stehenden Integrals den Wert von T eingesetzt, so wird der Integrand eine Potenz von x, deren Exponent als lineare Funktion von σ seinen grössten Wert am Anfang oder Ende des Intervalls annimmt, wenn er nicht überhaupt konstant bleibt. Der Anfangswert ist nun der Ausdruck $x^{\eta-\gamma} T^{k-1}$, der Endwert der Ausdruck $\frac{x^{a-\gamma}}{T}$, der nach der Definition von T dem Ausdruck $x^{\eta-\gamma} T^k$ gleich ist; dieser letztere aber kam schon bei der Abschätzung von I_3 vor und verschwindet, wie dort bewiesen, für $x = \infty$, $T = \infty$. Man erhält daher

$$|I_4| < C_2 (a-\eta) x^{\eta-\gamma} T^k, \quad I_4 = h_2(x).$$

Genau dasselbe ergibt sich auch für I_2. Es wird daher schliesslich

$$I_1 = \frac{2\pi i}{r!} f(\gamma) + h_3(x). \tag{31}$$

In dem Integrale I_1 dürfen wir für $f(s+\gamma)$ eine absolut und auf dem Integrationswege gleichmässig konvergente Reihenentwicklung einsetzen. Da nämlich die Reihe

$$g(s) = f(s+\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\gamma} \cdot \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}$$

als Summabilitätsgrenzgerade $r-1$. Ordnung die Gerade $\lambda_{r-1} - \gamma$ besitzt und die Integrationsgerade $\sigma = a - \gamma$ rechts von dieser gelegen ist, so ist die Reihe

$$f(s+\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(r-1)} \Delta_r \left(\frac{1}{n^s}\right)$$

auf der Geraden $\sigma = a - \gamma$ absolut und auf jedem endlichen Stück dieser Geraden gleichmässig konvergent;[24] hierbei ist

$$\varDelta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n^s} - \binom{r}{1}\frac{1}{(n+1)^s} + \binom{r}{2}\frac{1}{(n+2)^s} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}\frac{1}{(n+r)^s}.$$

Man kann also Summation und Integration vertauschen und erhält

$$I_1 = \int_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} x^s R(s) \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(r-1)} \varDelta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) ds = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(r-1)} \int_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} x^s R(s)\, \varDelta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) ds.$$

Nun ist

$$\varDelta_1\left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s\int_n^{n+1} \frac{dv_1}{v_1^{s+1}},$$

$$\varDelta_2\left(\frac{1}{n^s}\right) = \varDelta_1\left(\frac{1}{n^s}\right) - \varDelta_1\left(\frac{1}{(n+1)^s}\right) = s\left\{\int_n^{n+1}\frac{dv_1}{v_1^{s+1}} - \int_{n+1}^{n+2}\frac{dv_1}{v_1^{s+1}}\right\} = s\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{v_1^{s+1}} - \frac{1}{(v_1+1)^{s+1}}\right) dv_1$$

$$= s(s+1)\int_n^{n+1} dv_1 \int_{v_1}^{v_1+1} \frac{dv_2}{v_2^{s+2}}$$

und allgemein[25]

$$(32) \qquad \varDelta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) = s(s+1)\cdots(s+r-1)\int_n^{n+1} dv_1 \int_{v_1}^{v_1+1} dv_2 \int_{v_2}^{v_2+1} dv_3 \ldots \int_{v_{r-2}}^{v_{r-2}+1} dv_{r-1} \int_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1} \frac{dv_r}{v_r^{s+r}}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für $n \leqq x - r - 1$ sowie für $n \geqq x + 1$ in die Entwicklung von I_1 ein, so ergibt sich

$$(33) \quad I_1 = \sum_{n=1}^{\infty}{}' S_n^{(r-1)} \int_n^{n+1} dv_1 \int_{v_1}^{v_1+1} dv_2 \ldots \int_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1} \frac{dv_r}{v_r^r} \int_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} \frac{1}{s+r}\left(\frac{x}{v_r}\right)^s ds + \sum_{n=x-r}^{x} S_n^{(r-1)} \int_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} x^s R(s)\, \varDelta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) ds,$$

wo der Strich an der Summe bedeuten soll, dass die Glieder $n = x - r, \ldots, x$ von der Summation ausgeschlossen sind. Diese letzteren Glieder, deren Anzahl ja nur endlich ist, sollen nämlich besonders behandelt werden, und zwar auf die folgende Weise. Aus (32) ergibt sich für $\sigma = a - \gamma$, $|t| \geqq 1$

[24] Vergl. z. B. Herrn Bohr's Habilitationsschrift, S. 71.

[25] Diese Art der Darstellung der r. Differenz, die man leicht auf allgemeinere Funktionen $f(n)$ anstatt $\frac{1}{n^s}$ ausdehnen kann, kommt schon bei Herrn Jensen vor und wird auch in der soeben zitierten Schrift von Herrn Bohr benutzt; vergl. S. 70.

$$\left|R(s)\,\Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right)\right| < \frac{1}{|s+r|}\frac{1}{n^{r+a-\gamma}} < \frac{1}{|t|}\frac{1}{n^{r+a-\gamma}},$$

während für $\sigma = a-\gamma$, $|t| \leqq 1$ wenigstens

$$\left|R(s)\,\Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right)\right| < \frac{1}{|s+r|}\frac{1}{n^{r+a-\gamma}} \leqq \frac{1}{r+a-\gamma}\frac{1}{n^{r+a-\gamma}}$$

wird. Also ist für hinlänglich grosses T

$$\left|\int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} x^s R(s)\,\Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right)ds\right| < \frac{x^{a-\gamma}}{n^{r+a-\gamma}}\left(\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dt}{r+a-\gamma} + 2\int\limits_{1}^{T}\frac{dt}{t}\right) < \frac{3\,x^{a-\gamma}\log T}{n^{r+a-\gamma}}.$$

Auf alle anderen Glieder in (33) aber wende ich die Formeln (17) an, und zwar für $\vartheta = \frac{x}{v_r}$. Dann ergibt sich zunächst für $n \leqq x - r - 1$, da ja für jedes n die Variable $v_r \leqq n + r$ ist, also hier stets $v_r \leqq x - 1$ bleibt:

$$\left|\int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti}\frac{1}{s+r}\left(\frac{x}{v_r}\right)^s ds - 2\pi i\frac{v_r^r}{x^r}\right| \leqq \frac{2}{T}\,\frac{x^{a-\gamma}}{v_r^{a-\gamma}}\,\frac{1}{\log\frac{x}{v_r}},$$

$$\left|\int\limits_{n}^{n+1}dv_1\int\limits_{v_1}^{v_1+1}dv_2\ldots\int\limits_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1}\frac{dv_r}{v_r^r}\int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti}\frac{1}{s+r}\left(\frac{x}{v_r}\right)^s ds - \frac{2\pi i}{x^r}\right| \leqq \frac{2\,x^{a-\gamma}}{T}\int\limits_{n}^{n+1}dv_1\int\limits_{v_1}^{v_1+1}dv_2\ldots\int\limits_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1}\frac{dv_r}{v_r^{r+a-\gamma}}\,\frac{1}{\log\frac{x}{v_r}}$$

$$< \frac{2\,x^{a-\gamma}}{T}\,\frac{1}{n^{r+a-\gamma}}\,\frac{1}{\log\frac{x}{n+r}}.$$

Ganz ebenso ergibt sich für $n \geqq x + 1$, da für jedes n die Variable $v_r \geqq n$ ist, also hier stets $v_r \geqq x + 1$ wird:

$$\left|\int\limits_{n}^{n+1}dv_1\int\limits_{v_1}^{v_1+1}dv_2\ldots\int\limits_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1}\frac{dv_r}{v_r^r}\int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti}\frac{1}{s+r}\left(\frac{x}{v_r}\right)^s ds\right| < \frac{2\,x^{a-\gamma}}{T}\,\frac{1}{n^{r+a-\gamma}}\,\frac{1}{\log\frac{n}{x}}.$$

Setzt man alles in (33) ein, so erhält man

$$\left|I_1 - \frac{2\pi i}{x^r}\sum_{n=1}^{x-r-1} S_n^{(r-1)}\right| < \frac{2x^{a-\gamma}}{T}\left\{\sum_{n=1}^{x-r-1}\frac{|S_n^{(r-1)}|}{n^{r+a-\gamma}}\frac{1}{\log\frac{x}{n+r}} + \sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{|S_n^{(r-1)}|}{n^{r+a-\gamma}}\frac{1}{\log\frac{n}{x}}\right\}$$

$$+ 3x^{a-\gamma}\log T\sum_{n=x-r}^{x}\frac{|S_n^{(r-1)}|}{n^{r+a-\gamma}}.$$

Zur Abschätzung von $S_n^{(r-1)}$ verwende ich die Formel (29), in der ich z. B. $\delta = \frac{a-\lambda_{r-1}}{2}$ annehme, so dass $\lambda_{r-1}+\delta = a-\delta$ wird. Wir dürfen also schliessen, dass eine Konstante C_3 existiert, so dass für alle n

$$|S_n^{(r-1)}| < C_3 n^{r-1+a-\gamma-\delta}$$

ist. Setzt man dies ein, so erhält man

$$(34)\qquad \begin{aligned}\left|I_1 - \frac{2\pi i}{x^r}\sum_{n=1}^{x-r-1} S_n^{(r-1)}\right| &< \frac{2C_3 x^{a-\gamma}}{T}\left\{\sum_{n=1}^{x-r-1}\frac{1}{n^{1+\delta}}\frac{1}{\log\frac{x}{n+r}} + \sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}\frac{1}{\log\frac{n}{x}}\right\}\\ &+ 3C_3 x^{a-\gamma}\log T\sum_{n=x-r}^{x}\frac{1}{n^{1+\delta}}.\end{aligned}$$

Nun lässt sich leicht zeigen, dass der Wert der geschweiften Klammer rechts für unendlich gross werdendes x unterhalb einer endlichen Schranke bleibt;[26] da ferner wie bewiesen der Quotient $\frac{x^{a-\gamma}}{T}$ für $x=\infty$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert der erste Gliederkomplex der rechten Seite von (34) ebenfalls gegen 0. Der übrig bleibende Ausdruck aber lässt sich noch leichter abschätzen, da z. B. für alle x von einer gewissen Stelle an

$$3C_3 x^{a-\gamma}\log T\sum_{n=x-r}^{x}\frac{1}{n^{1+\delta}} < C_4 x^{a-\gamma}\log x\cdot\frac{1}{x^{1+\delta}} < \frac{1}{x^{1-a+\gamma}}$$

ist; für ein dem Punkte λ_{r-1} hinreichend nahe liegendes $a > \lambda_{r-1}$ ist nun aber neben $\gamma > \lambda_{r-1} - 1$ auch $\gamma > a - 1$, so dass der Exponent im äussersten Gliede rechts positiv ist, dieses selbst also für $x=\infty$ gegen 0 konvergiert. Aus (34) ergibt sich daher

$$I_1 = 2\pi i\,\frac{S_{x-r-1}^{(r)}}{x^r} + h_4(x),$$

[26] Vergleiche z. B. meine Habilitationsschrift: »Über Mittelwertsformeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen«, Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, Bd. 118, Abt. II a, 1909 (S. 1439—1522), S. 1462.

was mit (31) kombiniert die Beziehung

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{S_{x-r-1}^{(r)}}{x^r}-\frac{f(\gamma)}{r!}\right)=0,$$

also auch die Gleichung

$$\lim_{x=\infty}\frac{r!\,S_x^{(r)}}{x^r}=f(\gamma)$$

liefert, die bewiesen werden sollte.

§ 5. Eine Erweiterung zu Satz III.

Während der Drucklegung des Vorangegangenen ist die erste der in Anm. 12 angekündigten Noten von Herrn M. Riesz[27] erschienen. Der Verfasser beweist dort einen allgemeinen Grenzwertsatz, der in meine Bezeichnungsweise übertragen folgendermassen lautet:

Es sei für eine beliebige Grössenfolge α_n bei ganzzahligem[28] $r \geqq 0$

$$\sigma_\xi^{(r)}=\sum_{n=1}^{<\xi}\alpha_n(\xi-n)^r,$$

und es sei $S_x^{(r)}$ die in der Einleitung definierte Cesàro'sche Summe; hierbei ist ξ eine beliebige Zahl >1, x eine ganze Zahl $\geqq 1$. Dann existieren die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\xi=\infty}\frac{\sigma_\xi^{(r)}}{\xi^r},\quad \lim_{x=\infty}\frac{r!\,S_x^{(r)}}{x^r},$$

wo ξ stetig, x über ganze Zahlen ins Unendliche wächst, entweder gleichzeitig und sind einander gleich, oder sie existieren beide nicht.

Nun war beim Beweise von Satz III mit (25) die Beziehung

$$\lim_{x=\infty}\frac{\sigma_x^{(r)}}{x^r}=f(\gamma) \tag{35}$$

für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x bewiesen, wo $\alpha_n=\frac{a_n}{n^\gamma}$ ist, ohne dass bis dahin von der Annahme $\gamma>\lambda_{r-1}-1$ Gebrauch gemacht wurde. Diese Beziehung

[27] »Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques», Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 12. Juni 1911, Bd. 152, S. 1651—1654.

[28] Nach geeigneter Definition der $S_x^{(r)}$ für nicht ganzzahliges $r \geqq 0$ gilt dieser Satz, wie Herr M. Riesz zeigt, bei beliebigem $r \geqq 0$.

gilt aber auch für stetig ins Unendliche wachsendes $x = \xi$. Denn bei nicht ganzzahligem x tritt an die Stelle der dort gegebenen Abschätzungsformel des Integrales I_1 die folgende ganz analoge Abschätzung:

$$\left| I_1 - \frac{2\pi i}{r!} \sum_{n=1}^{<x} \frac{a_n}{n^\gamma} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^r \right| \leq \frac{2\, x^{l-\eta}}{T^{r+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\gamma+l-\eta}} \frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|},$$

wo die rechte Seite für $T = \infty$ ebenfalls gegen o konvergiert; da sich sonst im Beweise des Satzes III bis zur Formel (25) nichts ändert, wenn x nicht ganzzahlig angenommen wird, so gilt also (25) und damit (35) sogar bei stetig ins Unendliche wachsendem x. Hieraus folgt nun aber nach dem Riesz'schen Satze, dass bei ganzzahlig ins Unendliche wachsendem x auch die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} \frac{r!\, S_x^{(r)}}{x^r} = f(\gamma) \tag{36}$$

gilt, womit der Satz III ohne die einschränkende Annahme $\gamma > \lambda_{r-1} - 1$ bewiesen ist. Der Satz III nimmt jetzt also den folgenden vereinfachten und zugleich verschärften[29] Wortlaut an:

III'. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiet dargestellte Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \eta$ regulär, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ bei ganzzahligem positivem r

$$|f(s)| < A\, |t|^r$$

ist. Dann ist die Reihe $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \eta$ summabel von der r. Ordnung.

Durch die Anwendung des Satzes III' anstelle von III werden auch die in der Einleitung aufgestellten Beziehungen zwischen den Grössenfolgen λ_r und μ_r zum Teil in demselben Sinne verschärft. Ich stelle sie im Folgenden mit den gewonnenen Verschärfungen noch einmal zusammen:

$$\lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots, \quad \mu_0 \geqq \mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots,$$
$$1 \geqq \lambda_0 - \lambda_1 \geqq \lambda_1 - \lambda_2 \geqq \ldots, \quad \mu_0 - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3 \geqq \ldots,$$
$$\mu_0 \geqq \lambda_0 \geqq \mu_1 \geqq \lambda_1 \geqq \ldots \geqq \mu_r \geqq \lambda_r \geqq \mu_{r+1} \geqq \ldots,$$
$$\lim_{r=\infty} \lambda_r = \lim_{r=\infty} \mu_r.$$

[29] Die Verschärfung gegen den Satz III besteht, wie in der Einleitung bemerkt, eben darin, dass durch diesen Wortlaut zugleich die Möglichkeit, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $\eta < \lambda_{r-1} - 1$ sein könnte, ausgeschlossen wird; der Satz III' ist also dem in Anm. 12 zitierten, von Herrn M. Riesz ohne Beweis mitgeteilten Satz völlig äquivalent, wenn man bei ganzzahligem r verbleibt.

Aus der für ganzes $k \geqq 0$ geltenden Beziehung $\mu_{r+k} \geqq \lambda_{r+k}$ in Verbindung mit den Ungleichungen $\lambda_{r-1} - \lambda_r \geqq \lambda_r - \lambda_{r+1} \geqq \dots \geqq \lambda_{r+k-1} - \lambda_{r+k}$, d. h. mit der Tatsache, dass die Breite der Summabilitätsstreifen niemals zunimmt, folgt, dass für ganze Zahlen $r \geqq 1$, $k \geqq 0$ die Beziehung

$$\mu_{r+k} \geqq \lambda_r - k(\lambda_{r-1} - \lambda_r) \tag{37}$$

gilt, was umso interessanter ist, als andererseits

$$\mu_{r+k} \leqq \lambda_{r+k-1} \leqq \mu_{r+k-1} \leqq \dots \leqq \mu_{r+1} \leqq \lambda_r$$

ist. Die Beziehung (37) kann man auch in der Form schreiben

$$\lambda_r \leqq \frac{\mu_{r+k} + k\lambda_{r-1}}{1+k},$$

womit auch die auf ganzzahliges k bezügliche spezielle Folgerung aus Satz IV in demselben Sinne verschärft ist.

Zum Schluss will ich noch den von Herrn M. Riesz gegebenen Beweis seines oben mitgeteilten Grenzwertsatzes reproduzieren, soweit es für den vorliegenden Zweck erforderlich ist. Mit den auf Gleichung (25) folgenden Entwicklungen in § 3 habe ich gezeigt, dass aus der Existenz des Grenzwertes (25), d. h. des Grenzwertes (35), auch wenn diese nur für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x benutzt wird, die zu beweisende Existenz des Grenzwertes (36) folgt, wenn nur das Bestehen der für ganze x geltenden Formel

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_x^{(r-1)}}{x^r} = 0 \tag{38}$$

gesichert ist. Um diese zu erhalten, habe ich die Voraussetzung $\gamma > \lambda_{r-1} - 1$ eingeführt; das Neue, was ich aus der Riesz'schen Note gelernt habe, besteht in der Erkenntnis, dass (38) ohne jede weitere Voraussetzung schon aus (35) folgt, wenn nur die Giltigkeit dieser Grenzbeziehung auch für stetig ins Unendliche wachsendes x vorausgesetzt wird, was ja hier erfüllt ist. Meine in § 3 gegebenen Ausführungen liefern also einen vollständigen Beweis auch des Satzes III', wenn noch der Beweis des folgenden Hilfssatzes hinzugefügt wird, den auch Herr M. Riesz als Lemma II besonders formuliert:

Es existiere für stetig ins Unendliche wachsendes x der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sigma_x^{r)}}{x^r}. \tag{35}$$

Dann ist für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_x^{(r-1)}}{x^r} = 0. \tag{38}$$

Indem ich im folgenden die zum Beweise dieses Hilfssatzes dienenden Andeutungen von Herrn M. RIESZ ausführe, erspare ich also dem Leser, der einen vollständigen Beweis von III′ kennen lernen will, die Notwendigkeit, die RIESZ'sche Note einzusehen.

Es wird successive die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_x^{(k)}}{x^r} = 0 \tag{39}$$

bei ganzzahligem x für $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ nachgewiesen. Zum Beweise für $k = 0$ bildet man die r. Differenz der Ausdrücke $\sigma_x^{(r)}, \sigma_{x+\frac{1}{r}}^{(r)}, \ldots, \sigma_{x+\frac{r}{r}}^{(r)}$. Diese nimmt unter Benutzung der Identitäten, die bereits in der der Formel (28) vorangehenden Entwicklung niedergelegt sind, die folgende Gestalt an, wenn $x - n = y_n$ gesetzt wird und x eine positive ganze Zahl ist:

$$\sigma_x^{(r)} - \binom{r}{1}\sigma_{x+\frac{1}{r}}^{(r)} + \binom{r}{2}\sigma_{x+\frac{2}{r}}^{(r)} - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\sigma_{x+1}^{(r)}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \alpha_n \left\{ y_n^r - \binom{r}{1}\left(y_n + \frac{1}{r}\right)^r + \binom{r}{2}\left(y_n + \frac{2}{r}\right)^r - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\left(y_n + \frac{r}{r}\right)^r \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \alpha_n \left\{ y_n^r \left[1 - \binom{r}{1} + \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\right] + \frac{\binom{r}{1}}{r} y_n^{r-1}\left[-\binom{r}{1}\cdot 1 + \binom{r}{2}\cdot 2 - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\cdot r\right] \right.$$

$$\left. + \frac{\binom{r}{2}}{r^2} y_n^{r-2}\left[-\binom{r}{1}1^2 + \binom{r}{2}2^2 - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}r^2\right] + \cdots + \frac{\binom{r}{r}}{r^r}\left[-\binom{r}{1}1^r + \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}r^r\right] \right\}$$

$$= \frac{(-1)^r r!}{r^r} \sum_{n=1}^{x} \alpha_n = c_0 s_x = c_0 S_x^{(0)},$$

wo c_0 ebenso wie alle folgenden c und d Konstanten bedeuten. Da infolge der Existenz des Grenzwertes (35) die durch x^r dividierte linke Seite dieser Entwicklung für $x = \infty$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch der Quotient der rechten Seite durch x^r für $x = \infty$ gegen 0, womit die Formel (39) für $k = 0$ nachgewiesen ist.

Es ist nunmehr (39) für $k = 1$ zu beweisen. Man erhält bei ganzem x, wenn wieder $x - n = y_n$ gesetzt und schliesslich partielle Summation nach Formel (26) angewendet wird:

$$\sigma_x^{(r)} - \binom{r-1}{1}\sigma_{x+\frac{1}{r-1}}^{(r)} + \binom{r-1}{2}\sigma_{x+\frac{2}{r-1}}^{(r)} - \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}\sigma_{x+1}^{(r)}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} a_n \left\{ y_n^r - \binom{r-1}{1}\left(y_n + \frac{1}{r-1}\right)^r + \binom{r-1}{2}\left(y_n + \frac{2}{r-1}\right)^r - \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}\left(y_n + \frac{r-1}{r-1}\right)^r \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} a_n (c_0' y_n + c_1') = c_0' \sum_{n=1}^{x} a_n (x-n) + c_1' S_x^{(0)}$$

$$= c_0' \left(\sum_{n=1}^{x} s_n \cdot 1 + s_x(-1) \right) + c_1' S_x^{(0)} = c_0' (S_x' - S_x^{(0)}) + c_1' S_x^{(0)}$$

$$= d_0' S_x' + d_1' S_x^{(0)}.$$

Da nach Voraussetzung der Quotient der linken Seite durch x^r und wie bewiesen der Quotient von $S_x^{(0)}$ durch x^r für $x = \infty$ gegen 0 konvergieren, so konvergiert auch der Quotient von S_x' durch x^r für $x = \infty$ gegen 0, womit (39) für $k = 1$ bewiesen ist.

Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Man erhält z. B. für $k = 2$ bei teilweiser Benutzung der vorangegangenen Rechnungen:

$$\sigma_x^{(r)} - \binom{r-2}{1}\sigma_{x+\frac{1}{r-2}}^{(r)} + \cdots + (-1)^{r-2}\binom{r-2}{r-2}\sigma_{x+1}^{(r)} = \sum_{n=1}^{x} a_n (c_0'' y_n^2 + c_1'' y_n + c_2'')$$

$$= c_0'' \sum_{n=1}^{x} a_n (x-n)^2 + c_1'' S_x' + (c_2'' - c_1'') S_x^{(0)}.$$

Es ist nun aber

$$\sum_{n=1}^{x} a_n (x-n)^2 = \sum_{n=1}^{x} s_n (2(x-n) - 1) + s_x = 2 \sum_{n=1}^{x} s_n (x-n) - S_x' + S_x^{(0)}$$

$$= 2 (S_x'' - S_x') - S_x' + S_x^{(0)} = 2 S_x'' - 3 S_x' + S_x^{(0)},$$

so dass die gebildete $(r-2)$. Differenz den Wert

$$d_0'' S_x'' + d_1'' S_x' + d_2'' S_x^{(0)}$$

annimmt. Daraus folgt aber nach dem Vorhergehenden die Beziehung (39) für $k = 2$.

Die Rechnung braucht nicht weiter durchgeführt zu werden. Man erhält durch Bildung der Differenzen von den Ordnungszahlen $r-3$, $r-4, \ldots, 1$ successive die Giltigkeit der Formel (39) für $k = 3, 4, \ldots, r-1$, womit der aufgestellte Riesz'sche Hilfssatz bewiesen ist.

Nachdem einmal diese Rechnungen aufgestellt sind, braucht man die in § 3 von Gleichung (25) ab gegebenen Entwicklungen nicht mehr zu benutzen, sondern kommt auf dem einmal eingeschlagenen Wege schneller zum Ziel. Es sind für die Exponenten 1 und 2 die Formeln

$$\sum_{n=1}^{x} \alpha_n (x-n) = S'_x - S^{(0)}_x,$$

$$\sum_{n=1}^{x} \alpha_n (x-n)^2 = 2 S''_x - 3 S'_x + S^{(0)}_x$$

bewiesen worden; es werde angenommen, dass für die Exponenten $3, 4, \ldots, r-1$ die entsprechenden Entwickhungen schon bewiesen seien, von denen die letzte

$$\sum_{n=1}^{x} \alpha_n (x-n)^{r-1} = (r-1)!\; S^{(r-1)}_x + c_{r-2}\, S^{(r-2)}_x + \cdots + c_0 S^{(0)}_x$$

lauten möge. Dann wird, wenn wieder $x-n = y_n$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{x} \alpha_n (x-n)^r &= \sum_{n=1}^{x} s_n (y_n^r - (y_n - 1)^r) + s_x (-1)^r \\
&= r \sum_{n=1}^{x} s_n y_n^{r-1} - \binom{r}{2} \sum_{n=1}^{x} s_n y_n^{r-2} + \cdots + (-1)^r s_x \\
&= r \left\{ (r-1)!\, S^{(r)}_x + c_{r-2} S^{(r-1)}_x + \cdots + c_0 S'_x \right\} - \binom{r}{2} \left\{ (r-2)!\, S^{(r-1)}_x + \cdots \right\} + \cdots \\
&= r!\, S^{(r)}_x + d_{r-1} S^{(r-1)}_x + \cdots + d_0 S^{(0)}_x,
\end{aligned}$$

womit diese Formel durch vollständige Induktion bewiesen ist; sie ist der im § 3 bewiesenen Formel (28) äquivalent.[30] Hieraus folgt, wenn die Gleichung (35) für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x und die Gleichung (39) für $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ benutzt wird:

$$\lim_{x=\infty} \frac{r!\, S^{(r)}_x}{x^r} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x^r} \sum_{n=1}^{x} \alpha_n (x-n)^r = f(\gamma),$$

was zu beweisen war.

Breslau, den 12. Juni bezw. (§ 5) 7. Oktober 1911.

---

[30] Natürlich haben die in beiden Formeln auftretenden konstanten Koeffizienten d nichts mit einander zu tun.