FRACTIONS CONTINUES ET DIFFÉRENCES RÉCIPROQUES.

PAR

N. E. NÖRLUND

à Copenhague.

§ **1.** Les résultats que je vais exposer dans les pages suivantes sont en partie de nature assez différente, mais leur but principal est de contribuer au développement de la théorie des fractions continues. L'application qu'on a faite de ces algorithmes dans la théorie des nombres est assez connue, mais on s'y est borné à étudier leurs propriétés purement formelles sans pénétrer plus profondément dans la nature de ces algorithmes intéressants. Ce n'est que depuis quelques années qu'on y a réussi grâce aux recherches de Stieltjes. Mais ces recherches montrent aussi combien il y a de difficultés à vaincre. Cependant, depuis quelque temps on a fait un grand progrès par l'introduction des différences réciproques. Dans un mémoire profond qu'a présenté M. T.-N. Thiele[1] à l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark et qui est intitulé: «Différences réciproques» il a, en effet, fondé une théorie qui sera d'une importance fondamentale pour les recherches ultérieures sur les fractions continues. Dans le chapitre IV j'ai essayé de contribuer au développement de la théorie de ces fonctions intéressantes et dans le dernier chapitre je m'en suis servi pour développer quelques fonctions particulières en fractions continues. Pour étudier la convergence de ces fractions continues, j'ai considéré au chapitre II les équations aux différences finies auxquelles satisfont les nominateurs et les dénominateurs de leurs réduites. Un peu de méditation montre que l'examen de la convergence d'une fraction continue convient à la détermination de la manière dont

[1] Bulletin de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark 1906, pag. 153—171.

se comportent les intégrales de ces équations aux différences pour des valeurs très grandes de la variable indépendante. Il n'était pas difficile de résoudre ce dernier problème en se rappelant l'analogie étroite qu'il y a entre les équations linéaires aux différentielles ordinaires et celles aux différences finies. En étudiant cela dans le premier chapitre j'ai été conduit, dans le deuxième chapitre, à des règles de convergence qui certainement laissent à désirer mais qui sont, cependant, si générales que, grâce à elles, on parvient à déterminer la convergence de la plupart des fractions continues étudiées jusqu'ici dans l'analyse. Au même chapitre j'ai, de plus, étudié la convergence d'une classe remarquable de fractions continues auxquelles on est conduit par l'intégration des équations différentielles du deuxième ordre.

CHAPITRE I.

Étude des intégrales d'une équation linéaire aux différences finies.

§ 2. Par les recherches de M. Poincaré[1] on sait que, étant donnée une équation différentielle linéaire

$$P_n \frac{d^n y}{d x^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + P_1 \frac{d y}{d x} + P_0 y = 0 \tag{1}$$

dont les coefficients sont des polynômes, tous du même degré, on peut toujours trouver un système fondamental d'intégrales qui se comportent comme

$$e^{a_i x} x^{-\mu_i - 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

si x croît vers l'infini avec argument déterminé. Supposons que le coefficient de la plus haute puissance de x dans P_i soit A_i, on détermine les a_i comme des racines de l'équation

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_1 z + A_0 = 0. \tag{3}$$

Il y a *généralement* exception, si a_i est une racine multiple de (2), mais il arrive exceptionellement que λ valeurs différentes de μ correspondent à la même valeur

---

[1] American Journal of Mathematics. Vol. 7, 1885, pag. 203—264.

de a_i, si a_i est λ fois racine de (3). Dans un mémoire[1] que M. POINCARÉ a publié plus tard dans ce journal il a démontré plus généralement que si, dans (1), les coefficients sont des polynômes de degré arbitraire, il existe n séries de la forme suivante

$$e^{Q}\cdot x^{a}\cdot\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots\right) \tag{4}$$

qui satisfont *formellement* à l'équation différentielle. Q est ici un polynôme entier du degré p en x. Une telle série s'appelle une série normale d'ordre p. Elle est généralement divergente, mais elle représente l'intégrale asymptotiquement, ce qui est un des résultats les plus intéressants du beau mémoire de M. POINCARÉ. Les coefficients de la plus haute puissance de x dans les polynômes Q se déterminent comme les racines d'une certaine équation qu'on peut former des coefficients de l'équation différentielle. Il y a généralement exception, si cette équation a une racine multiple. Le degré p du polynôme Q se détermine par les degrés des coefficients dans (1). On trouvera généralement plusieurs valeurs différentes de p. Appelons celles-ci $p_1 p_2 \ldots p_i$. Mais pour que les intégrales aient la forme susdite il faut que tous ces nombres soient des entiers. Supposons plus généralement que m soit le plus petit multiple commun des dénominateurs dans $p_1 p_2 \ldots p_i$; l'intégrale générale aura la forme suivante

$$\Sigma\, e^{Q_i}\cdot x^{a_i}\cdot \psi_i(x) \tag{5}$$

où Q_i est un polynôme entier en $x^{\frac{1}{m}}$, tandis que $\psi(x)$ est une série généralement divergente, procédant suivant des puissances de $x^{-\frac{1}{m}}$. Ces résultats s'appliquent maintenant mutatis mutandis aux équations linéaires aux différences. C'est ce que nous allons démontrer en procédant d'une manière semblable à celle que M. POINCARÉ a appliquée dans ces deux beaux mémoires susdits.

§ 3. Soit donnée une équation aux différences

$$P_k(n)\,u(n+k)+P_{k-1}(n)\,u(n+k-1)+\cdots+P_0(n)\,u(n)=0 \tag{6}$$

nous appelons k l'ordre de l'équation. Remarquons tout d'abord que nous n'avons pas ici le but d'étudier l'intégrale la plus générale satisfaisant à cette équation et contenant k fonctions périodiques à module de périodicité 1 mais d'ailleurs arbitraires. Nous allons seulement faire voir qu'il existe une intégrale satisfaisant à l'équation (6) dans une certaine région du plan et contenant k

---

[1] POINCARÉ: Acta Mathematica, Vol. 8, pag. 295—344; voir aussi FABRY: Theses. Paris 1885.

constantes arbitraires. Nous appelons une telle intégrale l'intégrale complète de (6). Considérons d'abord le cas où les coefficients $P_i(n)$ sont des polynômes en n tous du même degré p. Nous verrons alors qu'il existe k intégrales $u_1\, u_2 \ldots u_k$ qui se comportent pour des valeurs réelles très grandes de n comme

$$c_i\, a_i^n\, n^{-\beta_i - 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{7}$$

où les c_i sont des constantes, et entre lesquelles il n'existe pas de relation linéaire à coefficients constants. J'appelle u_i une intégrale normale de (6). Soit $C_{i,p}$ le coefficient de la plus haute puissance de n dans $P_i(n)$, alors les a_i se déterminent comme les racines de l'équation

$$C_{k,p}\, z^k + C_{k-1,p}\, z^{k-1} + \cdots + C_{i,p}\, z^i + \cdots + C_{0,p} = 0 \tag{8}$$

les β_i sont des constantes qui, elles aussi, se déterminent facilement par les coefficients dans (6). J'appelle (8) l'équation caractéristique de (6). Si les degrés de quelques-uns des coefficients sont plus petits que p, cela ne change rien, pourvu que $C_{k,p} \gtrless 0$ et $C_{0,p} \gtrless 0$. Si, au contraire, quelques-unes des racines de (8) deviennent nulles ou infiniment grandes, les intégrales correspondantes se comporteront asymptotiquement comme

$$c_i\, \Gamma^{\mu_i}(n)\, a_i^n\, n^{-\beta_i - 1}. \tag{9}$$

Enfin, si les coefficients de l'équation au différences sont des polynômes de degré arbitraire, on pourra, si non généralement pourtant dans des cas étendus, obtenir, par une substitution de la forme

$$u(n) = \Gamma^{\mu}(n)\, v(n) \tag{10}$$

et en choisissant convenablement μ, que l'équation en $v(n)$ se reduise à une équation de la forme (6) dans laquelle du moins deux coefficients atteignent le degré maximal.

Etudions donc d'abord en détail l'équation (6) en employant la transformation de Laplace.

Transformation de Laplace.

§ 4. Les coefficients de l'équation (6) pourront toujours prendre la forme

$$P_0(n) = C_{0,0} + C_{0,1}\, n + C_{0,2}\, n(n+1) + \cdots + C_{0,p}\, n(n+1) \ldots (n+p-1)$$

. . . .

$$P_i(n) = C_{i,0} + C_{i,1}(n+i) + C_{i,2}(n+i)(n+i+1) + \cdots + C_{i,p}(n+i)(n+i+1) \ldots (n+i+p-1)$$

car il suffit de poser

$$C_{i,0} = P_i(-i) \qquad \nu\, C_{i,\nu} = \Delta^\nu P_i(-i-\nu).$$

Je pose maintenant

$$u(n) = \int t^{n-1} v(t)\, dt \tag{11}$$

où je vais préciser plus tard la ligne d'intégration. En intégrant par parties on aura

$$n\, u(n) = t^n v(t) - \int t^n v'(t)\, dt.$$

Il faut maintenant choisir les limites d'intégration de manière que pour ces valeurs de t le premier terme du second membre de cette équation disparaisse. En intégrant par parties on aura encore

$$n(n+1)\, u(n) = -t^{n+1} v'(t) + \int t^{n+1} v''(t)\, dt$$

et généralement

$$n(n+1)\ldots(n+p-1)\, u(n) = (-1)^p \int t^{n+p-1} v^{(p)}(t)\, dt$$

pourvu qu'on choisisse les limites d'intégration de manière à avoir pour ces valeurs de t

$$t^{n+i} \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots p-1).$$

De la même manière on a

$$(n+k)(n+k+1)\ldots(n+k+p-1)\, u(n+k) = (-1)^p \int t^{n+k+p-1} v^{(p)}(t)\, dt$$

pourvu que

$$t^{n+i+j} \frac{d^i v(t)}{dt^i} \qquad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, 2, \ldots p-1 \\ j = 0, 1, 2, \ldots k \end{matrix}\right) \tag{12}$$

disparaissent aux limites d'intégration.

En appliquant maintenant la transformation (11) à (6) on trouve que $v(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$Q_p(t)(-t)^p \frac{d^p v(t)}{dt^p} + Q_{p-1}(t)(-t)^{p-1} \frac{d^{p-1} v(t)}{dt^{p-1}} + \cdots$$
$$+ Q_1(t)(-t) \frac{dv(t)}{dt} + Q_0(t)\, v(t) = 0 \tag{13}$$

où

$$Q_i(t) = C_{0,i} + C_{1,i}t + \cdots + C_{k,i}t^k.$$

§ 5. Cette équation différentielle rentre généralement dans la classe de FUCHS; ses intégrales sont régulières dans tout le plan. Les points singuliers sont outre o et ∞ les racines de l'équation

$$Q_p(t) = C_{0,p} + C_{1,p}t + \cdots + C_{k,p}t^k = 0. \tag{14}$$

Ce sont ces quantités que nous avons appelées $a_1\, a_2 \ldots a_k$. Rangeons les de manière que $|a_i| \geqq |a_j|$, si $i < j$. Aux environs du point o il existe alors p intégrales de la forme

$$t^{\alpha_i}\varphi(t)$$

$\varphi(t)$ étant holomorphe dans le domaine du point o, tandis que

$$-\alpha_1,\ -\alpha_2, \ldots\ -\alpha_p$$

sont les racines de l'équation $P_0(n) = 0$; nous supposons celles-ci rangées de manière que

$$\Re(\alpha_1) \geqq \Re(\alpha_2) \geqq \Re(\alpha_3) \cdots \geqq \Re(\alpha_p)$$

en désignant par $\Re(\alpha)$ la partie réelle de α. Si les différences entre quelques-unes de ces racines sont des entiers, des logarithmes entreront dans l'intégrale générale.

Aux environs du point ∞ l'intégrale est représentée par p séries de la forme

$$t^{-\gamma_i}\left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \cdots\right)$$

qui sont convergentes pour des valeurs suffisamment grandes de t. Les exposants γ_i se déterminent comme des racines de l'équation

$$P_k(n-k) = 0.$$

Rangeons celles-ci de manière que

$$\Re(\gamma_1) \geqq \Re(\gamma_2) \geqq \Re(\gamma_3) \cdots \geqq \Re(\gamma_p).$$

Considérons maintenant un des autres points singuliers a_i que nous supposons d'abord être une racine simple de (14). L'équation déterminante de ce point a les racines $0, 1, 2, \ldots p-2, \beta_i$, où β_i est un nombre arbitraire que nous supposons d'abord non entier. L'intégrale générale de (13) aura alors aux environs de a_i la forme

$$v(t) = \psi(t) + (t - a_i)^{\beta_i}\varphi(t)$$

où $\psi(t)$ et $\varphi(t)$ sont holomorphes dans le domaine de a_i.

§ 6. Retournons maintenant à l'intégrale (11) où nous allons fixer la ligne d'intégration en nous rappelant que les limites d'intégration devront satisfaire aux conditions (12). Nous traçons une ligne droite de o à a_i; soit b_i un point de celle-ci entre o et a_i et assez rapproché de a_i pour qu'un cercle décrit du point a_i comme centre et qui passera par b_i ne passe par aucun point singulier et ne renferme d'autres points singuliers que a_i. Nous intégrerons alors le long de la ligne droite de o jusqu'à b_i, parcourrons la périphérie du cercle et puis la ligne droite de b_i jusqu'à o. Cela posé, les conditions (12) seront satisfaites pourvu que $\Re(n + \alpha_p) > 0$. On aura alors

$$u_i(n) = \int t^{n-1}(t - a_i)^{\beta_i}\varphi_i(t)\,dt.$$

En intégrant de la même manière autour de chacun des autres points singuliers on aura, en tout, k intégrales de (6); nous verrons plus tard que celles-ci seront, en effet, linéairement indépendantes. Ces intégrales sont valables partout dans un demi-plan à droite de la ligne droite $\Re(n) = \Re(-\alpha_p)$, où $-\alpha_p$ est celle des racines de $P_0(n) = 0$ dont la partie réelle est la plus grande.

§ 7. Nous allons maintenant étudier la façon dont se comporte $u(n)$ pour des valeurs très grandes de n. Nous diviserons la ligne d'intégration en 3 parties: 1) de o jusqu'à b_i, 2) la périphérie du cercle, 3) de b_i jusqu'à o, et nous désignerons les intégrales correspondantes par K_1, K_2 et K_3. Considérons celles-ci séparément. Nous posons donc

$$K_1 = \int_0^{b_i} t^{n-1} v(t)\,dt.$$

Soit M le module de la valeur la plus grande que prend $t^{-\alpha_p} v(t)$ le long de la ligne d'intégration. On aura alors

$$|K_1| < M \cdot |b_i^{n+\alpha_p}|.$$

$|b_i|$ étant plus pétit que $|a_i|$, on aura

$$\lim_{n=\infty} a_i^{-n} \cdot \frac{\Gamma(n + \mu + 1)}{\Gamma(n)} \cdot K_1 = 0 \tag{15}$$

pour toutes les valeurs de μ. Nous allons considérer ensuite l'intégrale suivante

$$T = \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta}\varphi(t)\,dt$$

où $\Re(\beta) > -1$, et où r est un nombre positif entre 0 et 1, tandis que $\varphi(t)$ est une fonction développable, aux environs du point 1, en série de la forme

$$\varphi(t) = A_0 + A_1(t-1) + A_2(t-1)^2 + \cdots + A_m(t-1)^m + R_m$$

qui est convergente pour $|t-1| \leqq \varrho$ où $1 \geqq \varrho > r$.

Nous allons maintenant déterminer la limite

$$\lim_{n=\infty} T \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n)}.$$

En développant en série $\varphi(t)$ on aura

$$T = A_0 \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta}\,dt + A_1 \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta+1}\,dt + \cdots$$
$$+ A_m \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta+m}\,dt + \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta} R_m\,dt. \quad (16)$$

Nous déterminons un nombre positif M_1 de sorte que pour tout m

$$|A_m| < \frac{M_1}{\varrho^m}.$$

On aura donc dans l'intervalle $1 > t > 1 - r$

$$|R_m| < \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} \cdot M_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{r}{\varrho}}.$$

Considérons l'intégrale

$$P = \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta} R_m\,dt$$

on trouvera facilement en posant $\beta = \beta' + i\beta''$

$$|P| < M_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} \frac{\varrho}{\varrho - r} \cdot \int_{1-r}^{1} |t^{n-1}(t-1)^{\beta}|\,dt < M_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} \cdot \frac{\varrho}{\varrho - r} \cdot \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(\beta'+1)}{\Gamma(n+\beta'+1)} e^{-\pi\beta''}.$$

Puisque $r < \varrho$, on pourra toujours choisir m assez grand pour que

$$\frac{\Gamma(n+\beta'+1)}{\Gamma(n)}|P|$$

soit plus petit qu'une quantité positive $\frac{\varepsilon}{2}$ arbitrairement donnée *pour tous les n*. Considérons ensuite l'intégrale

$$Q = A_q \cdot \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta+q}\,dt.$$

On verra facilement que

$$|Q| < |A_q| \cdot \int_0^1 |t^{n-1}(t-1)^{\beta+q}|\,dt.$$

On aura donc

$$\left|\frac{\Gamma(n+\beta'+1)}{\Gamma(n)}Q\right| < |A_q| \cdot \frac{\Gamma(\beta'+q+1)\Gamma(\beta'+n+1)}{\Gamma(\beta'+n+q+1)}$$

si $q=0$, le second membre de cette inégalité sera égal à $|A_0\Gamma(\beta'+1)|$; soit, au contraire, $q>0$, on trouvera toujours une valeur de n assez grande pour que

$$\left|\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n)} \cdot Q\right| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Nous avons alors déterminé n et m de manière que

$$\left|T e^{\pi i\beta}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n)} - A_0\Gamma(\beta+1)\right| < \varepsilon$$

ou

$$\lim_{n=\infty} T \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n)} = A_0\Gamma(\beta+1)e^{-\pi i\beta}. \tag{17}$$

Il est aisé de voir comment ce qui précède s'applique à l'étude de notre intégrale

$$u(n) = \int t^{n-1}v(t)\,dt$$

prise le long du contour du cercle qui renferme a_i. Aux environs du point a_i $v(t)$ est de la forme

$$v(t) = \psi(t) + (t-a_i)^{\beta_i}\varphi(t)$$

donc

$$K_2 = \int t^{n-1}(t-a_i)^{\beta_i}\varphi(t)\,dt = (1-e^{2\pi i\beta_i})\int_{b_i}^{a_i} t^{n-1}(t-a_i)^{\beta_i}\varphi(t)\,dt.$$

Soit $t = a_i z$, on trouvera alors

$$K_2 = (1-e^{2\pi i\beta_i})\,a_i^{n+\beta_i}\int_{\frac{b_i}{a_i}}^{1} z^{n-1}(z-1)^{\beta_i}\varphi(a_i z)\,dz.$$

D'après (17) on aura

$$\lim_{n=\infty} a_i^{-n}\frac{\Gamma(n+\beta_i+1)}{\Gamma(n)}K_2 = (e^{-\pi i\beta_i}-e^{\pi i\beta_i})\,\Gamma(1+\beta_i)\,A_0 \tag{18}$$

où A_0 est une constante. En se rappelant que $u_i(n) = K_1 + K_2 + K_3$, on trouvera d'après (15) et (18) que, pour des valeurs positives très grandes de n, $u_i(n)$ se comporte comme

$$A_0 a_i^{n+\beta_i}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)}\Gamma(1+\beta_i)(e^{-\pi i\beta_i}-e^{\pi i\beta_i}). \tag{18 bis}$$

Dans cette démonstration nous avons supposé essentiellement $\Re(\beta_i) > -1$ mais le théorème subsiste même si $\Re(\beta_i) \leq -1$; pour le voir il suffit dans K_2 d'intégrer par parties. L'étude de K_2 se ramène donc à une intégrale de la forme

$$(-1)^p\frac{(n-1)\ldots(n-p)}{(\beta+1)\ldots(\beta+p)}\int t^{n-p-1}(t-1)^{\beta+p}\,dt. \qquad \Re(\beta+p) > -1$$

En intégrant de la même manière autour de chacun des autres points singuliers on aura, en tout, k intégrales qui se comporteront asymptotiquement comme

$$c_i a_i^n n^{-\beta_i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{19}$$

Ces intégrales sont linéairement indépendantes; car, supposons qu'il y eût une relation de la forme

$$C_1 u_1(n) + C_2 u_2(n) + \cdots + C_k u_k(n) = 0$$

nous diviserons alors cette équation par $a_1^n\dfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_1+1)}$, ensuite nous ferons converger n vers ∞. Nous aurons alors $C_1 A_1 = 0$ d'où $C_1 = 0$. Nous effaçons le premier terme de la relation nommée; puis en divisant par $a_2^n\dfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_2+1)}$

on aura $C_2 = 0$. Nous montrerons ainsi que toutes les constantes C seront 0, ou qu'il ne peut y avoir de relation linéaire.

§ 8. Au lieu de la ligne d'intégration définie plus haut, on aurait pu se servir de la suivante: soit c_i un point du petit cercle autour de a_i, choisi de manière que $|c_i| > |a_i|$. De c_i nous traçons une ligne droite L s'étandant à l'infini qui ne passe par aucun point singulier, et nous intégrons de ∞ le long de L jusqu'à c_i, nous parcourons la périphérie du cercle, ensuite nous retournons le long de L à ∞. Une intégrale définie de cette manière satisfera à l'équation aux différences dans un demi-plan *à gauche* d'une certaine ligne droite déterminée par $\Re(n - \xi) = 0$ où ξ est celle des racines de $P_k(n) = 0$ dont la partie réelle est la plus petite (12). En concluant exactement comme plus haut on trouvera que, pour de très grandes valeurs négatives de n, les intégrales de (9) se comporteront comme

$$A_0 a_i^{n+\beta_i} \frac{\Gamma(-n-\beta_i)}{\Gamma(1-n)} (1 - e^{2\pi i \beta_i}) \Gamma(1+\beta_i).$$

Les intégrales se comportent donc de la même manière pour des valeurs très grandes, soit positives, soit négatives, de n.

§ 9. Nous allons étudier quelques cas d'exception.

1) Si les différences entre quelques-uns des nombres α_i sont des entiers, $v(t)$ se représente aux environs de 0 par des séries de la forme

$$t^{\alpha_i} (\log t)^q \varphi(t)$$

où $\varphi(t)$ est holomorphe dans le domaine de 0. En verra facilement que, par-là, rien n'est changé de ce qui précède: $|v(t) t^{-\alpha_p+1}|$ sera toujours fini le long de la ligne d'intégration.

2) Nous avons supposé que a_i soit une racine simple de (14); si, au contraire, a_i est λ fois racine de cette équation, deux cas essentiellement différents peuvent se présenter. En général, a_i sera un point singulier essentiel pour $v(t)$ le développement pour, au moins, quelques-unes des branches de celui-ci contenant un nombre infini de puissances positives et négatives de t, mais il arrive, par exception, que a_i est un point singulier à branchement déterminé; car si a^i est λ fois racine de $Q_p(t) = 0$ est $\lambda - i$ fois racine de $Q_{p-i}(t) = 0$, l'équation déterminante du point a_i aura les racines $0, 1, 2, \ldots p - \lambda - 1$, $\beta_{i,1}$, $\beta_{i,2}, \ldots \beta_{i,\lambda}$. En ce cas l'intégrale générale aura la forme

$$v(t) = \psi(t) + (t - a_i)^{\beta_{i,1}} \varphi_{i,1}(t) + (t - a_i)^{\beta_{i,2}} \varphi_{i,2}(t) + \cdots + (t - a_i)^{\beta_{i,\lambda}} \varphi_{i,\lambda}(t).$$

Donc λ intégrales différentes correspondent à la racine a_i; ces intégrales se comporteront asymptotiquement comme

$$c_{i,\mu} \cdot a_i^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_{i,\mu}+1)}. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \lambda) \tag{20}$$

Si entre les nombres $\beta_{i,\mu}$ il y a un ou plusieurs entiers, ou bien si les différences entre quelques-uns de ces nombres sont des entiers, des logarithmes entreront encore dans l'intégrale complète. Déterminons la valeur asymptotique d'une telle intégrale logarithmique. Posons

$$v_i(t) = (t-a_i)^{\beta_i} \log(t-a_i)\,\varphi_i(t) \qquad v_i(n) = \int t^{n-1} v_i(t)\,dt$$

où $\varphi_i(t)$ est holomorphe aux environs de a_i, et où β_i est supposé ne pas être un nombre entier, et encore

$$T = \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta_i} \log(t-1)\,\varphi_i(t)\,dt \qquad \Re(\beta_i) > -1$$

on aura alors, en concluant exactement comme plus haut, que

$$\lim_{n=\infty} T \cdot \frac{\Gamma(n+\beta_i+1)}{\Gamma(n)} = A_0\,\Gamma(1+\beta_i)\,e^{-\pi i \beta_i}\{\Psi(1+\beta_i) - \Psi(n+\beta_i+1) - \pi i\}$$

où

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x).$$

Considérons finalement l'intégrale

$$K_2 = \int t^{n-1}(t-a_i)^{\beta_i} \log(t-a_i)\,\varphi(t)\,dt$$

où la ligne d'intégration est un petit cercle autour de a_i, on trouvera

$$K_2 = (1-e^{2\pi i \beta_i}) \int_{b_i}^{a_i} t^{n-1}(t-a_i)^{\beta_i} \log(t-a_i)\,\varphi(t)\,dt - 2\pi i\, e^{2\pi i \beta_i} \int_{b_i}^{a_i} t^{n-1}(t-a_i)^{\beta_i}\,\varphi(t)\,dt.$$

On verra facilement que, si β_i n'est pas un nombre entier, $v_i(n)$ se comportera asymptotiquement comme

$$A_0\, a_i^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)} \cdot \Psi(n+\beta_i+1)\,(e^{\pi i \beta_i} - e^{-\pi i \beta_i})\,\Gamma(1+\beta_i). \tag{21}$$

3) Si, au contraire, β_i est un entier, $v_i(t)$ peut contenir un logarithme, que a_i soit une racine simple ou multiple de (14). Si β_i est entier et négatif, le facteur $\Gamma(1+\beta_i)(e^{\pi i \beta_i} - e^{-\pi i \beta_i})$ dans (21) sera de forme indéfinie. Mais en se rappelant que

$$\Gamma(1+\beta_i)\,\Gamma(-\beta_i) = \frac{\pi}{\sin \pi \beta_i}$$

on verra que $u_i(n)$ se comporte, en ce cas, asymptotiquement comme

$$A_0 \cdot a_i^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)} \Psi(n+\beta_i+1) \frac{2\pi i}{\Gamma(-\beta_i)}. \tag{22}$$

Si, au contraire, β_i est un nombre entier et positif, le terme contenant $\Psi(n)$ disparaîtra, et $u_i(n)$ se comportera asymptotiquement comme

$$-A_0 a_i^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)} \Gamma(1+\beta_i)\, 2\pi i\, e^{\pi i \beta_i}. \tag{23}$$

4) Si β_i est un nombre entier, il peut arriver que $v_i(t)$ ne contient pourtant pas de logarithme; il faut, en ce cas, que β_i soit négatif ou plus grand que $p-1$. Si β_i est négatif, on trouvera par (18 bis) que $u_i(n)$ se comporte asymptotiquement comme

$$-A_0 \cdot a_i^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)} \cdot \frac{2\pi i}{\Gamma(-\beta_i)}. \tag{24}$$

Si, enfin, β_i est un entier, plus grand que $p-1$, l'intégrale prise autour de a_i sera identiquement nulle. Mais, en ce cas, nous pourrons remplacer la ligne d'intégration dont nous nous sommes servi plus haut, par une ligne de 0 à a_i; on voit facilement que, dans ces deux points, les conditions (12) sont satisfaites. $u_i(n)$ se comporte alors pour des valeurs très grandes de n comme

$$A_0 a_i^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)} \cdot \Gamma(1+\beta_i). \tag{25}$$

Il y a exception encore, si quelques-unes des quantités a_i sont nulles ou infiniment grandes; nous allons étudier ces cas plus tard. On voit facilement, comme plus haut, que encore dans les divers cas d'exception les intégrales sont linéairement indépendantes.

Représentation des intégrales par des séries de factorielles normales.

§ **10.** Dans la détermination de la valeur de $u(n)$ pour des valeurs très grandes de n nous n'avons considéré, jusqu'ici, que le premier terme, mais on peut obtenir une approximation plus grande en développant en séries de factorielles les intégrales étudiées plus haut. Considérons l'intégrale

$$u_i(n) = \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i} \varphi_i(t)\, dt. \tag{26}$$

Ici $\varphi_i(t)$ se représente par une série de puissances de la forme

$$\varphi_i(t) = B_0 + B_1(a_i - t) + B_2(a_i - t)^2 + \cdots + B_\nu(a_i - t)^\nu + R_\nu \tag{27}$$

qui est convergente dans un cercle dont a_i est le centre et qui passe par le point singulier le plus rapproché de a_i. Supposons que, exceptionellement, o ne soit pas un point singulier de $v(t)$, et qu'il se trouve dans ce cercle. En remplaçant dans (26) $\varphi(t)$ par l'expression (27) et en intégrant, on aura

$$u_i(n) = (1 - e^{2\pi i \beta_i})\, a_i^{n+\beta_i} \frac{\Gamma(n)\Gamma(1+\beta_i)}{\Gamma(n+\beta_i+1)} \cdot \Big\{ B_0 + B_1 a_i \frac{\beta_i + 1}{n + \beta_i + 1} + \\ + B_2 a_i^2 \frac{(\beta_i+1)(\beta_i+2)}{(n+\beta_i+1)(n+\beta_i+2)} + \cdots \Big\}. \tag{28}$$

Soit g_ν le $(\nu + 1)^{\text{ième}}$ terme de (28).

Nous appelons cette série une série de factorielles normale. En excluant les points $-\beta_i - 1,\ -\beta_i - 2,\ -\beta_i - 3, \ldots$ par des aires aussi petites qu'on voudra on voit que cette série converge uniformement dans toute portion finie du plan.

Si, au contraire, o est un point singulier, qui est plus rapproché de a_i qu'aucun des autres points singuliers, (28) converge si $\Re(n + \alpha_p) > 0$ ou α_p est le nombre défini dans § 6; c'est ce qui résulte d'un théorème de M. PINCHERLE[1] sur la convergence des séries de factorielles. Mais si nous laissons tomber ces hypothèses spéciales nous voyons qu'en général les séries de factorielles normales divergeront malheureusement; *nous verrons cependant que, en ce cas, elles représentent l'intégrale asymptotiquement.*

[1] Rendiconti della reale Accademia dei Lincei. Febbraio 1902.

Posons

$$S_\nu(n) = (1 - e^{2\pi i\beta_i})\, a_i^{n+\beta_i} \frac{\Gamma(1+\beta_i)\Gamma(n)}{\Gamma(1+\beta_i+n)} \Big\{ B_0 + B_1 a_i \frac{\beta_i+1}{n+\beta_i+1} + \cdots$$
$$+ B_\nu a_i^\nu \frac{(\beta_i+1)(\beta_i+2)\ldots(\beta_i+\nu)}{(n+\beta_i+1)(n+\beta_i+2)\ldots(n+\beta_i+\nu)} \Big\}.$$

Je dis maintenant que

$$\lim_{n=\infty} a_i^{-n} \frac{\Gamma(n+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(n)} \{u_i(n) - S_\nu(n)\} = 0. \tag{29}$$

Traçons un cercle dont a_i est le centre, et dont le rayon est assez petit pour que tous les autres points singuliers de $v(t)$ soient situés en dehors du cercle. La série

$$u_i(n) = B_0 \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i}\, dt + B_1 \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i+1}\, dt + \cdots$$
$$+ B_m \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i+m}\, dt + \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i} R_m\, dt$$

sera alors uniformément convergente si on étend l'intégration le long de ce cercle. En posant encore

$$P = \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i} R_m\, dt \qquad Q = B_q \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i+q}\, dt$$

on trouvera, d'après § 7, toujours un nombre N tel que, pour toutes les valeurs de m plus grandes que N on a

$$\left| a_i^{-n} \frac{\Gamma(n+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(n)} P \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Plus, Q se représente asymptotiquement par g_q, c'est-à-dire qu'on pourra toujours déterminer un nombre N_1 de sorte que, pour toutes les valeurs de n plus grandes que N_1 on aura

$$\left| (Q - g_q)\, a_i^{-n} \frac{\Gamma(n+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2(m+1)}.$$

Nous aurons alors déterminé n et m de manière que

$$\left| a_i^{-n} \frac{\Gamma(n+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(n)} \{u_i(n) - S_\nu(n)\} \right| < \varepsilon$$

C. Q. F. D.

Équations de rang supérieur.

§ 11. Considérons maintenant une équation aux différences finies de la forme (6) où les coefficients sont des polynômes de degrés arbitraires. Au moyen de la substitution $u(n) = \Gamma^{\mu_i}(n)\, u^{(\mu_i)}(n)$ on peut toujours réduire une telle équation à une équation dont deux coefficients, au moins, soient du même degré, tandis qu'aucun des autres ne seront de degré supérieur. On trouvera généralement plusieurs valeurs différentes de μ_i. Pour déterminer celles-ci, nous appelons les degrés des coefficients de

$$P_k(n)\, u(n+k) + P_{k-1}(n)\, u(n+k-1) + \cdots + P_0(n)\, u(n) = 0 \tag{6}$$

respectivement $\pi_k, \pi_{k-1}, \ldots \pi_0$. En posant $u(n) = \Gamma^{\mu}(n)\, u^{(\mu)}(n)$ nous aurons l'équation

$$P_k(n)\, u^{(\mu)}(n+k) + \frac{P_{k-1}(n)}{(n+k-1)^{\mu}} u^{(\mu)}(n+k-1) +$$

$$+ \frac{P_{k-2}(n)}{(n+k-1)^{\mu}(n+k-2)^{\mu}} u^{(\mu)}(n+k-2) + \cdots + \frac{P_0(n)}{(n+k-1)^{\mu} \ldots n^{\mu}} u^{(\mu)}(n) = 0. \tag{30}$$

Les degrés des coefficients sont ici respectivement

$$\pi_k,\ \pi_{k-1} - \mu,\ \pi_{k-2} - 2\mu, \ldots\ \pi_0 - k\mu.$$

Posons $\pi'_{k-1} = \pi_{k-i} - i\mu$; nous déterminerons μ tel que deux de ces quantités, au moins, soient égales, tandis qu'aucune des autres ne soit plus grande que celles-ci. Nous formerons alors les nombres

$$\frac{\pi_{k-1} - \pi_k}{1},\ \frac{\pi_{k-2} - \pi_k}{2}, \ldots \frac{\pi_{k-i} - \pi_k}{i}, \ldots \frac{\pi_0 - \pi_k}{k}.$$

Soit $\frac{\pi_{k-a} - \pi_k}{a} = \mu_1$ le plus grand de ceux-ci, ou, s'il y en a plusieurs de la même grandeur, le dernier des plus grands. En posant alors $\mu = \mu_1$ on aura $\pi'_k = \pi'_{k-a}$ et $\pi'_{k-a} \geqq \pi'_{k-i}$; $\mu = \mu_1$ sera alors la première solution de notre problème. J'appelle $\mu_1 + 1$ le rang de l'équation aux différences finies. L'équation caractéristique de (30) aura alors a racines qui seront différentes de zéro: $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots a_{1,a}$.

Nous formerons ensuite les nombres

$$\frac{\pi_{k-a-1} - \pi_{k-a}}{1}, \ldots \frac{\pi_{k-a-i} - \pi_{k-a}}{i}, \ldots \frac{\pi_0 - \pi_{k-a}}{k-a}.$$

Soit $\frac{\pi_{k-\beta}-\pi_{k-\alpha}}{\beta-\alpha}=\mu_2<\mu_1$ le plus grand ou le dernier des plus grands. Pour $\mu=\mu_2$ on aura $\pi'_{k-\alpha}=\pi'_{k-\beta}$ et $\pi'_{k-\beta}\geqq\pi'_{k-i}$.

$\mu=\mu_2$ est donc encore une solution de notre problème et à laquelle correspondent les $\beta-\alpha$ racines $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots a_{2,\beta-\alpha}$. Ensuite nous formons les nombres

$$\frac{\pi_{k-\beta-1}-\pi_{k-\beta}}{1}, \ldots \frac{\pi_{k-\beta-i}-\pi_{k-\beta}}{i}, \ldots \frac{\pi_0-\pi_{k-\beta}}{k-\beta}$$

et nous continuons de cette manière jusqu'à ce que nous trouvons une série dans laquelle le dernier nombre soit entre les plus grands. Ainsi nous aurons les λ valeurs suivantes de μ

$$\mu_1>\mu_2>\mu_3\cdots>\mu_\lambda.$$

Le nombre total de valeurs correspondantes de $a_{i,j}$ est

$$\alpha+(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)+\cdots(k-\varepsilon)=k$$

c'est-à-dire précisément égal à l'ordre de l'équation. Il est vrai que, si quelques-unes des nombres μ_i ne sont pas des entiers, les coefficients de l'équation aux différences en $u^{(\mu_i)}(n)$ correspondantes ne seront pas des polynômes. En ce cas, il est nécessaire d'employer des artifices particuliers; c'est ce que nous montrerons plus tard par des exemples particuliers; mais, dans ce qui suit, nous supposons que tous les nombres μ_i soient des entiers. Si, en outre, aucune des quantités $a_{i,j}$ n'est une racine multiple, l'équation (9) aura toujours k intégrales normales de la forme

$$\Gamma^{\mu_i}(n)\,a_{i,j}^n\cdot\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_{i,j}+1)}\,\varphi_{i,j}(n) \qquad (i=1, 2, \ldots \lambda) \tag{31}$$

où les séries $\varphi_{i,j}(n)$ sont généralement divergentes. Comment former maintenant ces intégrales? Considérons la transformée de Laplace de (30) en posant

$$u^{(j)}(n)=\int t^{n-1}\,v^{(j)}t\,dt.$$

Si $\mu=\mu_j$, celle-ci aura, outre 0 et ∞, les points singuliers

$$a_{j,1},\ a_{j,2},\ a_{j,3}\ldots a_{j,r}.$$

Aux environs de $a_{j,i}$ l'intégrale générale aura la forme

$$v^{(j)}(t)=\psi(t)+(t-a_{j,i})^{\beta_{j,i}}\varphi(t)$$

où $\psi(t)$ et $\varphi(t)$ sont holomorphes aux environs de $a_{j,i}$. Si $\mu=\mu_\lambda$, toutes les intégrales de la transformée de Laplace de (30) seront régulières aux environs de o, c'est-à-dire de la forme

$$\sum t^{\alpha} (\log t)^{q} \varphi(t)$$

où $\varphi(t)$ est holomorphe aux environs de $t = 0$. En ce cas, nous pourrons nous servir de la même ligne d'intégration que dans § 6: Un lacet s'étendant de o et enveloppant un point singulier. Si, au contraire, $\mu = \mu_j$ (où $j < \lambda$), $P_0(n)$ ne sera pas parmi les coefficients du plus haut degré; o sera alors un point singulier irrégulier pour $v^{(j)}(t)$. Ceci correspond à ce qu'on avait dans (13): $0 = C_{0,p} = C_{1,p} = C_{2,p} = \cdots$. En ce cas, on pourra représenter $v^{(j)}(t)$ aux environs de o par des séries normales de la forme:

$$v^{(j)}(t) = i \sum_{1}^{p} e^{\Phi_{j,i}(t)} \varphi_{j,i}(t) \tag{32}$$

où $\varphi_{j,i}(t)$ est de la forme d'une intégrale régulière, tandis que

$$\Phi_{j,i}(t) = \frac{\alpha_{\lambda_i}}{t^{\lambda_i}} + \frac{\alpha_{\lambda_i - 1}}{t^{\lambda_i - 1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{t}$$

λ_i s'appelle l'ordre de la série normale —. Quant au point infiniment éloigné $v^{(1)}(t)$ se comportera, aux environs de celui-ci, comme une intégrale régulière; $v^{(j)}(t)$ $(j > 1)$, au contraire, se comportera comme une intégrale normale, c'est-à-dire sera de la forme (32), seulement ici

$$\Phi_{j,i}(t) = \beta_{\lambda_i} t^{\lambda_i} + \beta_{\lambda_i - 1} t^{\lambda_i - 1} + \cdots + \beta_1 t.$$

Nous pourrons maintenant préciser la ligne d'intégration de $u^{(j)}(t)$. Appelons les arguments des quantités $\alpha_{\lambda_1}, \alpha_{\lambda_2}, \ldots \alpha_{\lambda_p}$ respectivement $\theta_1\, \theta_2 \ldots \theta_p$. Nous traçons un cercle autour de zéro avec un rayon assez petit pour que tous les autres points singuliers pour $v^{(j)}(t)$ se trouvent en dehors du cercle. Nous traçons, de zéro, une ligne L_1 qui coupe le cercle en E formant l'angle φ avec l'axe des nombres réels positifs, et nous déterminons φ de manière que toutes les quantités

$$\cos(\theta_1 - \varphi\lambda_1),\ \cos(\theta_2 - \varphi\lambda_2), \ldots \cos(\theta_p - \varphi\lambda_p), \tag{33}$$

soient négatives. Ceci n'est pas toujours possible, mais supposons d'abord que nous ayons trouvé une valeur de φ qui satisfasse à ces conditions. Nous traçons alors autour d'un des points singuliers $a_{j,r}$ un cercle dont le rayon sera assez petit pour que le cercle ne contienne pas d'autres points singuliers. Soit $b_{j,r}$ un point de ce cercle choisi de manière que $|b_{j,r}| < |a_{j,r}|$. Nous tracerons alors une ligne L_2 de E à $b_{j,r}$ ne passant par aucun point singulier, et nous intégrerons de o le long de L_1 et L_2 autour de $a_{j,r}$ et retournerons à o le long de L_2 et L_1. *Une telle ligne d'intégration satisfera aux conditions* (12) *dans tout le plan complexe de n.* De la même façon on peut intégrer autour de chacun des autres points singuliers; de cette manière on forme l'intégrale complète. On verra facilement que ces intégrales se comporteront asymptotiquement comme indiqué plus haut.

Si l'on déforme la ligne d'intégration, on aura une nouvelle intégrale particulière en franchissant un point singulier. Or comme il est possible de faire la déformation de manière que la valeur asymptotique ne change pas, on verra que la même série normale représentera asymptotiquement des intégrales particulières différentes. D'autre part nous pourrons toujours choisir notre système fondamental d'intégrales de manière que chaque élément en est représenté asymptotiquement par sa série normale.

Il arrive qu'il n'est pas possible de déterminer aucune valeur de φ satisfaisante aux conditions (33); en ce cas, il faut prendre, au lieu de $v^{(j)}(t)$ qui est l'intégrale complète de la transformée de Laplace, une intégrale particulière convenablement choisie, de sorte que les conditions en soient satisfaites; ou on pourra se servir d'une ligne d'intégration s'étendant de l'infini et enveloppant un point singulier. Soient $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p$ les arguments des quantités $\beta_{\lambda_1}\,\beta_{\lambda_2}\ldots\beta_{\lambda_p}$, il faudra alors que l'argument φ par lequel on s'approche de l'infini soit déterminé de manière que les quantités

$$\cos(\varepsilon_1+\varphi\lambda_1),\ \cos(\varepsilon_2+\varphi\lambda_2),\ldots\ \cos(\varepsilon_p+\varphi\lambda_p)$$

soient toutes négatives.

Coefficients différentiels d'ordre infini.

§ **12.** Au lieu de se servir de la transformation

$$u(n)=\int t^{n-1}\,v(t)\,dt$$

on aurait pu poser

$$u(n)=\int t^{-n-1}\,v_1(t)\,dt. \tag{34}$$

En intégrant par parties on aurait alors

$$(n+i)(n+i-1)\ldots(n+i-j+1)\,u(n+i)=\int t^{-n-i+j-1}\,\frac{d^j v_1(t)}{dt^j}\,dt$$

supposé que les limites d'intégration aient été choisies de manière que

$$t^{-n-i+j}\frac{d^j v_1(t)}{dt^j} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2, \dots p-1 \\ i = 0, 1, 2, \dots k \end{pmatrix} \tag{35}$$

disparaisse pour ces valeurs de t. Supposons que les coefficients de notre équation aux différences

$$P_k(n)\,u(n+k) + P_{k-1}(n)\,u(n+k-1) + \cdots + P_0(n)\,u(n) = 0 \tag{6}$$

soient ici de la forme

$$P_i(n) = c_{i,0} + c_{i,1}(n+i) + c_{i,2}(n+i)(n+i)(n+i-1) + \cdots \\ + c_{i,p}(n+i)(n+i-1)\dots(n+i-p+1)$$

où les $c_{i,\nu}$ se déterminent par la formule

$$\nu!\,c_{i,\nu} = \Delta^\nu P_i(-i).$$

Remarquons surtout que $c_{i,p} = C_{i,p}$ $(i = 1, 2, \dots k)$. Pour $v_1(t)$ on trouvera maintenant par la transformation (34) l'équation différentielle

$$q_p(t)\,t^p\frac{d^p v_1(t)}{dt^p} + \cdots + q_i(t)\,t^i\frac{d^i v_1(t)}{dt^i} + \cdots + q_0(t)\,v_1(t) = 0 \tag{36}$$

où

$$q_i(t) = c_{k,i} + c_{k-1,i}\,t + \cdots + c_{0,i}\,t^k.$$

Cette équation est de la même forme que (13). Les points singuliers sont, outre 0 et ∞, les racines de $q_p(t) = 0$; mais celles-ci sont $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots \frac{1}{a_k}$. Aux environs de 0 $v_1(t)$ se représente par p séries de la forme

$$t^{\gamma_i}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots)$$

où les exposants γ_i se déterminent comme les racines de l'équation $P_k(\gamma - k) = 0$: pour des valeurs très grandes de t, au contraire, par p séries de la forme

$$t^{-\alpha_i}\left(A_0 + \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \cdots\right)$$

où les exposants α_i se déterminent comme les racines de l'équation $P_0(-\alpha) = 0$. Les quantités α_i et γ_i sont les mêmes que plus haut (§ 6), et nous les supposons rangées de la même manière. En suivant la ligne d'intégration, définie au § 8, on trouvera une intégrale satisfaisant aux conditions (35), si $\Re(n) > \Re(-\alpha_p)$. En se servant, au contraire, de la ligne d'intégration définie au § 6, l'intégrale satisfera à l'équation aux différences pourvu que $\Re(n) < \Re(\gamma_p - k)$. En concluant exactement comme plus haut on verra maintenant que l'une et l'autre des deux intégrales se comportent asymptotiquement comme

$$c \,.\, a_i^n n^{-\beta_i - 1} (1 - e^{2\pi i} \beta_i) \, \Gamma(1 + \beta_i). \tag{37}$$

Appliquons maintenant cette transformation à la solution du problème suivant: Soit y l'intégrale complète de l'équation différentielle

$$P_k(x) \frac{d^k y}{d x^k} + P_{k-1}(x) \frac{d^{k-1} y}{d x^{k-1}} + \cdots + P_0(x) \, y = 0 \tag{38}$$

en posant

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n y}{d x^n} = u(n)$$

nous allons étudier la manière dont se comporte $u(n)$ pour des valeurs très grandes de n. Nous supposons que les points singuliers de l'équation différentielle soient en nombre fini, et qu'ils soient tous réguliers. Les coefficients seront alors des polynômes en x dont le degré diminue avec l'indice. Si $P_k(x)$ est du $p^{\text{ième}}$ degré, $P_{k-i}(x)$ sera au plus du $(p - i)^{\text{ième}}$ degré en x. Outre ∞ nous aurons alors p points singuliers; appelons les $a_1, a_2 \ldots a_p$. Aux environs du point a_i y sera de la forme

$$_j\sum (t - a_i)^{\beta_{i,j}} \varphi_{i,j}(t) \tag{39}$$

où $\varphi_{i,j}(t)$ est holomorphe dans le domaine de a_i. Nous différentierons maintenant (38) n fois et poserons $y^{(n)} = n!\, u(n)$. On aura alors une équation aux différences d'ordre p en $u(n)$, car p sera nécessairement plus grand que k, ∞ n'étant pas sans cela un point singulier régulier. On aura donc

$$Q_k \, u(n + k) + Q_{k-1} \, u(n + k - 1) + \cdots + Q_{k-p} \, u(n + k - p) = 0 \tag{40}$$

où

$$Q_k = (n + k)(n + k - 1) \ldots (n + 1) \, P_k(x)$$

. . . .

$$Q_{k-p} = \frac{P_0^{(p-k)}(x)}{(p - k)!} + (n + k - p) \frac{P_1^{(p-k+1)}(x)}{(p - k + 1)!} + \cdots + (n + k - p) \ldots (n + 1) \frac{P_k^{(p)}(x)}{p!}.$$

Ce qu'il y a de plus important maintenant, c'est de déterminer les racines de l'équation caractéristique de (40). Ici, cette équation est

$$P_k(x) \, z^p + \frac{P'_k(x)}{1!} z^{p-1} + \frac{P''_k(x)}{2!} z^{p-2} + \ldots \frac{P_k^{(p)}(x)}{p!} = z^p \, P_k\left(x + \frac{1}{z}\right) = 0. \tag{41}$$

Donc, les racines sont

$$\frac{1}{a_1 - x}, \frac{1}{a_2 - x}, \ldots \frac{1}{a_p - x}.$$

Formons maintenant la transformée de Laplace de (40) en posant

$$u(n) = \int t^{-n-1} v_1(t)\, dt.$$

On verra facilement qu'elle est

$$P_k(x+t)\frac{d^k v_1}{dt^k} + P_{k-1}(x+t)\frac{d^{k-1} v_1}{dt^{k-1}} + \cdots + P_0(x+t)\, v_1 = 0$$

y étant, aux environs de a_i, de la forme (39), on verra en étendant l'intégration de ∞ ou de 0 autour de chacun des points singuliers que pour des valeurs très grandes de n, $u(n) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n y}{dx^n}$ se comportera comme

$$\sum_i \sum_j C_{i,j} \left(\frac{1}{a_i - x}\right)^n \cdot n^{-\beta_{i,j}-1} \cdot \Gamma(1 + \beta_{i,j})\,(1 - e^{2\pi i \beta_{i,j}}). \tag{42}$$

$C_{i,j}$ sont des constantes dont, cependant, k seules sont indépendantes. Cette expression nous sera très utile plus tard. Nous avons supposé ici que tous les points singuliers soient réguliers, mais quand même ∞ serait un point singulier irrégulier, on trouverait la même valeur asymptotique que plus haut, pourvu que y soit l'intégrale générale de (38); mais nous allons démontrer qu'il y aura alors certaines intégrales particulières qui se comporteront d'une autre manière. Nous supposons donc que les coefficients de (38) soient des polynômes de degrés arbitraires, mais tels que tous les points singuliers situés dans la partie finie du plan soient réguliers. Désignons par π_i le degré de $P_i(x)$, et soit ν le plus grand des nombres

$$\pi_k,\ \pi_{k-1} - 1,\ \pi_{k-2} - 2, \ldots \pi_0 - k$$

l'équation aux différences en $u(n)$ sera alors d'ordre ν. Les premiers $\pi_k + 1$ coefficients $Q_k \ldots Q_{k-\pi_k}$ de celle-ci serons tous du même degré k, tandis que ceux qui suivent seront d'un degré inférieur. Nous formerons alors l'équation qui jouera le même rôle que (41); celle-là aura $\nu - p$ racines nulles et, en outre, les mêmes racines que (41). A ces dernières racines correspond une intégrale $u(n)$ se comportant asymptotiquement comme il est indiqué par l'expression (42). Pour déterminer les intégrales correspondant aux racines nulles, il faudra faire une substitution de la forme

$$u(n) = \Gamma^{\mu}(n)\; u^{(\mu)}(n).$$

Ainsi que nous l'avons déjà montré (v. § 11), $u^{(\mu)}(n)$ sera alors une intégrale particulière dont l'expression asymptotique est de la même forme que (42). On trouvera généralement plusieurs valeurs différentes de μ; celles-ci se déterminent facilement par les nombres π_i, et on verra qu'elles seront toutes négatives et plus petites que 1. La valeur asymptotique de ces intégrales particulières seront donc d'un ordre beaucoup moins élevé que celles étudiées plus haut; on verra par-là que (42) est, en effet, l'expression asymptotique de l'intégrale générale, quand même ∞ serait un point singulier irrégulier.

CHAPITRE II.

Intégration des équations différentielles et des équations aux différences finies par des fractions continues.

Equations différentielles.

§ **13.** LAGRANGE[1] a déjà traité ce problème en développant en fraction continue quelques transcendantes élémentaires (e^x, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc\,tg} x, \ldots$) en partant de certaines équations différentielles de premier ordre. Le procédé est assez simple. Pour développer en fraction continue une intégrale particulière y_1 LAGRANGE pose

$$y_1 = \frac{\xi_1}{1 + y_2}$$

où ξ_1 est une première approximation de y_1 (p. ex. le premier terme de la série de puissances de y_1). Nous aurons alors une équation différentielle en y_2 et poserons de même

$$y_2 = \frac{\xi_2}{1 + y_3}$$

et ainsi de suite; nous trouverons alors que

$$y_1 = \cfrac{\xi_1}{1 + \cfrac{\xi_2}{1 + \cfrac{\xi_3}{1 + \ddots}}} \tag{1}$$

---

[1] LAGRANGE: Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral. Mémoires de l'Acad. de Berlin 1776.

Le succès de la méthode dépend d'un choix heureux des ξ_i, mais il faut surtout transformer l'équation différentielle à quelque forme invariable pour ne pas être arrêté, dès les premiers pas, par l'embarras des calculs. Considérons, par exemple, l'équation de RICCATI

$$x\frac{dy}{dx} - ay + by^2 - cx^n = 0 \tag{2}$$

où a, b et c sont des constantes. En posant

$$y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1}$$

on aura l'équation transformée

$$x\frac{dy_1}{dx} - (a+n)y_1 + cy_1^2 - bx^n = 0.$$

En appliquant ici la substitution

$$y_1 = \frac{a+n}{c} + \frac{x^n}{y_2}$$

on aura l'équation transformée

$$x\frac{dy_2}{dx} - (a+2n)y_2 + by_2^2 - cx^n = 0.$$

Mais cette équation est de la même forme que (2); on aura donc pour y la fraction continue

$$y = \frac{a}{b} + \cfrac{x^n}{\cfrac{a+n}{c} + \cfrac{x^n}{\cfrac{a+2n}{b} + \cfrac{x^n}{\cfrac{a+3n}{c} + \ddots \cfrac{}{\cfrac{a+(2r-1)n}{c} + \cfrac{x^n}{y_{2r}}}}}} \tag{3}$$

où le reste est déterminé par l'équation différentielle

$$x\frac{dy_{2r}}{dx} - (a+2rn)y_{2r} + by_{2r}^2 - cx^n = 0.$$

On aurait aussi pu poser en (2)

$$y = \frac{x^n}{y_1}.$$

L'équation transformée serait alors

$$x\frac{dy_1}{dx}-(n-a)y_1+cy_1^2-bx^n=0.$$

On aurait donc la fraction continue

$$y=\cfrac{x^n}{\cfrac{n-a}{c}+\cfrac{x^n}{\cfrac{2n-a}{b}+\cfrac{x^n}{\cfrac{3n-a}{c}+\cfrac{x^n}{\cfrac{4n-a}{b}+\ddots}}}} \tag{4}$$

Il est facile, du reste, de trouver la valeur de ces deux fractions continues en se rappelant la fraction continue de BESSEL bien connue

$$\frac{J^{\nu+1}(x)}{J^{\nu}(x)}=\cfrac{\frac{x}{2}}{\nu+1-\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\nu+2-\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\nu+3-\ddots}}}$$

où $J^{\nu}(x)$ est la fonction bessélienne; on verra, par comparaison, que la valeur de (3) est

$$y=\frac{n}{2b}\cdot z\cdot\frac{J^{\nu-1}(z)}{J^{\nu}(z)}$$

où

$$\nu=\frac{a}{n}\qquad z=\frac{2}{n}\sqrt{-b\cdot cx^n}.$$

Pour la valeur de (4) on trouve, au contraire,

$$y=-\frac{n}{2b}z\cdot\frac{J^{1-\nu}(z)}{J^{-\nu}(z)}.$$

Les fractions continues (3) et (4) donnent donc, si ν n'est pas un entier, deux intégrales de (12) indépendantes l'une de l'autre.

Il arrive que les fractions continues auxquelles on est conduit ainsi, sont finies; mais, en général, elles ne le seront pas. Il faut alors examiner la convergence; en appliquant les règles connues de STIELTJES, M. PRINGSHEIM, etc. cela est possible quelquefois, mais on n'a aucun moyen de se rendre compte de la convergence ou de la divergence avant la formation de la fraction continue. Aussi nous allons exposer une autre méthode qui ne souffre pas de cet inconvénient.

§ 14. Pour former une fraction continue dont les réduites sont des fonctions données, on peut se servir d'un théorème énoncé par M. THIELE dans un mémoire sur les fractions continues finies.[1] Soient x_1, x_2, $x_3 \ldots$ une série de quantités arbitraires que nous supposons être des réduites d'une fraction continue. En étudiant maintenant le rapport anharmonique entre 4 réduites $x_i\, x_j\, x_k\, x_l$, M. THIELE démontre l'équation suivante

$$x_n = x_1 - \cfrac{x_1 - x_2}{1 - \cfrac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3 - \cfrac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{x_2 - x_4 - \cdots \cfrac{}{\ddots - \cfrac{(x_{n-3} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-2} - x_n}}}}}$$

qui donne encore l'identité

$$\frac{x_n - x_1}{x_n - x_2} \cdot \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} = 1 - \cfrac{\dfrac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \cdot \dfrac{x_3 - x_4}{x_2 - x_4}}{1 - \cfrac{\dfrac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} \cdot \dfrac{x_4 - x_5}{x_3 - x_5}}{1 - \cdots \cfrac{}{\ddots \cdot \dfrac{(x_{n-3} - x_{n-2})}{(x_{n-3} - x_{n-1})} \dfrac{(x_{n-1} - x_n)}{(x_{n-2} - x_n)}}}}. \tag{5}$$

Soient maintenant y_1 et y_2 deux solutions indépendantes d'une équation différentielle linéaire de second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \cdot \frac{dy}{dx} + Q \cdot y = 0. \tag{6}$$

Pour intégrer cette équation au moyen de fractions continues je pose

$$x_{n+1} = \frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}}$$

on trouvera alors que le rapport anharmonique entre 4 réduites consécutives est

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - x_{n+2}} \cdot \frac{x_{n+2} - x_{n+3}}{x_{n+1} - x_{n+3}} = \frac{y_1^{(n-1)} y_2^{(n)} - y_1^{(n-1)} y_1^{(n)}}{y_1^{(n-1)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n-1)} y_1^{(n+1)}} \cdot \frac{y_1^{(n+1)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n+1)} y_1^{(n+2)}}{y_1^{(n)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n)} y_1^{(n+2)}}.$$

[1] Den endelige Kjædebrökfunktions Teori: Tidskrift for Mathematik, Ser. 2, vol. 6, 1870. Köbenhavn.

Les dérivées successives de (6) sont maintenant

$$\begin{aligned} &y'' + P_0 y' + Q_0 y = 0 \\ &y''' + P_1 y'' + Q_1 y' = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(n+2)} + P_n y^{(n+1)} + Q_n y^{(n)} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

où les coefficients se déterminent par les relations de récurrence

$$P_{m+1} = P_m + \frac{Q'_m}{Q_m} \qquad Q_{m+1} = Q_m + \frac{Q_m P'_m - P_m Q'_m}{Q_m}. \tag{8}$$

De (7) on dérive encore les relations

$$\begin{aligned} &\{y_1^{(n)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n)} y_1^{(n+2)}\} + P_n\{y_1^{(n)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n)} y_1^{(n+1)}\} = 0 \\ &\{y_1^{(n+1)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n+1)} y_1^{(n+2)}\} - Q_n\{y_1^{(n)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n)} y_1^{(n+1)}\} = 0. \end{aligned}$$

Pour le rapport anharmonique on trouve alors

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - x_{n+2}} \cdot \frac{x_{n+2} - x_{n+3}}{x_{n+1} - x_{n+3}} = \frac{Q_n}{P_{n-1} \cdot P_n}. \tag{9}$$

En substituant dans (5) cette expression on aura l'identité

$$\frac{y'_1 y_2^{(n+1)} - y'_2 y_1^{(n+1)}}{y_1 y_2^{(n+1)} - y_2 y_1^{(n+1)}} = -\cfrac{Q_0}{P_0 - \cfrac{Q_1}{P_1 - \cfrac{Q_2}{P_2 - \ddots \cfrac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}}}}. \tag{10}$$

Mais on pourra encore trouver une autre fraction continue toute analogue: En désignant par $y^{(-n)}$ la $n^{\text{ième}}$ intégrale on peut, après avoir trouvé la loi générale des coefficients de (7), former les équations suivantes

$$\begin{aligned} &y' + P_{-1} y \quad + Q_{-1} y^{(-1)} = 0 \\ &y \;+ P_{-2}\, y^{(-1)} + Q_{-2} y^{(-2)} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(2-n)} + P_{-n} y^{(1-n)} + Q_{-n} y^{(-n)} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

En posant dans (5)

$$x_{n+2} = \frac{y_1^{(-n)}}{y_2^{(-n)}}$$

on aura

$$\frac{y_1 y_2^{(-n)} - y_2 y_1^{(-n)}}{y'_1 y_2^{(-n)} - y'_2 y_1^{(-n)}} = -\cfrac{1}{P_{-1} - \cfrac{Q_{-1}}{P_{-2} - \cfrac{Q_{-2}}{P_{-3} - \ddots \cfrac{Q_{1-n}}{P_{-n}}}}}. \tag{12}$$

Les équations (10) et (12) sont simplement des identités, mais il est naturel de faire croître n vers l'infini dans ces fractions continues. L'examen de la convergence dépendra alors de la manière dont $y^{(n)}$ se comporte pour des valeurs très grandes de n. On voit que si

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}} = c$$

où c est une constante, (10) tendra vers

$$\frac{y'_1 - c y'_2}{y_1 - c y_2}$$

c'est-à-dire vers la dérivée logarithmique d'une intégrale particulière de (6); mais nous allons voir que cette constante n'a pas la même valeur dans tout le plan. La fraction continue tendra donc vers des fonctions analytiques différentes dans des parties différentes du plan. Pour étudier de plus près cette particularité nous supposons que les coefficients de (6) soient des fonctions rationnelles de x. Soient les points singuliers de l'équation différentielle $a_1\, a_2 \ldots a_p$ et ∞; ce dernier point peut être un point singulier, soit régulier soit irrégulier, mais nous supposons que tous les autres points singuliers soient réguliers. Aux environs de a_i on pourra toujours déterminer 2 intégrales linéairement indépendantes $y_{i,1}$ et $y_{i,2}$ de la forme

$$y_{i,1} = (x - a_i)^{\beta_{i,1}} \varphi_{i,1}(x) \qquad y_{i,2} = (x - a_i)^{\beta_{i,2}} \varphi_{i,2}(x) \tag{13}$$

$\varphi_{i,1}(x)$ et $\varphi_{i,2}(x)$ étant holomorphes dans le voisinage du point a_i. Nous allons maintenant étudier la convergence de (10) et de (12) aux environs d'un point arbitraire x du plan. Soit a_i le point singulier le plus rapproché de x, a_j le point singulier le plus éloigné de x (∞ non compris), on aura alors d'après (Chap. I (42)) que, pour des valeurs positives très grandes de n, $\frac{y_{i,1}^{(n)}}{n!}$ et $\frac{y_{i,2}^{(n)}}{n!}$ se comportent respectivement comme

$$C_{i,1}(a_i - x)^{-n} n^{-\beta_{i,1}-1} \Gamma(1 + \beta_{i,1})(1 - e^{2\pi i \beta_{i,1}})$$
$$\text{et comme } C_{i,2}(a_i - x)^{-n} n^{-\beta_{i,2}-1} \Gamma(1 + \beta_{i,2})(1 - e^{2\pi i \beta_{i,2}}) \tag{14}$$

tous les autres termes étant d'ordre inférieur. Donc

$$\lim_{n=+\infty} \frac{y_{i,1}^{(n)}}{y_{i,2}^{(n)}} n^{\beta_{i,1}-\beta_{i,2}} = \frac{c_{i,1}}{c_{i,2}}$$

où nous avons posé

$$c_{i,k} = C_{i,k} \cdot \Gamma(1+\beta_{i,k})(1-e^{2\pi i \beta_{i,k}}).$$

On voit de même que pour des valeurs négatives très grandes de n

$$\lim_{n=-\infty} \frac{y_{j,1}^{(n)}}{y_{j,2}^{(n)}} n^{\beta_{j,1}-\beta_{j,2}} = \frac{c_{j,1}}{c_{j,2}}.$$

Les intégrales $y_{j,1}$ et $y_{j,2}$ sont ici des fonctions linéaires de $y_{i,1}$ et de $y_{i,2}$ dont les coefficients se déterminent de la connaissance du groupe de l'équation; (10) tendra alors vers $\frac{y'_{i,1}}{y_{i,1}}$ ou vers $\frac{y'_{i,2}}{y_{i,2}}$, selon que $\Re(\beta_{i,1}) > \Re(\beta_{i,2})$, ou que $\Re(\beta_{i,1}) < \Re(\beta_{i,2})$. Si $\Re(\beta_{i,1}) = \Re(\beta_{i,2})$, sans que $\beta_{i,1} = \beta_{i,2}$, la fraction continue divergera. (12) tend au contraire vers $\frac{y_{j,1}}{y'_{j,1}}$ ou vers $\frac{y_{j,2}}{y'_{j,2}}$, selon que $\Re(\beta_{j,2}) \gtreqless \Re(\beta_{j,1})$. (10) *et* (12) *conduisent donc généralement à deux intégrales de* (6) *linéairement indépendantes l'une de l'autre; nous pouvons donc intégrer complètement l'équation différentielle au moyen de fractions continues.* Etudions encore quelque cas d'exception:

1) Si $\beta_{i,1}$ est 0 ou un nombre entier positif, le terme contenant $(a_i - x)^{-n}$ disparait dans la valeur asymptotique de $\frac{1}{n!} y_{i,1}^{(n)}$ à cause du facteur $1 - e^{2\pi i \beta}$. En ce cas (10) tendra toujours vers $\frac{y'_{i,1}}{y_{i,1}}$.

2) Si $\beta_{i,1} - \beta_{i,2}$ est 0 ou un nombre entier positif, $y_{i,2}$ sera de la forme

$$y_{i,2} = (x - a_i)^{\beta_{i,2}} \{\psi_1(x) + \psi_2(x) \log (x - a_i)\}$$

tandis que $y_{i,1}$ ne sera pas logarithmique. En se rappelant (Chap. I (21)) on trouvera facilement que la valeur asymptotique de $\frac{1}{n!} y_{i,2}^{(n)}$ sera

$$\left(\frac{1}{a_i - x}\right)^n n^{-\beta_{i,2}-1} \Psi(n + \beta_{i,2} + 1)(1 - e^{2\pi i \beta_{i,2}}) \Gamma(1 + \beta_{i,2})$$

on voit donc *que* (10) *tendra toujours vers l'intégrale non-logarithmique, c'est-à-dire* $\frac{y'_{i,1}}{y_{i,1}}$.

§ **15.** En considérant, au contraire, un point x pour lequel a_k est le point singulier le plus rapproché, *la fraction continue convergera généralement aussi pour cette valeur de x, mais vers une autre fonction qui n'est pas la continuation analytique de la première. Donc, la valeur de la fraction continue saute sur certaines lignes que nous appelons les lignes critiques de la fraction continue et dont la position se détermine par les points singuliers de l'équation différentielle.*

Etudions de plus près quelques uns des cas les plus simples:

1) S'il n'y a qu'un seul point singulier situé dans le fini, ou s'il n'y en a pas du tout, la fraction continue tend partout vers la même fonction.

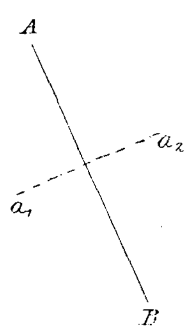

Fig. 1.

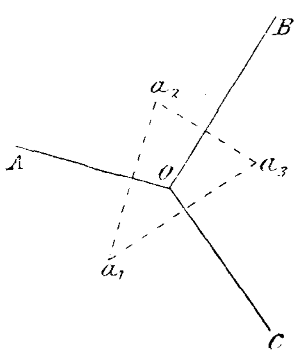

Fig. 2.

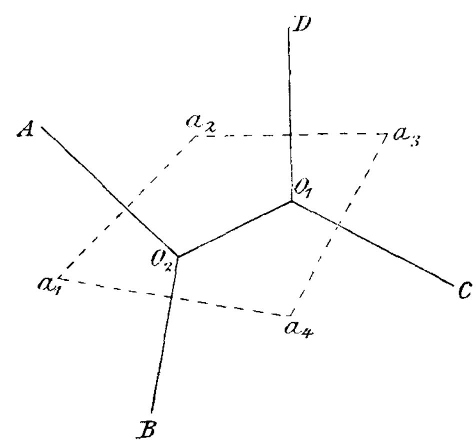

Fig. 3.

2) S'il y a deux points singuliers a_1 et a_2 dans la partie finie du plan, nous traçons une ligne droite BA (fig. 1) perpendiculaire au milieu de la ligne $a_1 a_2$. Les fractions continues convergent alors généralement dans chacun des demi-plans limités par la droite BA, mais dans le demi-plan où a_i est situé (10), par exemple, tendra vers $\frac{y'_{1,1}}{y_{1,1}}$, dans l'autre, au contraire, vers $\frac{y'_{2,1}}{y_{2,1}}$. Sur la ligne droite elle-même la fraction continue peut tendre vers l'une ou l'autre de ces fonctions, ou elle peut diverger.

3) S'il y a trois points singuliers a_1, a_2, a_3 (fig. 2), nous traçons des lignes perpendiculaires au milieu des côtés du triangle $a_1 a_2 a_3$. Que celles-ci se coupent en O. Ces lignes divisent le plan en 3 parties COA, AOB et BOC chacune s'étendant à l'infini; dans chacune de celles-ci la fraction continue tend vers une fonction analytique déterminée.

4) On voit de même que, s'il y a 4 points singuliers $a_1 a_2 a_3 a_4$ (fig. 3), le plan est divisé en 4 domaines de convergence AO_2B, BO_2O_1C, CO_1D et DO_1O_2A

par des droites perpendiculaires au milieu des côtés et des diagonales du quadrilatère.

Et généralement si l'équation différentielle a un nombre fini de points singuliers tous réguliers, nous pouvons l'intégrer complètement dans tout le plan par deux fractions continues (10) et (12). Celles-ci ne divergeront que exceptionnellement: lorsque $\Re(\beta_{i,1}) = \Re(\beta_{i,2})$ sans que $\beta_{i,1} = \beta_{i,2}$ mais elles conduiront à des intégrales particulières différentes dans des parties différentes du plan, les fractions continues ayant certaines lignes critiques sur lesquelles sautent leurs valeurs. La position de ces lignes se détermine par les points singuliers. Sur les lignes critiques les fractions continues peuvent tendre vers une des fonctions qu'elles représentent dans les parties contiguës du plan, mais elles peuvent aussi diverger. Dans les points singuliers de l'équation différentielle, au contraire, les fractions continues convergent.

Il arrive que les fonctions représentées par les fractions continues, chacune de son côté d'une des lignes droites, coïncident, ainsi il arrive, par exception, que la fraction continue tend vers la même fonction dans tout le plan. Mais il arrive aussi, par exception, qu'elle diverge dans tout le plan: Si pour tous les points singuliers $\Re(\beta_{i,1}) = \Re(\beta_{i,2})$ sans que $\beta_{i,1} = \beta_{i,2}$.

Nous allons mentionner encore un cas d'exception. Au § 12 nous avons vu que, si ∞ est un point singulier irrégulier, il y a certaines intégrales particulières qui se comportent asymptotiquement comme

$$\Gamma^{\mu}(n)\, \alpha^n n^{\beta}$$

où $0 > \mu \geqq -1$ *tandis que* α *est une constante indépendante de* x. *Si* $\frac{1}{n!} y_1^{(n)}$ *est une telle intégrale, on verra que, dans ce cas,* (10) *tendra vers* $\frac{y'_1}{y_1}$ *dans tout le plan.*

§ **16.** Un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + P_0 \frac{dz}{dx} + Q_0 \, . \, y = 0 \\ &\frac{dz}{dx} + S_0 \, . \, z + T_0 \, . \, y = 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

peut se traiter de la même façon, supposé que les coefficients soient des fonctions rationnelles de x. En différentiant (15) n fois on en dérivera facilement les équations

$$\begin{aligned} &\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + P_n \frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + Q_n \frac{d^n y}{dx^n} = 0 \\ &\frac{d^{n+1}z}{dx^{n-1}} + S_n \frac{d^n z}{dx^n} + T_n \frac{d^n y}{dx^n} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Soient y_1, z_1 et y_2, z_2 deux solutions particulières indépendantes du système proposé. Je pose alors

$$x_{2n+2} = \frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}} \qquad x_{2n+1} = \frac{z_1^{(n)}}{z_2^{(n)}}.$$

Au moyen de (16) on pourra maintenant exprimer par les coefficients $P_n, Q_n \ldots$ le rapport anharmonique entre 4 réduites consécutives; un calcul facile donnera en substituant dans (5) la fraction continue

$$-\cfrac{S_0}{T_0 - \cfrac{Q_0}{P_0 - \cfrac{S_1}{T_1 - \cfrac{Q_1}{P_1 - \cfrac{S_2}{\ddots}}}}} \tag{17}$$

La réduite qu'on trouve en interrompant la fraction continue par le dénominateur partiel T_{n-1} est

$$\frac{y_1 z_2^{(n)} - y_2 z_1^{(n)}}{z_1 z_2^{(n)} - z_2 z_1^{(n)}}$$

tandis que la réduite suivante est

$$\frac{y_1 y_2^{(n)} - y_2 y_1^{(n)}}{z_1 y_2^{(n)} - z_2 y_1^{(n)}}.$$

Au moyen de (15) on dérive encore de (17) la fraction continue

$$-\cfrac{Q_0}{P_0 - \cfrac{S_1}{T_1 - \cfrac{Q_1}{P_1 - \cfrac{S_2}{T_2 - \ddots}}}} \tag{7 bis}$$

où les réduites paires et impaires sont respectivement

$$\frac{z'_1 z_2^{(n)} - z'_2 z_1^{(n)}}{y_1 z_2^{(n)} - y_2 z_1^{(n)}} \text{ et } \frac{z'_1 y_2^{(n)} - z'_2 y_1^{(n)}}{y_1 y_2^{(n)} - y_2 y_1^{(n)}}.$$

Pour étudier la convergence de ces fractions continues on n'aura qu'à former de (15) les équations différentielles de $2^{\text{ième}}$ ordre que satisfont y et z et à y déterminer les points singuliers ainsi que les racines des équations déterminantes correspondantes. On verra que, si

$$\lim \frac{z_1^{(n)}}{z_2^{(n)}} = \lim \frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}} = c$$

(17) tendra vers $\frac{y_1 - cy_2}{z_1 - cz_2}$ et (17 bis) vers $\frac{z'_1 - cz'_2}{y_1 - cy_2}$; en combinant ceux-ci on détermine facilement une solution particulière de (15). Si, au contraire, $\frac{z_1^{(n)}}{z_2^{(n)}}$ et $\frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}}$ tendent vers deux limites différentes les fractions continues oscilleront, cependant elles n'en gardent pas moins le sens, car, en ce cas, elles nous conduiront même au système complet d'intégrales.

Équations aux différences finies.

§ 17. Considérons l'équation linéaire homogène de $2^{\text{ième}}$ ordre

$$U(n+2) + P(n)U(n+1) + Q(n)U(n) = 0. \tag{18}$$

Pour intégrer celle-ci par des fractions continues je pose dans (5)

$$x_{n+1} = \frac{U_1(r+n)}{U_2(r+n)}$$

où $U_1(n)$ et $U_2(n)$ désignent deux intégrales linéairement indépendantes de (18). On trouve alors l'identité

$$\frac{U_1(r+1)U_2(r+n) - U_2(r+1)U_1(r+n)}{U_1(r)U_2(r+n) - U_2(r)U_1(r+n)} =$$

$$- \cfrac{Q(r)}{P(r) - \cfrac{Q(r+1)}{P(r+1) - \ddots - \cfrac{Q(r+n-2)}{P(r+n-2)}}}. \tag{19}$$

En posant, au contraire

$$x_{n+1} = \frac{U_3(r-n)}{U_4(r-n)}$$

où $U_3(n)$ et $U_4(n)$ désignent deux intégrales linéairement indépendantes de (18) mais généralement différentes de $U_1(n)$ et $U_2(n)$, on aura

$$\frac{U_3(r)\,U_4(r-n)-U_4(r)\,U_3(r-n)}{U_3(r+1)\,U_4(r-n)-U_4(r+1)\,U_3(r-n)}=$$

$$-\cfrac{1}{P(r-1)-\cfrac{Q(r-1)}{P(r-2)-\cfrac{Q(r-2)}{\ddots-\cfrac{Q(r-n+1)}{P(r-n)}}}}. \tag{20}$$

Supposons maintenant que les coefficients de (18) soient des fonctions rationnelles de n, mais des fonctions arbitraires d'un paramètre x. On pourra toujours donner à l'équation aux différences une telle forme que les coefficients soient des polynômes en n. Nous choisissons maintenant les intégrales particulières $U_1(n)$ et $U_2(n)$ ($U_3(n)$ et $U_4(n)$) de telle façon que, pour des valeurs positives (négatives) très grandes, elles se comportent respectivement comme (voir § 11)

$$c_1\,\Gamma^{\mu_1}(n)\,a_1^n n^{-\beta_1-1} \text{ et } c_2\,\Gamma^{\mu_2}(n)\,a_2^n n^{-\beta_2-1} \tag{21}$$

μ_1 et μ_2 sont ici deux nombres qui se déterminent par les degrés des polynômes, tandis que a_1, a_2, β_1 et β_2 sont des fonctions de x, qui se déterminent facilement par les coefficients de (18). Si maintenant $\mu_1 > \mu_2$, alors

$$\lim_{n=+\infty}\frac{U_2(n)}{U_1(n)}=0 \qquad \lim_{n=-\infty}\frac{U_3(n)}{U_4(n)}=0. \tag{22}$$

Donc, en faisant tendre n vers l'infini dans les fractions continues (19) et (20), (19) tendra vers $\frac{U_2(r+1)}{U_2(r)}$ et (20) vers $\frac{U_3(r)}{U_3(r+1)}$. Si, au contraire, $\mu_1 = \mu_2$, alors

$$\frac{U_1(n)}{U_2(n)} \sim \frac{c_1}{c_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n n^{\beta_2-\beta_1} \tag{23}$$

en ce cas, (19) tendra vers

$$\frac{U_1(r+1)}{U_1(r)} \text{ ou vers } \frac{U_2(r+1)}{U_2(r)}$$

selon que $\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ sera plus petit ou plus grand que 1. Mais a_1 et a_2 étant des fonctions de x, ce module sera tantôt plus grand, tantôt plus petit que 1. Donc, si l'on considère la fraction continue (19) comme une fonction de la variable x, celle-ci convergera généralement dans tout le plan, mais tantôt vers $\frac{U_1(r+1)}{U_1(r)}$, tantôt vers $\frac{U_2(r+1)}{U_2(r)}$. Les courbes sur lesquelles saute la valeur, se déterminent par l'équation $\left|\frac{a_1}{a_2}\right| = 1$. Quant à (20) on voit qu'elle se comporte exactement de même, de telle façon que, dans les domaines où (19) tend vers

$$\frac{U_1(r+1)}{U_1(r)}$$

(20) tend vers

$$\frac{U_4(r)}{U_4(r+1)}$$

et vice versa. (19) et (20) nous conduisent donc à l'intégrale complète de l'équation aux différences dans tout le plan, à l'exception des courbes critiques déterminées par l'équation $|a_1| = |a_2|$. Sur ces courbes mêmes (19) tend vers $\frac{U_1(r+1)}{U_1(r)}$ ou vers $\frac{U_2(r+1)}{U_2(r)}$ selon que $\Re(\beta_2 - \beta_1)$ sera négatif ou positif. Si à la fois $|a_1| = |a_2|$ et $\Re(\beta_1) = \Re(\beta_2)$ sans que $a_1 = a_2$, $\Re(\beta_1) = \Re(\beta_2)$, l'une et l'autre des fractions continues divergeront. Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Les fractions continues (19) *et* (20) *sont convergentes dans tout le plan excepté possiblement sur certaines courbes critiques, et elles conduisent ensemble à l'intégrale complète de l'équation aux différences finies. Si* $\mu_1 \gtrless \mu_2$, *les fractions continues tendront, dans tout le plan, chacune vers sa fonction analytique. Si, au contraire,* $\mu_1 = \mu_2$, *les valeurs des fractions continues sautent sur certaines courbes critiques, déterminées par l'équation* $|a_1| = |a_2|$. *Dans un domaine limité par une de ces courbes, les fractions continues sont convergentes, et elles tendent vers des fonctions qui ne sont pas des valeurs réciproques l'une de l'autre. Sur les courbes critiques mêmes, les fractions continues convergent si* $\Re(\beta_1) \gtrless \Re(\beta_2)$, *au cas contraire elles divergent au moins qu'on ait à la fois* $a_1 = a_2$, $\beta_1 = \beta_2$.

Il arrive que $|a_1| = |a_2|$ dans une certaine partie du plan, éventuellement dans tout le plan, si, par exemple, $\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ est indépendant de x. Dans un tel domaine du plan les courbes critiques de (19) et (20) se déterminent par l'équation $\Re(\beta_1 - \beta_2) = 0$. Il arrive encore par exception que dans ce domaine $U_1(n) = U_3(n)$ est une constante. Nous ne trouverons alors, de l'équation aux différences, qu'une intégrale particulière. Quant aux autres cas d'exception qui peuvent arriver il suffit de renvoyer à § 9.

§ 18. Nous avons dérivé la fraction continue (19) en partant d'une certaine équation aux différences finies de $2^{\text{ième}}$ ordre, mais on voit inversement que toute fraction continue est de cette forme. Pourvu que les numérateurs et les dénominateurs partiels d'une fraction continue donnée satisfassent aux conditions susnommées, nous pourrons toujours en étudier la convergence. Il arrive, cependant, souvent que les coefficients d'une telle fraction continue suivent une loi alternante. Pour examiner ce cas il faut considérer un système d'équations linéaires, et, en conséquence immédiate de ce qui précède, nous serons conduits à des règles de convergence qui, en pratique, seront généralement satisfaisantes.

§ 19. Considérons donc le système:

$$\begin{aligned} &U(n+1) + P(n)V(n+1) + Q(n)U(n) = 0 \\ &V(n+1) + S(n)U(n) + T(n)V(n) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Pour intégrer ces équations par des fractions continues on substitue en (5)

$$x_{2n+2} = \frac{U_1(n+r)}{U_2(n+r)} \qquad x_{2n+1} = \frac{V_1(n+r)}{V_2(n+r)}.$$

On trouvera alors facilement

$$-\cfrac{T(r)}{S(r) - \cfrac{Q(r)}{P(r) - \cfrac{T(r+1)}{S(r+1) - \cfrac{Q(r+1)}{P(r+1) - \cdots}}}} \tag{26}$$

La $(2n+4)^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue égale

$$\frac{U_1(r)V_2(n+r) - U_2(r)V_1(n+r)}{V_1(r)V_2(n+r) - V_2(r)V_1(n+r)} \tag{27}$$

tandis que la réduite suivante est

$$\frac{U_1(r)U_2(r+n) - U_2(r)U_1(r+n)}{V_1(r)U_2(r+n) - V_2(r)U_1(r+n)}. \tag{28}$$

On trouvera de même en posant

$$x_{2n} = \frac{V_1(n+r)}{V_2(n+r)} \qquad x_{2n+1} = \frac{U_1(n+r)}{U_2(n+r)}$$

la fraction continue

$$-\cfrac{Q(r)}{P(r)-\cfrac{T(r+1)}{S(r+1)-\cfrac{Q(r+1)}{P(r+1)-\cdots}}} \tag{29}$$

avec les réduites

$$\frac{V_1(r+1)\,V_2(r+n)-V_2(r+1)\,V_1(r+n)}{U_1(r)\,V_2(r+n)-U_2(r)\,V_1(r+n)} \text{ et }$$
$$\frac{V_1(r+1)\,U_2(r+n)-V_2(r+1)\,U_1(r+n)}{U_1(r)\,U_2(r+n)-U_2(r)\,U_1(r+n)}. \tag{30}$$

Il sera maintenant facile d'examiner la convergence de (26) et de (29) en formant de (25) les équations aux différences finies de $2^{\text{ième}}$ ordre en $U(n)$ et en $V(n)$ et en déterminant

$$\lim \frac{U_1(n)}{U_2(n)} \quad \text{et} \lim \frac{V_1(n)}{V_2(n)}.$$

Si, dans un certain domaine, ces quantités tendent toutes deux vers, par exemple, zéro, (26) et (29) tendront dans ce même domaine vers

$$\frac{U_1(r)}{V_1(r)} \text{ et vers } \frac{V_1(r+1)}{U_1(r)} \text{ respectivement},$$

d'où il est facile de dériver $U_1(r)$ et $V_1(r)$. Si, au contraire, dans un certain domaine

$$\lim \frac{U_1(n)}{U_2(n)} = c_1 \qquad \lim \frac{V_1(n)}{V_2(n)} = c_2$$

(26) et (29) oscilleront dans ce domaine. Mais, en ce cas, nous pourrons décomposer en deux chacune de ces fractions continues. Considérons par exemple (26); en supprimant ici toutes les réduites d'ordre pair la fraction continue tendra vers

$$\frac{U_1(r)-c_2\,U_2(r)}{V_1(r)-c_2\,V_2(r)}$$

en supprimant, au contraire, les réduites d'ordre impair la fraction continue tendra vers

$$\frac{U_1(r)-c_1\,U_2(r)}{V_1(r)-c_1\,V_2(r)}.$$

On voit donc que, en ce cas, (26) et (29) nous conduisent à l'intégrale complète du système (25). Si, au contraire, (26) et (29) sont convergentes, il faudra encore, pour trouver l'intégrale complète, se servir des fractions continues

$$-\cfrac{1}{P(r-1)-\cfrac{Q(r-1)}{S(r-1)-\cfrac{T(r-1)}{P(r-2)-\cfrac{Q(r-2)}{S(r-2)-\cdots}}}} \tag{31}$$

avec les réduites

$$\frac{V_1(r)U_2(r-n)-V_2(r)U_1(r-n)}{U_1(r)U_2(r-n)-U_2(r)U_1(r-n)} \text{ et } \frac{V_1(r)V_2(r-n)-V_2(r)V_1(r-n)}{U_1(r)V_2(r-n)-U_2(r)V_1(r-n)} \tag{32}$$

et

$$-\cfrac{1}{S(r)-\cfrac{T(r)}{P(r-1)-\cfrac{Q(r-1)}{S(r-1)-\cfrac{T(r-1)}{P(r-2)-\cdots}}}} \tag{33}$$

avec les réduites

$$\frac{U_1(r)U_2(r-n)-U_2(r)U_1(r-n)}{V_1(r+1)U_2(r-n)-V_2(r+1)U_1(r-n)} \text{ et }$$

$$\frac{U_1(r)V_2(r-n)-U_2(r)V_1(r-n)}{V_1(r+1)V_2(r-n)-V_2(r+1)V_1(r-n)}. \tag{34}$$

De même que plus haut on voit facilement que ces quatres fractions continues donnent ensemble l'intégrale complète de notre système d'équations aux différences finies.

§ 20. Nous avons vu que les séries de factorielles normales divergeront généralement; il est donc d'importance d'observer que, pour des cas très étendus, ces fractions continues conservent leur sens; un autre avantage qu'on trouve aux méthodes d'intégration étudiées ici, c'est qu'elles intègrent aussitôt les équations complétement dans tout le plan, et que non seulement elles donnent une représentation formellement valable des intégrales, mais qu'à cause de la rapidité de la convergence, elles seront souvent bien utiles pour des déterminations numériques. Mais, d'autre part, la forme de fonction peu souple des fractions continues en empêche l'application à la plupart des recherches plus étendues. L'approfondissement ultérieur de la théorie des différences réciproques y remédiera peut-être. Mais avant de passer à l'étude de ces fonctions intéressantes nous appliquerons encore ce qui précède à quelques exemples particuliers.

CHAPITRE III.

Étude de l'équation de Gauss.

§ 21. En différentiant n fois l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0 \tag{1}$$

on trouve

$$x(1-x)y^{(n+2)}+\{(1-2x)n+\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y^{(n+1)}-(\alpha+n)(\beta+n)y^{(n)}=0 \tag{2}$$

en l'intégrant n fois, au contraire, on trouve

$$x(1-x)y^{(2-n)}+\{(2x-1)n+\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y^{(1-n)}-(\alpha-n)(\beta-n)y^{(-n)}=0. \tag{3}$$

Soit y_1 et y_2 deux intégrales particulières de (1) linéairement independantes, on trouve au moyen de (10) et de (12) Chap. II, les fractions continues

$$K_1=\frac{y'_1y_2^{(n+1)}-y'_2y_1^{(n+1)}}{y_1y_2^{(n+1)}-y_2y_1^{(n+1)}}=$$

$$=\cfrac{\alpha\beta}{\gamma-(\alpha+\beta+1)x+\cfrac{(\alpha+1)(\beta+1)x(1-x)}{\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x+\cfrac{(\alpha+2)(\beta+2)x(1-x)}{\ddots\ \cfrac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)x(1-x)}{\gamma+n-1-(\alpha+\beta+2n-1)x}}}}. \tag{4}$$

$$K_2=\frac{y_1y_2^{(-n)}-y_2y_1^{(-n)}}{y'_1y_2^{(-n)}-y'_2y_1^{(-n)}}=$$

$$=\cfrac{x(x-1)}{\gamma-1-(\alpha+\beta-1)x+\cfrac{(\alpha-1)(\beta-1)x(1-x)}{\gamma-2-(\alpha+\beta-3)x+\cfrac{(\alpha-2)(\beta-2)x(1-x)}{\ddots+\cfrac{(\alpha-n+1)(\beta-n+1)x(1-x)}{\gamma-n-(\alpha+\beta-2n+1)x}}}}. \tag{5}$$

Les points singuliers de l'équation différentielle (1) sont 0, 1 et ∞ qui sont tous réguliers. En faisant tendre n vers l'infini dans K_1 et K_2 ils nous conduisent tous ensemble à l'intégrale complète dans tout le plan. La ligne critique est une droite perpendiculaire sur l'axe des nombres réels traversant le point $+\frac{1}{2}$.

Il est facile d'ailleurs d'exprimer par des séries hypergéométriques les valeurs des fractions continues. Aux environs des points singuliers o et ɪ l'équation (ɪ) comporte les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) \\ y_2 &= F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ y_3 &= F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x) \\ y_4 &= (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x). \end{aligned}$$

Considérons d'abord l'aire commune aux deux cercles décrits des points o et ɪ respectivement comme centres avec un rayon égal à l'unité.

En appliquant les règles exposées dans le chapitre précedent on voit tout de suite que:

$$\text{Pour } \Re(x) < \frac{1}{2} \quad K_1 \text{ tend vers } \frac{y'_2}{y_2} \text{ et } K_2 \text{ tend vers } \frac{y_1}{y'_1}$$

$$\text{et pour } \Re(x) > \frac{1}{2} \quad K_1 \text{ tend vers } \frac{y'_3}{y_3} \text{ et } K_2 \text{ tend vers } \frac{y_4}{y'_4}\cdot$$

Il reste d'étudier les valeurs des fractions continues pour $\Re(x) = \frac{1}{2}\cdot$ Pour des valeurs positives très grandes de n on trouve

$$\frac{y_2^{(n)}}{y_3^{(n)}} \sim \left(\frac{x}{x-1}\right)^n n^{\alpha+\beta+1-2\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\cdot \tag{6}$$

Pour des valeurs très grandes négatives de n on trouve pour $\frac{y_4^{(n)}}{y_1^{(n)}}$, à une constante près, cette même valeur asymptotique. Cela posé on voit que trois cas différents se présentent:

$$\Re(\gamma) > \Re\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right) \quad K_1 \text{ tend vers } \frac{y'_2}{y_2} \text{ et } K_2 \text{ tend vers } \frac{y_4}{y'_4}$$

$$\Re(\gamma) < \Re\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right) \quad K_1 \text{ tend vers } \frac{y'_3}{y_3} \text{ et } K_2 \text{ tend vers } \frac{y_1}{y'_1}$$

$$\Re(\gamma) = \Re\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right) \quad \text{toutes les deux fractions continues divergent.}$$

Les séries $y_1, \ldots y_4$ si bien que leurs derivées ne sont convergentes que aux environs des points singuliers o et ɪ. Or il est facile d'en déduire d'autres qui représentent les valeurs des fractions continues dans toute leur domaine de convergence. Il suffit d'appliquer à celles-ci la transformation d'Euler bien connue

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

les séries ainsi transformées convergent dans l'un ou l'autre des deux demi-plans limités de la droite $\Re(x) = \frac{1}{2}\cdot$

A cette même droite, au contraire, les séries ne convergent pas toujours, car le module de la $4^{\text{ième}}$ paramètre de la série hypergéometrique est ici 1. La condition de convergence est d'après un criterium assez connu de WEIERSTRASS $\Re(\alpha-\beta) < 1$. Or les séries étant symetriques en α et β, on voit qu'on peut en effet dans tous les cas représenter les valeurs des fractions continues dans toute leur domaine de convergence par les transformés de y_1, y_2, y_3 et y_4. Il y a seulement exception si $\Re(x) = \frac{1}{2}$ et $\Re(\alpha-\beta) = 1$. Dans ce cas toutes les 8 séries transformées divergeront. Nous pouvons alors nous servir de y_1 et y_3, si $|x| < 1$; au contraire, si $|x| > 1$, il faut se servir de séries procédant suivant les puissances entières et décroissantes de x.

Etudions maintenant les différents cas d'exception se présentant lorsque α, γ ou $\gamma-\alpha-\beta$ sont des nombres entiers, ou lorsqu'un ou plusieurs des paramètres croissent vers l'infini.

1) Si α (ou β) est un nombre entier négatif, $y_2 = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sera un polynôme entier en x du $-\alpha^{\text{ième}}$ degré. La dérivée du $(1-\alpha)^{\text{ième}}$ ordre de y_2 sera par conséquent identiquement zéro. K_1 tendra alors pour toutes les valeurs de x vers

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}\cdot\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}.$$

2) Si γ est un nombre entier positif, et que ni α ni β ne soient aucun des nombres $1, 2, 3, \ldots \gamma-1$, on aura aux environs de zéro au lieu de y_1 et y_2 les deux intégrales particulières[1]

$$y_1 = F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) + F(\alpha, \beta, \gamma, x) \log x$$
$$y_2 = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

$F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est ici une fonction ayant une certaine ressemblance avec $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Nous savons que la fraction continue tend vers l'intégrale non-logarithmique

---

[1] FROBENIUS: Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen Crelles Journal, Vol. 76, p. 214 f.

(Chap. II, § 14), on verra donc que, pour $\Re(x) < \frac{1}{2}$, K_1 tend vers $\frac{y'_2}{y_2}$, quand même γ est un nombre entier positif.

3) Si γ est nul ou un nombre entier négatif, et que ni α ni β ne soient aucun des nombres $0, -1, -2, \ldots \gamma$, on aura aux environs de zéro les deux intégrales particulières

$$x^{1-\gamma} F_1(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) + x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \log x$$

$$x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

Comme K_1 tendra encore vers l'intégrale non logarithmique, on voit que, pour $\Re(x) < \frac{1}{2}$, K_1 tendra vers $\frac{y'_1}{y_1}$, tandis que, pour toute autre valeur des paramètres, elle tendra vers $\frac{y'_2}{y_2}$.

4) Si $\alpha + \beta - \gamma$ est nul ou un nombre entier positif et que ni α ni β ne soient aucun des nombres $1, 2, 3, \ldots \alpha + \beta - \gamma$, on aura aux environs du point 1, au lieu de y_3 et de y_4 les deux intégrales particulières:

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x)$$

$$F_1(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x) + F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x) \log (1 - x)$$

pour $\Re(x) < \frac{1}{2}$, K_1 tend donc vers $\frac{y'_3}{y_3}$ comme au cas général.

5) Si, au contraire, $\alpha + \beta - \gamma$ est un nombre entier négatif, et que ni α ni β ne soient aucun des nombres $0, -1, -2, \ldots \alpha + \beta - \gamma + 1$, nous aurons au lieu de y_3 et de y_4

$$1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x)$$

$$(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x) + \\ + (1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x) \log (1 - x).$$

Dans ce cas d'exeption K_1 tendra donc, pour $\Re(x) > \frac{1}{2}$ vers $\frac{y'_4}{y_4}$.

6) Passons à l'étude des cas où un ou plusieurs des paramètres tendent vers l'infini, ce qui a lieu pour plusieurs des fonctions les plus appliquées dans l'analyse. Mettons dans l'équation différentielle de Gauss (1) k au lieu de α et $\frac{x}{k}$ au lieu de x et faisons tendre k vers ∞, nous aurons alors l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\beta y=0 \tag{18}$$

avec les deux intégrales particulières

$$y_1=x^{1-\gamma}F\left(k,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ \frac{x}{k}\right)$$

$$y_2=F\left(k,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{x}{k}\right)$$

où ici, et dans la suite, k désigne un nombre infiniment grand. Ces séries sont convergentes dans tout le plan, l'équation différentielle n'ayant que les deux points singuliers 0 et ∞. Donc, il est évident que, dans tout le plan, la fraction continue tend vers la même fonction analytique, car en différentiant y_1 et y_2 n fois on trouve

$$y_1^{(n)}=x^{1-\gamma-n}(-1)^n\frac{\Gamma(\gamma+n-1)}{\Gamma(\gamma-1)}F\left(k,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma-n,\ \frac{x}{k}\right)$$

$$y_2^{(n)}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}F\left(k,\ \beta+n,\ \gamma+n,\ \frac{x}{k}\right)$$

$y_1^{(n)}$ et $y_2^{(n)}$ se comportent donc asymptotiquement comme

$$\frac{x^{1-\gamma}}{\Gamma(\gamma-1)}\Gamma(\gamma+n-1)(-x)^{-n}\ \text{ et }\ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}e^x n^{\beta-\gamma}.$$

Donc

$$\frac{y_2^{(n)}}{y_1^{(n)}}\sim\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\beta)}e^x x^{\gamma-1}\frac{(-x)^n n^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma+n-1)}$$

mais cette limite est *nulle pour toutes les valeurs de* x.

On trouve la fraction continue

$$\frac{\beta x}{\gamma}\frac{F\left(k,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ \frac{x}{k}\right)}{F\left(k,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{x}{k}\right)}=\cfrac{\beta x}{\gamma-x+\cfrac{(\beta+1)x}{\gamma+1-x+\cfrac{(\beta+2)x}{\gamma+2-x+\cfrac{(\beta+3)x}{\ddots}}}} \tag{19}$$

qui tend vers le premier membre pour toutes les valeurs complexes de x, β et γ. Ce n'est que lorsque γ égale zéro ou un nombre entier négatif sans que β soit un des nombres $0,\ -1,\ -2,\ldots\gamma$ qu'il y a exception; car, en ce cas, les séries du premier membre n'ont pas de sens. De même que plus haut on voit facilement que, dans ce cas, la fraction continue tend vers

$$\frac{1-\gamma}{1}\cdot\frac{F\left(k,\,\beta+1-\gamma,\,1-\gamma,\,\frac{x}{k}\right)}{F\left(k,\,\beta+1-\gamma,\,2-\gamma,\,\frac{x}{k}\right)}. \tag{20}$$

Si β aussi tend vers ∞, rien n'est changé. Si, au contraire, α et β restent finis, tandis que γ croît au-delà de toutes limites, on aura, au lieu de (1), l'équation différentielle

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\{(\alpha+\beta+1)x-1\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0. \tag{21}$$

Les points singuliers sont ici 0 et ∞, mais 0 est un point singulier irrégulier. Nous posons donc

$$x=\frac{1}{z},\quad y=z^{\alpha}\,.\,u$$

et trouvons

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(z+1+\alpha-\beta)\frac{du}{dz}+\alpha u=0 \tag{22}$$

mais cette équation différentielle est de la même forme que (18).

Système d'équations hypergéometriques aux différences finies.

§ 22. On peut donner une forme plus élégante aux fractions continues (4) et (5) en intercalant entre toutes les deux réduites une réduite nouvelle. Les fractions continues ainsi obtenues se laissent cependant dériver directement en partant du système d'équations aux différences suivants

$$\begin{gathered} xU(n+1)+x(\beta-\gamma)V(n+1)+(\beta+n)U(n)=0 \\ (x-1)V(n+1)-\frac{1}{x}U(n)+(\alpha+n)V(n)=0. \end{gathered} \tag{23}$$

D'après les formules (26) et (29) Chap. II on en trouve

$$K_3=\cfrac{\alpha x}{1-\cfrac{\beta(x-1)}{\gamma-\beta-\cfrac{(\alpha+1)x}{1-\cfrac{(\beta+1)(x-1)}{\gamma-\beta-\cfrac{(\alpha+2)x}{1-\cfrac{(\beta+2)(x-1)}{\gamma-\beta-\cdots}}}}}} \tag{24}$$

$$K_4 = \frac{1}{x(x-1)} \cdot \cfrac{\beta(x-1)}{\gamma - \beta - \cfrac{(\alpha+1)x}{1 - \cfrac{(\beta+1)(x-1)}{\gamma-\beta-\cdots}}} \tag{25}$$

D'autre part, il est facile d'intégrer (23) par des séries hypergéométriques, car en éliminant entre ces équations V et U respectivement on trouve

$$\begin{gathered} x(1-x)\,U(n+2) + \{n(1-2x) + \gamma + 1 - (\alpha+\beta+2)x\}\,U(n+1) - (\alpha+n+1)(\beta+n)\,U(n) = 0 \\ x(1-x)\,V(n+2) + \{n(1-2x) + \gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\,V(n+1) - (\alpha+n)(\beta+n)\,V(n) = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Mais ces équations s'obtiennent aussi en différentiant n fois les 2 équations différentielles hypergéométriques

$$\begin{gathered} x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2} + \{\gamma + 1 - (\alpha+\beta+2)x\}\frac{dz}{dx} - (\alpha+1)\beta z = 0 \\ x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \end{gathered} \tag{27}$$

et en posant

$$U(n) = \frac{d^nz}{dx^n}, \qquad V(n) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

alors le système suivant d'intégrales satisfait à (23)

$$U_1(n) = c_1\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n+1)}F(\alpha+n+1, \beta+n, \gamma+n+1, x)$$

$$V_1(n) = c_1\frac{1}{x(\gamma-\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x)$$

$$U_2(n) = c_2 x(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+n+1)}F(\alpha+n+1, \beta+n, \alpha+\beta-\gamma+n+1, 1-x)$$

$$V_2(n) = c_2(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+n+1)}F(\alpha+n, \beta+n, \alpha+\beta-\gamma+n+1, 1-x).$$

Les valeurs de (24) et de (25) dépendent donc de la même valeur asymptotique que (4) et (5). Il faut noter spécialement que pour $\Re(x) < \frac{1}{2}$ on a

$$K_3 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma} \cdot \frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma} \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma+1, \frac{x}{x-1}\right)}{F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)} \tag{28}$$

$$K_4 = \frac{\beta}{x(\gamma-\beta)} \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)} =$$

$$= \frac{\beta}{\gamma-\beta} \cdot \frac{1}{x(1-x)} \cdot \frac{F\left(\gamma-\alpha, \beta+1, \gamma+1, \frac{x}{x-1}\right)}{F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma+1, \frac{x}{x-1}\right)}. \tag{29}$$

Pour $\Re(x) > \frac{1}{2}$ on a, au contraire,

$$K_3 = \alpha x \frac{F(\alpha+1, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)}{F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)} = \alpha x \frac{F\left(\beta-\gamma, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{x-1}{x}\right)}{F\left(1+\beta-\gamma, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{x-1}{x}\right)} \tag{30}$$

$$K_4 = \frac{\beta}{(\gamma-\alpha-\beta-1)x} \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta-\gamma+2, 1-x)}{F(\alpha+1, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)} =$$

$$= \frac{\beta}{\gamma-\alpha-\beta-1} \frac{F\left(\beta-\gamma+1, \beta+1, \alpha+\beta-\gamma+2, 1-\frac{1}{x}\right)}{F\left(\beta-\gamma, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-\frac{1}{x}\right)} \tag{31}$$

Système d'équations différentielles hypergéométriques.

§ **23.** Nous avons vu qu'on peut intégrer, par des fractions continues, encore des systèmes d'équations différentielles; traitons à titre d'exemple

$$\begin{aligned} &(\gamma-\alpha-\beta)x\frac{dy}{dx} + (\gamma-\alpha)(1-x)\frac{dz}{dx} - \alpha\beta y = 0 \\ &(1-x)\frac{dz}{dx} + (\gamma-\alpha-\beta)z + (\beta-\gamma)y = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

On voit facilement que tant z que y satisfont aux équations différentielles de $2^{\text{ième}}$ ordre de la forme (1). On trouve alors le système d'intégrales suivant

$$z_1 = c_1 F(\alpha, \beta, \gamma, x) \qquad y_1 = c_1 \frac{\gamma-\alpha}{\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma+1, x)$$

$$z_2 = c_2 \frac{\beta-\gamma}{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) \quad y_2 = c_2 F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma, 1-x). \tag{33}$$

Ceci se laisse d'ailleurs facilement vérifier; car en substituant (33) dans (32) on est conduit à des relations bien connues de GAUSS entre des fonctions contiguës. En différentiant (32) n fois on trouve

$$(\alpha+\beta-\gamma+n)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + (\alpha-\gamma)(1-x)\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + (n+\alpha)(n+\beta)\frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

$$(1-x)\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} - (\alpha+\beta-\gamma+n)\frac{d^n z}{dx^n} + (\beta-\gamma)\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

On trouve alors par (17) la fraction continue

$$-\cfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma-\beta-\cfrac{\alpha\beta}{\gamma-\alpha-\cfrac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma+1)x_1}{\gamma-\beta-\cfrac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma-\alpha-\cfrac{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)x_1}{\gamma-\beta-\cdots}}}}} \tag{34}$$

où $x_1 = \frac{x}{x-1}$.

La convergence dépend ici de la même valeur asymptotique que nous avons étudiée plus haut (§ 21). En considérant cette fraction continue comme fonction de x_1 on voit facilement que, dans un cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine, elle tend vers:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{F(\alpha, \gamma-\beta+1, \gamma+1, x_1)}{F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x_1)} \tag{35}$$

mais hors de ce cercle vers:

$$\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\beta-\gamma}\,\frac{F\left(\alpha, \alpha-\gamma, \alpha+\beta-\gamma, \frac{1}{x_1}\right)}{F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{1}{x_1}\right)}. \tag{36}$$

La fraction continue de Gauss.

§ 24. Dans son mémoire classique sur la fonction hypergéométrique[1] GAUSS a représenté le rapport entre deux séries hypergéométriques contiguës par une fraction continue. Mais GAUSS se borne à déduire formellement la fraction continue sans entrer dans les questions de convergence. RIEMANN, THOMÉ, VAN VLECK et d'autres encore ont, plus tard, traité cette question. RIEMANN[2] n'a pu achever sa démonstration qui n'a paru qu'après sa mort et dans une rédaction due à M. SCHWARTZ. RIEMANN y démontre que la fraction continue est convergente pour toutes valeurs de x, excepté pour des valeurs réelles positives non inférieures à 1, et qu'elle tend, en effet, vers la fonction indiquée par GAUSS. Mais RIEMANN suppose que tous les paramètres soient finis; nous allons encore étudier le cas où α ou β tend vers ∞, et nous verrons que, dans ce cas, la fraction continue converge dans tout le plan. Nous partons du système d'équations aux différences finies:

$$\begin{aligned} U(n) - V(n) + \frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)} x\, U(n+1) &= 0 \\ V(n) - U(n+1) + \frac{(\beta+n+1)(\gamma-\alpha+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)} x\, V(n+1) &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

d'où, par (26) Chap. II, on dérive la fraction continue de GAUSS:

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \cfrac{\gamma}{\gamma - \cfrac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma+1 - \cfrac{(\beta+1)(\gamma-\alpha+1)x}{\gamma+2 - \cfrac{(\alpha+1)(\gamma-\beta+1)x}{\gamma+3 - \cfrac{(\beta+2)(\gamma-\alpha+2)x}{\ddots}}}}}. \tag{38}$$

Pour examiner la convergence de cette fraction continue nous éliminons V entre les équations (37), et nous trouvons l'équation aux différences finies:

$$\begin{aligned} &x^2 \frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\gamma-\alpha+n+1)(\gamma-\beta+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)^2(\gamma+2n+3)} U(n+2) + \\ &+ \left\{ \frac{(\beta+n+1)(\gamma-\alpha+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)} x + \frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)} x - 1 \right\} U(n+1) + U(n) = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

[1] GAUSS: Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \cdots$ Werke III, pag. 125.

[2] RIEMANN: Werke XXIII, pag. 424. Zweite Auflage, 1892.

En éliminant U, au contraire, on obtient une équation en $V(n)$ toute semblable. L'équation caractéristique de (39) est maintenant:

$$x^2 z^2 + 8(x-2)z + 16 = 0 \tag{40}$$

ayant les racines

$$z = \left(\frac{2}{1 \mp \sqrt{1-x}}\right)^2;$$

les deux intégrales particulières $U_1(n)$ et $U_2(n)$ de (39) se comportent alors asymptotiquement respectivement comme

$$c_1 n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1-\sqrt{1-x}}\right)^{2n} \text{ et } c_2 n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n}.$$

Si x est réel positif et non inférieur à 1, les deux racines de (40) ont le même module: la fraction continue est divergente. Mais pour toute autre valeur de x la fraction continue converge, car $|1 + \sqrt{1-x}| > |1 - \sqrt{1-x}|$, si par $\sqrt{1-x}$ nous désignons la valeur de la racine carrée de laquelle la partie réelle est positive. Si, au contraire, on pose, en (39), $\alpha = k$ et, si l'on met $\frac{x}{k}$ au lieu de x en faisant k tendre vers ∞, on aura l'équation:

$$x^2 \frac{(\beta + n + 1)(\gamma - \beta + n + 1)}{(\gamma + 2n + 1)(\gamma + 2n + 2)^2(\gamma + 2n + 3)} U(n+2) +$$

$$+ \left\{ \frac{\beta+n+1}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)} x - \frac{\gamma-\beta+n}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)} x + 1 \right\} U(n+1) - U(n) = 0. \tag{39 bis}$$

Désignons maintenant par β_1 et β_2 deux nombres indépendants de n, sans d'ailleurs les déterminer, il y aura alors deux intégrales particulières $U_1(n)$ et $U_2(n)$ de (39 bis) se comportant asymptotiquement comme

$$c_1 n^{-\beta_1 - 1} \text{ et } c_2 \Gamma^2(\gamma + 2n + 1) \left(\frac{2i}{x}\right)^{2n} n^{-\beta_2 - 1}.$$

On voit que *pour toutes les valeurs de x*

$$\lim \frac{U_1(n)}{U_2(n)} = 0.$$

La fraction continue

$$\frac{F\left(k,\beta+1,\gamma+1,\frac{x}{k}\right)}{F\left(k,\beta,\gamma,\frac{x}{k}\right)}=\cfrac{\gamma}{\gamma-\cfrac{(\gamma-\beta)x}{\gamma+1+\cfrac{(\beta+1)x}{\gamma+2-\cfrac{(\gamma-\beta+1)x}{\gamma+3+\cfrac{(\beta+2)x}{\gamma+4-\cdots}}}}} \tag{41}$$

est donc *convergente dans tout le plan de x.* Il en est ainsi lors même que β tendrait aussi vers ∞.

Les fonctions sphériques.

§ 25. On sait que l'équation aux différences:

$$(n+2)\,U(n+2)-(2n+3)x\,U(n+1)+(n+1)\,U(n)=0 \tag{42}$$

s'intègre complètement par les fonctions sphériques de la 1ière et de la 2ième espèce; on a

$$U_1(n)=P^{(n)}(x) \qquad U_2(n)=Q^{(n)}(x).$$

A l'aide de (19) et de (20), chap. II, on obtient alors les deux fractions continues

$$\frac{P^{(r)}(x)\,Q^{(r+n)}(x)-Q^{(r)}(x)\,P^{(r+n)}(x)}{P^{(r-1)}(x)\,Q^{(r+n)}(x)-Q^{(r-1)}(x)\,P^{(r+n)}(x)}=$$

$$=\cfrac{r}{(2r+1)x-\cfrac{(r+1)^2}{(2r+3)x-\cfrac{(r+2)^2}{(2r+5)x-\cdots \cfrac{(r+n-1)^2}{(2r+2n-1)x}}}} \tag{43}$$

$$\frac{P^{(r-1)}(x)\,Q^{(r-n)}(x)-Q^{(r-1)}(x)\,P^{(r-n)}(x)}{P^{(r)}(x)\,Q^{(r-n)}(x)-Q^{(r)}(x)\,P^{(r-n)}(x)}=$$

$$=\cfrac{r}{(2r-1)x-\cfrac{(r-1)^2}{(2r-3)x-\cfrac{(r-2)^2}{(2r-5)x-\cdots \cfrac{(r-n+2)^2}{(2r-2n+3)x}}}}\,. \tag{44}$$

Soit $\xi=x-\sqrt{x^2-1}$ où nous choisissons le signe de la racine carrée de sorte que $\sqrt{x^2-1}$ ait le même signe que la partie réelle de x; alors $|\xi|<1$ pour toutes valeurs complexes de x, et si x est réel et $|x| > 1$; si, au contraire, x est réel et compris entre $+1$ et -1, alors $|\xi| = 1$. $P^{(n)}(x)$ et $Q^{(n)}(x)$ peuvent se représenter par les séries hypergéométriques:

$$P^{(n)}(x) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)} \xi^{-n} F\left(\frac{1}{2}, \ -n, \ \frac{1}{2} - n, \ \xi^2\right)$$

$$Q^{(n)} x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \xi^{n+1} F\left(\frac{1}{2}, \ n+1, \ n + \frac{3}{2}, \ \xi^2\right). \quad (45)$$

En faisant tendre ici n vers ∞, on verra que, si $|\xi| < 1$, $P^{(n)}(x)$ et $Q^{(n)}(x)$ se comportent asymptotiquement comme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xi^{-n} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \sqrt{\frac{\pi}{n}} \xi^{n+1} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}},$$

en faisant tendre n vers l'infini dans (43) et (44), la première tendra vers:

$$\frac{Q^{(r)}(x)}{Q^{(r-1)}(x)}$$

la dernière vers

$$\frac{P^{(r-1)}(x)}{P^{(r)}(x)}$$

pour toutes les valeurs de x, excepté pour des valeurs réelles comprises entre $+1$ et -1. Pour ces dernières on a asymptotiquement[1]

$$Q^{(n)}(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}} \cos\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$P^{(n)}(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\theta}} \sin\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right\}$$

en ce cas, les deux fractions continues sont donc divergentes.

Intégrons ensuite par fraction continue l'équation différentielle de Legendre:

$$(1 - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0. \quad (46)$$

[1] Darboux: »Approximation des fonctions de grands nombres». Journal de Mathématiques sér. 3, tom. IV, 1878, pag. 21 s. s.

En différentiant r fois on trouve:

$$(1-x^2)\frac{d^{r+2}y}{dx^{r+2}} - 2x(r+1)\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} + (n-r)(n+r+1)\frac{d^r y}{dx^r} = 0$$

d'où l'on obtient, par (10), chap. II:

$$D_x \log P^{(n)}(x) = \cfrac{n(n+1)x^{-1}}{2.1 - \cfrac{(x^{-2}-1)(n-1)(n+2)}{2.2 - \cfrac{(x^{-2}-1)(n-2)(n+3)}{2.3 - \cfrac{(x^{-2}-1)(n-3)(n+4)}{2.4 \cdots}}}} \qquad \Re(x) > 0 \tag{47}$$

qui est convergente dans tout le plan excepté sur l'axe des nombres imaginaires; les points singuliers sont $+1$ et -1, et l'équation déterminante pour ces deux points est $\varrho^2 = 0$. Aux environs du point $+1$ on trouve une intégrale particulière de la forme $y_1 = F\left(-n,\ 1+n,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right) = P^{(n)}(x)$ et une autre qui est logarithmique. Pour $\Re(x) > 0$ la fraction continue tend donc vers $\frac{D_x P^{(n)}(x)}{P^{(n)}(x)}$. Si x change de signe, il en est de même de la fraction continue; pour $\Re(x) < 0$ (47) tendra alors vers $\frac{D_x P^{(n)}(-x)}{P^{(n)}(-x)}$. Si n est un nombre entier, ces deux fonctions coïncident, car $P^{(n)}(-x) = (-1)^n P^{(n)}(x)$, mais, en ce cas, la fraction continue est finie.

§ 26. *La fraction continue périodique.* En intégrant par fraction continue l'équation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

on aura

$$x \pm \sqrt{x^2-1} = 2x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

La $n^{\text{ième}}$ réduite est ici

$$\frac{T_n(x)}{N_n(x)} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n}.$$

En posant $x = \cos V$ on aura

$$\frac{T_n(x)}{N_n(x)} = \frac{e^{i(n+1)V} - e^{-i(n+1)V}}{e^{inV} - e^{-inV}} = \frac{\sin (n+1) V}{\sin n V}.$$

Si V est réel, e^{-inV} oscillera; la fraction continue est, par conséquent, divergente, si x est réel et situé entre $+1$ et -1. Si, au contraire, V est de la forme $V = V_1 + iV_2$, la fraction continue est convergente, et elle tend vers e^{iV} ou vers e^{-iV} suivant que V_2 est négatif ou positif. On trouve donc l'équation curieuse:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin (n+1) V}{\sin n V} = \cos V \pm i \sin V$$

pourvu que V ne soit pas un nombre réel. Le numérateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sin (n+1) V}{\sin V}$$

est un polynôme entier de $n^{\text{ième}}$ degré en x ayant plusieurs propriétés interessantes. On voit ainsi que les zéros de $T_n(x)$ sont

$$x = \cos \frac{\pi r}{n+1} \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

La fonction génératrice de $T_n(x)$ est:

$$\frac{1}{1 - 2x\alpha + \alpha^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} T_n(x)\alpha^n.$$

Remarquons encore que les réduites ont une sorte de théorème d'addition; car en posant:

$$F(n) = \frac{\sin (n+1) V}{\sin n V}$$

$F(n)$ satisfait à l'équation aux différences:

$$F(n+1) = 2x - \frac{1}{F(n)}.$$

De plus on a:

$$F(-n)F(n-1) = 1.$$

On trouvera alors facilement:

$$F(n+m) = \frac{F(n)F(m) - 1}{F(n) + F(m) - 2\cos V}$$

qui se réduit encore à:

$$F(n+m) = F(n-1)\frac{1-F(n)F(m)}{1-F(n-1)F(m)}$$

$$F(n-m) = F(n-1)\frac{F(m-1)-F(n)}{F(m-1)-F(n-1)}.$$

§ 27. Pour étudier la convergence de la fraction continue

$$\frac{1}{2}\frac{U(n+1)}{U(n)} = -\cfrac{n+1}{2x-\cfrac{n+2}{x-\cfrac{n+3}{2x-\cfrac{n+4}{x-\cfrac{n+5}{2x-\cdots}}}}} \tag{48}$$

il faut considérer l'équation aux différences:

$$U(n+2) + 2xU(n+1) + 2(n+1)U(n) = 0$$

et y appliquer la substitution $U(n) = \sqrt{n!}\, U^{(1)}(n)$ de sorte que l'équation sera:

$$\sqrt{(n+1)(n+2)}\, U^{(1)}(n+2) + 2x\sqrt{n+1}\, U^{(1)}(n+1) + 2(n+1)U^{(1)}(n) = 0.$$

L'équation caractéristique est $z^2 + 2 = 0$; mais les coefficients ne sont pas des polynômes en n. Pour tourner cette difficulté nous supprimons dans (48) toutes les deux réduites, et nous aurons alors

$$\frac{1}{2}\frac{U(n+2)}{U(n)} = \cfrac{(n+1)(n+2)}{2x^2-2n-5-\cfrac{(n+3)(n+4)}{2x^2-2n-9-\cfrac{(n+5)(n+6)}{2x^2-2n-13-\cdots}}} \tag{49}$$

avec l'équation aux différences:

$$U(n+4) + 2(2n+5-2x^2)U(n+2) + 4(n+1)(n+2)U(n) = 0.$$

L'équation caractéristique est ici:

$$z^2 + 4z + 4 = 0$$

et les coefficients sont des polynômes.

CHAPITRE IV.

Différences réciproques.

Représentations par des déterminants.

§ 28. Abstraction faite des propriétés purement formelles, le caractère d'une fraction continue change complètement avec la manière dont la variable entre dans les numérateurs et les dénominateurs partiels. Il a été malheureux pour le développement de la théorie des fractions continues que, dans les recherches antérieures, on ait varié entre différents types, une forme canonique déterminée ayant fait défaut. Aussi est-ce un des résultats les plus intéressants des recherches de M. THIELE[1] que la démonstration de l'existence des types de fractions continues entièrement analogues à la formule de TAYLOR et à la formule générale d'interpolation de NEWTON. Pour démontrer cela M. THIELE introduit »les différences réciproques», fonctions qui jouent ici le même rôle que, dans le calcul des différences ordinaires, les différences divisées de NEWTON.

Soit $\varphi(x)$ une fonction connue par les valeurs $\varphi_0\,\varphi_1\,\ldots\,\varphi_n$ qu'elle prend pour des valeurs $x_0\,x_1\,\ldots\,x_n$ de la variable x; la différence réciproque du $n^{\text{ième}}$ ordre est alors une fonction des arguments $x_0\,x_1\,\ldots\,x_n$; je désigne celle-là par $\varrho^n(x_0\,x_1\,\ldots\,x_n)$ ou par $\varrho^n_x\varphi(x)$ ou, s'il ne peut y avoir d'ambiguité, par ϱ^n simplement. Le cas limite où tous les arguments tendent vers la même valeur est d'un intérêt tout particulier. La différence réciproque du $n^{\text{ième}}$ ordre deviendra alors le »coefficient différentiel réciproque» du $n^{\text{ième}}$ ordre. Je désigne celui-ci par $r^n_x[\varphi(x)]$ ou simplement par r^n. M. THIELE définit la différence réciproque du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre $\varrho^{n+1}(x_0\,x_1\,\ldots\,x_{n+1})$ par la relation de récurrence

$$\varrho^{n+1}(x_0\,x_1\,\ldots\,x_{n+1}) = \frac{x_{n+1}-x_n}{\varrho^n(x_0\,x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,x_{n+1})-\varrho^n(x_0\,x_1\,\ldots\,x_n)} + \varrho^{n-1}(x_0\,x_1\,\ldots\,x_{n-1}) \qquad (1)$$

où

$$\varrho^0(x_0) = \varphi_0 \quad \varrho^0(x_0\,x_1) = \frac{x_1-x_0}{\varphi_1-\varphi_0}.$$

Pour le cas limite où tous les arguments tendent vers la même valeur, la relation de récurrence prend la forme

$$r^{n+1}_x\varphi(x) = (n+1)\,r_x[r^n_x\varphi(x)] + r^{n-1}_x\varphi(x). \qquad (2)$$

---

[1] T. N. THIELE: Différences réciproques. Bulletin de l'Acad. royale des Sciences et des Lettres de Danemark 1906. Pag. 153—171.

Supposons donné un tableau sur la fonction $\varphi(x)$ et les différences réciproques de celle-ci de manière que les valeurs de fonction $\varphi_0 \varphi_1 \ldots \varphi_n$ correspondent aux arguments arbitraires $x_0 x_1 \ldots x_n$. Si l'on y interpole par des différences réciproques, on trouve, d'après M. THIELE, en vertu de l'équation de définition (1) que la formule générale d'interpolation est

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \cfrac{x - x_0}{\varrho^1(x_0 x_1) + \cfrac{x - x_1}{\varrho^2(x_0 x_1 x_2) - \varphi_0 + \cfrac{x - x_2}{\varrho^3(x_0 x_1 x_2 x_3) - \varrho^1(x_0 x_1) + \cfrac{x - x_3}{\varrho^4(x_0 \ldots x_4) - \varrho^2(x_0 x_1 x_2) + \cdots}}}} \tag{3}$$

Nous indiquons par N_n et T_n les dénominateurs et les numérateurs des réduites et posons

$$\begin{aligned} N_{2n} &= n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \cdots + n_{n-1} x^{n-1} \\ N_{2n+1} &= \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \cdots + \nu_n x^n \\ T_{2n} &= t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \cdots + t_n x^n \\ T_{2n+1} &= \tau_0 + \tau_1 x + \tau_2 x^2 + \cdots + \tau_n x^n \end{aligned} \tag{4}$$

Les coefficients de ceux-ci sont des fonctions assez compliquées des différences réciproques, mais il suffit ici de connaître les coefficients de la puissance la plus élevée de x. On voit immédiatement que ceux-ci sont

$$\begin{aligned} n_{n-1} &= \varrho^{2n-1}(x_0 x_1 \ldots x_{2n-1}) & \nu_n &= 1 \\ t_n &= 1 & \tau_n &= \varrho^{2n}(x_0 x_1 \ldots x_{2n}) \end{aligned} \tag{5}$$

La fraction continue (3) montre que la $n^{\text{ième}}$ réduite de celle-ci et $\varphi(x)$ coïncident pour $x = x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$. On en obtient une série d'équations linéaires d'un nombre justement suffisant pour la détermination des coefficients des réduites. On trouve ainsi pour les réduites d'ordre pair

$$\varphi_0 = \frac{T_{2n}(x_0)}{N_{2n}(x_0)} \quad \cdots\cdots \quad \varphi_{2n-1} = \frac{T_{2n}(x_{2n-1})}{N_{2n}(x_{2n-1})} \tag{6}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{gathered} n_0 \varphi_0 + n_1 x_0 \varphi_0 + \cdots + n_{n-1} x_0^{n-1} \varphi_0 - t_0 - t_1 x_0 - \cdots - t_n x_0^n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_0 \varphi_{2n-1} + n_1 x_{2n-1} \varphi_{2n-1} + \cdots + n_{n-1} x_{2n-1}^{n-1} \varphi_{2n-1} - t_0 - t_1 x_{2n-1} - \cdots - t_n x_{2n-1}^n = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

En éliminant maintenant $t_0, t_1, \ldots t_n$ on trouve N_{2n} représenté par les déterminants suivants:

$$N_{2n} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & 0 & x^2 & \ldots & x^{n-1} & 0 \\ 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & x_0^2 & x_0^2\varphi_0 & \ldots & x_0^{n-1}\varphi_0 & x_0^n \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & x_1^2 & x_1^2\varphi_1 & \ldots & x_1^{n-1}\varphi_1 & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\varphi_{2n-1} & x_{2n-1}^2 & x_{2n-1}^2\varphi_{2n-1} & \ldots & x_{2n-1}^{n-1}\varphi_{2n-1} & x_{2n-1}^n \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^{n-1}\varphi_0 \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^{n-1}\varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\varphi_{2n-1} & \ldots & x_{2n-1}^{n-1} & x_{2n-1}^{n-1}\varphi_{2n-1} \end{vmatrix} \tag{8}$$

en éliminant, au contraire, $n_0, n_1, n_2, \ldots$ on trouve pour T_{2n}

$$T_{2n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 & x^2 & \ldots & 0 & x^n \\ 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1}\varphi_0 & x_0^n \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1}\varphi_1 & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\varphi_{2n-1} & x_{2n-1}^2 & \ldots & x_{2n-1}^{n-1}\varphi_{2n-1} & x_{2n-1}^n \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \ldots & x_0^{n-1}\varphi_0 \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & \ldots & x_1^{n-1}\varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\varphi_{2n-1} & \ldots & x_{2n-1}^{n-1}\varphi_{2n-1} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Pour la détermination des réduites à indices impairs nous avons les équations

$$\varphi_0 = \frac{T_{2n+1}(x_0)}{N_{2n+1}(x_0)}, \quad \ldots \quad \varphi_{2n} = \frac{T_{2n+1}(x_{2n})}{N_{2n+1}(x_{2n})} \tag{6 bis}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\nu_0\varphi_0 + \nu_1 x_0\varphi_0 + \nu_2 x_0^2\varphi_0 + \cdots + \nu_n x_0^n\varphi_0 - \tau_0 - \tau_1 x_0 - \cdots - \tau_n x_0^n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\nu_0\varphi_{2n} + \nu_1 x_{2n}\varphi_{2n} + \nu_2 x_{2n}^2\varphi_{2n} + \cdots + \nu_n x_{2n}^n\varphi_{2n} - \tau_0 - \tau_1 x_{2n} - \cdots - \tau_n x_{2n}^n = 0 \end{aligned} \tag{7 bis}$$

En éliminant on trouve pour N_{2n+1} et T_{2n+1}

$$N_{2n+1} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & 0 & \dots & 0 & x^n \\ 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^n\varphi_0 \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^n\varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\varphi_{2n} & x_{2n}^2 & \dots & x_{2n}^n & x_{2n}^n\varphi_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \dots & x_0^{n-1}\varphi_0 & x_0^n \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & \dots & x_1^{n-1}\varphi_1 & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\varphi_{2n} & \dots & x_{2n}^{n-1}\varphi_{2n} & x_{2n}^n \end{vmatrix} \quad (8\text{ bis})$$

$$T_{2n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 & \dots & x^n & 0 \\ 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \dots & x_0^n & x_0^n\varphi_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\varphi_{2n} & \dots & x_{2n}^n\varphi_{2n} & x_{2n}^n\varphi_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\varphi_{2n} & \dots & x_{2n}^n \end{vmatrix} \quad (9\text{ bis})$$

Par (8) et (9 bis) on trouve immédiatement les différences réciproques exprimées par le rapport entre deux déterminants, car d'après (5) celles-ci sont justement les coefficients des puissances les plus élevées de x dans N_{2n} et T_{2n+1}. En introduisant pour un déterminant tel que le dénominateur de (9 bis) l'abréviation $|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^n|$ on trouve

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = \frac{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n\varphi_i|}{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n|} \quad (10)$$

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)] = \frac{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^n, x_i^{n+1}|}{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^n, x_i^n\varphi_i|} \quad (11)$$

d'où on voit que quatre types différents de déterminants se présentent dans les différences réciproques.

On peut abaisser le degré du déterminant numérateur se N_n et T_n par une unité; considérons, par exemple, N_{2n}; de la $2n^{\text{ième}}$ colonne, on soustrait la $(2n-2)^{\text{ième}}$ colonne multipliée par x; de la $(2n-2)^{\text{ième}}$ colonne, on soustrait la $(2n-4)^{\text{ième}}$ colonne multipliée par x en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à la $2^{\text{ième}}$ colonne, qu'on ne change pas. On trouvera alors

$$N_{2n} = \frac{|1, (x-x_i)\varphi_i, x_i, x_i(x-x_i)\varphi_i, x_i^2, \dots x_i^{n-2}(x-x_i)\varphi_i, x_i^{n-1}, x_i^n|}{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i|} \quad (12)$$

$$N_{2n+1} = \frac{|1, (x-x_i)\varphi_i, x_i, x_i(x-x_i)\varphi_i, x_i^2, \dots x_i^{n-1}(x-x_i)\varphi_i, x_i^n|}{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^n|} \quad (12\text{ bis})$$

$$T_{2n} = \frac{\left| 1, \frac{\varphi_i}{x-x_i}, x_i, x_i\frac{\varphi_i}{x-x_i}, \ldots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\frac{\varphi_i}{x-x_i} \right|}{\left| 1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i \right|}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{2n-1}) \quad (13)$$

$$T_{2n+1} = \frac{\left| 1, \frac{\varphi_i}{x-x_i}, x_i, x_i\frac{\varphi_i}{x-x_i}, \ldots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\frac{\varphi_i}{x-x_i}, x_i^n\frac{\varphi_i}{x-x_i} \right|}{\left| 1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n \right|}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{2n}) \quad (13 \text{ bis})$$

On en voit que les dénominateurs et les numérateurs des réduites se forment facilement des différences réciproques.

On dérive, en effet, N_{2n} *de* ϱ^{2n-1} *en multipliant* φ_i *par* $x-x_i$ *dans le déterminant numérateur de celle-ci, le dénominateur restant invariable. On trouve de même* T_{2n+1} *par* ϱ^{2n} *en multipliant celle-ci par* $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{2n})$ *et en divisant* φ_i *par* $x-x_i$ *partout dans le déterminant numérateur. Le dénominateur de* N_{2n+1} *est le dénominateur de* ϱ^{2n}, *tandis qu'on en forme le numérateur en multipliant* φ_i *par* $x-x_i$. *Le dénominateur de* T_{2n} *est le dénominateur de* ϱ^{2n-1}, *tandis qu'on en forme le numérateur en divisant* φ_i *par* $x-x_i$ *et en multipliant ensuite tout le déterminant par* $(x-x_0)\ldots(x-x_{2n-1})$.

De chacune des formules suivantes relatives aux différences réciproques on dérive facilement des formules correspondantes pour N_n et T_n.

§ **29.** Les déterminants (10) et (11) sont justement la forme sous laquelle M. Thiele a indiqué les différences réciproques. Mais celles-ci se simplifient en abaissant de n et de $n+1$ unités respectivement le degré des déterminants.

En posant

$$\psi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

on a, on le sait de la théorie des fractions partielles,

$$\sum \frac{x_i^p}{\psi'_n(x_i)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots n-1) \qquad \sum \frac{x_i^n}{\psi'_n(x_i)} = 1 \quad (14)$$

où la sommation est supposée étendue sur toutes les racines de $\psi_n(x) = 0$. En désignant par $\delta^n[\varphi(x)]$ la différence ordinaire divisée du $n^{\text{ième}}$ ordre, on sait que

$$\delta^n[\varphi(x)] = \frac{\varphi_0}{\psi'_n(x_0)} + \frac{\varphi_1}{\psi'_n(x_1)} + \cdots + \frac{\varphi_n}{\psi'_n(x_n)} \quad (15)$$

Considérons maintenant (10) et ajoutons, dans les déterminants numérateurs et dénominateurs la $1^{\text{ière}}$, la $2^{\text{ième}}$ jusqu'à la $2n^{\text{ième}}$ ligne à la dernière après les avoir divisées par $\psi'_{2n}(x_0)$, $\psi'_{2n}(x_1)$, $\ldots$ $\psi'_{2n}(x_{2n})$ respectivement. Ajoutons ensuite à la $2n^{\text{ième}}$ ligne la $1^{\text{ière}}$, la $2^{\text{ième}}$ jusqu'à la $(2n-1)^{\text{ième}}$ ligne après les avoir divisées par $\psi'_{2n-1}(x_0)$, $\psi'_{2n-1}(x_1)$, $\ldots$ $\psi'_{2n-1}(x_{2n-1})$ respectivement et continuons de même jusqu'à ce que nous arrivons à la $1^{\text{ière}}$ ligne qui reste invariable. En réduisant alors, autant que possible, le degré des deux déterminants on trouve

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)]=(-1)^n \begin{vmatrix} \delta^n(\varphi) & \delta^n(x\varphi) & \dots \delta^n(x^n\varphi) \\ \delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{n+1}(x^n\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{2n}(\varphi) & \delta^{2n}(x\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^n\varphi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{n+1}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{n+2}(\varphi) & \delta^{n+2}(x\varphi) & \dots \delta^{n+2}(x^{n-1}\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{2n}(\varphi) & \delta^{2n}(x\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^{n-1}\varphi) \end{vmatrix} \tag{16}$$

$\delta^p(\varphi)$ est ici une fonction des arguments $x_0\, x_1 \dots x_p$. On trouve de même par (11) pour les différences réciproques d'ordre impair

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)]=(-1)^n \begin{vmatrix} \delta^{n+2}(\varphi) & \delta^{n+2}(x\varphi) & \dots \delta^{n+2}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{n+3}(\varphi) & \delta^{n+3}(x\varphi) & \dots \delta^{n+3}(x^{n-1}\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{2n+1}(\varphi) & \delta^{2n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^{n-1}\varphi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{n+1}(x^n\varphi) \\ \delta^{n+2}(\varphi) & \delta^{n+2}(x\varphi) & \dots \delta^{n+2}(x^n\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{2n+1}(\varphi) & \delta^{2n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^n\varphi) \end{vmatrix} \tag{16 bis}$$

(16) et (16 bis) peuvent encore se transformer. Nous nous servons de l'identité

$$\delta^n(x\varphi) = x_n\, \delta^n(\varphi) + \delta^{n-1}(\varphi) \tag{17}$$

qu'on dérive de l'équation

$$\frac{x_i\varphi_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)} - \frac{x_n\varphi_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)} = \frac{\varphi_i}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{n-1})}$$

Considérons maintenant le déterminant numérateur de (16). On multiplie la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne par x_{2n} en y ajoutant la $n^{\text{ième}}$; on multiplie ensuite la $n^{\text{ième}}$ ligne par x_{2n-1} en y ajoutant la $(n-1)^{\text{ième}}$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la première ligne qui reste invariable. On répète ensuite la même opération en recommançant par la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne, mais cette fois on s'arrête à la $2^{\text{ième}}$, et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on s'arrête enfin par la $n^{\text{ième}}$ ligne. En opérant de la même manière sur le déterminant dénominateur on trouve

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = \frac{(-1)^n}{x_{n+1}x_{n+2}\dots x_{2n}} \begin{vmatrix} \delta^n(\varphi) & \delta^n(x\varphi) & \dots \delta^n(x^n\varphi) \\ \delta^{n+1}(x\varphi) & \delta^{n+1}(x^2\varphi) & \dots \delta^{n+1}(x^{n+1}\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{2n}(x^n\varphi) & \delta^{2n}(x^{n+1}\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^{2n}\varphi) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{n+1}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{n+2}(x\varphi) & \delta^{n+2}(x^2\varphi) & \dots \delta^{n+2}(x^n\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{2n}(x^{n-1}\varphi) & \delta^{2n}(x^n\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^{2n-2}\varphi) \end{vmatrix} \tag{18}$$

Au moyen de (16 bis) on trouve de même pour les différences réciproques d'ordre impair

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)] = (-1)^n x_{n+2} x_{n+3} \ldots x_{2n+1} \begin{vmatrix} \delta^{n+2}(\varphi) & \delta^{n+2}(x\varphi) & \ldots \delta^{n+2}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{n+3}(x\varphi) & \delta^{n+3}(x^2\varphi) & \ldots \delta^{n+3}(x^n\varphi) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta^{2n+1}(x^{n-1}\varphi) & \delta^{2n+1}(x^n\varphi) & \ldots \delta^{2n+1}(x^{2n}\varphi) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi) & \ldots \delta^{n+1}(x^n\varphi) \\ \delta^{n+2}(x\varphi) & \delta^{n+2}(x^2\varphi) & \ldots \delta^{n+2}(x^{n+1}\varphi) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta^{2n+1}(x^n\varphi) & \delta^{2n+1}(x^{n+1}\varphi) & \ldots \delta^{2n+1}(x^{2n}\varphi) \end{vmatrix} \tag{18 bis}$$

En appliquant encore l'identité (17) nous pouvons transformer (18) et (18 bis) de manière que les déterminants ainsi obtenus seront orthosymétriques. Pour obtenir ce résultat nous retranchons, par exemple, dans le déterminant numérateur de (18) de chaque ligne celle qui suit, en commençant d'en haut. Nous aurons ainsi un déterminant où les 1ière, 2ième, 3ième ... lignes contiennent les facteurs x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} ... respectivement. Nous divisons par ceux-ci et appliquons la même opération au déterminant ainsi obtenu, en nous arrêtant cette fois par l'avant-dernière ligne; nous continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivons à un déterminant où tous les éléments sont des différences divisées du même ordre. En appliquant les mêmes opérations au déterminant dénominateur nous aurons

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = \begin{vmatrix} \delta^{2n}(\varphi) & \delta^{2n}(x\varphi) & \ldots \delta^{2n}(x^n\varphi) \\ \delta^{2n}(x\varphi) & \delta^{2n}(x^2\varphi) & \ldots \delta^{2n}(x^{n+1}\varphi) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta^{2n}(x^n\varphi) & \delta^{2n}(x^{n+1}\varphi) & \ldots \delta^{2n}(x^{2n}\varphi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta^{2n}(\varphi) & \delta^{2n}(x\varphi) & \ldots \delta^{2n}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{2n}(x\varphi) & \delta^{2n}(x^2\varphi) & \ldots \delta^{2n}(x^n\varphi) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta^{2n}(x^{n-1}\varphi) & \delta^{2n}(x^n\varphi) & \ldots \delta^{2n}(x^{2n-2}\varphi) \end{vmatrix} \tag{19}$$

par (18 bis) on trouve de même

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)] = \begin{vmatrix} \delta^{2n+1}(\varphi) & \delta^{2n+1}(x\varphi) & \ldots \delta^{2n+1}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{2n+1}(x\varphi) & \delta^{2n+1}(x^2\varphi) & \ldots \delta^{2n+1}(x^n\varphi) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta^{2n+1}(x^{n-1}\varphi) & \delta^{2n+1}(x^n\varphi) & \ldots \delta^{2n+1}(x^{2n-2}\varphi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta^{2n+1}(x) & \delta^{2n+1}(x\varphi) & \ldots \delta^{2n+1}(x^n\varphi) \\ \delta^{2n+1}(x\varphi) & \delta^{2n+1}(x^2\varphi) & \ldots \delta^{2n+1}(x^{n+1}\varphi) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta^{2n+1}(x^n\varphi) & \delta^{2n+1}(x^{n+1}\varphi) & \ldots \delta^{2n+1}(x^{2n}\varphi) \end{vmatrix} \tag{19 bis}$$

A l'aide de (19) et de (19 bis) nous pouvons maintenant représenter les différences réciproques comme le rapport entre deux sommes de produits de valeurs de fonction multipliées par certaines fonctions des différences des arguments.

Le déterminant numérateur dans (19), par exemple, s'écrit selon un théorème connu relatif aux déterminants[1]

$$t = \sum \frac{\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n}{\Psi'_{2n}(x_0)\, \Psi'_{2n}(x_1) \dots \Psi'_{2n}(x_n)} \Delta(x_0\, x_1 \dots x_n)^2.$$

$\Delta(x_0\, x_1 \dots x_n)$ indique ici le produit de toutes les différences possibles entre les arguments $x_0\, x_1 \dots x_n$, tandis que $\Psi_{2n}(x)$, comme plus haut, est égal à $(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{2n})$. La sommation est supposée étendue à tous les $\binom{2n+1}{n+1}$ termes qui se forment du terme sous le signe de sommation en substituant à $0, 1, \dots n$ $n+1$ indices arbitraires choisis entre $0, 1, 2, \dots 2n+1$. On en aura de plus

$$t = \sum \frac{\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(x_0-x_{n+1})(x_0-x_{n+2}) \dots (x_0-x_{2n})(x_1-x_{n+1}) \dots (x_1-x_{2n}) \dots (x_n-x_{n+1}) \dots (x_n-x_{2n})} \quad (20)$$

Pour le déterminant dénominateur de (19) on trouve une expression semblable de sorte qu'on a ici

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = \frac{\sum \frac{\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n}{(x_0-x_{n+1}) \dots (x_0-x_{2n})(x_1-x_{n+1}) \dots (x_1-x_{2n}) \dots (x_n-x_{n+1}) \dots (x_n-x_{2n})}}{\sum \frac{\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n (-1)^n}{(x_0-x_n) \dots (x_0-x_{2n})(x_1-x_n) \dots (x_1-x_{2n}) \dots (x_{n-1}-x_n) \dots (x_{n-1}-x_{2n})}} \quad (21)$$

A l'aide du théorème à la fin de § 28, nous en dérivons la formule d'interpolation de CAUCHY[2] des fonctions fractionnaires. On trouvera facilement

$$F(x) = \frac{\sum \frac{\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n (x-x_{n+1})(x-x_{n+2}) \dots (x-x_{2n})}{(x_0-x_{n+1}) \dots (x_0-x_{2n})(x_1-x_{n+1}) \dots (x_1-x_{2n}) \dots (x_n-x_{n+1}) \dots (x_n-x_{2n})}}{\sum \frac{\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_{n-1} (x_0-x)(x_1-x) \dots (x_{n-1}-x)}{(x_0-x_n) \dots (x_0-x_{2n})(x_1-x_n) \dots (x_1-x_{2n}) \dots (x_{n-1}-x_n) \dots (x_{n-1}-x_{2n})}} \quad (22)$$

Pour les différences réciproques nous pouvons dériver de (16) et de (16 bis) encore une forme nouvelle de déterminant qui se distingue surtout par ce qu'il ne contient que des différences divisées de la fonction $\varphi(x)$ elle-même. Dans ces déterminants nous retranchons en effet, de chaque colonne la précédente multipliée par x_0 en commençant par la dernière. Dans le déterminant ainsi obtenu nous retranchons de chaque colonne la précédente multipliée par x_1 en nous

---

[1] BALTZER: Determinanten 1870, pag. 80.
[2] CAUCHY: Analyse algébrique. Note 5.

arrêtant, cependant, cette fois par la $3^{\text{ième}}$ colonne; nous continuons ainsi jusqu'à ce que tous les éléments des déterminants soient des différences divisées de φ, et nous aurons

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = (-1)^n \begin{vmatrix} \delta^n(x_0 x_1 \ldots x_n) & \delta^{n-1}(x_1 x_2 \ldots x_n) & \ldots \delta^0(x_n) \\ \delta^{n+1}(x_0 x_1 \ldots x_{n+1}) & \delta^n(x_1 x_2 \ldots x_{n+1}) & \ldots \delta(x_n x_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{2n}(x_0 x_1 \ldots x_{2n}) & \delta^{2n-1}(x_1 x_2 \ldots x_{2n}) & \ldots \delta^n(x_n x_{n+1} \ldots x_{2n}) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta^{n+1}(x_0 x_1 \ldots x_{n+1}) & \ldots \delta^2(x_{n-1} x_n x_{n+1}) \\ \delta^{n+2}(x_0 x_1 \ldots x_{n+2}) & \ldots \delta^3(x_{n-1} \ldots x_{n+2}) \\ \ldots & \ldots \\ \delta^{2n}(x_0 x_1 \ldots x_{2n}) & \ldots \delta^{n+1}(x_{n-1} \ldots x_{2n}) \end{vmatrix}$$

En changeant l'ordre des colonnes ces déterminants s'écrivent

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = \begin{vmatrix} \delta^0(x_n) & \delta(x_{n-1} x_n) & \ldots \delta^n(x_0 x_1 \ldots x_n) \\ \delta(x_n x_{n+1}) & \delta^2(x_{n-1} \ldots x_{n+1}) & \ldots \delta^{n+1}(x_0 x_1 \ldots x_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^n(x_n \ldots x_{2n}) & \delta^{n+1}(x_{n-1} \ldots x_{2n}) & \ldots \delta^{2n}(x_0 x_1 \ldots x_{2n}) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta^2(x_{n-1} \ldots x_{n+1}) & \delta^3(x_{n-2} \ldots x_{n+1}) & \ldots \delta^{n+1}(x_0 \ldots x_{n+1}) \\ \delta^3(x_{n-1} \ldots x_{n+2}) & \delta^4(x_{n-2} \ldots x_{n+2}) & \ldots \delta^{n+2}(x_0 \ldots x_{n+2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{n+1}(x_{n-1} \ldots x_{2n}) & \delta^{n+2}(x_{n-2} \ldots x_{2n}) & \ldots \delta^{2n}(x_0 \ldots x_{2n}) \end{vmatrix} \tag{23}$$

On trouve de même pour ϱ^{2n+1}

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)] = \begin{vmatrix} \delta^3(x_{n-1} \ldots x_{n+2}) & \delta^4(x_{n-2} \ldots x_{n+2}) & \ldots \delta^{n+2}(x_0 \ldots x_{n+2}) \\ \delta^4(x_{n-1} \ldots x_{n+3}) & \delta^5(x_{n-2} \ldots x_{n+3}) & \ldots \delta^{n+3}(x_0 \ldots x_{n+3}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{n+2}(x_{n-1} \ldots x_{2n+1}) & \delta^{n+3}(x_{n-2} \ldots x_{2n+1}) & \ldots \delta^{2n+1}(x_0 \ldots x_{2n+1}) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta(x_n\, x_{n+1}) & \delta^2(x_{n-1} \ldots x_{n+1}) & \ldots \delta^{n+1}(x_0 \ldots x_{n+1}) \\ \delta^2(x_n \ldots x_{n+2}) & \delta^3(x_{n-1} \ldots x_{n+2}) & \ldots \delta^{n+2}(x_0 \ldots x_{n+2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{n+1}(x_n \ldots x_{2n+1}) & \delta^{n+2}(x_{n-1} \ldots x_{2n+1}) & \ldots \delta^{2n+1}(x_0 \ldots x_{2n+1}) \end{vmatrix} \tag{23 bis}$$

§ **30.** Toutes ces formules s'appliquent à des différences réciproques d'arguments arbitraires y compris les cas où deux ou plusieurs arguments coïncident. Nous allons maintenant étudier spécialement le cas où *tous* les arguments tendent vers la même valeur. Nous désignons par »coefficient différentiel réciproque» la limite de laquelle s'approchent, en ce cas, les différences réciproques. Or, on sait que

$$\lim_{x=x_0=x_1=\cdots=x_n} \delta^n(x_0\, x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}.$$

On trouve donc par (23) et (23 bis)

$$r_x^{2n}\varphi(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & \ldots a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots a_{2n} \end{vmatrix} \tag{24}$$

$$r_x^{2n+1}\varphi(x) = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & \ldots a_{n+2} \\ a_4 & a_5 & \ldots a_{n+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+2} & a_{n+3} & \ldots a_{2n+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \ldots a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots a_{2n+1} \end{vmatrix} \tag{24 bis}$$

où nous avons posé

$$a_r = \frac{1}{r!}\frac{d^r\varphi(x)}{dx^r}.$$

Ces déterminants sont orthosymétriques, et nous verrons tout à l'heure que, pour cette raison, ils possèdent des propriétés qui les rendent spécialement propres à servir d'intermédiaires au calcul des coefficients différentiels réciproques.

Les autres déterminants nous permettent de dériver des formules semblables pour $r^n[\varphi(x)]$. Considérons surtout (18) et (18 bis); par (18) on trouve

$$r^{2n}[\varphi(x)] = \frac{(-1)^n}{x^n}\begin{vmatrix} \frac{1}{n!}D^n\varphi(x) & \frac{1}{n!}D^n[x\varphi(x)] \ldots & \frac{1}{n!}D^n[x^n\varphi(x)] \\ \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x\varphi(x)] & \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x^2\varphi(x)] \ldots & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n)!}D^{2n}[x^n\varphi(x)] & \ldots & \frac{1}{(2n)!}D^{2n}[x^{2n}\varphi(x)] \end{vmatrix} :$$

$$
:\begin{vmatrix}
\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}\varphi(x) & \dots & \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x^{n-1}\varphi(x)] \\
\frac{1}{(n+2)!}D^{n+2}[x\varphi(x)] & \dots & \frac{1}{(n+2)!}D^{n+2}[x^{n}\varphi(x)] \\
\dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{(2n)!}D^{2n}[x^{n-1}\varphi(x)] & \dots & \frac{1}{(2n)!}D^{2n}[x^{2n-2}\varphi(x)]
\end{vmatrix} \quad (25)
$$

Ces déterminants peuvent se transformer en retranchant de chaque colonne la suivante divisée par x. Dans les déterminants transformés ainsi $\frac{1}{x}$ sera facteur dans toutes les colonnes; nous divisons par celui-ci et appliquons ensuite la même opération aux déterminants obtenus ainsi en nous arrêtant, cependant, cette fois à l'avant-dernière colonne. En continuant de cette manière aussi longtemps que possible, on finit par trouver

$$
r^{2n}[\varphi(x)] = x^{-2n}\begin{vmatrix}
\varphi(x) & \frac{1}{1!}D[x\varphi(x)] & \dots & \frac{1}{n!}D^{n}[x^{n}\varphi(x)] \\
\frac{1}{1!}D[x\varphi(x)] & \frac{1}{2!}D^{2}[x^{2}\varphi(x)] & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{n!}D^{n}[x^{n}\varphi(x)] & \dots & \dots & \frac{1}{(2n)!}D^{2n}[x^{2n}\varphi(x)]
\end{vmatrix}:
$$

$$
:\begin{vmatrix}
\frac{1}{2!}D^{2}\varphi(x) & \frac{1}{3!}D^{3}[x\varphi(x)] & \dots & \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x^{n-1}\varphi(x)] \\
\frac{1}{3!}D^{3}[x\varphi(x)] & \frac{1}{4!}D^{4}[x^{2}\varphi(x)] & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x^{n-1}\varphi(x)] & \dots & \dots & \frac{1}{(2n)!}D^{2n}[x^{2n-2}\varphi(x)]
\end{vmatrix} \quad (26)
$$

On trouve de même pour les différences réciproques d'ordre impair

$$
r^{2n+1}[\varphi(x)] = x^{2n}\begin{vmatrix}
\frac{1}{3!}D^{3}\varphi(x) & \frac{1}{4!}D^{4}[x\varphi(x)] & \dots & \frac{1}{(n+2)!}D^{n+2}[x^{n-1}\varphi(x)] \\
\frac{1}{4!}D^{4}[x\varphi(x)] & \frac{1}{5!}D^{5}[x^{2}\varphi(x)] & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{(n+2)!}D^{n+2}[x^{n-1}\varphi(x)] & \dots & \dots & \frac{1}{(2n+1)!}D^{2n+1}[x^{2n-2}\varphi(x)]
\end{vmatrix}:
$$

$$:\begin{vmatrix} \frac{1}{1!}D\varphi(x) & \frac{1}{2!}D^2[x\varphi(x)] & \dots & \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x^n\varphi(x)] \\ \frac{1}{2!}D^2[x\varphi(x)] & \frac{1}{3!}D^3[x^2\varphi(x)] & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x^n\varphi(x)] & \dots & \dots & \frac{1}{(2n+1)!}D^{2n+1}[x^{2n}\varphi(x)] \end{vmatrix} \quad (26\text{ bis})$$

Ces déterminants sont orthosymétriques, et on notera que par leur aspects ils rappellent (24) et (24 bis) ce qui nous sera utile dans la suite.

Calcul des coefficients différentiels réciproques.

§ 31. Ce calcul peut se faire par l'application de la relation de récurrence

$$r^{n+1}(\varphi) = r^{n-1}(\varphi) + (n+1)r[r^n(\varphi)] \quad (2)$$

Mais si la loi n'est pas extrêmement simple, il sera plus avantageux de calculer séparément les déterminants numérateurs et dénominateurs en les déterminant selon une des relations de récurrence citées ci-après.

Posons

$$p_{r.n+1}[\varphi(x)] = \begin{vmatrix} a_r & a_{r+1} \dots a_{r+n} \\ a_{r+1} & a_{r+2} \dots a_{r+n+1} \\ \dots & \dots \\ a_{r+n} & \dots\dots a_{r+2n} \end{vmatrix} \quad (27)$$

où, comme plus haut

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}.$$

Nous démontrerons d'abord le théorème remarquable que voici: *l'on différentie ce déterminant en augmentant par une unité tous les indices de la dernière ligne et en multipliant le déterminant par le nombre qui égale l'index le plus élevé obtenu ainsi* $(r + 2n + 1)$.

Pour démontrer ceci, nous notons que nous avons trouvé, plus haut, l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n!}D^n\varphi(x) & \frac{1}{n!}D^n[x\varphi(x)] & \dots \frac{1}{n!}D^n[x^r\varphi(x)] \\ \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}\varphi(x) & \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x\varphi(x)] & \dots\dots\dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+r)!}D^{n+r}[\varphi(x)] & \frac{1}{(n+r)!}D^{n+r}[x\varphi(x)] \dots & \frac{1}{(n+r)!}D^{n+r}[x^r\varphi(x)] \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{n-r} & a_{n-r+1} \dots & a_n \\ a_{n-r+1} & a_{n-r+2} \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots a_{n+r} \end{vmatrix} \tag{28}$$

En différentiant le déterminant du premier membre par rapport à x, on obtient une somme de $r + 1$ déterminants où chacun des termes a été formé du déterminant primitif, en différentiant, par rapport à x, une seule des lignes. Tous ces déterminants sont 0 excepté un; on différentie donc le déterminant du premier membre en ne différentiant que la dernière ligne. En transformant ensuite le déterminant obtenu ainsi de la même manière que plus haut, on verra qu'il égale

$$(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}(r + n + 1) \begin{vmatrix} a_{n-r} \dots a_n \\ \dots\dots \\ a_{n-1} \dots a_{n+r+1} \\ a_{n+1} \dots a_{n+r+1} \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$\frac{dp_{r.n+1}}{dx} = (r + 2n + 1) \begin{vmatrix} a_r & a_{r+1} & \dots a_{r+n} \\ a_{r+1} & a_{r+2} & \dots a_{r+n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r+n-1} & a_{r+n} & \dots a_{r+2n-1} \\ a_{r+n+1} & a_{r+n} & \dots a_{r+2n+1} \end{vmatrix} \tag{29}$$

c. q. f. d.

Pour déterminer des relations de récurrence commodes au calcul de $p_{r.n}$ nous nous servirons du théorème suivant bien connu dû à SYLVESTER.

$$\Delta \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ij}\, \partial a_{kl}} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{kl}} - \frac{\partial \Delta}{\partial a_{il}} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{kj}} \tag{30}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On trouve par cela surtout

$$p_{r.n+1}\, p_{r+2.n-1} = p_{r+2.n}\, p_{r.n} - p^2_{r+1.n} \tag{31}$$

$$p_{r+1.n-1}\, p_{r.n+1} = \frac{1}{r+2n} p_{r.n}\, p'_{r+1.n} - \frac{1}{r+2n-1} p_{r+1.n}\, p'_{r.n} \tag{32}$$

$$\frac{r+2n-1}{r+2n} \cdot p_{r+1.n}\, p'_{r+1.n} = p_{r+2.n}\, p'_{r.n} - p_{r.n+1}\, p'_{r+2.n-1} \tag{33}$$

$$\frac{r+2n+1}{r+2n} \cdot p_{r+1.n}\, p'_{r+1.n} = p'_{r+2.n}\, p_{r.n} - p'_{r.n+1}\, p_{r+2.n-1} \tag{34}$$

où $p'_{r.n}$ désigne la dérivée de $p_{r.n}$ par rapport à x.

Par la combinaison de celles-ci on dérive encore une relation importante; en éliminant entre (31) et (32) $p_{r.n}$ on trouve

$$\frac{1}{r+2n} p_{r.n+1} \cdot p_{r+2.n-1} \cdot p'_{r+1.n} - p_{r+1.n-1} \cdot p_{r.n+1} \cdot p_{r+2.n} =$$

$$= \frac{1}{r+2n-1} p_{r+1.n} \cdot p'_{r.n} \cdot p_{r+2.n} - \frac{1}{r+2n} p^2_{r+1.n}\, p'_{r+1.n}$$

d'après (33) le second membre égale ici

$$\frac{1}{r+2n-1} \cdot p_{r+1.n} \cdot p_{r.n+1} \cdot p'_{r+2.n-1} .$$

Divisons par $p_{r.n+1}$, nous aurons alors, en substituant $r-1$ à r et $n+1$ à n,

$$p_{r.n}\, p_{r+1.n+1} = \frac{1}{2n+r+1} p_{r+1.n}\, p'_{r.n+1} - \frac{1}{2n+r} p_{r.n+1}\, p'_{r+1.n} . \tag{35}$$

M. THIELE a relevé en particulier la première de ces relations (31) qui présente l'avantage de ne pas contenir des coefficients différentiels.

En général, cependant, (32) et (35) seront préférables.

§ **32.** De même que de la formule d'interpolation de NEWTON on dérive la formule de TAYLOR, on dérivera de la fraction continue d'interpolation générale (3) le développement suivant

$$\varphi(x+z)=\varphi(x)+\cfrac{z}{r(\varphi(x))+\cfrac{z}{2\,r(r(\varphi(x)))+\cfrac{z}{3\,r(r^2(\varphi(x)))+\cfrac{z}{4\,r(r^3(\varphi(x)))+\cdots}}}} \tag{36}$$

correspondant à la formule de TAYLOR

$$\varphi(x+z)=\varphi(x)+a_1\,z+a_2\,z^2+a_3\,z^3+\cdots$$

Je désigne, dans la suite, cette fraction continue comme la fraction continue de M. THIELE. Selon (24), (24 bis) et (27) on trouve maintenant

$$r^{2n}(\varphi(x))=\frac{p_{0.n+1}}{p_{2.n}} \tag{37}$$

$$r^{2n+1}(\varphi(x))=\frac{p_{3.n}}{p_{1.n+1}} \tag{37 bis}$$

d'où on trouve encore au moyen de (31)

$$(2\,n+1)\,r\,(r^{2n}(\varphi(x)))=\frac{p_{2.n}^2}{p_{1.n}\,p_{1.n+1}} \tag{38}$$

$$(2\,n+2)\,r\,(r^{2n+1}(\varphi(x)))=-\frac{p_{1.n+1}^2}{p_{2.n}\,p_{2.n+1}}. \tag{38 bis}$$

Je pose maintenant

$$p_0=1,\ p_1=a_1,\ p_2=a_2 \text{ et généralement } p_{2n}=p_{2.n},\ p_{2n+1}=p_{1.n+1}.$$

Les coefficients de (36) s'exprimeront alors par des fonctions p à un seul indice. Au moyen de (38) on aura

$$(n+1)\,r\,(r^n(\varphi(x)))=(-1)^n\frac{p_n^2}{p_{n-1}\,p_{n+1}}. \tag{39}$$

On pourra alors écrire (36)

$$\varphi(x+z)=\varphi(x)+\cfrac{p_1 z}{1-\cfrac{\frac{p_2}{p_0\,p_1}z}{1-\cfrac{\frac{p_0\,p_3}{p_1\,p_2}z}{1-\cfrac{\frac{p_1\,p_4}{p_2\,p_3}z}{1-\cfrac{\frac{p_2\,p_5}{p_3\,p_4}z}{1-\cdots}}}}}=\varphi(x)+\cfrac{z}{\frac{p_0^2}{p_1}-\cfrac{z}{\frac{p_1^2}{p_0\,p_2}-\cfrac{z}{\frac{p_2^2}{p_1\,p_3}-\cfrac{z}{\frac{p_3^2}{p_2\,p_4}-\cdots}}}} \tag{40}$$

En posant maintenant en (32) et en (35) $r = 1$, celles-ci s'écrivent

$$p_{2n-2}\,p_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\,p_{2n-1}\,p'_{2n} - \frac{1}{2n}\,p_{2n}\,p'_{2n-1}$$

$$p_{2n-1}\,p_{2n+2} = \frac{1}{2n+2}\,p_{2n}\,p'_{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\,p_{2n+1}\,p'_{2n}.$$

Pour le calcul des fonctions p on a donc les équations suivantes

$$\begin{aligned}
&p_0 = 1 \quad p_1 = a_1 \quad p_2 = a_2\\
&p_0\,p_3 = \frac{1}{3}\,p_1\,p'_2 - \frac{1}{2}\,p_2\,p'_1\\
&p_1\,p_4 = \frac{1}{4}\,p_2\,p'_3 - \frac{1}{3}\,p_3\,p'_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_{n-2}\,p_{n+1} = \frac{1}{n+1}\,p_{n-1}\,p'_n - \frac{1}{n}\,p_n\,p'_{n-1}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Voici, au contraire, les formules de calcul en utilisant (31)

$$\begin{array}{l|l|l}
p_{1.1} = a_1 & p_{1.2} = p_{1.1}\,p_{3.1} - p_{2.1}^2 & p_{3.1}\,p_{1.3} = p_{1.2}\,p_{3.2} - p_{2.2}^2\\
p_{2.1} = a_2 & p_{2.2} = p_{2.1}\,p_{4.1} - p_{3.1}^2 & p_{4.1}\,p_{2.3} = p_{2.2}\,p_{4.2} - p_{3.2}^2\\
p_{3.1} = a_3 & p_{3.2} = p_{3.1}\,p_{5.1} - p_{4.1}^2 & \cdots\cdots\cdots\\
p_{4.1} = a_4 & p_{4.2} = p_{4.1}\,p_{6.1} - p_{5.1}^2 & \\
p_{5.1} = a_5 & \cdots\cdots\cdots & \\
p_{6.1} = a_6 & & \\
\cdots & &
\end{array} \tag{42}$$

Le schéma (41) a l'avantage de ne contenir que les fonctions p apparaissant dans les coefficients des fractions continues, mais, en récompense, il faut en déterminer les coefficients différentiels; dans le schéma (42), au contraire, il a fallu introduire une série de nombres auxiliaires qui ne se trouvent pas directement dans la fraction continue de Thiele (40). Si une fonction p disparaît identiquement, l'une et l'autre méthodes seront illusoires les fonctions p suivantes prenant une forme indéterminée $\left(\frac{0}{0}\right)$. Cependant, il est facile d'indiquer la condition pour que cela arrive, car, en considérant l'équation (28), on voit que le premier membre égalé à zéro indique la condition nécessaire pour qu'il y existe une relation de la forme

$$c_0 D_x^n \varphi(x) + c_1 D_x^n (x \varphi(x)) + \cdots c_r D_x^n (x^r \varphi(x)) = 0$$

où $c_0, c_1, \ldots c_r$ sont des constantes arbitraires. Il faut donc que $\varphi(x)$ soit une fonction rationnelle fractionnée de x, car en intégrant n fois cette équation et en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ les constantes d'intégration on trouve

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \cdots \alpha_n}{c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots c_0}. \tag{43}$$

Si la fonction à développer en fraction continue se présente sous la forme fractionnaire comme le rapport entre deux séries de puissances infinies:

$$\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}$$

on déterminera les coefficients différentiels réciproques d'après les formules

$$\frac{r\varphi(x)}{r\,x} = -\begin{vmatrix} 0 & b_0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_0 & a_0 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \frac{r^3\varphi(x)}{r\,x^3} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 & b_1 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r^5\varphi(x)}{r\,x^5} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & 0 & b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ 0 & b_0 & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 & a_4 & b_5 & a_5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & 0 & b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ b_0 & a_0 & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \\ b_3 & a_2 & b_4 & a_4 & b_5 & a_5 \end{vmatrix} \tag{44}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r^2\varphi(x)}{r\,x^2} = \begin{vmatrix} 0 & b_0 & a_0 \\ a_0 & b_1 & a_1 \\ a_1 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & b_0 & a_0 \\ b_0 & b_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \frac{r^4\varphi(x)}{r\,x^4} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ a_0 & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ b_0 & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ b_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{vmatrix}. \tag{45}$$

On démontre ces équations en substituant $\frac{\varphi_i}{\psi_i}$ à φ_i dans les formules générales (10) et (11) des différences réciproques; on aura alors

$$\varrho^{2n}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{|\psi_i, \varphi_i, x_i\psi_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^{n-1}\psi_i, x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n\varphi_i|}{|\psi_i, \varphi_i, x_i\psi_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^{n-1}\psi_i, x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n\psi_i|} \tag{46}$$

$$\varrho^{2n+1}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)=\frac{|\psi,\varphi_i,x_i\psi_i,x_i\varphi_i,\dots x_i^n\psi_i,x_i^{n+1}\psi_i|}{|\psi_i,\varphi_i,x_i\psi_i,x_i\varphi_i,\dots x_i^n\psi_i,x_i^n\varphi_i|}. \tag{46 bis}$$

En faisant tendre ici $x_0, x_1, x_2, \dots$ vers o on trouve, par un passage à la limite les formules ci-dessus.

Transformations linéaires.

§ 33. Dans cette section nous allons faire voir comment se comportent les différences réciproques en effectuant des transformations linéaires de la variable indépendante ou de la fonction φ. Si, dans (46) et (46 bis) on pose $\varphi_i = 1$ et écrit φ_i au lieu de ψ_i, on aura

$$\varrho^{2n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)=\frac{|1,\varphi_i,x_i,x_i\varphi_i,\dots x_i^{n-1},x_i^{n-1}\varphi_i,x_i^n|}{|1,\varphi_i,x_i,x_i\varphi_i,\dots x_i^{n-1},x_i^{n-1}\varphi_i,x_i^n\varphi_i|} \tag{47}$$

$$\varrho^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)=-\frac{|1,\varphi_i,x_i,x_i\varphi_i,\dots x_i^{n-1}\varphi_i,x_i^n\varphi_i,x_i^{n+1}\varphi_i|}{|1,\varphi_i,x_i,x_i\varphi_i,\dots x_i^{n-1}\varphi_i,x_i^n,x_i^n\varphi_i|} \tag{47 bis}$$

En comparant à (10) on verra que

$$\varrho^{2n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)=\frac{1}{\varrho^{2n}(\varphi(x))}. \tag{48}$$

Donc, la différence réciproque d'ordre pair de la valeur réciproque d'une fonction est la valeur réciproque de la différence réciproque de la fonction.

(11) montre, au contraire, que le déterminant dénominateur de $\varrho^{2n+1}(\varphi(x))$ est le même que celui de $\varrho^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)$.

En substituant à φ_i dans (10) et (11) $\varphi_i + a$ où a est une constante, on trouve facilement que

$$\varrho^{2n}(\varphi(x)+a)=\varrho^{2n}(\varphi(x))+a \tag{49}$$

$$\varrho^{2n+1}(\varphi(x)+a)=\varrho^{2n+1}(\varphi(x)) \tag{49 bis}$$

car en retranchant, dans ces déterminants, de chaque colonne contenant les valeurs de fonction la colonne qui ne contient que les arguments de la même puissance, a disparaît complètement de ϱ^{2n+1}, tandis que le déterminant numérateur de ϱ^{2n} se laisse décomposer en deux dont l'un est le déterminant dénominateur multiplié par a. En substituant, au contraire, à φ_i $a\varphi_i$, on trouve

$$\varrho^{2n}(a\,\varphi(x)) = a\,\varrho^{2n}(\varphi(x)). \tag{50}$$

$$\varrho^{2n+1}(a\,\varphi(x) = \frac{1}{a}\,\varrho^{2n+1}(\varphi(x)). \tag{50 bis}$$

On en dérive un théorème remarquable. En combinant (48), (49) et (50) on trouve, en effet, si a_i et b_i désignent des constantes,

$$\varrho^{2n}\left\{\cfrac{b_r}{a_r + \cfrac{b_{r-1}}{a_{r-1} + \cdots \cfrac{b_1}{a_1 + \varphi(x)}}}\right\} = \cfrac{b_r}{a_r + \cfrac{b_{r-1}}{a_{r-1} + \cdots \cfrac{b_1}{a_1 + \varrho^{2n}\varphi(x)}}}$$

ou bien ce qui revient au même

$$\varrho^{2n}\left(\frac{\alpha + \beta\,\varphi(x)}{\gamma + \delta\,\varphi(x)}\right) = \frac{\alpha + \beta\,\varrho^{2n}\,\varphi(x)}{\gamma + \delta\,\varrho^{2n}\,\varphi(x)}. \tag{51}$$

La différence réciproque d'ordre pair d'une fonction linéaire fractionée de $\varphi(x)$ est donc la même fonction linéaire de la différence réciproque de $\varphi(x)$.

On peut donc développer $\dfrac{\alpha + \beta\,\varphi(x)}{\gamma + \delta\,\varphi(x)}$ en fraction continue d'interpolation de la forme (3) en connaissant seulement les différences réciproques de $\varphi(x)$. Considérons spécialement le développement en fraction continue de $\dfrac{1}{\varphi(x)}$. A l'aide de (48) et de la relation de récurrence (1) on trouve

$$\varrho^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) - \varrho^{2n-1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = -\varrho^{2n}(\varphi(x))\cdot\varrho^{2n}(\varphi(x))\cdot\{\varrho^{2n+1}(\varphi(x)) - \varrho^{2n-1}(\varphi(x))\}. \tag{52}$$

Le premier facteur du second membre est ici égal à $\varrho^{2n}(x_0\,x_1 \ldots x_{2n-1}\,x_{2n+1})$, tandis que partout ailleurs $\varrho^n(\varphi(x))$ est une fonction des arguments $x_0\,x_1 \ldots x_n$. Cela nous permet de développer $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ en une fraction continue dont les coefficients sont des différences réciproques de $\varphi(x)$. On trouve facilement

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(x_0)}\left\{1 - \cfrac{x - x_0}{\varphi(x_1)\varrho(x_0x_1) + \cfrac{(x-x_1)\varrho^2(x_0x_1x_2)}{\varrho^2(x_0x_1x_2) - \varphi(x_0) + \cfrac{(x-x_2)\varphi(x_0)}{\varrho^2(x_0x_1x_3)\{\varrho^3(x_0\cdots x_3) - \varrho(x_0x_1)\} + {}}}}\right.$$
$$+ \cfrac{(x-x_3)\,\varrho^4(x_0\,x_1\cdots x_4)}{\varrho^4(x_0\cdots x_4) - \varrho^2(x_0\cdots x_2) + \cfrac{(x-x_4)\,\varrho^2(x_0\,x_1\,x_2)}{\varrho^4(x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_5)\{\varrho^5(x_0\cdots x_5) - \varrho^3(x_0\cdots x_3)\} + \cdots}} \tag{53}$$

La plupart des fractions continues étudiées jusqu'ici rentrent à ce type. (Ex: les fractions continues de GAUSS, de STIELTJES, etc.) Les développements d'après la formule (3), au contraire, présenteront généralement une irrégularité au commencement. En faisant tendre tous les arguments vers a et en introduisant les fonctions p, ou trouvera la fraction continue suivante indiquée par M. THIELE:

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(a)} - \cfrac{x-a}{\cfrac{p_{0.1}^2}{p_{1.0}\,p_{1.1}} - \cfrac{x-a}{\cfrac{p_{1.1}^2}{p_{0.2}\,p_{0.1}} - \cfrac{x-a}{\cfrac{p_{0.2}^2}{p_{1.1}\,p_{1.2}} - \cfrac{x-a}{\cfrac{p_{1.2}^2}{p_{0.2}\,p_{0.3}} - \cdots}}}} \tag{54}$$

En posant $p_{0.n+1} = p_{2n}$, $p_{1.n+1} = p_{2n+1}$ (54) prendra la forme

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(a)} - \cfrac{x-a}{\cfrac{p_0^2}{p_1} - \cfrac{x-a}{\cfrac{p_1^2}{p_0\,p_2} - \cfrac{x-a}{\cfrac{p_2^2}{p_1\,p_3} - \cfrac{x-a}{\cfrac{p_3^2}{p_2\,p_4} - \cdots}}}} \tag{55}$$

(32) et (35) montrent maintenant que p_n satisfait à l'équation aux différences mêlées

$$p_{n-2}\,p_{n+1} = \frac{1}{n+1}\,p_{n-1}\,p'_n - \frac{1}{n}\,p_n\,p'_{n-1}. \tag{56}$$

Ici encore nous pourrons donc nous servir du schéma de calcul (41) en posant seulement $p_0 = a_0$, $p_1 = a_1$, $p_2 = a_2$.

Les théorèmes (48) ... (52) restent naturellement valables dans le cas limite où tous les arguments tendent vers la même valeur x. Notons particulièrement

$$r^{2n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = \frac{1}{r^{2n}(\varphi(x))}. \tag{57}$$

Au moyen de la relation de récurrence (2) on en trouve

$$r\left(r^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right) = -\frac{r(r^{2n+1}\varphi(x))}{r^{2n}(\varphi(x)).r^{2n+2}(\varphi(x))} \tag{58}$$

de (44) et (45) on dérive en posant $a_0 = 1$, $a_i = 0$, $i > 0$

$$r^{2n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = \frac{p_{2.n}}{p_{0.n+1}} \tag{59}$$

$$r^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)=\frac{p_{-1.n+2}}{p_{1.n+1}} \tag{59 bis}$$

où a_{-1} est égal à 0 dans $p_{-1.n+2}$. En différentiant ces équations on trouve encore

$$(2n+1)\,r\left(r^{2n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right)=-\frac{p_{0.n+1}^2}{p_{1.n}\,p_{1.n+1}} \tag{60}$$

$$(2n+2)\,r\left(r^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right)=\frac{p_{1.n+1}^2}{p_{0.n+1}\,p_{0.n+2}}. \tag{60 bis}$$

§ **34.** Nous avons vu l'influence qu'excercent sur les différences réciproques le changement du zéro et de l'unité des valeurs de fonction. Nous allons maintenant étudier l'effet des changements correspondantes des arguments.

ϱ^n ne change pas si on déplace le zéro, car il n'y entre que des différences entre les arguments. Si, au contraire, l'on substitue, dans (10) αx_i à x_i on aura

$$\varrho_z^{2n}\,\varphi(x)=\varrho_x^{2n}\,\varphi(x) \qquad z=\alpha x. \tag{61}$$

On trouve de même par (11)

$$\varrho_z^{2n+1}\,\varphi(x)=\alpha\,\varrho_x^{2n+1}\,\varphi(x). \tag{61 bis}$$

Reste encore à étudier l'effet produit par la transformation $z_i=\frac{1}{x_i}$, mais nous nous bornerons ici au cas où tous les arguments coïncident.

Nous avons désigné par $p_{r.n}(\varphi(x))$ les déterminants des coefficients différentiels réciproques de $\varphi(x)$ par rapport à x; nous désignons par $\pi_{r.n}(\varphi(x))$ les déterminants correspondants des coefficients différentiels réciproques par rapport à $\frac{1}{x}$, et nous allons chercher une relation entre $p_{r.n}$ et $\pi_{r.n}$.

En appliquant la formule de Schlömilch

$$\frac{d^n y}{d\left(\frac{1}{x}\right)^n}=(-1)^n\,x^{n+1}\,\frac{d^n x^{n-1} y}{d x^n} \tag{62}$$

et en posant

$$b_n=\frac{1}{n!}\,\frac{d^n\varphi(x)}{d\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

on aura

$$\pi_{r.n+1}(\varphi(x)) = \begin{vmatrix} b_r & b_{r+1} \dots & b_{r+n} \\ b_{r+1} & b_{r+2} \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r+n} & \dots & b_{r+2n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{(n+1)(r+n)} \cdot x^{(n+1)(r+n+1)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{r!} D^r(x^{r-1}\varphi(x)) & \dots\dots & \frac{1}{(r+n)!} D^{r+n}(x^{r+n-1}\varphi(x)) \\ \frac{1}{(r+1)!} D^{r+1}(x^r \varphi(x)) & \dots\dots & \frac{1}{(r+n+1)!} D^{r+n+1}(x^{r+n}\varphi(x)) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(r+n)!} D^{r+n}(x^{r+n-1}\varphi(x)) & \dots & \frac{1}{(r+2n)!} D^{r+2n}(x^{r+2n-1}\varphi(x)) \end{vmatrix}$$

Or, nous avons démontré, plus haut, la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r!} D^r \varphi(x) & \dots\dots\dots & \frac{1}{(r+n)!} D^{r+n}(x^n \varphi(x)) \\ \frac{1}{(r+1)!} D^{r+1}(x\varphi(x)) & \dots\dots & \frac{1}{(r+n+1)!} D^{r+n+1}(x^{n+1}\varphi(x)) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(r+n)!} D^{r+n}(x^n \varphi(x)) & \dots & \frac{1}{(r+2n)!} D^{r+2n}(x^{2n}\varphi(x)) \end{vmatrix} =$$

$$= x^{n(n+1)} \begin{vmatrix} a_r & a_{r+1} \dots & a_{r+n} \\ a_{r+1} & a_{r+2} \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r+n} & \dots & a_{r+2n} \end{vmatrix} = x^{n(n+1)} p_{r.n+1}(\varphi(x)) \qquad (63)$$

où

$$a_r = \frac{1}{r!} \frac{d^r \varphi(x)}{d x^r}.$$

On a donc la relation bien simple

$$\pi_{r.n}(\varphi(x)) = (-1)^{r.n} x^{n(r+2n-1)} p_{r.n}(x^{r-1}\varphi(x)). \qquad (64)$$

On en trouve, pour les coefficients différentiels réciproques

$$r^{2n}_{\left(\frac{1}{x}\right)}(\varphi(x)) = \frac{\pi_{0.n+1}(\varphi(x))}{\pi_{2.n}(\varphi(x))} = x^{2n+1}\,\frac{p_{0.n+1}(\varphi(x).x^{-1})}{p_{2.n}(\varphi(x).x)} \tag{65}$$

$$r^{2n+1}_{\left(\frac{1}{x}\right)}(\varphi(x)) = \frac{\pi_{3.n}(\varphi(x))}{\pi_{1.n+1}(\varphi(x))} = -x^{-2n-2}\cdot\frac{p_{3.n}(x^2\varphi(x))}{p_{1.n+1}(\varphi(x))}. \tag{66}$$

Quelques invariants différentiels.

§ 35. Au § 9 nous avons indiqué la formule

$$\varrho^{2n}\left(\frac{\alpha+\beta\,\varphi(x)}{\gamma+\delta\,\varphi(x)}\right) = \frac{\alpha+\beta\,\varrho^{2n}\,\varphi(x)}{\gamma+\delta\,\varrho^{2n}\,\varphi(x)}, \tag{51}$$

pour les différences réciproques d'ordre impair il n'existe aucune relation simple correspondante. Les déterminants dénominateurs de celles-ci, au contraire, ont une propriété remarquable que nous allons mettre en évidence. En posant dans le déterminant

$$|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^n, x_i^n\varphi_i| \tag{67}$$

$\varphi_i = \frac{1}{\psi_i}$ on trouve que celui-ci égale

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\psi_0\,\psi_1\,\psi_2\ldots\psi_{2n+1}}\cdot|1, \psi_i, x_i, x_i\psi_i, \ldots x_i^n, x_i^n\psi_i|. \tag{68}$$

Si l'on remplace φ_i par φ_i+a le déterminant reste invariable; mais si l'on remplace φ_i par $a\,\varphi_i$ celui-ci est multiplié par a^{n+1}. Que $\delta(x_0\,x_1)$ soit la différence divisée de Newton

$$\frac{\varphi_0-\varphi_1}{x_0-x_1}$$

on verra, que la quantité

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^n, x_i^n\varphi_i|}{\delta(x_0\,x_1)\,\delta(x_2\,x_3)\,\delta(x_4\,x_5)\ldots\delta(x_{2n}\,x_{2n+1})} \tag{69}$$

admet une transformation projective

$$\varphi_i = \frac{\alpha+\beta\,\psi_i}{\gamma+\delta\,\psi_i}$$

c'est donc un invariant. Cette propriété se conserve quand même nous divisons $\mathfrak{J}_1$ par $\Delta(x_0\,x_1\ldots x_{2n+1})$, la fonction alternante de $x_0\,x_1\ldots x_{2n+1}$. Si, particulièrement, nous faisons tendre tous les arguments vers la même valeur x, le dénominateur sera la $(n+1)^{\text{ième}}$ puissance du coefficient différentiel de φ, tandis que le numérateur égale le déterminant dénominateur de (24 bis). On a alors la série suivante d'invariants différentiels

$$a_1 : a_1; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} : a_1^2; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} : a_1^3; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{vmatrix} : a_1^4; \ldots \tag{70}$$

où

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \varphi(x)}{d x^n}.$$

La première en est 1, la seconde est, à une constante près, *la dérivée de Schwartz.* Ces quantités admettent une transformation projective de la fonction φ, mais nous pouvons dériver encore une autre série de déterminants admettant la même transformation de la variable indépendante. En substituant dans le déterminant (67) αx_i à x_i, celui-ci se multiple par $\alpha^{n(n+1)}$; il reste invariable, au contraire, par le changement du zéro de l'argument. Enfin, en faisant $x_i = \frac{1}{z_i}$ on trouve facilement

$$\left| 1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^n, x_i^n\varphi_i \right| = \frac{\left| 1, \varphi_i, z_i, z_i\varphi_i, \ldots z_i^n, z_i^n\varphi_i \right|}{z_0^n z_1^n z_2^n \ldots z_{2n+1}^n}. \tag{71}$$

On voit alors que la quantité suivante

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\left| 1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^n, x_i^n\varphi_i \right|}{\{\delta(x_0x_1)\delta(x_2x_3)\ldots\delta(x_{2n}x_{2n+1})\}^{n+1}\Delta(x_0x_1\ldots x_{2n+1})} \tag{72}$$

reste invariable en effectuant la transformation

$$x_i = \frac{\alpha + \beta z_i}{\gamma + \delta z_i}.$$

Si l'on fait tendre tous les arguments vers x, on aura la série infinie suivante d'invariants différentiels

$$a_1 : a_1; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} : a_1^4; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} : a_1^9; \ldots \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} \end{vmatrix} : a_1^{n^2} \ldots \tag{73}$$

qui admettent tous une transformation projective de la variable *indépendante.*

Différences réciproques de $\varphi(x) + \alpha x$ et de $x^i\varphi(x)$.

§ **36.** En général on n'a pas de moyen d'ajouter ensemble deux fractions continues, bien plus, la simple addition d'une fonction linéaire de la variable indépendante à une fraction continue cause — Stieltjes[1] l'a montré — des changements de celle-ci assez radicaux. Il est, cependant, facile de traiter ce problème à l'aide des différences réciproques. Remplaçons dans le déterminant (11) φ_i par $\alpha x_i + \varphi_i$ est retranchons de chaque colonne contenant des valeurs de fonction la suivante, multipliée par α. Le déterminant numérateur restera invariable, tandis que le déterminant dénominateur peut se décomposer en une somme de deux déterminants dont l'un égale le déterminant dénominateur primitif, tandis que l'autre est égal au déterminant numérateur multiplié par α. On trouve donc

$$\frac{1}{\varrho^{2n+1}(\varphi(x) + \alpha x)} = \frac{1}{\varrho^{2n+1}(\varphi(x))} + \alpha \tag{74}$$

et spécialement

$$\frac{1}{r^{2n+1}(\varphi(x) + \alpha x)} = \frac{1}{r^{2n+1}(\varphi(x))} + \alpha. \tag{75}$$

En combinant la relation de récurrence (2) et (75) on trouve

$$r\{r^{2n}[\varphi(x) + \alpha x]\} = \frac{r[r^{2n}\varphi(x)]}{\{1 + \alpha r^{2n+1}[\varphi(x)]\}\cdot\{1 + \alpha r^{2n-1}[\varphi(x)]\}} \tag{77}$$

$$r^{2n+2}[\varphi(x)+\alpha x] - r^{2n}[\varphi(x)+\alpha x] = \{r^{2n+2}[\varphi(x)] - r^{2n}[\varphi(x)]\}\cdot\{1+\alpha\cdot r^{2n+1}[\varphi(x)]\}^2. \tag{78}$$

§ **37.** Si l'on connaît les fonctions p de $\varphi(x)$, on peut en dériver les coefficients différentiels réciproques de $x^i\varphi(x)$, pourvu que i soit un entier. En effet, si dans le déterminant $p_{r.n+1}[\varphi(x)]$ on substitue partout $x\varphi(x)$ à $\varphi(x)$, on trouve

$$p_{r.n+1}[x\varphi(x)] = \begin{vmatrix} xa_r + a_{r-1} & xa_{r+1} + a_r & \dots & xa_{r+n} + a_{r+n-1} \\ xa_{r+1} + a_r & xa_{r+2} + a_{r+1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xa_{r+n} + a_{r+n-1} & \dots & \dots & xa_{r+2n} + a_{r+2n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^{n+1} & -x^n & x^{n-1} & \dots & (-1)^{n+1} \\ a_{r-1} & a_r & a_{r+1} & \dots & a_{r+n} \\ a_r & a_{r+1} & a_{r+2} & \dots & a_{r+n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r+n-1} & a_{r+n} & a_{r+n+1} & \dots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \tag{79}$$

[1] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes II, p. 360. 1905.

On trouve plus généralement, si i est un nombre entier positif

$$p_{r.n+1}[x^i\varphi(x)] =$$

$$= \frac{1}{(i-1)!\,(i-2)!\ldots 2!\,1!}\begin{vmatrix} x^{n+i} & -x^{n+i-1} & \ldots\ldots & (-1)^{n+i} \\ (n+i)x^{n+i-1} & -(n+i-1)x^{n+i-2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+i)(n+i-1)\ldots(n+2)x^{n+1}, & -(n+i-1)\ldots(n+1)x^n & & 0 \\ a_{r-i} & a_{r-i+1} & \ldots\ldots & a_{r+n} \\ a_{r-i+1} & a_{r-i+2} & \ldots\ldots & a_{r+n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+n-i} & a_{r+n-i+1} & \ldots\ldots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \tag{80}$$

Cela se démontre facilement par induction; car en remplaçant partout dans ce déterminant $\varphi(x)$ par $x\varphi(x)$ et en effectuant la différentiation, on aura

$$p_{r.n+1}[x^{i+1}\varphi(x)] = \frac{1}{(i-1)!\ldots 2!\,1!}\begin{vmatrix} x^{n+i} & \ldots\ldots & (-1)^{n+i} \\ (n+i)x^{n+i-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ (n+i)\ldots(n+2)x^{n+1} & \ldots & 0 \\ a_{r-i-1}+xa_{r-i} & \ldots & a_{r+n-1}+xa_{r+n} \\ a_{r-i}+xa_{r-i+1} & \ldots & a_{r+n}+xa_{r+n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+n-i-1}+xa_{r+n-i} & \ldots & a_{r+2n-1}+xa_{r+2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{i!\,(i-1)!\ldots 1!}\begin{vmatrix} x^{n+i+1} & \ldots\ldots & (-1)^{n+i+1} \\ (n+i+1)x^{n+i} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ (n+i+1)\ldots(n+2)x^{n+1} & \ldots & 0 \\ a_{r-i-1} & \ldots\ldots & a_{r+n} \\ a_{r-i} & \ldots\ldots & a_{r+n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+n-i-1} & \ldots\ldots & a_{r+2n} \end{vmatrix}$$

c. q. f. d.

En faisant dans (80) $x = 0$, tous les éléments des i premières lignes du déterminant seront nuls sauf un; on peut donc abaisser le degré du déterminant par i unités d'où on trouve la formule élégante

$$\{p_{r.n}[x^i\varphi(x)]\}_{x=0} = \{p_{r-i.n}[\varphi(x)]\}_{x=0} \tag{81}$$

où l'on doit poser $x = 0$ après la différentiation.

En considérant les formules (37), (38) et (59), (60) (où les coefficients différentiels réciproques s'expriment par les fonctions p), on voit facilement par (81), qu'on a les deux relations suivantes

$$r^n[x\varphi(x)]_{x=0} = r^{n-1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)_{x=0} \tag{82}$$

$$(n+1)r\{r^n[x\varphi(x)]\}_{x=0} = n r\left[r^{n-1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right]_{x=0}. \tag{83}$$

Afin de pouvoir aussi diviser une fraction continue par une puissance de la variable indépendante nous substituons partout dans le déterminant $p_{r.n+1}[\varphi(x)]$ $x^{-1}\varphi(x)$ à $\varphi(x)$ en faisant observer que

$$\frac{1}{r!}D^r\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) = \frac{a_r}{x} - \frac{a_{r-1}}{x^2} + \frac{a_{r-2}}{x^3} - \cdots - \frac{a_0}{(-x)^{r+1}}.$$

En ajoutant, dans le déterminant ainsi obtenu, à chaque ligne la ligne précédente divisée par x, on aura

$$p_{r.n+1}[x^{-1}\varphi(x)] = x^{-n-1}\begin{vmatrix} \mu_{0.1} & \mu_{1.1} & \cdots & \mu_{n.1} \\ a_{r+1} & a_{r+2} & \cdots & a_{r+n+1} \\ a_{r+2} & a_{r+3} & \cdots & a_{r+n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r+n} & a_{r+n+1} & \cdots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \tag{84}$$

où

$$\mu_{i.1} = a_{r+i} - \frac{a_{r+i-1}}{x} + \frac{a_{r+i-2}}{x^2} - \cdots + \frac{a_0}{(-x)^{r+i}}. \tag{85}$$

On pourra de nouveau traiter de la même manière (84) en substituant $x^{-1}\varphi(x)$ à $\varphi(x)$; on trouvera alors

$$p_{r.n+1}[x^{-2}\varphi(x)] = x^{-2n-2}\begin{vmatrix} \mu_{0.2} & \mu_{1.2} & \mu_{2.2} & \cdots & \mu_{n.2} \\ \mu_{1.1} & \mu_{2.1} & \mu_{3.1} & \cdots & \mu_{n+1.1} \\ a_{r+2} & a_{r+3} & a_{r+4} & \cdots & a_{r+n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r+n} & a_{r+n+1} & a_{r+n+2} & \cdots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \tag{86}$$

où

$$\mu_{i.2} = a_{r+i} - \frac{2}{x}a_{r+i-1} + \frac{3}{x^2}a_{r+i-2} - \cdots + \frac{r+i+1}{(-x)^{r+i}}a_0 \tag{87}$$

et ainsi de suite. Nous faisons remarquer surtout qu'en faisant tendre x vers ∞ en (84), on aura

$$\lim_{x=\infty} \{ x^n p_{r.n}[x^{-1}\varphi(x)] \} = \lim_{x=\infty} \{ p_{r.n}[\varphi(x)] \} \tag{88}$$

et généralement

$$\lim_{x=\infty} \{ x^{in} p_{r.n}[x^{-i}\varphi(x)] \} = \lim_{x=\infty} \{ p_{r.n}[\varphi(x)] \}. \tag{89}$$

Les formules (79) et (84) peuvent servir à la dérivation d'expressions de déterminants pour les dénominateurs et les numérateurs des réduites de la fraction continue (36). Nous désignons ceux-ci par $\mathfrak{N}_n(z)$ et $\mathfrak{T}_n(z)$ et trouvons suivant le théorème de la fin du § 28

$$\mathfrak{N}_{2n}(z) = \begin{vmatrix} z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix} : p_{1.n} \tag{90}$$

$$\mathfrak{N}_{2n+1}(z) = \begin{vmatrix} z^{n} & z^{n-1} & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix} : p_{2.n} \tag{90 bis}$$

$$\mathfrak{T}_{2n}(z) = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix} : p_{1.n} \tag{91}$$

$$\mathfrak{T}_{2n+1}(z) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix} : p_{2.n} \tag{91 bis}$$

où

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = a_1 z^n + a_0 z^{n-1} && \mu_0 = a_0 z^n \\ &\lambda_1 = a_2 z^n + a_1 z^{n-1} + a_0 z^{n-2} && \mu_1 = a_1 z^n + a_0 z^{n-1} \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ &\lambda_{n-1} = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 && \mu_n = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \end{aligned}$$

Sur une transformation de la fraction continue.

§ 38. En traitant des fractions continues on a souvent besoin de diverses transformations. Les plus simples consistent en réductions ou en intercalations et supprimations de réduites en nombre fini ou infini. De telles transformations ont été traitées par plusieurs auteurs, la première fois, sans doute, par LAGRANGE.[1] Nous traiterons ici une transformation de la fraction continue d'une tout autre nature, intéressante surtout par l'analogie qu'elle présente à la transformation d'Euler d'une série de puissances.

On dit parfois que (36) est un développement de fraction continue suivant des puissances de z, parce qu'elle correspond entièrement à une série de puissance en z. Nous allons voir qu'il est possible de transformer une fraction continue suivant des puissances de x en une fraction continue suivant des puissances de $z = \frac{x}{1-x}$. En effet dans son »Institutiones calculi differentialis» (1755) p. 281 EULER a démontré que si

$$z = \frac{x}{1-x}, \qquad \varDelta_n = a_{n+1} - a_n, \qquad \varDelta_n^{i+1} = \varDelta_{n+1}^i - \varDelta_n^i$$

on a la relation

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = a_0 + a_1 z + \varDelta_1 z^2 + \varDelta_1^2 z^3 + \varDelta_1^3 z^4 + \cdots \tag{92}$$

Pour développer le premier membre en une fraction continue de la forme (40) on n'a qu'à déterminer $p_{2.n} = p_{2n}$, $p_{1.n} = p_{2n-1}$. Nous désignons par $q_{2.n}$ et $q_{1.n}$ les fonctions correspondantes formées par les coefficients du second membre, et nous allons chercher une relation entre les p et les q. Nous transformons $p_{1.n}$ en retranchant de chaque colonne celle qui précède en laissant invariable la première colonne. Dans le déterminant ainsi obtenu nous retranchons encore de chaque colonne la précédente en laissant invariables, cette fois, les deux premières colonnes, et nous continuons ainsi le plus longtemps possible. Nous transformons encore le déterminant ainsi obtenu en appliquant à ses lignes le même procédé. On trouvera alors

$$p_{1.n} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ a_2 a_3 \dots a_{n+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n a_{n+1} \dots a_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \varDelta_1 \varDelta_1^2 \dots \varDelta_1^{n-1} \\ a_2 \varDelta_2 \varDelta_2^2 \dots \varDelta_2^{n-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n \varDelta_n \varDelta_n^2 \dots \varDelta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \varDelta_1 \varDelta_1^2 \dots \varDelta_1^{n-1} \\ \varDelta_1 \varDelta_1^2 \varDelta_1^3 \dots \varDelta_1^n \\ \varDelta_1^2 \varDelta_1^3 \varDelta_1^4 \dots \varDelta_1^{n+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varDelta_1^{n-1} \varDelta_1^n \dots \varDelta_1^{2n-2} \end{vmatrix} \tag{93}$$

mais le dernier déterminant et justement $q_{1.n}$; on aura donc

$$p_{1.n} = q_{1.n}. \tag{94}$$

Considérons ensuite $q_{2.n}$:

[1] LAGRANGE: Mémoires de l'Acad. de Berlin 1776. Voir aussi: T. N. THIELE: Tidsskrift for Mathematik 1870, pag. 158. Köbenhavn.

$$q_{2.n} = \begin{vmatrix} \Delta_1 \, \Delta_1^2 \dots \Delta_1^n \\ \Delta_1^2 \, \Delta_1^3 \dots \Delta_1^{n+1} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \Delta_1^n \, \Delta_1^{n+1} \dots \Delta_1^{2n} \end{vmatrix}; \tag{95}$$

en répétant maintenant les opérations indiquées plus haut, mais en sens inverse, nous transformerons celui-ci en

$$q_{2.n} = \begin{vmatrix} \Delta_1 \, \Delta_2 \, \Delta_3 \dots \Delta_n \\ \Delta_2 \, \Delta_3 \, \Delta_4 \dots \Delta_{n+1} \\ \Delta_3 \, \Delta_4 \, \Delta_5 \dots \Delta_{n+2} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \Delta_n \dots\dots\dots \Delta_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix} \tag{96}$$

mais par la comparaison de (90 bis) on voit que ce dernier déterminant est justement le déterminant numérateur de $\mathfrak{N}_{2n+1}(1)$; on aura donc

$$q_{2.n} = p_{2.n} \cdot \mathfrak{N}_{2n+1}(1). \tag{97}$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant: Un développement en fraction continue suivant des puissances de x aux coefficients $p_{1.n}$ et $p_{2.n}$ et aux dénominateurs de réduite $\mathfrak{N}_n(x)$ peut être transformé en un développement en fraction continue suivant des puissances de $z = \frac{x}{1-x}$ aux coefficients $q_{1.n} = p_{1.n}$ et $q_{2.n} = p_{2.n} \cdot \mathfrak{N}_{2n+1}(1)$.

Représentation des différences réciproques par des intégrales.

§ **39**. Soit $f(t)$ une fonction analytique régulière à l'intérieur d'un domaine K; soit Γ un contour tel que toute la région du plan non extérieure à Γ soit dans l'intérieur de K, on aura, suivant le théorème de Cauchy, pour tout point x de cette région

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)}{t-x}\, dt \tag{98}$$

d'où

$$D_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\, dt. \tag{99}$$

Pour le coefficient différentiel réciproque du $n^{\text{ième}}$ ordre on peut indiquer une expression qui présente une analogie intéressante avec cette dernière formule. Soit $\mathfrak{N}_n(t)$ le $n^{\text{ième}}$ dénominateur de réduite de (36), on aura alors

$$r_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathfrak{N}_{n+1}^2(t)\, f(t)}{(t-x)^{n+1}}\, dt. \tag{100}$$

On trouve même une formule correspondante pour la différence réciproque du $n^{\text{ième}}$ ordre à arguments arbitraires. Pour trouver celle-ci, je suppose donnée une série d'arguments $x_0\, x_1 \ldots x_n \ldots$ tout arbitraires correspondantes aux valeurs de fonction $f(x_0)\, f(x_1) \ldots f(x_n) \ldots$ Désignons par $N_n(x)$ et $T_n(x)$ les $n^{\text{ièmes}}$ dénominateurs et numérateurs de réduite de (3), on aura alors (v. (6) et (6 bis)) les équations

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{N_{2n}(x_i)\, f(t)}{t-x_i}\, dt = T_{2n}(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots 2n-1) \tag{101}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{N_{2n+1}(x_i)\, f(t)}{t-x_i}\, dt = T_{2n+1}(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots 2n). \tag{102}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} \psi_{i,n}(x) &= (x-x_i)\,(x-x_{i+1}) \ldots (x-x_n) \\ \psi_{0,n}(x) &= \psi_n(x). \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

En divisant dans le système d'équations (101) la $(i+1)^{\text{ième}}$, la $(i+2)^{\text{ième}}, \ldots$ la $(i+n+1)^{\text{ième}}$ équation par $\psi'_{i,n+i}(x_i),\ \psi'_{i,n+i}(x_{i+1}),\ \ldots\ \psi'_{i,n+i}(x_{i+n})$ respectivement et en les ajoutant ensemble on trouvera

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(t)\, \frac{N_{2n}(t)}{\psi_{i,n+i}(t)}\, dt = 1 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1) \tag{104}$$

le coefficient de la puissance la plus élevée de x en $T_{2n}(x)$ étant 1 (voir (5)). Du système d'équations (102) on dérive de même

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(t)\, \frac{N_{2n+1}(t)}{\psi_{i,n+i}(t)}\, dt = \varrho^{2n}(x_0\, x_1 \ldots x_{2n}) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n) \tag{105}$$

le coefficient de x^n en $T_{2n+1}(x)$ étant ϱ^{2n}. En multipliant chacune des équations du système (104) par une quantité arbitraire A_i et en les ajoutant ensemble, on aura la formule importante

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(t)\,\frac{N_{2n}(t)\,\varphi_{n-1}(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\,dt = A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1} \tag{106}$$

où $\varphi_{n-1}(t)$ est un polynôme du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré à coefficients arbitraires; le coefficient de t^{n-1} est $A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1}$. Par le système (105) on obtiendra de même

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(t)\,\frac{N_{2n+1}(t)\,\varphi_n(t)}{\psi_{2n}(t)}\,dt = (A_0 + A_1 + \cdots + A_n)\,\varrho^{2n}(x_0 x_1 \ldots x_{2n}) \tag{107}$$

où $\varphi_n(t)$ est un polynôme arbitraire du $n^{\text{ième}}$ degré, dans lequel le coefficient de la puissance la plus élevée de t est $A_0 + A_1 + \cdots + A_n$. Plusieurs formules remarquables se laissent dériver de (106) et de (107). En posant $\varphi_{n-1}(t) = N_{2n}(t)$ et $\varphi_n(t) = N_{2n+1}(t)$ on aura

$$\varrho^{2n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} N_{2n}^2(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\,dt \tag{108}$$

$$\varrho^{2n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} N_{2n+1}^2(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n}(t)}\,dt \tag{108 bis}$$

donc en général

$$\varrho^n(x_0 x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(t)\,\frac{N_{n+1}^2(t)}{\psi_n(t)}\,dt \tag{109}$$

comme analogie de la formule

$$\delta^n(x_0 x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{\psi_n(t)}\,dt.$$

En faisant dans (106) $\varphi_{n-1}(t) = N_i(t)$ on trouve

$$\int\limits_{\Gamma} N_{2n}(t)\,N_i(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\,dt = 0 \qquad i < 2n-1 \tag{110}$$

$$\int\limits_{\Gamma} N_{2n}(t)\,N_{2n-1}(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\,dt = 2\pi i. \tag{111}$$

On trouve de même par (107) en posant $\varphi_n(t) = N_i(t)$

$$\int\limits_{\Gamma} N_{2n+1}(t)\,N_i(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n}(t)}\,dt = 0 \qquad i < 2n+1 \tag{112}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} N_{2n+1}(t)\, N_{2n+2}(t)\frac{f(t)}{\psi_{2n}(t)}\, dt = \varrho^{2n}(x_0 x_1 \dots x_{2n}) \, . \, \varrho^{2n+1}(x_0 x_1 \dots x_{2n+1}) \, . \quad (113)$$

On peut encore dériver une formule analogue à (113). Les dénominateurs de réduite satisfont, en effet, à la relation de récurrence

$$N_{2n+2}(t) = (\varrho^{2n+1} - \varrho^{2n-1})\, N_{2n+1}(t) + (t - x_{2n})\, N_{2n}(t).$$

En multipliant par $\frac{1}{2\pi i} f(t) \frac{N_{2n+1}(t)}{\psi_{2n}(t)} dt$ les deux membres de cette équation et en intégrant, on aura d'après (113) et (108 bis)

$$\varrho^{2n} \, . \, \varrho^{2n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t) \frac{N_{2n}(t)\, N_{2n+1}(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\, dt. \quad (113\,\text{bis})$$

On a donc en général

$$\varrho^{n-1}(x_0 x_1 \dots x_{n-1}) \, . \, \varrho^{n}(x_0 x_1 \dots x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t) \frac{N_{n+1}(t)\, N_n(t)}{\psi_{n-1}(t)}\, dt. \quad (114)$$

Toutes ces formules restent valables quand même quelques uns des arguments coïncident. Considérons particulièrement le cas où tous les arguments $x_0 x_1 \dots x_n$ tendent vers x.

On obtient par (109)

$$r_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t) \frac{\mathfrak{N}_{n+1}^2(t)}{(t-x)^{n+1}}\, dt \quad (100)$$

où $\mathfrak{N}_n(t)$ indique le $n^{\text{ième}}$ dénominateur de réduite de (36). Maintenant les coefficients de (36) ne sont pas les coefficients différentiels réciproques eux-mêmes, mais leur premier coefficient différentiel ordinaire. Nous allons chercher encore une représentation par intégrales pour ces coefficients différentiels.

En substituant dans la formule

$$r_x^{2n+1} f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t) \frac{\mathfrak{N}_{2n+2}^2(t)}{(t-x)^{2n+2}}\, dt$$

$(2n+1)\, r_x\, r_x^{2n} f(x) \, . \, \mathfrak{N}_{2n+1}(t) + (t-x)\, \mathfrak{N}_{2n}(t)$ à $\mathfrak{N}_{2n+2}(t)$, on aura

$$r_x^{2n+1} f(x) = \frac{(2n+1)^2}{2\pi i}\{r_x\, r_x^{2n} f(x)\}^2 \, . \int_{\Gamma} f(t) \frac{\mathfrak{N}_{2n+1}^2(t)}{(t-x)^{2n+2}}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t) \frac{\mathfrak{N}_{2n}^2(t)}{(t-x)^{2n}}\, dt$$

en retranchant la relation de récurrence

$$r_x^{2n+1} f(x) = (2n + 1)\, r_x\, r_x^{2n} f(x) + r_x^{2n-1} f(x)$$

on trouvera

$$D_x(r_x^{2n} f(x)) = \frac{2n + 1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) \frac{\mathfrak{N}_{2n+1}^2(t)}{(t - x)^{2n+2}}\, dt. \tag{115}$$

On trouvera de même en exprimant en

$$r_x^{2n} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) \frac{\mathfrak{N}_{2n+1}^2(t)}{(t - x)^{2n+1}}\, dt$$

$\mathfrak{N}_{2n+1}(t)$ par $\mathfrak{N}_{2n}(t)$ et $\mathfrak{N}_{2n-1}(t)$

$$r_x^{2n} f(x) = \frac{4n^2}{2\pi i} \{r_x\, r_x^{2n-1} f(x)\}^2 . \int_{\Gamma} f(t) \frac{\mathfrak{N}_{2n}(t)}{(t - x)^{2n+1}}\, dt + r_x^{2n-2} f(x) + 4n\, r_x\, r_x^{2n-1} f(x)$$

d'où

$$D_x(r_x^{2n-1} f(x)) = -\frac{2n}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) \frac{\mathfrak{N}_{2n}^2(t)}{(t - x)^{2n+1}}\, dt. \tag{116}$$

Nous avons donc démontré le théorème singulier *qu'on peut différentier* (100) *relativement à x en différentiant sous le signe d'intégration comme si $\mathfrak{N}_{n+1}(t)$ était indépendant de x, pourvu qu'on multiplie le résultat par* $(-1)^n$.

En réduisant la fraction continue de Thiele (36) de sorte que tous les dénominateurs partiels soient 1, les coefficients des numérateurs auront la forme

$$\frac{1}{n(n+1)} D_x(r_x^{n-1} f(x)) . D_x(r_x^{n} f(x)).$$

Pour ces quantités aussi on trouve une expression d'intégrale simple. Au moyen de (110) et de (112) on voit que l'intégrale

$$\int_{\Gamma} \mathfrak{N}_{n+2}(t)\, \mathfrak{N}_n(t) \frac{f(t)}{(t - x)^{n+2}}\, dt$$

égale 0, que n soit un nombre pair ou impair. En posant maintenant

$$\mathfrak{N}_{n+2}(t) = (n + 1)\, r_x\, r_x^{n} f(x) . \mathfrak{N}_{n+1}(t) + (t - x)\, \mathfrak{N}_n(t) \tag{117}$$

on trouve

$$(n+1)\, r_x r_x^n f(x) \,.\int_\Gamma \mathfrak{N}_{n+1}(t)\,.\,\mathfrak{N}_n(t)\,.\frac{f(t)}{(t-x)^{n+2}}\,dt + (-1)^{n-1}\frac{2\pi i}{n} D_x[r_x^{n-1} f(x)] = 0$$

d'où la formule

$$\frac{(-1)^n}{n(n+1)} D_x[r^{n-1} f(x)]\,.\,D_x[r^n f(x)] = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathfrak{N}_n(t)\,\mathfrak{N}_{n+1}(t)\,\frac{f(t)}{(t-x)^{n+2}}\,dt. \tag{118}$$

CHAPITRE V.

§ 40. Nous allons maintenant développer quelques fonctions particulières en fraction continue par la méthode des différences réciproques. Nous serons ainsi conduits à un grand nombre de développements dont la plupart semblent être nouvelles. L'étude de la convergence de ceux-ci se fait aisément par les théorèmes exposés au chapitre II.

En posant $\beta = 0$ dans la fraction continue de GAUSS celle-ci devient égale à $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. Il est maintenant facile de déterminer les coefficients différentiels réciproques de cette fonction. Car en posant dans (27) Chap. IV, $\varphi(x) = F(\alpha, 1, \gamma, x)$ et après la différentiation $x = 0$, on trouve

$$p_{r+1.n+1} = \left\{\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r)}\right\}^{n+1} \frac{(\alpha+r+1)^n}{(\gamma+r+1)^n}\,\frac{(\alpha+r+2)^{n-1}}{(\gamma+r+2)^{n-1}}\cdots\frac{\alpha+r+n}{\gamma+r+n}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\alpha+r+1}{\gamma+r+1} & \dfrac{(\alpha+r+1)(\alpha+r+2)}{(\gamma+r+1)(\gamma+r+2)} & \cdots & \dfrac{(\alpha+r+1)\ldots(\alpha+r+n)}{(\gamma+r+1)\ldots(\gamma+r+n)} \\ 1 & \dfrac{\alpha+r+2}{\gamma+r+2} & \dfrac{(\alpha+r+2)(\alpha+r+3)}{(\gamma+r+2)(\gamma+r+3)} & \cdots & \dfrac{(\alpha+r+2)\ldots(\alpha+r+n+1)}{(\gamma+r+2)\ldots(\alpha+r+n+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dfrac{\alpha+r+n+1}{\gamma+r+n+1} & \cdots & \cdots & \dfrac{(\alpha+r+n+1)\ldots(\alpha+r+2n)}{(\gamma+r+n+1)\ldots(\gamma+r+2n)} \end{vmatrix}$$

Désignons le déterminant par $\Delta(n, \alpha, \gamma)$; quand de chaque ligne on soustrait la précédente et réduit le degré du déterminant par une unité, on trouve

$$\Delta(n, \alpha, \gamma) = \frac{(\alpha-\gamma)^n n!}{(\gamma+r+1)(\gamma+r+2)^2\ldots(\gamma+r+n)^2(\gamma+r+n+1)}\Delta(n-1, \alpha+1, \gamma+2).$$

On détermine par cela facilement la valeur du déterminant et on trouve

$$p_{r+1.n+1}=\left\{\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r+n)}\right\}^{n+1}\left\{\frac{(\alpha+r+1)(\alpha-\gamma)}{\gamma+r+n+1}\right\}^{n}\left\{\frac{(\alpha+r+2)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma+r+n+2}\right\}^{n-1}\ldots$$

$$\ldots\frac{(\alpha+r+n)(\alpha-\gamma-n+1)}{\gamma+r+2n}n!\,(n-1)!\ldots 2!\,1!$$

En substituant cette valeur dans (40). Chap. IV, on trouve

$$F(\alpha,1,\gamma,x)=1+\cfrac{\alpha x}{\gamma-\cfrac{\gamma(\alpha+1)x}{\gamma+1-\cfrac{1.(\gamma-\alpha)x}{\gamma+2-\cfrac{(\gamma+1)(\alpha+2)x}{\gamma+3-\cfrac{2.(\gamma-\alpha+1)x}{\gamma+4-\ddots}}}}} \tag{1}$$

En appliquant, au contraire, la formule de la fonction réciproque [v. (54), Chap. IV], on trouve

$$F(\alpha,1,\gamma,x)=\cfrac{\gamma-1}{\gamma-1-\cfrac{\alpha(\gamma-1)x}{\gamma-\cfrac{1.(\gamma-\alpha)x}{\gamma+1-\cfrac{(\alpha+1)\gamma x}{\gamma+2-\cfrac{2.(\gamma-\alpha+1)x}{\gamma+3-\ddots}}}}} \tag{2}$$

ce qui est un cas particulier de la fraction continue de Gauss; d'ailleurs (1) n'est pas essentiellement différent de (2), à l'exception du commencement irrégulier. Les deux fractions continues sont convergentes dans tout le plan excepté sur l'axe des nombres réels de $+1$ à $+\infty$, et elles tendent vers les premiers membres.

Au contraire, en déterminant la valeur des coefficients différentiels réciproques de $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ dans le point $+1$ et en développant en fraction continue, on trouve

$$\cfrac{1-\gamma}{\alpha+1-\gamma-\cfrac{\alpha(\alpha+1-\gamma)(1-x)}{\alpha+2-\gamma-\cfrac{1.(2-\gamma)(1-x)}{\alpha+3-\gamma-\cfrac{(\alpha+1)(\alpha+2-\gamma)(1-x)}{\alpha+4-\gamma-\cfrac{2.(3-\gamma)(1-x)}{\ddots}}}}} \tag{3}$$

Après la formule (54), Chap. IV, on devait s'attendre à ce que cette fraction continue tendrait vers $F(\alpha, 1, \gamma, x)$; mais en comparant avec (2) on voit qu'elle est, en effet, ègale à

$$\frac{\gamma-1}{\gamma-\alpha-1} F(\alpha, 1, \alpha-\gamma+2, 1-x).$$

En essayant de développer une fonction en fraction continue par la méthode des différences réciproques, il arrive donc quelque fois, qu'on trouve une fraction continue qui est certainement convergente, mais qui tend vers une autre fonction que celle qu'on s'était proposée de développer. Il est connu que la même chose peut arriver relativement à la formule de TAYLOR[1] ou à la formule générale d'interpolation de NEWTON. La question, s'il n'y a pourtant pas un certain rapport entre la valeur de la fraction continue et la fonction qu'on essayait de développer en fraction continue se présente immédiatement. Pour étudier cela nous allons considérer les réduites de la fraction continue de GAUSS. On voit facilement que celles-ci sont:

$$\frac{V_1(0)\,V_2(n)-V_2(0)\,V_1(n)}{U_1(0)\,V_2(n)-U_2(0)\,V_1(n)} \quad \text{et} \quad \frac{V_1(0)\,U_2(n)-V_2(0)\,U_1(n)}{U_1(0)\,U_2(n)-U_2(0)\,U_1(n)} \tag{4}$$

où

$$U_1(n)=F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n, x) \qquad V_1(n)=F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1, x)$$

$$U_2(n)=\frac{\Gamma(\gamma+2n)}{\Gamma(\gamma-\alpha+n)\,\Gamma(\gamma-\beta+n)} F(\alpha+n, \beta+n, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$$

$$V_2(n)=\frac{\Gamma(\gamma+2n+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+n+1)\,\Gamma(\gamma-\beta+n)} F(\alpha+n, \beta+n+1, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x).$$

En posant maintenant $\beta=0$ on voit que $\dfrac{V_1(0)}{U_1(0)}$ est la fonction que nous avons ici essayée de développer en fraction continue, tandis que la valeur de la fraction continue est $\dfrac{V_2(0)}{U_2(0)}$.

§ **41.** Par la méthode des différences réciproques on peut encore développer la fonction hypergéométrique en une fraction continue de tout autre nature. Il est connu que la série hypergéométrique peut s'exprimer par des fonctions Γ, si $x=1$. On a

---

[1] v. JORDAN: Cours d'Analyse I, p. 269. 2ième édition.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Formons un tableau équi-distant de la fonction $[x]^m=\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-m+1)}$ et complétons celui-ci par les différences réciproques. On trouve

$$\begin{array}{llllll}
 & & \varrho & \varrho^2 & \varrho^3 & \varrho^4 \\
x-2 & [x-2]^m & & \frac{1+m}{1-m}[x-2]^m & & \frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x-2]^m \\
 & & \frac{1}{m}\,\frac{1}{[x-2]^{m-1}} & & \frac{2(2-m)}{m(1+m)}\,\frac{1}{[x-2]^{m-1}} & \\
x-1 & [x-1]^m & & \frac{1+m}{1-m}[x-1]^m & & \frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x-1]^m \\
 & & \frac{1}{m}\,\frac{1}{[x-1]^{m-1}} & & \frac{2(2-m)}{m(1+m)}\,\frac{1}{[x-1]^{m-1}} & \\
x & [x]^m & & \frac{1+m}{1-m}[x]^m & & \frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x]^m \\
 & & \frac{1}{m}\,\frac{1}{[x]^{m-1}} & & \frac{2(2-m)}{m(1+m)}\,\frac{1}{[x]^{m-1}} & \\
x+1 & [x+1]^m & & \frac{1+m}{1-m}[x+1]^m & & \frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x+1]^m \\
 & & \frac{1}{m}\,\frac{1}{[x+1]^{m-1}} & & \frac{2(2-m)}{m(1+m)}\,\frac{1}{[x+1]^{m-1}} & \\
x+2 & [x+2]^m & & \frac{1+m}{1-m}[x+2]^m & & \frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x+2]^m
\end{array}$$

généralement on trouve

$$\varrho^{2n}(x-n, x-n+1, \ldots x+n)=\frac{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}{(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}[x]^m \tag{5}$$

$$\varrho^{2n+1}(x-n, x-n+1, \ldots x+n+1)=\frac{(2-m)(3-m)\ldots(n+1-m)}{m(1+m)\ldots(n+m)}\,\frac{n+1}{[x]^{m-1}} \tag{5 bis}$$

ce qui se démontre facilement par l'induction, car en substituant (5) et (5 bis) dans la formule de récurrence:

$$\varrho^{2n+2}(x-n-1, \ldots x+n+1)=\varrho^{2n}(x-n, \ldots x+n)+$$
$$+\frac{2n+2}{\varrho^{2n+1}(x-n, \ldots x+n+1)-\varrho^{2n+1}(x-n-1, \ldots x+n)}$$

on trouve

$$\varrho^{2n+2}(x-n-1, \ldots x+n+1)=\frac{(1+m)\ldots(n+m)}{(1-m)\ldots(n-m)}[x]^m+$$
$$+\frac{2\,.\,m\,.\,(1+m)\ldots(n+m)}{(1-m)(2-m)\ldots(n+1-m)}[x]^m=\frac{(1+m)(2+m)\ldots(n+1+m)}{(1-m)(2-m)\ldots(n+1-m)}[x]^m \text{ etc.}$$

Si m est un nombre entier positif, $\begin{cases}\varrho^{2m-1}\\ \varrho^{2m}\end{cases}$ et toutes les différences réciproques plus élevées d'ordre $\begin{cases}\text{inégal}\\ \text{égal}\end{cases}$ deviennent $\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$. La fonction $[x]^m$ se réduit en ce cas à $x(x-1)\ldots(x-m+1)$.

Au contraire, si m est un nombre entier négatif $[x]^m$ devient égal à $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x-m)}$, tandis que $\begin{cases}\varrho^{-2m}\\ \varrho^{1-2m}\end{cases}$ et toutes les différences réciproques plus élevées d'ordre $\begin{cases}\text{égal}\\ \text{inégal}\end{cases}$ deviennent $\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$.

Nous allons interpoler dans ce tableau, en utilisant les différences situées sur une ligne oblique tombante partant de l'argument x, et nous trouverons la fraction continue

$$[x+z]^m=[x]^m\Bigl\{1+\cfrac{mz}{1.x+1.(1-m)+\cfrac{(1-m)(x-m+1)(z-1)}{3+2x-m+\cfrac{(1+m)(x+1)(z-2)}{3.(x+1)+2.(2-m)+\cfrac{(2-m)(x-m+2)(z-3)}{6+2x-m+\cfrac{(2+m)(x+2)(z-4)}{5(x+2)+3(3-m)+\ddots}}}}}$$

Au contraire, en utilisant les différences situées sur un zigzag horizontal partant de l'argument x, on trouve:

$$\frac{[x+z]^m}{[x]^m}=\frac{\Gamma(x+z+1)}{\Gamma(x+1)}\cdot\frac{\Gamma(x-m+1)}{\Gamma(x+z-m+1)}=1+\cfrac{z.m}{x+1-m+\cfrac{(z-1)(1-m)}{2+\cfrac{(z+1)(1+m)}{3(x+1-m)+\cfrac{(z-2)(2-m)}{2+\cfrac{(z+2)(2+m)}{5(x+1-m)+\ddots}}}}} \tag{6}$$

En changeant les notations cette fraction continue s'écrit

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=1+\cfrac{\alpha\beta}{\gamma-\cfrac{(1+\alpha)(1+\beta)}{2+\cfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{3\gamma-\cfrac{(2+\alpha)(2+\beta)}{2+\cfrac{(2-\alpha)(2-\beta)}{5\gamma-\ddots}}}}} \tag{7}$$

En interpolant la fonction réciproque on trouve de la même manière la fraction continue

$$F(\alpha, \beta, \gamma + \beta, 1) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{(-\alpha)\beta}{\gamma - \cfrac{(1+\alpha)(1-\beta)}{2 + \cfrac{(1-\alpha)(1+\beta)}{3\gamma - \cfrac{(2+\alpha)(2-\beta)}{2 + \cfrac{(2-\alpha)(2+\beta)}{5\gamma - \ddots}}}}}} \tag{8}$$

Pour étudier la convergence de (7) nous allons considérer les équations aux différences:

$$N_{2n+2} + (2n+1)\gamma N_{2n+1} + (n-\alpha)(n-\beta) N_{2n} = 0$$
$$N_{2n+1} - 2 N_{2n} - (n+\alpha)(n+\beta) N_{2n-1} = 0 .$$

En posant $N_{2n} = U(n)$, $N_{2n-1} = V(n)$ on déduit de ces équations par élimination les équations aux différences suivantes de $2^{\text{ième}}$ ordre

$$V(n+2) + \delta . (2n+1) V(n+1) - (n^2 - \alpha^2)(n^2 - \beta^2) V(n) = 0$$
$$(2n+1) U(n+2) + \{4\delta . (n+1) + 2n(n+2) - 2(\gamma + \alpha\beta - 1)\} U(n+1)$$
$$- (2n+3)(n+1+\alpha)(n+1+\beta)(n-\alpha)(n-\beta) U(n) = 0$$

où
$$\delta = 2\gamma - \alpha - \beta - 1 .$$

Par un calcul facile on voit qu'on peut déterminer les intégrales particulières $V_1(n)$, $V_2(n)$, $U_1(n)$, $U_2(n)$ de manière que

$$\frac{V_1(n)}{V_2(n)} \sim c_1 (-1)^n n^{-2\delta} \qquad \frac{U_1(n)}{U_2(n)} \sim c_2 (-1)^n n^{-2\delta-2}.$$

La fraction continue (7) tend donc vers $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$, si $\Re(\delta) > 0$, mais vers une autre fonction F_1, si $\Re(\delta) < -1$; au contraire, si $0 > \Re(\delta) > -1$, (7) oscillera, mais de manière que les réduites d'ordre pair tendent vers $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ et celles d'ordre impair vers F_1. Si $\Re(\delta) = 0$ ou si $\Re(\delta) = -1$, la fraction continue divergera.

En supprimant dans (7) toutes les deux réduites, on trouve la fraction continue remarquable

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta) - \Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta) + \Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} =$$

$$= \cfrac{\alpha\beta}{1 . \delta + \cfrac{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}{3\delta + \cfrac{(\alpha^2-2^2)(\beta^2-2^2)}{5\delta + \cfrac{(\alpha^2-3^2)(\beta^2-3^2)}{7\delta + \ddots}}}} \qquad \delta = 2\gamma - \alpha - \beta - 1 \tag{9}$$

qui est convergente pour toutes les valeurs de α, β et γ sauf pour celles qui satisfont à la condition $\Re(\delta)=0$; mais ce n'est que si $\Re(\delta)>0$ qu'elle tend vers le premier membre; en substituant $-\delta$ à δ la fraction continue ne fait que changer de signe.

§ 42. Nous allons maintenant considérer quelques-unes des transcendentes élémentaires et nous commencons par la fonction exponentielle. Soit a un nombre arbitraire; on peut former le tableau suivant de différences réciproques:

		ϱ	ϱ^2	ϱ^3	ϱ^4	ϱ^5
$x-2$	a^{x-2}		$-a^{x-2}$		a^{x-2}	
		$\frac{a^{2-x}}{a-1}$		$-\frac{2a^{2-x}}{a-1}$		$\frac{3a^{2-x}}{a-1}$
$x-1$	a^{x-1}		$-a^{x-1}$		a^{x-1}	
		$\frac{a^{1-x}}{a-1}$		$-\frac{2a^{1-x}}{a-1}$		$\frac{3a^{1-x}}{a-1}$
x	a^{x}		$-a^{x}$		a^{x}	
		$\frac{a^{-x}}{a-1}$		$-\frac{2a^{-x}}{a-1}$		$\frac{3a^{-x}}{a-1}$
$x+1$	a^{x+1}		$-a^{x+1}$		a^{x+1}	
		$\frac{a^{-x-1}}{a-1}$		$-\frac{2a^{-x-1}}{a-1}$		$\frac{3a^{-x-1}}{a-1}$
$x+2$	a^{x+2}		$-a^{x+2}$		a^{x+2}	

généralement on a

$$\varrho^{2n}(x-n,\ x-n+1,\ \dots x+n)=(-1)^n a^x$$

$$\varrho^{2n+1}(x-n,\ x-n+1,\ \dots x+n+1)=(-1)^n\frac{n+1}{(a-1)a^x}\cdot$$

En utilisant pour l'interpolation les différences sur une ligne oblique tombante on trouve la fraction continue suivante

$$a^z=1+\cfrac{z(a-1)}{1-\cfrac{(z-1)(a-1)}{a+1+\cfrac{(z-2)a(a-1)}{1a+2-\cfrac{(z-3)(a-1)}{a+1+\cfrac{(z-4)a(a-1)}{2a+3-\cfrac{(z-5)(a-1)}{a+1+\ddots}}}}}}$$

Au contraire, en faisant usage des différences réciproques sur une ligne horizontale partant de l'argument x on trouve

$$a^z = 1 + \cfrac{z(a-1)}{1 - \cfrac{(z-1)(a-1)}{2 + \cfrac{(z+1)(a-1)}{3 - \cfrac{(z-2)(a-1)}{2 + \cfrac{(z+2)(a-1)}{5 - \cfrac{(z-3)(a-1)}{2 + \ddots}}}}}} \qquad (10)$$

Pour étudier la convergence de cette fraction continue nous allons considérer le système d'équations aux différences:

$$\begin{aligned} N_{2n+2} &= (2n+1) N_{2n+1} + (z+n)(a-1) N_{2n} \\ N_{2n+1} &= \quad 2 N_{2n} \quad - (z-n)(a-1) N_{2n-1}. \end{aligned}$$

En posant ici $N_{2n} = u(n)$, $N_{2n-1} = v(n)$ on dérive facilement par élimination

$$(2n-1) u(n+1) + \{2 + 2z(a-1) - 4n^2(a-1)\} u(n) \\ - (a-1)^2 (2n+1)(z-n)(z+n-1) u(n-1) = 0 \quad (11)$$

$$v(n+2) - (2n+1)(a+1) v(n+1) + (n^2 - z^2)(a-1)^2 v(n) = 0 \qquad (12)$$

Ces deux équations ont la même équation caractéristique, à savoir

$$t^2 - 2(a+1) t + (a-1)^2 = 0$$

dont les racines sont $t = a + 1 \pm 2\sqrt{a}$, en désignant par $\sqrt{a}$ la valeur de la racine carrée dont la partie réelle est positive. Le rapport entre ces racines est

$$\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2.$$

Si a est 0 ou négatif et réel, le module de cette quantité est égal à 1, mais pour toutes les autres valeurs de a plus petit que 1. Pour étudier aussi comment se comporte la fraction continue pour des valeurs réelles négatives de a, il faut former la transformée de LAPLACE de (11) et de (12) et en déterminer les racines ϱ_1 et ϱ_2 des équations déterminantes relativement aux deux points singuliers $(1+\sqrt{a})^2$ et $(1-\sqrt{a})^2$; on trouve alors que $\varrho_1 - \varrho_2$ est 0. (10) *et donc divergente si a est négatif réel, mais convergente pour toute autre valeur de a et pour toutes les valeurs de z.* Mais il reste encore à démontrer que la fraction continue tend réellement vers la fonction exponentielle. Posons dans (7) $\alpha = n$, $\beta = -z$ et $\gamma = \frac{n}{1-a}$ et faisons tendre n vers l'infini, $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ devient égale à

$$1-\frac{z}{1}(1-a)+\frac{z(z-1)}{1.2}(1-a)^2-\cdots=a^z$$

tandis que les deux fractions continues coïncident.

En supprimant dant (10) toutes les deux réduites, on trouve:

$$\frac{a^z-1}{a^z+1}=\cfrac{kz}{1+\cfrac{k^2(z^2-1^2)}{3+\cfrac{k^2(z^2-3^2)}{5+\cfrac{k^2(z^2-5^2)}{7+\cfrac{k^2(z^2-7^2)}{9+\ddots}}}}}\qquad \text{où}\quad k=\frac{a-1}{a+1} \tag{13}$$

La $n^{\text{ième}}$ réduite de cette fraction continue est

$$\frac{T_n}{N_n}=\frac{\frac{\Gamma(n+z)}{\Gamma(1+z)}F\left(n+z,\ n,\ 1+z,\ \frac{1}{a}\right)-\frac{\Gamma(n-z)}{\Gamma(1-z)}F\left(n-z,\ n,\ 1-z,\ \frac{1}{a}\right)}{\frac{\Gamma(n+z)}{\Gamma(1+z)}F\left(n+z,\ n,\ 1+z,\ \frac{1}{a}\right)+\frac{\Gamma(n-z)}{\Gamma(1-z)}F\left(n-z,\ n,\ 1-z,\ \frac{1}{a}\right)}.$$

On en déduit de plus

$$\frac{N_n+T_n}{N_n-T_n}=\frac{\Gamma(1-z)\,\Gamma(n+z)}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(n-z)}\,\frac{F\left(n+z,\ n,\ 1+z,\ \frac{1}{a}\right)}{F\left(n-z,\ n,\ 1-z,\ \frac{1}{a}\right)}.$$

Déterminons maintenant les coefficients différentiels réciproques de la fonction exponentielle e^x. Ici deux formes différentes se présentent suivant que l'ordre est pair ou impair. On trouve

$$r_x^{2n}e^x=(-1)^n e^x \qquad r_x^{2n-1}e^x=(-1)^{n-1}n\,e^{-x}.$$

La fraction continue de THIELE donne alors

$$e^x=1+\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{5-\cfrac{x}{2+\ddots}}}}}} \tag{14}$$

Cette fraction continue se déduit aussi en posant dans (41), Chap. III, $\beta = 0$, $\gamma = 1$; car $e^x = 1 + xF\left(1, k, 2, \frac{x}{k}\right)$; (14) est convergent pour *toutes* les valeurs de x.

Mais on peut aussi déterminer les coefficients différentiels réciproques par rapport à $\frac{1}{x}$; par la formule (64), Chap. IV, on trouve facilement

$$r_x r_x^{2n} e^{\frac{1}{x}} = (-1)^{n+1} x^2 e^{-\frac{1}{x}} q_n^2 \qquad r_x r_x^{2n-1} e^{\frac{1}{x}} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{n \cdot q_{n-1} q_n}$$

où

$$q_n = F(-n, 1+n, k, -kx)$$

et par cela la fraction continue

$$e^{\frac{1}{x+z}} = e^{\frac{1}{x}} \left\{ 1 - \cfrac{z}{1 \cdot x^2 q_0 + \cfrac{q_1 z}{2 - \cfrac{q_0 z}{3 \cdot x^2 q_1 + \cfrac{q_2 z}{2 - \cfrac{q_1 z}{5 \cdot x^2 q_2 + \cfrac{q_3 z}{2 - \ddots}}}}}} \right.$$

Les coefficients de la fraction continue s'expriment donc par des fonctions besseliennes, mais non pas d'une manière très simple. Au contraire, en supprimant toutes les deux réduites, on trouve

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+z}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x+z}}} = \cfrac{z}{2x(x+z) + \cfrac{z^2}{6x(x+z) + \cfrac{z^2}{10x(x+z) + \cfrac{z^2}{14x(x+z) + \ddots}}}} \tag{15}$$

On peut encore développer la fonction exponentielle dans une autre fraction continue remarquable. Car en posant dans (25), Chap. III, $\alpha = k$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $x = \frac{x}{k}$, on trouve

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{2}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{3}{1 - \cfrac{x}{\ddots}}}}}}}} \tag{16}$$

En supprimant toutes les deux réduites on trouve

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - x + \cfrac{1 \cdot x}{2 - x + \cfrac{2 \cdot x}{3 - x + \cfrac{3 \cdot x}{4 - x + \cfrac{4 \cdot x}{5 - x + \ddots}}}} \tag{17}$$

Les nominateurs et les dénominateurs des réduites de cette fraction continue sont

$$x N_n(x) = \Gamma(n + 1) - e^{-x} Q(-x, n + 1)$$

$$T_n(x) = e^{-x} Q(-x, n + 1)$$

en désignant par $Q(x, n)$ la fonction Q de M. Prym:

$$Q(x, n) = \int_x^\infty e^{-t} t^{n-1} dt .$$

Comme maintenant, pour des valeurs entières positives de n, on a

$$Q(x, n) = (n - 1)!\, e^{-x} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{s!}$$

on trouve facilement

$$N_n(x) = n! \left\{1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!}\right\}$$

$$T_n(x) = n! \left\{1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!}\right\} .$$

On voit que

$$\lim_{n=\infty} \frac{T_n(x)}{N_n(x)} = \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}(1 - e^{-x})} = \frac{x}{e^x - 1} ;$$

(17) est donc convergent dans tout le plan.

§ **43.** Nons allons maintenant considérer la fonction $\operatorname{tg} x$ en formant d'abord le schéma suivant de différences reciproques:

$$
\begin{array}{llll}
 & & \rho & \rho^2 \\
x-2a & \operatorname{tg}(x-2a) & & \\
 & & \frac{a}{2\sin a}\{\cos a+\cos(2x-3a)\} & \\
x-a & \operatorname{tg}(x-a) & & -\cot(x-a) \\
 & & \frac{a}{2\sin a}\{\cos a+\cos(2x-a)\} & \\
x & \operatorname{tg}(x) & & -\cot x \\
 & & \frac{a}{2\sin a}\{\cos a+\cos(2x+a)\} & \\
x+a & \operatorname{tg}(x+a) & & -\cot(x+a) \\
 & & \frac{a}{2\sin a}\{\cos a+\cos(2x+3a)\} & \\
x+2a & \operatorname{tg}(x+2a) & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\
 & \frac{a}{2\sin a}\{2^2\cos a-2\cos(2x-3a)\} & & \frac{a}{2\sin a}\{3^2\cos a-3\cos(2x-3a)\} \\
-\cot(x-a) & & \operatorname{tg}(x-a) & \\
 & \frac{a}{2\sin a}\{2^2\cos a-2\cos(2x-a)\} & & \frac{a}{2\sin a}\{3^2\cos a-3\cos(2x-a)\} \\
-\cot x & & \operatorname{tg} x & \\
 & \frac{a}{2\sin a}\{2^2\cos a-2\cos(2x+a)\} & & \frac{a}{2\sin a}\{3^2\cos a-3\cos(2x+a)\} \\
-\cot(x+a) & & \operatorname{tg}(x+a) & \\
 & \frac{a}{2\sin a}\{2^2\cos a-2\cos(2x+3a)\} & & \frac{a}{2\sin a}\{3^2\cos a-3\cos(2x+3a)\}
\end{array}
$$

Si l'on interpole dans ce tableau, en faisant usage des différences qui se trouvent à un zigzag horizontal partant de l'argument x, on trouve la fraction continue d'interpolation:

$$
\operatorname{tg}(x+az)=\operatorname{tg}x\Big\{1+\cfrac{z\sin a\operatorname{cosec}x}{\cos(x+a)-\cfrac{(z-1)\sin a\sin x}{1-\cfrac{(z+1)\sin a\cos x}{3\sin(x+a)+\cfrac{(z-2)\sin a\cos x}{1+\cfrac{(z+2)\sin a\sin x}{5\cos(x+a)-\cfrac{(z-3)\sin a\sin x}{1-\ddots}}}}}}
$$

En supprimant toutes les deux réduites, celle-ci se simplifie essentiellement; on trouve

$$\operatorname{tg} a z = \cfrac{z \operatorname{tg} a}{1 - \cfrac{(z^2 - 1^2)\operatorname{tg}^2 a}{3 - \cfrac{(z^2 - 2^2)\operatorname{tg}^2 a}{5 - \cfrac{(z^2 - 3^2)\operatorname{tg}^2 a}{7 - \cfrac{(z^2 - 4^2)\operatorname{tg}^2 a}{9 - \ddots}}}}} \tag{18}$$

Cette fraction continue peut aussi se déduire de (13) en substituant e^{2ia} à a. On voit donc que (18) converge pour toutes les valeurs de z et a, pourvu que a ne soit de la forme $\frac{\pi}{2} + p\pi$ où p est un nombre entier.

On peut aussi déduire la fraction continue de LAMBERT par cette méthode. En effet, on trouve pour les coefficients différentiels réciproques les valeurs suivantes

$$r_x r_x^{2n} \operatorname{tg} x = \cos^2\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \qquad r_x r_x^{2n+1} \operatorname{tg} x = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sin 2x}.$$

Et par-là la fraction continue:

$$\operatorname{tg}(x+z) = \operatorname{tg}(x)\left\{1 + \cfrac{z \operatorname{cosec}^2 x}{\cot x - \cfrac{z}{1 - \cfrac{z}{3 \operatorname{tg} x + \cfrac{z}{1 + \cfrac{z}{5 \cot x - \cfrac{z}{1 - \ddots}}}}}}\right.$$

En supprimant ici toutes les deux réduites on trouve

$$\operatorname{tg} z = \cfrac{z}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7 - \cfrac{z^2}{9 - \ddots}}}}} \tag{19}$$

qui est convergente dans tout le plan.

§ **44.** Les coefficients différentiels réciproques de $\operatorname{arctg} x$ sont un peu moins simples. En désignant par $P^{(n)}(x)$ les polynômes de LEGENDRE je dis qu'on a

$$r_x r_x^{2n} \operatorname{arctg}(x) = (1 + x^2)\{P^{(n)}(ix)\}^2 \tag{20}$$

$$r_x r_x^{2n+1} \operatorname{arctg}(x) = \frac{i}{2(n+1)^2 P^{(n)}(ix) P^{(n+1)}(ix)} \tag{21}$$

Pour vérifier ces formules, il faut déterminer la dérivée de $P^{(n)}(x)$ comme fonction de $P^{(n)}(x)$ et $P^{(n-1)}(x)$. Je dit qu'on a la relation:

$$(x^2-1) D_x P^{(n)}(x) = n[xP^{(n)}(x) - P^{(n-1)}(x)] = (n+1)[P^{(n+1)}(x) - xP^{(n)}(x)]. \tag{22}$$

En effet, en différentiant la formule de récurrence de la fonction sphérique

$$(n+1) P^{(n+1)}(x) - (2n+1) x P^{(n)}(x) + n P^{(n-1)}(x) = 0$$

on trouve

$$(n+1) D_x P^{n+1}(x) - (2n+1) P^n(x) - (2n+1) x D_x P^{(n)}(x) + n D_x P^{(n-1)}(x) = 0$$

en éliminant $D_x P^{(n)}(x)$ et $D_x P^{(n-1)}(x)$ par la formule (22), on trouve

$$(x^2-1) D_x P^{(n+1)}(x) = (n+1)[x P^{(n+1)}(x) - P^{(n)}(x)]$$

d'où on peut conclure que (22) est valable pour toutes valeurs de n. Considérons enfin la quantité

$$D_x[P^{(n)}(x) \, . \, P^{(n+1)}(x)] \, .$$

En effectuant la différentiation et en éliminant les coefficients différentiels par (22) on trouve la relation

$$\frac{x^2-1}{n+1} D_x\{P^{(n)}(x) \, . \, P^{(n+1)}(x)\} = \{P^{(n+1)}(x)\}^2 - \{P^{(n)}(x)\}^2 \tag{23}$$

Les expressions (20) et (21) se démontrent facilement par voie d'induction, car en substituant celles-ci dans la formule

$$D_x r_x^{2n+2} \varphi(x) = D_x r_x^{2n} \varphi(x) + (2n+2) D_x r_x r_x^{2n+1} \varphi(x) \tag{24}$$

on trouve

$$D_x r_x^{2n+2} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{(1+x^2)\{P^{(n)}(ix)\}^2} - \frac{1}{1+x^2} \frac{\{P^{(n+1)}(ix)\}^2 - \{P^{(n)}(ix)\}^2}{\{P^{(n)}(ix)\}^2 \, . \, \{P^{(n+1)}(ix)\}^2}$$

d'où

$$r_x r_x^{2n+2} \operatorname{arctg} x = (1+x^2)\{P^{(n+1)}(ix)\}^2. \tag{25}$$

Afin de démontrer aussi (21) nous écrivons $n+\frac{1}{2}$ au lieu de n dans (24) et nous substituons les expressions (25) et (21) dans celle-ci; on trouve

$$D_x r_x^{2n+3} \operatorname{arctg} x = -2i(n+1)^2 P^{(n)}(ix)\,.\,P^{(n+1)}(ix) + (2n+3)\,2x\{P^{(n+1)}(ix)\}^2 + \\ + 2(2n+3)(1+x^2)\,P^{(n+1)}(ix)\,D_x P^{(n+1)}(ix)$$

$$= 2i(n+1)(n+2)\,P^{(n)}(ix)\,P^{(n+1)}(ix) + 2x(2n+3)(n+2)\{P^{(n+1)}(ix)\}^2$$

$$= -2i(n+2)^2 P^{(n+1)}(ix)\,P^{(n+2)}(ix) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Des expressions (20) et (21) nous pouvons maintenant déduire la fraction continue suivante

$$\operatorname{arctg}(x+z) = \operatorname{arctg} x + \cfrac{z}{1+x^2+\cfrac{1.z.P^{(1)}(ix)}{i+\cfrac{1.z.P^{(0)}(ix)}{3(1+x^2)P^{(1)}(ix)+\cfrac{2.z.P^{(2)}(ix)}{i+\cfrac{2.z.P^{(1)}(ix)}{5(1+x^2)P^{(2)}(ix)+\cfrac{3.z.P^{(3)}(ix)}{i+\ddots}}}}}} \tag{26}$$

On peut simplifier cette fraction continue essentiellement en supprimant toutes les deux réduites; les fonctions sphériques disparaissent entièrement; on trouve:

$$\operatorname{arctg}(x+z) = \operatorname{arctg} x + \cfrac{z}{1\cdot q+\cfrac{z^2.1^2}{3\cdot q+\cfrac{z^2.2^2}{5\cdot q+\cfrac{z^2.3^2}{7\cdot q+\cfrac{z^2.4^2}{9\cdot q+\ddots}}}}} \tag{27}$$

où

$$q = 1 + x^2 + xz\,.$$

En posant ici $x = 0$ on trouve la fraction continue qui a servi de base à Gauss dans ses recherches sur les quadratures:

$$\operatorname{arctg} z = \cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{2^2z^2}{5+\cfrac{3^2z^2}{7+\ddots}}}}$$

qui est convergente dans tout le plan excepté sur l'axe des nombres imaginaires de $+i$ à $+i\infty$ et de $-i$ à $-i\infty$.

§ 45. La fonction Ψ de Gauss donne un des plus beaux exemples d'un développement en fraction continue par la méthode des différences réciproques. Celle-ci se définit par l'équation:

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} ;$$

de l'équation aux différences de la fonction Γ on déduit:

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}$$

nous pouvons donc former le schéma suivant de différences réciproques:

$$\begin{array}{cccccccc}
x-2 & \Psi(x-2) & & \Psi(x-2)+2 & & \Psi(x-2)+2(1+\frac{1}{2}) & & \\
 & & x-2 & & 2^2(x-2) & & 3^2(x-2) & \\
x-1 & \Psi(x-1) & & \Psi(x-1)+2 & & \Psi(x-1)+2(1+\frac{1}{2}) & & \\
 & & x-1 & & 2^2(x-1) & & 3^2(x-1) & \\
x & \Psi(x) & & \Psi(x)+2 & & \Psi(x)+2(1+\frac{1}{2}) & & \\
 & & x & & 2^2 x & & 3^2 x & \\
x+1 & \Psi(x+1) & & \Psi(x+1)+2 & & \Psi(x+1)+2(1+\frac{1}{2}) & & \\
 & & x+1 & & 2^2(x+1) & & 3^2(x+1) & \\
x+2 & \Psi(x+2) & & \Psi(x+2)+2 & & \Psi(x+2)+2(1+\frac{1}{2}) & &
\end{array}$$

Par voie d'induction on démontre facilement qu'on a généralement

$$\varrho^{2n-1}(x-n+1,\ x-n+2,\ \ldots\ x+n) = n^2 x$$

$$\varrho^{2n}(x-n,\ x-n+1,\ \ldots\ x+n) = \Psi(x) + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}\right).$$

En appliquant pour l'interpolation dans ce tableau les différences réciproques situées sur un zigzag horizontal, on trouve

$$\Psi(z+x) = \Psi(x) + \cfrac{z}{x + \cfrac{z-1}{\frac{2}{1} + \cfrac{z+1}{3x + \cfrac{z-2}{\frac{2}{2} + \cfrac{z+2}{5x + \cfrac{z-3}{\frac{2}{3} + \ddots}}}}}} \tag{28}$$

On aurait aussi pu déduire cette fraction continue d'une autre manière, car de (7) on obtient

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)-\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\alpha\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}=\cfrac{\beta}{\gamma-\cfrac{(1+\alpha)(1+\beta)}{2+\cfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{3\gamma-\ddots}}}$$

en faisant tendre ici α vers o, on trouve

$$\Psi(\gamma)-\Psi(\gamma-\beta)=\cfrac{\beta}{\gamma-\cfrac{\beta+1}{\frac{2}{1}-\cfrac{\beta-1}{3\gamma-\cfrac{\beta+2}{\frac{2}{2}-\ddots}}}} \tag{29}$$

En posant maintenant $\gamma=x$, $\beta=-z$ on trouve précisément la fraction continue (28). Celle-ci est valable, si $\Re(2x+z-1)>0$. En supprimant dans (28) toutes les deux réduites, on trouve

$$\Psi(x+z)=\Psi(x)+\cfrac{2.z}{1.\delta-\cfrac{1^2(z^2-1^2)}{3.\delta-\cfrac{2^2(z^2-2^2)}{5.\delta-\cfrac{3^2(z^2-3^2)}{7.\delta-\ddots}}}}\qquad \Re(\delta)>0 \tag{30}$$

où $\delta=2x+z-1$.

En substituant $-\delta$ à δ la fraction continue change de signe, elle tende donc vers $\Psi(1-x-z)-\Psi(1-x)$ si $\Re(\delta)<0$; en se rappelant l'identité

$$\Psi(1-x)-\Psi(x)=\pi\cot\pi x$$

cette expression s'écrit

$$\Psi(x+z)+\pi\cot\pi(x+z)-[\Psi(x)+\pi\cot\pi(x)]$$

mais on voit que le tableau est satisfait par $\Psi(x)+\pi\cot\pi x$ aussi bien que par $\Psi(x)$.

Comme

$$\lim_{z=0}\frac{\Psi(z+x)-\Psi(x)}{z}=D_x\Psi(x)$$

on déduit de (28)

$$D_x \Psi(x) = \cfrac{1}{x - \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{1^2}{3x - \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{2^2}{5x - \cfrac{3^2}{2 + \ddots}}}}}} \qquad \Re(x) > \tfrac{1}{2}.$$

Pourtant il y a bien des objections à faire contre cette démonstration. Mais on vérifie facilement l'exactitude du formule, car en transformant la fraction continue en série de puissances on trouve la série asymptotique bien connue

$$D_x \Psi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{B_1}{x^3} - \frac{B_2}{x^5} + \frac{B_3}{x^7} - \frac{B_4}{x^9} + \cdots$$

où $B_1, B_2, B_3, \cdots$ sont les nombres de Bernoulli.

En supprimant toutes les deux réduites on trouve

$$D_x \Psi\left(\frac{1+x}{2}\right) = \cfrac{1}{1 \cdot x + \cfrac{1^4}{3 \cdot x + \cfrac{2^4}{5 \cdot x + \cfrac{3^4}{7 \cdot x + \cfrac{4^4}{9 \cdot x + \ddots}}}}} \tag{31}$$

Mais la fraction continue tend seulement vers le premier membre quand la partie réelle de x est positive.

§ 46. On peut aussi appliquer la formule (28) pour développer

$$2\beta(x) = \Psi\left(\frac{1+x}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right) = 2\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \qquad \Re(x) > 0$$

en fraction continue.

En posant dans (28) $z = \frac{1}{2}$ et en écrivant $\frac{x}{2}$ au lieu de x, on trouve

$$2\beta(x) = \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x - \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{x - \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{x - \ddots}}}}}}} \tag{32}$$

En posant, au contraire, $z = -\frac{1}{2}$ et en écrivant $\frac{x+1}{2}$ au lieu de x, on trouve

$$2\beta(x) = \cfrac{1}{x+1-\cfrac{3}{\cfrac{2}{1}+\cfrac{1}{3(x+1)-\cfrac{5}{\cfrac{2}{2}+\cfrac{3}{5(x+1)-\cfrac{7}{\cfrac{2}{3}+\cfrac{5}{7(x+1)\ddots}}}}}}} \tag{33}$$

Ces deux fractions continues sont valables si $\Re(x) > \frac{1}{2}$; en supprimant dans (32) les réduites paires et en écrivant $\frac{1+x}{2}$ au lieu de x, on trouve

$$\beta\left(\frac{1+x}{2}\right) = \cfrac{1}{x+\cfrac{1^2}{x+\cfrac{2^2}{x+\cfrac{3^2}{x+\cfrac{4^2}{x+\ddots}}}}} \qquad \Re(x) > 0 \tag{34}$$

en supprimant, au contraire, les réduites impaires et en écrivant $\frac{x}{2}$ au lieu de x, on trouve

$$x\beta\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cfrac{1}{x+\cfrac{1\cdot 2}{x+\cfrac{2\cdot 3}{x+\cfrac{3\cdot 4}{x+\cfrac{4\cdot 5}{x+\ddots}}}}} \qquad \Re(x) > 0 \tag{35}$$

En transformant (32) à une série de puissances[1] on trouve

$$\beta(x) = \frac{1}{2x} + \frac{2^2-1}{2}B_1\frac{1}{x^2} - \frac{2^4-1}{4}B_2\frac{1}{x^4} + \frac{2^6-1}{6}B_3\frac{1}{x^6} - \frac{2^8-1}{8}B_4\frac{1}{x^8} + \cdots \tag{36}$$

où $B_1, B_2, B_3, \cdots$ sont les nombres de Bernoulli.

---

[1] Dans les Ann. de la Fac. de Toulouse t. III. Stieltjes a indiqué une méthode assez simple d'après laquelle on peut exécuter une telle transformation.

Il est à remarquer, que tandis que (35) ne tend vers $x\beta\left(\frac{x}{2}\right)$ que si $\Re(x) > 0$, cette fraction continue correspond dans tout le plan à la série asymptotique (36), ce qu'on voit facilement en substituant $-x$ à x.

Copenhague 1907, septembre.

Note.

Dans un traité sur l'interpolation que M. T. N. Thiele vient de publier (Interpolationsrechnung. Leipzig 1909) on trouvera une exposition fort claire des fondements de la théorie des différences réciproques. M. Thiele y indique aussi formellement plusieurs des développements en fractions continues dont nous avons étudié la convergence dans le dernier chapitre.

Comme travaux se rapportant à des questions connexes à celles qui sont étudiées dans le présent mémoire et qui ont paru pendant l'impression de celui-ci je signale encore:

M. Galbrun: Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable, C. R. Ac. Sc. 5 avril 1909.

R. de Montessus: Les fractions continues algébriques. Acta mathematica t. 32, p. 257.

Émile Padé: Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions. Annales de l'école normale (3) 24 (1907) p. 341.
