# DIVERGENZCHARACTERE GEWISSER DIRICHLET'SCHER REIHEN.

Von

KONRAD KNOPP

in Nagasaki.

In seiner Arbeit »Über den Divergenzcharacter gewisser Potenzreihen»[1] hat Herr Pringsheim über das Verhalten von Potenzreihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze sehr weitgehende Sätze bewiesen, die es bisher erst zum kleinen Teil auf Dirichlet'sche Reihen zu übertragen gelungen ist. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, diese Übertragung — im Wesentlichen unter Beibehaltung der Pringsheim'schen Methoden — für die hauptsächlichsten seiner Resultate durchzuführen.

## § 1.

Es seien

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^x} \tag{1}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} \tag{2}$$

zwei Dirichlet'sche Reihen mit der Grenzgeraden

$$R(x) = \lambda \qquad (\lambda \geq 0)^{2}$$

und zwar möge die Reihe (1) für $x = \lambda$ konvergieren, während die Reihe (2) in der Weise divergieren soll, dass,

---

[1] Acta mathematica, Bd. XXVIII (1904), S. 1—30.

[2] Die Annahme $\lambda \geqq 0$ bedeutet keine sachliche Einschränkung, erweist sich aber im Folgenden als vorteilhaft.

$$d_\nu = \delta_\nu + \delta'_\nu i$$

gesetzt, wenigstens eine der Reihen

$$\sum \frac{\delta_\nu}{\nu^\lambda} \quad \text{und} \quad \sum \frac{\delta'_\nu}{\nu^\lambda}$$

nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert. —

Dann hat Herr CAHEN[1] als Analogon zu dem entsprechenden Abel'schen Grenzwertsatz über Potenzreihen bekanntlich bewiesen, dass

$$\lim_{\varrho=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^\varrho} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^\lambda} \tag{3}$$

ist, wenn $\varrho$, durch reelle Werte abnehmend, sich dem Werte $\lambda$ nähert. Von diesem Satz gilt die leicht beweisbare[2] Umkehrung, dass

$$\lim_{\varrho=\lambda} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^\varrho} \right| = +\infty, \tag{4}$$

wenn $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$ eine Reihe der Art (2) bezeichnet, und $\varrho$ sich ebenso wie bei (3) dem Werte $\lambda$ nähert.

Herr CAHEN hat nun ferner gezeigt[1] und es soll weiter unten von neuem bewiesen werden, dass bei dem Satze (3) die Annäherung längs der reellen Achse an den Punkt $\lambda$ keinen wesentlichen Teil des Satzes ausmacht, wie dies in entsprechender Weise für Potenzreihen von STOLZ[3] bewiesen worden ist. Vielmehr bleibt die Beziehung (3) bestehen, wenn sich die Variable auf einem beliebigen Wege dem Werte $\lambda$ nähert, wofern dieser Weg nur ganz in einem vom Punkte $\lambda$ ausgehenden Winkelraume liegt, dessen Schenkel je einen spitzen Winkel $\varphi_0$ mit der positiven Richtung der Axe des Reellen bilden. Eine Annäherung in diesem Winkelraume, den wir kurz den Winkelraum $\Delta$ nennen wollen, an die Stelle $\lambda$ soll im Folgenden durch

$$\lim x = \lambda \tag{5}$$

im Gegensatz zu der längs der reellen Achse erfolgenden Annäherung

---

[1] Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et sur des fonctions analogues [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Sér. III, Bd. XI (1894), S. 75—164], S. 86—87.

[2] KNOPP, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze [Inaugural-Dissertation, Berlin (1907), S. 1—50], S. 39—40.

[3] Beweis einiger Sätze über Potenzreihen [Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XX (1875), S. 369—376].

$$\lim \varrho = \lambda$$

bezeichnet werden. Es lässt sich also, wie gesagt, neben (3) der weitergehende Satz

$$\lim_{x=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^\lambda} \tag{6}$$

beweisen. Bei der Umkehrung (4) dieses Satzes liegt es indessen anders; hier bildet die Annäherung $\lim \varrho = \lambda$ einen wesentlichen Bestandteil des Satzes, selbst wenn man die Koeffizienten $d_\nu$ sämtlich positiv voraussetzt. Die folgende dem Pringsheim'schen Beispiel nachgebildete Reihe mag dies erläutern:

Aus

$$\zeta(1 + x) = 1 + \frac{1}{2^{1+x}} + \cdots + \frac{1}{\nu^{1+x}} + \cdots$$

bilde ich die Funktion

$$\varphi(x) = e^{\zeta^2(1+x)} = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tau(\nu)}{\nu^{1+x}}},$$

wo $\tau(\nu)$ die Anzahl aller Teiler von $\nu$ bezeichnet. Die Reihe $\sum \frac{\tau(\nu)}{\nu^{1+x}}$ ist bekanntlich für $R(x) > 0$ konvergent, und es ist daher auch die Dirichlet'sche Reihe, in die sich $\varphi(x)$ entwickeln lässt, nämlich

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= e\left[1 + \left(\frac{2}{2^{1+x}} + \cdots + \frac{\tau(\nu)}{\nu^{1+x}} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{2^{1+x}} + \cdots\right)^2 + \cdots\right] \\ &= e\left[1 + \frac{2}{2^{1+x}} + \frac{2}{3^{1+x}} + \frac{5}{4^{1+x}} + \cdots\right]\end{aligned}$$

im Gebiet $R(x) > 0$ konvergent. Die Reihe hat überdies nur positive Koeffizienten und muss für $x = 0$ in eine divergente Reihe übergehen, da gemäss der Definition von $\varphi(x)$

$$\lim_{\varrho=0} \varphi(\varrho) = +\infty$$

ist, was der im Falle der Konvergenz der ebengenannten Reihe stattfindenden Beziehung (3) widersprechen würde. Trotzdem aber hat die Funktion $\varphi(x)$ bei gewissen Annäherungen an die Stelle 0 innerhalb des Winkelraumes $\varDelta$ einen endlichen Grenzwert, wie sich folgendermassen zeigen lässt:

$\zeta^2(1 + x)$ gestattet bekanntlich die Darstellung

$$\zeta^2(1 + x) = \frac{h(x)}{x^2},$$

wo $h(x)$ eine in der *Umgebung* von $x = 0$ reguläre Funktion bezeichnet, die im Punkte $x = 0$ den Wert $1$ hat. Bei der Annäherung an die Stelle $0$ verhält sich daher die Funktion $\varphi(x)$ genau so wie die Funktion

$$e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Setzt man nun

$$x = \delta(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

so ist

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\delta^2}(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi)$$

und folglich

$$\left|e^{\frac{1}{x^2}}\right| = e^{\frac{1}{\delta^2}\cos 2\varphi}.$$

Nähert man sich also der Stelle $x = 0$ auf einem Strahle, der mit der Achse des Positiv-Reellen einen zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Winkel einschliesst, so nähert sich

$$e^{\frac{1}{x^2}}$$

und also auch $\varphi(x)$ dem Werte $0$. —

Will man also den Satz (4) im Sinne der Gleichung (6) erweitern, so wird man den Koeffizienten $d_\nu$ gewisse Beschränkungen auferlegen müssen. Solche Beschränkung würde etwa die Annahme

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|} \geqq \alpha > 0 \tag{7}$$

für alle im Winkelraum $\varDelta$ hinreichend nahe an $\lambda$ gelegenen Werte von $x$ sein, wofern gleichzeitig die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^\lambda}\right|$$

divergiert. Denn wegen

$$\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = \frac{|d_\nu|}{\nu^{R(x)}}$$

hat man nach (4) wegen der Divergenz von $\sum\left|\frac{d_\nu}{\nu^\lambda}\right|$

$$\lim_{x=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = \lim_{\varrho=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|d_\nu|}{\nu^\varrho} = +\infty.$$

Gleichzeitig mit dem Nenner muss dann aber wegen der Annahme (7) auch der Zähler unendlich werden, d. h. man hat auch

$$\lim_{x=\lambda} \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = +\infty.$$

Im Anschluss an Herrn PRINGSHEIM, will ich von einer Dirichlet'schen Reihe $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$, die der Bedingung (7) genügt und für die $\sum \left|\frac{d_\nu}{\nu^\lambda}\right|$ divergiert, sagen, sie ginge bei $x=\lambda$ *gleichmässig* zur Divergenz über, oder kurz, sie *divergiere gleichmässig* bei $x=\lambda$. Es gilt dann also der Satz:

*Satz I.* »Wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}$ bei $x=\lambda$ gleichmässig divergiert, so ist neben

$$\lim_{\varrho=\lambda} \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^\varrho}\right| = +\infty$$

auch

$$\lim_{x=\lambda} \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = +\infty.\text{»} \tag{8}$$

Mit Hilfe dieses Satzes ist es nun leicht, einen Satz zu beweisen, der für Potenzreihen zuerst in der genannten Arbeit des Herrn PRINGSHEIM und der für Dirichlet'sche Reihen und die reelle Annäherung $\lim \varrho = \lambda$ von mir bewiesen wurde.[1] Aus diesem Satze lassen sich dann eine Reihe von Analogien zu Sätzen über Potenzreihen herleiten.

*Satz II.* »Sind zwei Dirichlet'sche Reihen mit der Grenzgeraden $R(x)=\lambda$ vorgelegt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}, \tag{9}$$

deren zweite bei $x=\lambda$ in dem Sinne der eben aufgestellten Definition gleichmässig divergiert, und hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g, \tag{10}$$

so ist auch

[1] l. c., S. 38—41.

$$\lim_{x=\lambda}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}}=g,\quad (g \text{ beliebig}) \tag{11}$$

und, falls $g \neq 0$, so divergiert auch die Reihe $\sum\frac{a_\nu}{\nu^x}$ bei $x=\lambda$ gleichmässig, d. h. es existiert ein $\beta > 0$, so dass

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|}\geqq\beta>0 \tag{12}$$

für alle hinreichend nahe an $\lambda$ gelegenen Werte $x$ des Raumes $\varDelta$.»

*Beweis:* Ich setze

$$\frac{a_n}{d_n}=g+\varepsilon_n,$$

so dass

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0$$

und

$$a_n=g\,d_n+\varepsilon_n d_n$$

ist. Dann hat man:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}=g\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}$$

oder

$$\left|\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}}-g\right|\leqq\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right|+\left|\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right|}{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}.$$

Wähle ich nun hierin $n$ so gross, dass für alle $\nu > n$

$$|\varepsilon_\nu|<\varepsilon$$

wird, wo $\varepsilon$ eine beliebige positive Grösse ist, und dann $x$ so dicht an $\lambda$ (innerhalb $\varDelta$), dass auch

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right|}{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}\right|} < \varepsilon$$

ist, — was wegen (8) stets möglich ist —, so wird auch

$$\left|\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} - g\right| < \varepsilon + \varepsilon \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}$$

oder wegen der Annahme (7):

$$< \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

für alle in dieser Nähe von $\lambda$ gelegenen Werte von $x$. Dies besagt aber, dass

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} = g \tag{11}$$

ist. —

Dass nun, im Falle $g \neq 0$, die Reihe $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ ebenfalls bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert, lässt sich folgendermassen einsehen:

Wegen $a_\nu = g\,d_\nu + \varepsilon_\nu d_\nu$ hat man

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}\right| \geq |g| \cdot \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}\right| - \left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right| - \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right|$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{\nu^x}\right| \leq |g| \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| + \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right| + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left|\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right|.$$

Denke ich mir nun diese beiden Ungleichungen durch einander dividiert und dann den Quotienten auf der rechten Seite in Zähler und Nenner durch

$$|g| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|$$

gehoben, so erhalte ich einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|} \geqq \frac{\alpha - A - B}{1 + A' + B'}$$

wo $A$, $B$, $A'$, $B'$ Grössen sind, die durch geeignete Wahl von $n$ und passende Beschränkung von $x$, wie oben, beliebig klein gemacht werden können. Ich habe also sicher für eine hinreichend kleine Umgebung von $\lambda$ (innerhalb $\Delta$):

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|} \geqq \frac{\alpha}{2} = \beta > 0 \tag{12}$$

w. z. b. w.

Aus diesem Satze lässt sich nun eine Reihe von Sätzen folgern, die im Falle reeller Annäherung und reeller Koeffizienten zum Teil schon bekannt und für die Annäherung durch komplexe Werte neuerdings zum Teil von Herrn Schnee[1] auf Grund ganz anders gearteter Betrachtungen bewiesen worden sind. Bevor wir indessen hierzu übergehen, soll der Satz II noch nach einer Richtung hin erweitert werden, die seine Anwendung wesentlich erleichtert. Ich behaupte nämlich, dass der Satz II gültig bleibt, wenn man (unter sonst gleichen Voraussetzungen) statt der Annahme

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{d_n} = g \tag{10}$$

die allgemeinere

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n} = g \tag{13}$$

setzt, zu deren Erfülltsein die vorige im Allgemeinen[2] zwar hinreichend aber nicht notwendig ist. —

---

[1] Ueber irreguläre Potenzreihen und Dirichlet'sche Reihen [Inaugural-Dissertation, Berlin (1908), S. 1—80], S. 29—59.

[2] Den Schluss von (10) auf (13) darf man stets dann machen, wenn $\Sigma\,|d_\nu|$ in der Weise divergiert, dass doch

$$\frac{|d_1 + d_2 + \cdots + d_n|}{|d_1| + |d_2| + \cdots + |d_n|}$$

für alle $n$ oberhalb einer positiven Zahl bleibt, — sicher also wenn die $d_\nu$ positiv sind und $\Sigma\, d_\nu$ divergiert.

Für $R(x) > \lambda$ gilt bekanntlich die Transformation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \left( \frac{1}{\nu^x} - \frac{1}{(\nu+1)^x} \right),$$

wo

$$D_\nu = d_1 + d_2 + \cdots + d_\nu$$

gesetzt ist. Hierfür kann man dann auch schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^x} \left[ 1 - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-x} \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^x} \left[ \frac{x}{\nu} - \frac{x(x+1)}{2!\,\nu^2} + \cdots \right] \\ &= x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} \left[ 1 - \frac{1}{\nu} \left( \frac{x+1}{2!} - \frac{(x+1)(x+2)}{3!\,\nu} + \cdots \right) \right], \end{aligned}$$

wo die im Innern stehende Reihe für alle $\nu > 1$ und alle in Betracht kommenden Werte von $x$ gleichmässig konvergiert. Ich kann daher setzen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} = x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} \left( 1 + \frac{\vartheta_\nu}{\nu} \right), \tag{14}$$

wo die $\vartheta_\nu$ (und gleich hernach die $\vartheta'_\nu$ und $\vartheta''_\nu$) Zahlen bedeuten, deren Beträge für alle $\nu$ und alle in Betracht kommenden Lagen von $x$ unterhalb einer endlichen Schranke bleiben. Analog gilt für $R(x) > \lambda$ die Transformation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} \left( 1 + \frac{\vartheta'_\nu}{\nu} \right), \tag{15}$$

wo

$$A_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$$

gesetzt ist. Man hat daher

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \vartheta'_\nu}{\nu^{2+x}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu \vartheta_\nu}{\nu^{2+x}}},$$

wo rechts der gemeinsame Faktor $x$ unterdrückt ist.

Geht man in dieser Gleichung zur Grenze $\lim x = \lambda$ über, so bleibt der zweite Summand in Zähler und Nenner endlich; der erste Summand des Nenners dagegen wird seinem Betrage nach unendlich, wie man dies am einfachsten aus (14) erkennt, indem man dort zur Grenze $\lim x = \lambda$ übergeht. Denn würde

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|$$

unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, so würde dies auch mit der rechten Seite von (14) der Fall sein, während doch die linke Seite den Voraussetzungen gemäss unendlich wird. Daher hat man:

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu^x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} = \lim_{x=\lambda} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}}, \tag{16}$$

wofern der rechte Grenzwert vorhanden ist. Ist nun aber

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n} = g,$$

so folgte nach Satz II sofort

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n}$$

und also auch

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}, \tag{17}$$

— wenn nur die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}$$

bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert. Dass dies aber unter der Annahme der gleichmässigen Divergenz von $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$ bei $x = \lambda$ stets der Fall ist, erkennt man folgendermassen:

Nach (14) ist

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = |x|\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu \vartheta_\nu}{\nu^{2+x}}\right|$$

und entsprechend, indem man

$$|d_1| + |d_2| + \cdots + |d_\nu| = \varDelta_\nu$$

setzt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|d_\nu|}{\nu^{R(x)}} = R(x)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varDelta_\nu}{\nu^{1+R(x)}} + R(x)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varDelta_\nu \vartheta''_\nu}{\nu^{2+R(x)}}$$

also ist:

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|} = \frac{|x|}{R(x)}\,\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu \vartheta_\nu}{\nu^{2+x}}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varDelta_\nu}{\nu^{1+R(x)}} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varDelta_\nu \vartheta''_\nu}{\nu^{2+R(x)}}}.$$

Da nun der Voraussetzung nach dieser Wert stets

$$\geqq \alpha > 0$$

bleibt, da ferner bei der Annäherung der Grösse $x$ an die Stelle $\lambda$ der erste Summand in Zähler und Nenner der rechten Seite unendlich wird, während die zweiten Summanden bei diesem Grenzübergang unterhalb einer endlichen Schranke bleiben und da endlich auch stets

$$\frac{|x|}{R(x)}$$

unterhalb einer durch die Öffnung des Winkelraums $\varDelta$ fixierten Konstanten $k_0 = \frac{1}{\cos\varphi_0}$ liegt, so existiert eine positive Zahl $\alpha'$ derart, dass für alle $x$ einer hinreichend kleinen Umgebung von $\lambda$ innerhalb $\varDelta$ stets

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varDelta_\nu}{\nu^{1+R(x)}}} \geqq \alpha' > 0$$

bleibt. Nun ist aber

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|} \geqq \frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varDelta_\nu}{\nu^{1+R(x)}}},$$

also auch

$$\geqq \alpha' > 0$$

d. h. auch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}$$

divergiert gleichmässig bei $x = \lambda$, wie behauptet. Damit ist dann der folgende Satz vollständig bewiesen:

*Satz III.* »Sind $\sum\frac{a_\nu}{\nu^x}$ und $\sum\frac{d_\nu}{\nu^x}$ zwei Dirichlet'sche Reihen mit der Grenzgeraden $R(x) = \lambda \geqq 0$, deren zweite bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert, so ist

$$\lim_{x=\lambda}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}} = \lim_{n=\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}, \tag{18}$$

wofern der rechtsstehende Grenzwert existiert und $x$ sich innerhalb $\varDelta$ dem Wert $\lambda$ nähert.» —

Setzt man, in derselben Richtung weitergehend

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu = A'_\nu$$
$$D_1 + D_2 + \cdots + D_\nu = D'_\nu,$$

und allgemein

$$A_1^{(\gamma-1)} + A_2^{(\gamma-1)} + \cdots + A_\nu^{(\gamma-1)} = A_\nu^{(\gamma)}$$
$$D_1^{(\gamma-1)} + D_2^{(\gamma-1)} + \cdots + D_\nu^{(\gamma-1)} = D_\nu^{(\gamma)},$$

so folgt durch wiederholte Anwendung der Beziehung (16)

$$\lim_{x=\lambda}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}} = \lim_{x=\lambda}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+1+x}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+1+x}}} = \lim_{n=\infty}\frac{A_n^{(\gamma)}}{D_n^{(\gamma)}}, \tag{19}$$

wofern für einen bestimmten Wert von $\gamma$ der letzte Grenzwert existiert. Es ist aber im allgemeinen die Voraussetzung der Existenz von

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\gamma)}}{D_n^{(\gamma)}}$$

umfassender als die Voraussetzung der Existenz von

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\gamma-1)}}{D_n^{(\gamma-1)}},$$

da man zwar (im Allgemeinen[1]) von dem letzteren Grenzwert mit Hilfe des bekannten Cauchy-Stolz'schen Grenzwertsatzes auf die Existenz des ersteren, aber nicht umgekehrt schliessen kann.

Folgende Bemerkung mag hier Platz finden: Im Satz II hat die Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g$$

offenbar die Tatsache *zur Folge*, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} \tag{20}$$

dieselbe Grenzgerade hat wie die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}, \tag{21}$$

so dass es dort genügt hätte, nur über die Grenzgerade dieser letzten Reihe etwas vorauszusetzen. Dasselbe gilt auch für den Satz III. Ist nämlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n} = g,$$

so ist

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log |A_n|}{\log n} \leq \limsup_{n=\infty} \frac{\log |D_n|}{\log n}$$

d. h. $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ konvergiert mindestens (und falls $g \neq 0$ ist, sogar genau) in demselben Gebiet wie $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$. Anders liegt es aber bei der Erweiterung (19). Ist z. B.

[1] S. Fussnote 2 S. 172.

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{D_1 + D_2 + \cdots + D_n} = g, \tag{22}$$

so braucht die Reihe (20) doch nicht dieselbe Grenzgerade zu haben, wie (21).[1] Es liegt dies ersichtlich daran, dass die transformierte Reihe (15) weiter konvergieren kann als die ursprüngliche.

Es habe etwa (20) die Grenzgerade $R(x) = \lambda_1$; dann ist (s. o.) für $R(x) > \lambda_1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left(\frac{1}{\nu^x} - \frac{1}{(\nu+1)^x}\right) = x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \vartheta(\nu, x)}{\nu^{2+x}},$$

wo $\vartheta(\nu, x)$ für alle $\nu$ und alle in Betracht kommenden $x$ unter einer endlichen Schranke bleibt. Es kann nun aber, wie gesagt, eintreten, dass die rechtsstehende Reihe noch in einem gewissen Streifen links von der Geraden $R(x) = \lambda_1$ konvergiert; stets dann nämlich, wenn

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log |A_1 + A_2 + \cdots + A_n|}{\log n} < \limsup_{n=\infty} \frac{\log |A_n|}{\log n} + 1,$$

oder, was dasselbe ist, wenn es eine Zahl $c < 1$ gibt, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ von einer gewissen Stelle an

$$|A_1 + A_2 + \cdots + A_n| < n^{c+\varepsilon} |A_n|$$

ist. In diesem Falle liefert also die transformierte Reihe die Fortsetzung der durch die gegebene Reihe dargestellten Funktion $a(x)$ und diese selbst kann demnach keinen singulären Punkt auf der Geraden $R(x) = \lambda_1$ haben. — $a(x)$ ist dann also unter den Voraussetzungen des Satzes (19), welchen Wert auch $\lambda_1 > \lambda$ haben mag, sicher für $R(x) > \lambda$ regulär und für die Annäherung an den Punkt $\lambda$ gilt die Relation (19) in dem etwas modifizierten Sinne, dass jetzt

$$\lim_{x=\lambda} \frac{a(x)}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\gamma)}}{D_n^{(\gamma)}}$$

ist, falls der rechtsstehende Grenzwert für einen bestimmten Wert von $\gamma$ existiert.

---

[1] Man kann dies leicht an der durch gliedweise Addition von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x} \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \nu^{\frac{2}{3}}}{\nu^x}$$

entstehenden Reihe $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ prüfen.

§ 2.

Um aus den Sätzen II, III und (19) spezielle Schlüsse ziehen zu können, ist es vor allem nötig, Reihen vom Typus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}$$

aufzustellen, die bei $x = \lambda$ gleichmässig divergieren. Am einfachsten lässt sich diese Eigenschaft von der Funktion

$$\zeta(1 + x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}$$

mit der Grenzgeraden $R(x) = 0$ nachweisen. Denn da diese Funktion in der Umgebung von $x = 0$ die Darstellung

$$\zeta(1 + x) = \frac{1}{x} + g(x)$$

gestattet, wo $g(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktion bezeichnet, so hat man im Winkelraume $\Delta$

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\nu^{1+x}}\right|} = \frac{|\zeta(1 + x)|}{\zeta(1 + R(x))} = \frac{\left|\frac{1}{x} + g(x)\right|}{\frac{1}{R(x)} + g(R(x))}$$

$$\geq \frac{1 - |x|g(x)}{\frac{|x|}{R(x)} + |x|g(R(x))}.$$

Beschränke ich also $x$ auf eine so kleine Umgebung der Stelle $x = 0$ innerhalb $\Delta$, dass die zweiten Summanden in Zähler und Nenner $< \frac{1}{2}$ bleiben, so bleibt

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\nu^{1+x}}\right|} \geq \frac{1 - \frac{1}{2}}{k_0 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2k_0 + 1} > 0,$$

wo $k_0$ die schon oben erwähnte Konstante ist. Diese Beziehung besagt aber, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergiert. Ebenso würde offenbar eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^{1+x}}$ stets dann bei $x = 0$ gleichmässig divergieren, wenn die durch sie dargestellte Funktion sich in der Umgebung von $x = 0$ wie

$$\frac{c}{x^p} + g(x) \qquad (R(p) > 0)$$

verhält, wobei $c$ eine Konstante, $p$ eine komplexe Zahl mit positiv-reellem Teil und $g(x)$ eine dort reguläre Funktion bedeutet. Ich behaupte nun, dass die durch die Reihen

$$f_p(x) = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+x}} \qquad (R(p) > 0)$$

dargestellten Funktionen $f_p(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ ein solches Verhalten aufweisen. Hierzu ist es hinreichend zu zeigen, dass die Reihe

$$f_p(x) - \int_2^{\infty} \frac{\log^{p-1} u}{u^{1+x}}\, du = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left\{ \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+x}} - \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\log^{p-1} u}{u^{1+x}}\, du \right\} \tag{23}$$

für $R(x) > -1$ konvergiert. Denn da

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^{p-1} u}{u^{1+x}}\, du = \frac{\Gamma(p)}{x^p}$$

ist, so wäre in der Umgebung von $x = 0$ wirklich

$$f_p(x) = \frac{c}{x^p} + g(x). \tag{24}$$

Nun ist aber, wenn ich mir $x$ zunächst reell denke,

$$\int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\log^{p-1} u}{u^{1+x}}\, du = \log^{p-1}(\nu + \vartheta) \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{du}{u^{1+x}} = \frac{\log^{p-1}(\nu + \vartheta)}{x} \left[ -\frac{1}{u^x} \right]_{\nu}^{\nu+1} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\log^{p-1}(\nu+\vartheta)}{x}\left(\frac{1}{\nu^x}-\frac{1}{(\nu+1)^x}\right)\\
&= \frac{\log^{p-1}(\nu+\vartheta)}{x\,.\,\nu^x}\left[1-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{-x}\right]\\
&= \frac{\log^{p-1}(\nu+\vartheta)}{\nu^{1+x}}+\frac{A}{\nu^{2+x-\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

wo $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl und $A = A(\nu)$ eine mit $\frac{1}{\nu}$ gegen o abnehmende Grösse bedeutet. Es genügt hiernach, zu beweisen, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\left\{\frac{\log^{p-1}\nu-\log^{p-1}(\nu+\vartheta)}{\nu^{1+x}}\right\}$$

für $R(x) > -1$ konvergiert. Da aber die Differenz $\log^{p-1}\nu - \log^{p-1}(\nu+\vartheta)$ von geringerer Grössenordnung ist als $\frac{\log^p \nu}{\nu}$, so erhellt dies unmittelbar.

Die analytische Funktion (23) erweist sich dadurch für reelle $x > -1$ mit einer für $R(x) > -1$ regulären Funktion identisch; erstere ist daher ebenfalls für $R(x) > -1$ regulär, und für $f_p(x)$ gilt somit in der Umgebung von $x = 0$ die Darstellung (24), w. z. b. w.

Auf Grund dieser Tatsache nun, dass die durch die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\log^{p-1}\nu}{\nu^{1+x}} \qquad (R(p) > 0)$$

dargestellten Funktionen sich in der Umgebung von $x = 0$ wie

$$\frac{\Gamma(p)}{x^p}$$

verhalten, und also diese Reihen selbst bei $x = 0$ gleichmässig divergieren, lassen sich mit Hilfe der Sätze II, III und (19) eine Anzahl spezieller Sätze beweisen, die sämtlich Analoga zu bekannten Grenzwertsätzen in der Theorie der Potenzreihen darstellen, und die für Dirichlet'sche Reihen zu einem Teil in der schon zitierten Arbeit des Herrn SCHNEE enthalten sind, dort aber auf ganz andere Weise bewiesen sind.

1) Wenn

$$\lim_{n=\infty} a_n = a,$$

so hat man

$$\lim_{x=0}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+x}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+x}}}=\lim_{x=0}\frac{1}{\zeta(1+x)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+x}}=a,$$

oder auch wegen

$$\lim_{x=0} x\,.\,\zeta(1+x)=1$$

$$\lim_{x=0} x\,.\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+x}}=\lim_{x=1}(x-1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x}}=a. \tag{25}$$

Analog folgt aus

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}=a,$$

dass

$$\lim_{x=0} x\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{\lambda+1+x}}=a \tag{26}$$

ist.

2) Wenn $\sum\frac{a_\nu}{\nu^x}$ die Grenzgerade $R(x)=0$ hat und wenn $\Sigma a_\nu$ konvergiert, und $=A$ ist, d. h. also wenn

$$\lim_{n=\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim_{n=\infty}A_n=A$$

ist, so hat man nach (14) bezw. (15)

$$\lim_{x=0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}=\lim_{x=0} x\,.\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu^{1+x}},$$

also nach (25)

$$\lim_{x=0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}=A=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu; \tag{27}$$

man erkennt hierin das Cahen'sche[1] Analogon zum Abel'schen[2] Stetigkeitssatz für Potenzreihen.

---

[1] Siehe Fussnote 1 S. 166.

[2] Untersuchungen über die Reihe

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\cdots \text{ u. s. w.}$$

[Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. I (1826), S. 311—339], S. 317—318.

3) Wenn $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ die Grenzgerade $R(x) = 0$ hat, wenn aber $\Sigma a_\nu$ nicht konvergiert, wohl aber das arithmetische Mittel der ersten $n$ Teilsummen einem Grenzwerte $A$ zustrebt, d. h. also wenn

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{A'_n}{n} = A$$

ist, so hat man analog

$$\lim_{x=0} \sum \frac{a_\nu}{\nu^x} = \lim_{x=0} \left\{ x \,.\, \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = \lim_{x=0} \left\{ x(x+1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A'_\nu}{\nu^{2+x}} \right\}$$

also nach (26) für $\lambda = 1$

$$\lim_{x=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = A = \lim_{n=\infty} \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n}. \tag{28}$$

Man erkennt hierin das Analogon zu dem bei Potenzreihen zuerst von Herrn Frobenius[1] bewiesenen Satz.

Sowohl Abel, wie Herr Frobenius haben indessen die Beziehungen nur für reelle Annäherung aufgestellt.

4) In derselben Richtung weitergehend ergibt sich durch wiederholte Anwendung von (14):

$$\lim_{x=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \lim_{x=0} \left\{ x \,.\, \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = \cdots = \lim_{x=0} \left\{ x(x+1) \ldots (x+\gamma) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+1+x}} \right\}.$$

Existiert also für einen bestimmten Wert von $\gamma$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma!}{n^\gamma} A_n^{(\gamma)} = A$$

so hat man hieraus nach (26) für $\lambda = \gamma$

$$\lim_{x=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = A = \lim_{n=\infty} \frac{\gamma!}{n^\gamma} A_n^{(\gamma)}. \tag{29}$$

5) Hat die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$$

[1] Über die Leibnitz'sche Reihe [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXXIX (1880), S. 262—264].

die Grenzgerade $R(x) = \lambda > 0$ und existiert hier der Grenzwert

$$\lim \frac{A_n^{(\gamma)}}{n^{\gamma+\lambda}} = A,$$

so ist zunächst

$$\lim_{x=0} \left\{ x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+\lambda+1+x}} \right\} = \lim_{x=\lambda} \left\{ (x-\lambda) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+1+x}} \right\} = A,$$

also

$$\lim_{x=\lambda} (x-\lambda) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+\gamma) A. \tag{30}$$

6) Da bekanntlich

$$\lim_{\varrho=0} \left\{ \varrho^p \left( 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+\varrho}} \right) \right\} = \Gamma(p) \qquad (R(p) > 0)$$

ist, und da, wie oben gezeigt, die Reihen

$$1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+x}} \qquad (R(p) > 0)$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergieren, so ist auch

$$\lim_{x=0} \left\{ x^p \cdot \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+x}} \right\} = \Gamma(p). \tag{31}$$

Ist also für eine Reihe $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\log^{p-1} n} = A, \qquad (R(p) > 0)$$

so folgt nach (31) sofort, dass

$$\lim_{x=0} \left\{ x^p \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = A \cdot \Gamma(p) \tag{32}$$

ist Man erkennt hierin das Analogon zu einem von Herrn APPELL[1] bei Potenzreihen bewiesenen Satz.

Ganz entsprechend folgt aus

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^\lambda \log^{p-1} n} = A,$$

dass

$$\lim_{x=0} \left\{ x^p \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{\lambda+1+x}} \right\} = \lim_{x=\lambda} \left\{ (x-\lambda)^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = A \cdot \Gamma(p) \tag{33}$$

ist.

7) Endlich ergibt die bei (30) ausgeführte Transformation dass aus

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\gamma)}}{n^{\gamma+\lambda} \log^{p-1} n} = A$$

sich folgern lässt, dass

$$\lim_{x=\lambda} \left\{ (x-\lambda)^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} \right\} = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+\gamma) A \cdot \Gamma(p)\,{}^2 \tag{34}$$

st. Und in dieser Formel sind alle vorhergehenden als Spezialfälle enthalten, wenn man nur, im Falle $\lambda = 0$, sich den rechts auftretenden Faktor $\lambda$ gegen $(x-\lambda)$ auf der linken Seite heben lässt.

## § 3.

Die in den Formeln (25) bis (34) enthaltenen Sätze waren bisher allein aus der Tatsache hergeleitet, dass die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+x}} \qquad (R(p) > 0)$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergieren. Zu wesentlich weitergehenden Sätzen gelangt man, wenn man allgemeinere Typen gleichmässig bei $x = 0$ divergierender Reihen aufstellt. Diesem Zwecke soll der folgende Abschnitt dienen.

---

[1] Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable [Comptes rendus, Bd. LXXXVII (2. Semester 1878), S. 689—692].

[2] Auch für die Beziehungen (29), (30) und (34) gelten die am Ende von § 1 gemachten Bemerkungen.

Es seiën $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ eine mit $n$ monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen; doch sei ihr Wachstum schliesslich langsamer als jede noch so kleine positive Potenz von $\log(n+1)$, d. h. *es sei*

$$1 < \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ von einer gewissen Stelle an. Dann ist auch

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < \left(1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)^{\varepsilon} < \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right)^{\varepsilon}$$

oder auch

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < 1 + \frac{\varepsilon}{n \log n}$$

für jedes $\varepsilon > 0$, mindestens von einer gewissen Stelle an. Es ist daher auch

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} < \frac{\varepsilon \lambda_{n-1}}{n \log n} < \frac{\varepsilon \lambda_n}{n \log n} \tag{35}$$

und man kann daher setzen

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\varepsilon_n \lambda_n}{n \log n},$$

wo die $\varepsilon_n$ eine Folge positiver Zahlen sind, für die

$$\lim \varepsilon_n = 0$$

ist.

Neben den Grössen $\lambda_n$ betrachte ich noch die positive, stetige, mit $r$ monoton ins Unendliche wachsende Funktion

$$\lambda(r),$$

die sonst nur der Bedingung

$$\lambda(n) = \lambda_n$$

zu genügen hat.

Diese Funktion hat die für das Folgende fundamentale Eigenschaft, dass

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda(r^\alpha)}{\lambda(r)} = 1 \tag{36}$$

ist für jedes positive $\alpha$. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\lambda(r)$ und der Beziehung $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$ genügt es offenbar zu zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{[n^\alpha]}}{\lambda_n} = 1$$

ist. Da aber, falls $\alpha > 1$,

$$\lambda_{[n^\alpha]} - \lambda_n = \sum_{\nu=n+1}^{[n^\alpha]} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) = \sum_{\nu=n+1}^{[n^\alpha]} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_\nu}{\nu \log \nu}$$

ist, so hat man, da auch $\frac{\lambda_n}{\log n}$ schliesslich monoton abnimmt,

$$\frac{\lambda_{[n^\alpha]}}{\lambda_n} - 1 \leqq \bar{\varepsilon}_{n+1} \frac{\lambda_n}{\log n} \sum_{\nu=n+1}^{[n^\alpha]} \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{\lambda_n},$$

wo $\bar{\varepsilon}_{n+1}$ die grösste der Grössen $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \ldots$ bezeichnet. Da aber

$$\lim_{n=\infty} \bar{\varepsilon}_{n+1} = 0$$

ist, so folgt hieraus unmittelbar

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{[n^\alpha]}}{\lambda_n} = 1$$

und damit die Gültigkeit der Beziehung (36)[1] die offenbar gleichmässig für alle $\alpha$ zwischen zwei festen positiven Grenzen gilt.

Ich behaupte nun, wenn die $\lambda_n$ Zahlen der eben charakterisierten Art sind, so hat die Dirichtlet'sche Reihe

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x} \qquad (\lambda_0 = 0) \qquad (37)$$

die Grenzgerade $R(x) = 0$ und divergiert gleichmässig bei $x = 0$. — Nur das letztere bedarf eines Beweises. Es ist

$$F(x) - \lambda_n = \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \left(\frac{1}{\nu^x} - 1\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}$$

oder

$$\lambda_n^{-1} \cdot F(x) - 1 = \lambda_n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \left(\frac{1}{\nu^x} - 1\right) + \lambda_n^{-1} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}.$$

In dieser Gleichung denke ich mir nun $x$ und $n$ so gewählt, dass

$$|x| \leqq \frac{1}{\log n}$$

oder

$$|x| \log n \leqq 1$$

[1] Ist $\alpha < 1$, so substituiere man $r^{\frac{1}{\alpha}}$ für $r$.

ist. Dann ist aber für $\nu \leqq n$

$$\left|\frac{1}{\nu^x} - 1\right| = |1 - e^{-x \log \nu}| = \left| x \log \nu - \frac{x^2 \log^2 \nu}{2!} + \cdots \right|$$

$$\leqq |x| \log \nu \left\{1 + \frac{1}{2!} + \cdots \right\} \leqq 2 |x| \log \nu.$$

Also ist

$$|\lambda_n^{-1} F(x) - 1| \leqq \frac{2|x|}{\lambda_n} \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \log \nu + \left|\lambda_n^{-1} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|$$

$$\leqq \frac{2|x|}{\lambda_n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_\nu}{\nu} + \left|\lambda_n^{-1} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|.$$

Ich bestimme nun die Abhängigkeit von $x$ und $n$ genauer dahin, dass ich setze

$$n = \left[e^{\left|\frac{1}{x}\right|}\right], \tag{38}$$

woraus

$$e^{\left|\frac{1}{x}\right|} = n + \vartheta \qquad (0 \leqq \vartheta < 1)$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \log (n + \vartheta)$$

$$|x| = \frac{1}{\log (n + \vartheta)} \leqq \frac{1}{\log n};$$

und $n$ soll im Folgenden die durch (38) wohlbestimmte Zahl $n(x)$ sein. Dann ist zunächst

$$\lim_{x=0} |x| \log n = \lim_{n=\infty} |x| \log n = 1 \tag{39}$$

und also

$$\lim_{x=0} |\lambda_n^{-1} F(x) - 1| \leqq \lim_{x=0} \left\{\frac{2}{\lambda_n \log n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_\nu}{\nu} + \left|\frac{1}{\lambda_n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|\right\}$$

$$\leqq \lim_{x=0} 2 \cdot \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_\nu}{\nu}}{\lambda_n \log n} + \lim_{x=0} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_\nu}{\nu \log \nu} \cdot \frac{1}{\nu^{R(x)}}$$

$$= \lim_{x=0} (A) + \lim_{x=0} (B).$$

Nun ist aber

$$\lim_{x=0}(A) = 2\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{\nu}}{\lambda_n\log n} = 2\lim_{n=\infty}\frac{\frac{\varepsilon_n\lambda_n}{n}}{\lambda_n\log n-\lambda_{n-1}\log(n-1)}$$

$$= 2\lim_{n=\infty}\frac{\varepsilon_n}{n\log(n-1)\left(\frac{\log n}{\log(n-1)}-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)}$$

Da aber für grosse $n$

$$\frac{\log n}{\log(n-1)} \geqq 1 + \frac{1}{2(n-1)\log(n-1)}$$

und

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{n\log n}$$

ist, so hat man

$$\lim_{x=0}(A) \leqq 2\lim_{n=\infty}\frac{\varepsilon_n}{n\log(n-1)\left(\frac{1}{2(n-1)\log(n-1)}+\frac{\varepsilon_n}{n\log n}\right)} \leqq 4\lim_{n=\infty}\varepsilon_n$$

d. h.

$$\lim_{x=0}(A) = 0.$$

Ebenso findet man

$$\lim_{x=0}(B) = \lim_{x=0}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{\nu\log\nu}\cdot\frac{1}{\nu^{R(x)}}$$

$$\leqq \lim_{x=0}\frac{1}{\lambda_n}\cdot\frac{\lambda_n}{\log n}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{\nu^{1+R(x)}},$$

da ja für alle hinreichend grossen $\nu$ neben

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} < \frac{\log\nu}{\log(\nu-1)}$$

auch

$$\frac{\lambda_\nu}{\log\nu} < \frac{\lambda_{\nu-1}}{\log(\nu-1)}$$

ist. Folglich ist unter Berücksichtigung von (39):

$$\lim_{x=0}(B) \leqq \lim_{x=0}|x|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{\nu^{1+R(x)}}.$$

Wegen

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon_n = 0$$

ist aber dieser letzte Wert nach (25) gleich 0. Also folgt:

$$\lim_{x=0} \{\lambda_n^{-1} F(x)\} = 1$$

oder

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{\lambda\left(e^{\left|\frac{1}{x}\right|}\right)} = 1. \tag{40}$$

Dann ist aber auch speziell

$$\lim_{x=0} \frac{F(R(x))}{\lambda\left(e^{\frac{1}{R(x)}}\right)} = 1, \tag{41}$$

und es folgt aus (40) und (41) zusammen, dass

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{F(R(x))} = \lim_{x=0} \frac{\lambda\left(e^{\left|\frac{1}{x}\right|}\right)}{\lambda\left(e^{\frac{1}{R(x)}}\right)}.$$

Dieser letzte Grenzwert ist aber, da sich $\left|\frac{1}{x}\right|$ und $\frac{1}{R(x)}$ nur um einen endlichen und von 0 verschiedenen Faktor unterscheiden, nach (36) gleich 1. Folglich hat man auch

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{F(R(x))} = 1,$$

d. h. aber dass

$$\lim_{x=0} \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|} = 1 \tag{42}$$

ist. Da dann der linksstehende Quotient für alle hinreichend nahe an 0 innerhalb $\Delta$ gelegenen Werte von $x$ sicher $> \frac{1}{2}$ ist, so besagt (42) zugleich, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergiert, w. z. b. w. —

Reihen von diesem Typus können also in den Sätzen II, III und (19) als Vergleichsreihen $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$ benutzt werden, was dann für spezielle $\lambda_\nu$ (z. B. $\log \log^p \nu$ u. s. w.) spezielle Sätze liefert.

§ 4.

Analoge Betrachtungen lassen sich nun auch für die verallgemeinerten Dirichlet'schen Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \tag{43}$$

durchführen, in denen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$ irgend eine monoton mit $n$ ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen bedeutet. Diese Reihe habe die Grenzgerade $R(x) = \lambda$, und es sei

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu \lambda}|$$

divergent. Wenn dann für alle hinreichend nahe an $\lambda$ gelegenen Werte von $x$ des Winkelraumes $\Delta$

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu x}|} \geqq \alpha > 0 \tag{44}$$

bleibt, so soll die Reihe (43) wieder als gleichmässig divergent bei $x = \lambda$ bezeichnet werden.

Es gilt dann auch hier der

*Satz IV:* »Sind $\Sigma a_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ und $\Sigma d_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ zwei Dirichlet'sche Reihen, deren zweite die Grenzgerade $R(x) = \lambda$ hat und bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert, und ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g,$$

so ist auch

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}} = g; \tag{45}$$

es konvergiert auch die zweite Reihe für $R(x) > \lambda$ und, falls nur $g \neq 0$, divergiert auch sie gleichmässig bei $x = \lambda$.

*Beweis:* Es sei

$$\frac{a_\nu}{d_\nu} = g + \varepsilon$$

so dass

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

ist. Dann hat man wieder:

$$\left| \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}} - g \right| \leqq \frac{\left| \sum\limits_{\nu=1}^{n} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right| + \left| \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|}{\left| \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|}.$$

Wähle ich hierbei $n$ so gross, dass für alle $\nu > n$

$$|\varepsilon_\nu| < \varepsilon$$

ist, so folgt mit Berücksichtigung von (44)

$$\left| \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}} - g \right| \leqq \left| \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}} \right| + \frac{\varepsilon}{\alpha}. \tag{46}$$

Da nun aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu \lambda}|$$

divergieren sollte, so ist, wie man in Analogie zu (4) sehr leicht zeigt,

$$\lim_{x=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu x}| = +\infty;$$

wegen der Bedingung (44) ist dann aber auch

$$\lim_{x=\lambda} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right| = +\infty.$$

Folglich kann ich $x$ innerhalb $\varDelta$ auf eine so kleine Umgebung von $x = \lambda$ beschränken, dass für alle diese Punkte

$$\frac{\left| \sum\limits_{\nu=1}^{n} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|}{\left| \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|} < \varepsilon$$

bleibt. Dann ist aber die rechte Seite von (46)

$$\leqq \varepsilon\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

d. h. man hat

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}} = g,$$

Dass auch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}$, falls nur $g \neq 0$ ist, bei $x=\lambda$ gleichmässig divergiert, folgt nun ähnlich wie oben folgendermassen:

Es ist

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right| \geqq |g| \cdot \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right| - \left|\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right| - \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right|$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu e^{-\gamma_\nu x}| \leqq |g| \sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu x}| + \sum_{\nu=1}^{n} |d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}| + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}|.$$

Also ist

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu e^{-\gamma_\nu x}|} \geqq \frac{\alpha - A - B}{1 + A' + B'}$$

wo $A, B, A', B'$ Grössen bedeuten, die durch geeignete Wahl von $n$ und $x$ beliebig klein gemacht werden können. Man hat also sicher für eine passend gewählte Umgebung von $x=\lambda$ innerhalb $\Delta$:

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu e^{-\gamma_\nu x}|} \geqq \frac{\alpha}{2} > 0$$

d. h. auch die Reihe $\Sigma a_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ divergiert gleichmässig bei $x=\lambda$.

Einen Übergang von der Reihe $\Sigma a_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ zur Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\gamma_\nu x} \qquad (A_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu)$$

wird man hier natürlich nicht ohne besondere Annahmen über das Verhalten der $\gamma_\nu$ machen können.

Wie im vorigen Fall besteht auch hier die Schwierigkeit darin, geeignete Vergleichsreihen vom Typus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}$$

aufzustellen, die bei $x=\lambda$ gleichmässig divergieren. Es lassen sich, wie oben, zwei Gruppen solcher Reihen bilden.

Zur Bildung der ersten Gruppe benutze ich folgenden kürzlich von Herrn SCHNEE[1] aufgestellten

*Satz:* »Genügen in der Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \tag{43}$$

die Exponenten $\gamma_\nu$ von einer gewissen Stelle an der Bedingung

$$\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1} = \alpha_\nu < e^{-k\gamma_\nu} \qquad (k > 0) \tag{47}$$

und die Koeffizienten $d_\nu$ der Bedingung

$$D_\nu = d_1 + \cdots + d_\nu = e^{\gamma_\nu} \gamma_\nu^{p-1} + O(e^{(1-q)\gamma_\nu}), \qquad \begin{pmatrix} p \text{ beliebig,} \\ q > 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

so ist die Reihe $f(x)$ für $R(x) > 1$ konvergent; und für

$$R(x) > \text{Max}\ (1-k,\ 1-q)$$

ist die Funktion

$$f(x) - \Gamma(p) \left\{ \frac{1}{(x-1)^p} + \frac{1}{(x-1)^{p-1}} \right\} \tag{49}$$

regulär, ausser wenn $p$ eine negative ganze Zahl oder 0 ist; in diesem Falle ist aber die Funktion

$$f(x) - \frac{(-1)^{p-1}}{(-p)!} \{ (x-1)^{-p+1} \log (x-1) + (x-1)^{-p} \log (x-1) \}$$

in demselben Gebiete regulär.»

---

[1] Über Dirichlet'sche Reihen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXVII (1. Semester 1909) S. 87—116], S. 91.

Aus diesem Satze folgt offenbar, dass die Reihe (43), unter den Annahmen (47) und (48), bei $x = 1$ gleichmässig divergiert, wenn nur $R(p) > 0$ oder $p = 0$ ist. Durch die Substitution $x' = x + \lambda$ kann man natürlich den Satz statt für den Grenzpunkt $x = +1$ für jeden andern Punkt aussprechen. Ich will im folgenden einen elementaren Beweis dieses wichtigen Satzes geben.

*Beweis:* Der Satz braucht offenbar nur für eine spezielle, den Voraussetzungen des Satzes genügende Funktion $f(x)$ bewiesen zu werden. Genügt nämlich eine zweite Funktion

$$f_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d'_\nu \, e^{-\gamma_\nu x}$$

denselben Bedingungen, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} (d_\nu - d'_\nu) = O(e^{(1-q)\gamma_n})$$

und $f(x) - f_1(x)$ erweist sich somit als mindestens für $R(x) > 1 - q$ konvergent. Bis zu dieser Geraden müssen also $f(x)$ und $f_1(x)$ gleichsingulär sein.

Ich wähle nun

$$d_\nu = e^{\gamma_\nu} \,.\, \gamma_\nu^{p-1} - e^{\gamma_{\nu-1}} \gamma_{\nu-1}^{p-1}, \qquad (\nu = 2, 3, \ldots;\ d_1 = e^{\gamma_1} \gamma_1^{p-1})$$

so dass

$$D_\nu = e^{\gamma_\nu} \gamma_\nu^{p-1}$$

wird und behaupte zunächst, dass, welchen Wert auch $p$ haben mag, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ d_\nu e^{-\gamma_\nu x} - \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)} u^{p-1} du - (p-1) \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)} u^{p-2} du \right\} \tag{50}$$

für $R(x) > 1 - p$ konvergiert. Es ist nämlich, wenn ich mir $x$ zunächst reell denke,

$$\int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)} u^{p-1} du = (\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1} \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)} du = \frac{(\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1}}{x-1} (e^{-\gamma_{\nu-1}(x-1)} - e^{-\gamma_\nu(x-1)})$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

oder da

$$e^{-\gamma_{\nu-1}(x-1)} - e^{-\gamma_\nu(x-1)} = e^{-\gamma_\nu(x-1)}(-1 + e^{(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})(x-1)}) =$$

$$= (x-1)\alpha_\nu e^{-\gamma_\nu(x-1)} + e^{-\gamma_\nu(x-1)} O(\alpha_\nu^2),$$

so ist

$$\int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)}\, u^{p-1}\, du = \alpha_\nu(\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1}\, e^{-\gamma_\nu(x-1)} + e^{-\gamma_\nu(x-1-\varepsilon)}\, O(\alpha_\nu^2) \qquad (51)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Da ebenso

$$\begin{aligned} d_\nu &= e^{\gamma_\nu}\gamma_\nu^{p-1}\left[1 - e^{-\gamma_\nu+\gamma_{\nu-1}}\left(\frac{\gamma_{\nu-1}}{\gamma_\nu}\right)^{p-1}\right] \\ &= e^{\gamma_\nu}\gamma_\nu^{p-1}\left[1-(1-\alpha_\nu+O(\alpha_\nu^2))\left(1-\frac{(p-1)\alpha_\nu}{\gamma_\nu}+O(\alpha_\nu^2)\right)\right] \\ &= e^{\gamma_\nu}\gamma_\nu^{p-1}\left[\alpha_\nu + \frac{(p-1)\alpha_\nu}{\gamma_\nu} + O(\alpha_\nu^2)\right] \end{aligned}$$

ist, so erhält man für das allgemeine Glied der Reihe (50), nachdem man die Relation (51) noch für $p-2$ statt $p-1$ angesetzt hat,

$$a_\nu(x) = e^{-\gamma_\nu(x-1)}\{\alpha_\nu[\gamma_\nu^{p-1} - (\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1}] + (p-1)\alpha_\nu[\gamma_\nu^{p-2} - (\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-2}] + O(e^{\gamma_\nu\varepsilon}\alpha_\nu^2)\}$$

Da nun ersichtlich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(e^{\gamma_\nu} - e^{\gamma_{\nu-1}})\, e^{-\gamma_\nu x}$$

und also auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\, e^{-\gamma_\nu(x-1)}$$

für $R(x) > 1$ konvergiert, so konvergiert wegen der Annahme (47) die Reihe $\Sigma\,\alpha_\nu^2\, e^{-\gamma_\nu(x-1)}$ für $R(x) > 1-k$ und es genügt nun, das gleiche von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu[\gamma_\nu^{p-1} - (\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1}]\, e^{-\gamma_\nu(x-1)}$$

zu beweisen; da aber die in der Klammer stehende Differenz von kleinerer Grössenordnung ist als $\alpha_\nu\gamma_\nu^{p-1}$, so erhellt dies unmittelbar. Die Reihe (50) erweist sich also für alle reellen Werte von $x > 1-k$ mit einer Reihe identisch, die für alle Werte von $R(x) > 1-k$ konvergiert und dort eine reguläre analytische Funktion darstellt. Demnach ist also die durch die Reihe (50) selbst dargestellte Funktion mindestens bis zur Geraden $R(x) = 1-k$ regulär, und also die durch die Reihe $\Sigma\, d_\nu\, e^{-\gamma_\nu x}$ dargestellte Funktion $f(x)$ bis zu dieser Geraden mit der Funktion

$$\int_a^\infty e^{-u(x-1)} u^{p-1} + (p-1)\int_a^\infty e^{-u(x-1)} u^{p-2} du$$

gleichsingulär; hierbei ist die untere Grenze $a$ eine beliebige positive Zahl. Zur Untersuchung des Verhaltens von $f(x)$ genügt es also dasjenige der Funktionen

$$\varphi_1(x) = \int_a^\infty e^{-u(x-1)} u^{p-1} du$$

und

$$\varphi_2(x) = (p-1)\int_a^\infty e^{-u(x-1)} u^{p-2} du$$

festzustellen. Differenziere ich zu diesem Zweck $\varphi_1(x)$ $r$-mal — was hier gestattet — unter dem Integralreichen nach $x$

$$\varphi_1^{(r)}(x) = (-1)^r \int_a^\infty e^{-u(x-1)} u^{p-1+r} du,$$

so kann ich mir $r$ so gross gewählt denken, dass $R(p+r) \geqq 1$ ist ($r$ ist ev. $= 0$). Dann ist aber

$$\varphi^{(r)}(x) = \frac{(-1)^r}{(x-1)^{p+r}} \int_{a(x-1)}^\infty e^{-u} u^{p+r-1} du = \frac{(-1)^r}{(x-1)^{p+r}} \left\{ \int_0^\infty e^{-u} u^{p+r-1} du - \int_0^{a(x-1)} e^{-u} u^{p+r-1} du \right\}$$

also

$$\varphi^{(r)} x = \frac{(-1)^r}{(x-1)^{p+r}} \Gamma(p-r) + g(x),$$

wo $g(x)$, und ebenso im Folgenden $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., ganze Funktionen von $x$ bedeuten; durch $r$-malige Integration erhält man nun, wofern $p$ keine negative ganze Zahl oder $0$ ist,

$$\varphi_1(x) = \frac{\Gamma(p)}{(x-1)^p} + g_1(x).$$

Analog ist

$$\varphi_2(x) = (p-1)\frac{\Gamma(p-1)}{(x-1)^{p-1}} + g_2(x),$$

so dass

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \Gamma(p)\left(\frac{1}{(x-1)^p} + \frac{1}{(x-1)^{p-1}}\right) + g_3(x).$$

Ist aber $p$ eine negative ganze Zahl oder $0$, so wähle ich $r = -p + 1$ und finde

$$\varphi_1^{(r)}(x) = (-1)^r \cdot \frac{1}{x-1} + g_4(x)$$

und die $r$-malige Integration liefert nun

$$\varphi_1(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(-p)!}(x-1)^{-p}\log(x-1) + g_5(x).$$

Analog ist in diesem Fall

$$\varphi_2(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(-p)!}(x-1)^{-p+1}\log(x-1) + g_6(x),$$

so dass jetzt

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(-p)!}\{(x-1)^{-p+1}\log(x-1) + (x-1)^{-p}\log(x-1)\} + g_7(x);$$

und in beiden Fällen ist die Funktion

$$f(x) - [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]$$

für $R(x) > 1 - k$ regulär. Da $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ genau die im Satze angegebene Zusatzfunktion ist, so ist nach den eingangs gemachten Bemerkungen der Satz vollständig bewiesen, und es sind somit Typen von Reihen hergestellt, die bei $x = 1$ gleichmässig divergieren. Eine zweite Gruppe solcher Reihen erhält man wieder ähnlich wie oben auf die folgende Weise:

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, eine mit $n$ monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen; doch sei ihr Wachstum derart an das der $\gamma_n$ gebunden, dass für jedes positive $\varepsilon$ die Beziehung

$$1 < \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\right)^\varepsilon$$

mindestens von einer gewissen Stelle ab erfüllt ist. Dann ist auch

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < \left(1 + \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{\gamma_{n-1}}\right)^\varepsilon < 1 + \frac{\varepsilon(\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\gamma_{n-1}}$$

für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$, mindestens von einer gewissen Stelle ab.

Man kann daher setzen

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\varepsilon_n(\gamma_n - \gamma_{n-1})\lambda_{n-1}}{\gamma_{n-1}}, \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{52}$$

wo dann wieder

$$\lim \varepsilon_n = 0$$

sein muss.

Neben den $\lambda_n$ und $\gamma_n$ betrachte ich dann weiter die stetigen und monotonen Funktionen $\lambda(r)$ und $\gamma(r)$, die im Übrigen nur der Bedingung

$$\lambda(n) = \lambda_n \quad \text{und} \quad \gamma(n) = \gamma_n$$

zu genügen haben. Neben $\gamma(r)$ führe ich endlich noch die dazu inverse Funktion

$$\bar{\gamma}(r)$$

ein, die dann auch stetig und monoton verläuft, und für die

$$\bar{\gamma}[\gamma(r)] = r$$

ist. Dann behaupte ich zunächst, dass für jedes positive $\alpha$

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda[\bar{\gamma}(\alpha \, . \, \gamma(r))]}{\lambda(r)} = 1 \tag{53}$$

ist. Die Bedeutung dieser vorbereitenden Ausführungen erkennt man am besten, wenn man die entsprechenden Ausführungen bei dem Spezialfalle $\gamma_n = \log n$ vergleicht.

Da aus (52) hervorgeht, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = 1,$$

also auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+a}}{\lambda_n} = 1$$

ist, wenn $a$ eine feste Zahl bedeutet, wofern nur

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{\gamma_{n-1}}$$

als endlich vorausgesetzt wird, so genügt es offenbar, zu zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)]}{\lambda_n} = 1$$

ist für jedes $\alpha > 0$. Hat man vorerst $\alpha \geqq 1$, so ist

$$\lambda[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)] - \lambda_n = \sum_{\nu=n+1}^{[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)]} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)]} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_{\nu-1}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}}$$

also

$$\frac{\lambda[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)]}{\lambda_n} - 1 \leqq \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n}{\gamma_n} \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)]} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})$$

$$\leqq \frac{\bar{\varepsilon}_{n+1}}{\gamma_n}(\alpha\gamma_n - \gamma_n) \leqq \bar{\varepsilon}_{n+1}(\alpha - 1),$$

woraus sich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)]}{\lambda_n} = 1$$

ergibt. Durch die Substitution $\bar{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}\gamma(r)\right)$ für $r$ ergibt sich das gleiche für $\alpha < 1$. Aus beiden folgt die Behauptung (53).

Bezeichnet nun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine Folge der oben bezeichneten Art, so behaupte ich, dass die Reihe

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x} \qquad (\lambda_0 = 0) \qquad (54)$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergiert. Dass sie für $R(x) > 0$ konvergiert, erkennt man unmittelbar.

Es ist wieder

$$F(x) - \lambda_n = \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})(e^{-\gamma_\nu x} - 1) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x},$$

und zwar denke ich mir hierbei $n$ so gewählt, dass

$$|x| \leqq \frac{1}{\gamma_n}$$

oder

$$\gamma_n \leqq \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$n \leqq \bar{\gamma}\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$$

ist, also etwa

$$n = \left[\bar{\gamma}\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)\right]. \tag{55}$$

Diese durch $x$ wohlbestimmte Zahl soll $n = n(x)$ im Folgenden bedeuten. Dann ist aber für $\nu \leqq n$

$$|1 - e^{-\gamma_\nu x}| \leqq \left|\gamma_\nu x + \frac{\gamma_\nu^2 x^2}{2!} + \cdots\right| \leqq |x|\gamma_\nu\left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots\right) \leqq 2|x|\gamma_\nu$$

und also

$$|F(x) - \lambda_n| \leqq 2|x|\sum_{\nu=1}^{n}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})\cdot\gamma_\nu + \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})e^{-\gamma_\nu x}\right|$$

$$\leqq 2|x|\lambda_1\gamma_1 + \frac{2}{\gamma_2}|x|\sum_{\nu=2}^{n}\varepsilon_\nu\lambda_{\nu-1}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) + \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_{\nu-1}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}}e^{-\gamma_\nu x}\right|$$

$$\left|\frac{F(x)}{\lambda_{n(x)}} - 1\right| \leqq \frac{2|x|\lambda_1\gamma_1}{\lambda_n} + \frac{2}{\gamma_2}|x|\gamma_n\frac{\sum_{\nu=2}^{n}\varepsilon_\nu\lambda_{\nu-1}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})}{\lambda_n\gamma_n} + \frac{1}{\lambda_n}\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_{\nu-1}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})e^{-\gamma_\nu x}}{\gamma_{\nu-1}}\right|$$

$$= A(x) + B(x). \tag{56}$$

Wegen der Festsetzung (55) und wegen $\lim \lambda_n = \infty$ ist zunächst

$$\lim_{x=0}|x|\gamma_n = 1 \text{ und } \lim_{n=\infty}\frac{2|x|\lambda_1\gamma_1}{\lambda_n} = 0 \tag{57}$$

und also

$$\lim_{x=0} A(x) \leqq \frac{2}{\gamma_2}\lim_{n=\infty}\frac{\varepsilon_n\lambda_{n-1}(\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\lambda_n\gamma_n - \lambda_{n-1}\gamma_{n-1}}$$

$$= \frac{2}{\gamma_2}\lim_{n=\infty}\frac{\varepsilon_n(\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\gamma_n - \gamma_{n-1}}.$$

Da nun nach (52)

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = 1 + \frac{\varepsilon_n(\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\gamma_{n-1}}$$

ist, so hat man

$$\lim_{x=0} A(x) = \frac{2}{\gamma_2} \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n(\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\gamma_n - \gamma_{n-1} + \frac{\varepsilon_n \gamma_n}{\gamma_{n-1}}(\gamma_n - \gamma_{n-1})}$$

$$= \frac{2}{\gamma_2} \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{1 + \frac{\varepsilon_n \gamma_n}{\gamma_{n-1}}} = 0 . \tag{58}$$

Ähnlich findet man

$$B(x) \leqq \frac{1}{\lambda_n} \bar{\varepsilon}_{n+1} \frac{\lambda_n}{\gamma_n} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu R(x)}$$

$$\leqq \frac{\bar{\varepsilon}_{n+1}}{|x| \gamma_n} \cdot k_0 . R(x) \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu R(x)},$$

so dass wegen (57) und

$$\lim_{n=\infty} \bar{\varepsilon}_{n+1} = 0$$

auch

$$\lim_{x=0} B(x) = 0 \tag{59}$$

wäre, wenn nur

$$\varrho \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu \varrho}$$

endlich bleibt, wenn $\varrho$ durch reelle Werte abnehmend sich dem Werte 0 nähert. Ich behaupte, dass der Ausdruck stets $\leqq 1$ bleibt. Da nämlich

$$(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu \varrho} = e^{-\gamma_\nu \varrho} \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} du \leqq \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u\varrho} du$$

und also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu \varrho} \leqq \int_0^\infty e^{-u\varrho} du$$

$$= \frac{1}{\varrho} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{\varrho}$$

ist, so hat man

$$\varrho \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu \varrho} \leqq 1 .$$

Dadurch ist aber die Beziehung (59) bewiesen. Aus ihr folgt aber in Verbindung mit (58) nach (56), dass

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{\lambda_{n(x)}} = 1 \tag{60}$$

ist. Speziell ist dann auch für reelle Annäherung

$$\lim_{R(x)=0} \frac{F(R(x))}{\lambda_{n(R(x))}} = 1$$

und also

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{F(R(x))} = \lim_{x=0} \frac{\lambda(n(x))}{\lambda(n(Rx))}. \tag{61}$$

Die Argumente von $\lambda$ sind aber hier gemäss (55)

$$n(x) = \bar{\gamma}\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$$

und

$$n(R(x)) = \bar{\gamma}\left(\frac{1}{R(x)}\right)$$

und da sich $R(x)$ und $|x|$ nur um einen endlichen und von 0 verschieden bleibenden Faktor unterscheiden, so hat man nach (53) (durch zweimalige Anwendung):

$$\lim_{x=0} \frac{\lambda(n(x))}{\lambda(n(Rx))} = 1.$$

Folglich ist auch

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{F(R(x))} = \lim_{x=0} \frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x}\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left|(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x}\right|} = 1.$$

Diese Beziehung besagt aber zugleich, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x}$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergiert, womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Diese letzte Tatsache enthält die oben für die Reihen $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$ bewiesenen Beziehungen als den Spezialfall $\gamma_n = \log n$ und den entsprechenden von Herrn Pringsheim a. a. O. für Potenzreihen bewiesenen Satz für $\gamma_n = n$.

Durch Wahl spezieller $\gamma_\nu$ und $\lambda_\nu$ erhält man dann auch hier eine Anzahl spezieller Sätze.

Nagasaki (Japan), den 14. Dez. 1908.