SUR LES FONCTIONS TRIPLEMENT PÉRIODIQUES DE DEUX VARIABLES.

PAR

P. COUSIN

à BORDEAUX.

La théorie des fonctions méromorphes triplement périodiques de deux variables complexes semble n'avoir été jusqu'ici l'objet d'aucune étude spéciale. Tandis que dans la théorie des fonctions d'une seule variable, l'étude des fonctions simplement périodiques et, en particulier, des fonctions trigonométriques a précédé celle des fonctions elliptiques, au contraire pour les fonctions périodiques de deux variables les mathématiciens ont abordé directement le cas des fonctions abéliennes. Il s'est trouvé ainsi, dans la théorie des fonctions périodiques, une lacune que M. APPELL avait signalée à notre attention il y a plusieurs années. Tout le présent Mémoire a pour but de combler ce vide dans une certaine mesure, en établissant les principes fondamentaux de la théorie des fonctions triplement périodiques de deux variables.

Notre travail est divisé en trois parties. L'introduction est consacrée à des propriétés des systèmes de périodes; nous avons dû reprendre sommairement quelques résultats connus pour les adapter, en les précisant, à la suite de notre Mémoire. Nous introduisons ensuite la notion nouvelle d'un *invariant* pour $(n+1)$ systèmes de périodes (dans le cas de n variables) et les entiers caractéristiques correspondants. Dans la première Partie nous étudions les zéros des fonctions triplement périodiques et nous sommes ainsi conduit à démontrer que *l'invariant* défini dans l'Introduction est nécessairement positif. Cette condition d'inégalité que nous rattachons à la loi de distribution des zéros d'une certaine fonction entière d'une variable, donne, lorsqu'on l'applique aux fonctions abéliennes toutes les inégalités de RIEMANN. On a ainsi une interprétation nouvelle de ces inégalités classiques. La fin de la première Partie est consacrée à la recherche d'une expression analytique générale des fonctions méromorphes triplement périodiques.

La seconde Partie est consacrée tout entière à des classes spéciales de fonctions triplement périodiques que nous appelons *semi-rationnelles*. Ces fonctions ont les propriétés des fonctions abéliennes avec quelques modifications qui rappellent tout à fait la dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions trigonométriques. Cette analogie se trouve pleinement confirmée par le théorème suivant qui termine notre Mémoire.

Si une fonction méromorphe de deux variables admet trois systèmes de périodes non exceptionnels et n'admet aucun système de périodes distinct des précédents, si en outre cette fonction est liée à ses deux dérivées partielles du premier ordre par une relation algébrique, on peut, après avoir effectué sur les variables une substitution linéaire convenable, mettre cette fonction sous forme d'une fraction rationelle en e^y, les coefficients étant des fonctions Θ de la seule variable x. La fonction est alors, d'après cela, ce que nous appelons une fonction *semi-rationnelle*.

Introduction.[1]

1. On dit que les zéros d'une fonction entière $f(x, y)$ des deux variables x et y admettent le système de périodes (a, b) ou encore que (a, b) est un système de périodes appartenant aux zéros de $f(x, y)$, lorsqu'il existe une identité de la forme suivante:

$$f(x + a, y + b) = e^{g(x,y)} f(x, y),$$

où $g(x, y)$ est une fonction entière de x et y; en d'autres termes $f(x + a, y + b)$ et $f(x, y)$ admettent les mêmes zéros et au même degré de multiplicité.

Si nous considérons deux systèmes de périodes (a_1, b_1) et (a_2, b_2) appartenant tous deux aux zéros de la fonction entière $f(x, y)$ et les deux identités correspondantes

$$f(x + a_1, y + b_1) = e^{g_1(x,y)} f(x, y) \tag{1}$$

$$f(x + a_2, y + b_2) = e^{g_2(x,y)} f(x, y) \tag{2}$$

les deux fonctions entières $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ satisfont à la relation suivante:

[1] Sur les questions traitées dans cette introduction on pourra consulter entre autres travaux: le Mémoire de M. APPELL *Sur les fonctions périodiques*. (Journal de Liouville 1891). — Un mémoire de M. POINCARÉ *Sur les fonctions abéliennes* (American Journal); enfin notre Mémoire sur les fonctions périodiques (Annales de l'Ecole normale supérieure 1902) et notre Note (Société des Sciences physiques de Bordeaux 1903).

(3) $$g_1(x+a_2, y+b_2)-g_1(x,y)-[g_2(x+a_1, y+b_1)-g_2(x,y)]=2\,i\pi m_{1,2},$$

où $m_{1,2}$ est un entier positif, négatif ou nul. Cette identité s'obtient immédiatement par le procédé habituel qui consiste à changer x et y en $x+a_2$, $y+b_2$ dans (1) et en $x+a_1$, $y+b_1$ dans (2).

Nous dirons que l'entier $m_{1,2}$ est l'entier caractéristique (ou simplement l'entier) relatif aux deux systèmes de périodes (a_1, b_1), (a_2, b_2). De la forme de la relation (3) qui sert de définition à $m_{1,2}$, il résulte que

$$m_{1,2}=-m_{2,1}$$

c'est-à-dire que le signe de l'entier change lorsqu'on échange entre eux (a_1, b_1) et (a_2, b_2). Lorsque nous parlerons de l'entier relatif à deux systèmes de périodes, il faudra donc tenir compte de l'ordre dans lequel sont énoncés les deux systèmes de périodes; de telle sorte que l'entier relatif à (a_1, b_1), (a_2, b_2) est égal et de signe contraire à l'entier relatif à (a_2, b_2), (a_1, b_1).

Rien n'empêche de supposer dans ce qui précède que les deux systèmes de périodes (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont identiques, c'est-à-dire que $a_2=a_1$ et $b_2=b_1$. L'entier caractéristique est alors évidemment nul ce qui peut s'exprimer par l'égalité: $m_{1,1}=0$.

Si l'on effectue sur les variables x et y une substitution linéaire qui remplace ces deux variables par les variables X et Y, si (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont les deux systèmes de périodes qui pour X et Y correspondent à (a_1, b_1) et (a_2, b_2), il est clair que l'entier caractéristique pour (A_1, B_1), (A_2, B_2) est le même que celui qui est relatif à (a_1, b_1) et (a_2, b_2). On voit aussi bien facilement que si on multiplie l'une par l'autre deux fonctions entières dont les zéros admettent les deux mêmes systèmes de périodes (a_1, b_1) et (a_2, b_2), pour le produit obtenu l'entier caractéristique sera égal à la somme des entiers caractéristiques des deux facteurs.

Enfin si $f(x,y)$ est une fonction qui ne s'annule pour aucun système de valeurs de x et y, on voit sans peine que l'entier caractéristique $m_{1,2}$ est nul.

Il en résulte que si l'on multiplie une fonction entière dont les zéros admettent les deux systèmes de périodes (a_1, b_1), (a_2, b_2) par une fonction entière qui ne s'annule pas, on n'altère pas, par cette opération, la valeur de l'entier $m_{1,2}$.

2. La relation entre quatre systèmes de périodes appartenant aux zéros de $f(x,y)$ et les six entiers caractéristiques relatifs à ces quatre systèmes pris deux à deux des six façons possibles est la suivante:

(4) $$\begin{aligned} &m_{1,2}(a_3b_4-a_4b_3)+m_{1,3}(a_4b_2-a_2b_4)+m_{1,4}(a_2b_3-a_3b_2)\\ &+m_{2,3}(a_1b_4-a_4b_1)+m_{2,4}(a_3b_1-a_1b_3)+m_{3,4}(a_1b_2-a_2b_1)=0,\end{aligned}$$

dans laquelle (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4) sont les quatre systèmes de périodes et les m sont les entiers caractéristiques conformément aux notations précédentes. La relation précédente peut encore s'écrire comme il suit:

$$\Sigma m_{\alpha,\beta} a_\gamma b_\delta = 0 \tag{5}$$

la sommation s'étendant aux douze permutations $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ des quatre nombres 1, 2, 3, 4 pour lesquelles le nombre des inversions (au sens de la théorie des déterminants) a une même parité; en tenant compte de ce que $m_{\alpha,\beta} = -m_{\beta,\alpha}$, les relations (4) et (5) sont évidemment les mêmes.

La relation (4) est absolument générale; elle a toujours lieu, que les quatre systèmes de périodes soient distincts ou non; quelques uns d'entre eux peuvent même être identiques. La relation est vraie même si $f(x, y)$ se réduit à une constante non nulle, car alors tous les entiers caractéristiques sont nuls. Le seul cas d'exception, sans aucun intérêt, est celui où $f(x, y)$ est nulle identiquement. Dans le cas où les quatre systèmes sont distincts, cette relation (4) est oelle qui lie nécessairement les périodes d'une fonction abélienne. La démonstration qui a été donnée par M. Appell et que nous avons étendue au cas des fonctions de n variables $(n + 2)$-fois périodiques, s'applique très bien au point de vue général auquel nous nous plaçons ici.

Pour le montrer, remarquons que si l'on effectue sur x et y une substitution linéaire quelconque définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= lX + nY \\ y &= l'X + n'Y \end{aligned} \tag{6}$$

et que l'on désigne par (A_k, B_k) le système de périodes relatif à X et Y qui correspond à (a_k, b_k), $(k = 1, 2, 3, 4)$, la relation (4) écrite à l'aide des périodes (A_k, B_k) conserve la même forme; car les entiers caractéristiques ne changent pas par une substitution linéaire et, d'autre part, chacune des parenthèses telles que $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ est égale à la parenthèse correspondante $(A_1 B_2 - A_2 B_1)$ multipliée par le déterminant de la substitution.

On peut, d'après cela, pour vérifier (4) effectuer une substitution linéaire. Nous pouvons d'ailleurs supposer que l'une des parenthèses $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ est différente de zéro, car si elles sont toutes nulles, il n'y a pas lieu à démonstration.

Supposant donc que $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ est différent de zéro, déterminons la substitution linéaire suivante:

$$\begin{aligned} X &= l_1 x + n_1 y \\ Y &= l_2 x + n_2 y \end{aligned} \tag{7}$$

par les conditions

$$(8) \qquad 2i\pi = l_1 a_1 + n_1 b_1, \qquad 0 = l_1 a_2 + n_1 b_2,$$

$$(9) \qquad 0 = l_2 a_1 + n_2 b_1, \qquad 2i\pi = l_2 a_2 + n_2 b_2,$$

ce qui est évidemment possible; on aura $l_1 n_2 - l_2 n_1 \neq 0$.

Par cette substitution les quatre systèmes de périodes seront remplacés par les suivants: $(2i\pi, 0)$, $(0, 2i\pi)$, (A_3, B_3), (A_4, B_4) et $f(x, y)$ deviendra $F(X, Y)$. Il suffit de continuer la démonstration comme le fait M. APPELL pour arriver à la relation suivante, sans aucune hypothèse restrictive relativement aux valeurs de A_3, B_3, A_4 et B_4:

$$(10) \quad 2m_{3,1} i\pi A_4 + 2m_{3,2} i\pi B_4 + 2m_{1,4} i\pi A_3 + 2m_{2,4} i\pi B_3 + m_{2,1}(A_3 B_4 - A_4 B_3) + 4\pi^2 m_{3,4} = 0.$$

On vérifie immédiatement que cette relation se réduit à la relation (4) écrite pour les systèmes de périodes $(2i\pi, 0)$, $(0, 2i\pi)$, (A_3, B_3), (A_4, B_4). La relation se trouve démontrée dans toute sa généralité. Remarquons que la relation (4) n'est une relation entre les quatre systèmes de périodes qu'autant que les six entiers ne sont pas tous nuls. Pour établir l'existence d'une relation entre les périodes pour le cas des fonctions abéliennes, il faut prouver que les entiers dans ce cas ne sont pas tous nuls. La démonstration que donne à ce sujet M. APPELL ne s'étend pas au cas des fonctions de n variables $(n + 2)$-fois périodiques. Pour ce cas général nous avons donné une autre démonstration dans le Mémoire déjà cité; dans la suite de celui-ci nous en indiquons, incidemment, une autre fondée sur des considérations différentes.

3. Nous avons vu l'invariance des entiers caractéristiques dans une substitution linéaire. Nous allons étudier maintenant l'effet produit sur ces entiers par une transformation effectuée sur les périodes. Remarquons tout d'abord que si $m_{p,q}$ est l'entier relatif aux deux systèmes de périodes (a_p, b_p), (a_q, b_q), l'entier relatif aux deux systèmes (a_p, b_p), $(-a_q, -b_q)$ sera $-m_{p,q}$ comme on le voit sans peine. Considérons ensuite trois systèmes de périodes (a_p, b_p), (a_q, b_q), (a_r, b_r) quelconques, distincts ou non. Soient, conformément aux notations précédentes, $m_{p,q}$, $m_{p,r}$, $m_{q,r}$ les entiers caractéristiques relatifs à ces systèmes. Posons toujours comme plus haut

$$(11) \qquad f(x + a_k, y + b_k) = e^{g_k(x,y)} f(x, y), \qquad (k = p, q, r).$$

On a ensuite

$$(12)\quad \begin{aligned} g_p(x+a_r, y+b_r) - g_p(x, y) - [g_r(x+a_p, y+b_p) - g_r(x, y)] &= 2\,i\pi m_{p,r} \\ g_q(x+a_r, y+b_r) - g_q(x, y) - [g_r(x+a_q, y+b_q) - g_r(x, y)] &= 2\,i\pi m_{q,r}. \end{aligned}$$

Cherchons l'entier caractéristique relatif aux systèmes de périodes $(a_p + a_q, b_p + b_q)$ et (a_r, b_r). Il est égal à l'expression suivante divisée par $2\,i\pi$:

$$g_p(x + a_q + a_r, y + b_q + b_r) + g_q(x + a_r, y + b_r) - g_p(x + a_q, y + b_q) - g_q(x, y)$$
$$- g_r(x + a_p + a_q, y + b_p + b_q) + g_r(x, y)$$

qui, en vertu des relations (12) où l'on change dans la première x et y en $x + a_q$, $y + b_q$, se réduit à $2\,i\pi(m_{p,r} + m_{q,r})$.

L'entier caractéristique pour les deux systèmes $(a_p + a_q, b_p + b_q)$ et (a_r, b_r) est donc $m_{p,r} + m_{q,r}$.

Plus généralement, soient n systèmes de périodes (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots n)$ et posons

$$(13)\quad \begin{aligned} A_1 &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \\ B_1 &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n \end{aligned}$$

les λ étant des entiers quelconques. Par l'application répétée des résultats précédents nous obtenons l'entier relatif à (A_1, B_1) et (a_p, b_p), (p ayant l'une des valeurs $1, 2, \ldots n$). En désignant par ν_p cet entier, nous avons ainsi:

$$(14)\quad \nu_p = \lambda_1 m_{1,p} + \lambda_2 m_{2,p} + \cdots + \lambda_n m_{n,p}.$$

Posons maintenant

$$(15)\quad \begin{aligned} A_2 &= \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_n a_n \\ B_2 &= \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_n b_n \end{aligned}$$

et cherchons l'entier caractéristique $M_{2,1}$ relatif à (A_2, B_2) et (A_1, B_1); en appliquant la même règle on l'obtient par la formule suivante:

$$M_{2,1} = -\mu_1\nu_1 - \mu_2\nu_2 - \mu_3\nu_3 \cdots - \mu_n\nu_n$$

et en remplaçant les ν par leurs valeurs (14)

$$M_{2,1} = -\Sigma\mu_p\lambda_q m_{q,p} \qquad (p \text{ et } q = 1, 2, \ldots n)$$

ce qui peut s'écrire aussi, en remarquant que $m_{q,p} = -m_{p,q}$ et $M_{2,1} = -M_{1,2}$:

$$(16)\quad M_{1,2} = \Sigma m_{p,q}(\lambda_p\mu_q - \lambda_q\mu_p)$$

la sommation s'étendant ici à toutes les combinaisons (p, q) des n premiers nombres entiers deux à deux (car $m_{p,p}=0$) et renfermant donc en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ termes.

Nous avons ainsi par la formule (16) l'expression des nouvelles valeurs des entiers caractéristiques après une transformation sur les périodes.

4. Comme application de cette formule considérons trois systèmes de périodes (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) et les entiers caractéristiques correspondants $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$. Nous allons montrer que l'on peut, par une transformation du *premier ordre* effectuée sur ces trois systèmes de périodes les remplacer par trois autres (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) pour lesquels les entiers caractéristiques seront $M_{1,2}=0$ $M_{2,3}=d$ $M_{3,1}=0$ où d est le plus grand commun diviseur (positif par exemple) des trois entiers $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$ supposés non tous nuls. Appelons en effet $m'_{1,2}$, $m'_{1,3}$, $m'_{2,3}$ les quotients respectifs de $m_{1,2}$, $m_{1,3}$, $m_{2,3}$ par leur plus grand commun diviseur d. Ces entiers étant premiers entre eux, nous pouvons choisir six entiers λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} m'_{2,3} & m'_{3,1} & m'_{1,2} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

soit égal à 1.

Posons alors

$$A_1 = m'_{2,3}a_1 + m'_{3,1}a_2 + m'_{1,2}a_3 \qquad A_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$
$$B_1 = m'_{2,3}b_1 + m'_{3,1}b_2 + m'_{1,2}b_3 \qquad B_2 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$$

$$A_3 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3$$
$$B_3 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

et calculons les entiers $M_{2,3}$, $M_{3,1}$, $M_{1,2}$ à l'aide de la formule (16) dont le second membre se réduira dans le cas actuel à un déterminant du troisième ordre. Pour $M_{2,3}$ nous aurons:

$$M_{2,3} = \begin{vmatrix} m_{2,3} & m_{3,1} & m_{1,2} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est évidemment égal à d et l'on a bien

$$M_{2,3} = d.$$

Les déterminants qui donnent $M_{3,1}$ et $M_{1,2}$ seront nuls comme ayant deux lignes proportionelles. Nous avons donc obtenu le résultat annoncé.

5. Comme autre application de la formule (16) nous allons indiquer, pour trois systèmes de périodes et les entiers correspondants, une expression qui possède des propriétés d'invariance d'une importance capitale pour la suite.

Les mêmes notations étant conservées, posons:

$$\delta_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad \delta_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad \delta_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

puis dans les formules suivantes, mettons en évidence les parties réelles et imaginaires de δ_1, δ_2 et δ_3:

$$\delta_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \delta_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \delta_3 = \alpha_3 + i\beta_3,$$

et posons:

$$I = m_{1,2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + m_{2,3}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + m_{3,1}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3). \tag{17}$$

On peut vérifier par un calcul tout à fait élémentaire les deux propriétés suivantes de l'expression réelle I.

Si l'on effectue sur les variables x et y une substitution linéaire quelconque de déterminant D, si l'on calcule ensuite la nouvelle expression de I pour les trois systèmes de périodes correspondant, pour les nouvelles variables, aux trois anciens (les entiers m restant comme nous l'avons vu inaltérés) la nouvelle expression de I sera égale à l'ancienne multipliée par le carré du module de D, propriété qui s'exprime par l'égalité suivante:

$$I_1 = |D^2| I.$$

On en conclut que la quantité réelle I *conserve son signe dans une substitution linéaire.*

En second lieu, si l'on effectue sur les trois systèmes de périodes une transformation d'ordre n, on vérifie à l'aide de la formule (16), que l'expression de I, après cette transformation, se reproduit multipliée par n^2. Donc, par une transformation quelconque, le signe de I n'est pas altéré. Nous verrons plus loin que I est nécessairement *positif, non nul* lorsque les trois systèmes de périodes ne sont pas *exceptionnels*, et que la condition $I > 0$ est la seule condition pour qu'il existe une fonction entière dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes considérés avec les entiers caractéristiques correspondants $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$. Dans le paragraphe suivant nous précisons ce que nous entendons ici par *exceptionnels*. Nous indiquerons d'abord comment l'expression de I peut être étendue au cas de n variables et de $(n+1)$ systèmes de périodes avec $\frac{n(n+1)}{2}$ entiers caractéristiques définis exactement comme dans le cas de deux variables.

Désignons par $(a_p^{(1)}, a_p^{(2)}, \ldots a_p^{(n)})$ $(p = 1, 2, \ldots, n+1)$ les $n+1$ systèmes de périodes conjuguées. A chacun de ces systèmes, imaginons que l'on ajoute un $(n+1)^{\text{iéme}}$ élément quelconque $a_p^{(n+1)}$ de façon à former un déterminant d'ordre $(n+1)$ dont la $p^{\text{ème}}$ ligne sera

$$a_p^{(1)}, a_p^{(2)}, \ldots a_p^{(n)}, a_p^{(n+1)} \quad (p = 1, 2, \ldots n+1).$$

Soit alors δ_p, $(p = 1, 2, \ldots n+1)$ le coefficient de $a_p^{(n+1)}$ dans le déterminant précédent, et mettons en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de δ_p; soit

$$\delta_p = \alpha_p + i\beta_p \qquad (p = 1, 2 \ldots, n+1).$$

Nous définirons I par l'égalité

$$I = \Sigma m_{p,q}(\alpha_p\beta_q - \alpha_q\beta_p) \tag{18}$$

la sommation Σ s'étendant aux $\frac{n(n+1)}{2}$ combinaisons (p, q) des $(n+1)$ premiers nombres entiers deux à deux.

I ainsi défini possédera les deux propriétés d'invariance énoncées ci-dessus pour le cas de $n = 2$. Son signe est donc invariable lorsqu'on effectue soit une substitution linéaire sur les variables, soit une transformation sur les périodes. Nous n'insistons pas sur ce cas général, car l'objet du présent Mémoire est l'étude du cas de deux variables. Mais les indications sommaires qui précèdent sur le cas de n variables, éclairciront dans la suite la nature de l'inégalité $I > 0$ que nous rencontrerons.

6. Revenons au cas de deux variables et de trois systèmes de périodes conjuguées, désignés par les mêmes notations que plus haut.

Ces trois systèmes de périodes seront exceptionnels s'ils satisfont à l'une ou à l'autre des deux conditions particulières suivantes:

1°. Il existe entre les trois déterminants du second ordre

$\delta_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$, $\delta_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$, $\delta_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$ une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls.

2°. Il existe deux relations simultanées de la forme:

$$(19) \qquad \begin{aligned} A a_1 + B a_2 + C a_3 &= 0, \\ A b_1 + B b_2 + C b_3 &= 0. \end{aligned}$$

A, B, C étant des constantes *réelles* non toutes nulles.

Il est clair que chacune des conditions (1°) et (2°) subsiste après une substitution linéaire ou une transformation.

Si les trois déterminants δ_1, δ_2, δ_3 sont nuls les trois systèmes de périodes sont proportionnels; laissons de côté ce cas très-facile à discuter, et supposons par exemple $\delta_1 \neq 0$. On pourra, dans ce cas, trouver quatre constantes l, m, l', m' telles que l'on ait:

$$\begin{aligned} l a_1 + m b_1 &= 2 i\pi & \qquad l' a_1 + m' b_1 &= 0 \\ l a_2 + m b_2 &= 0 & \qquad l' a_2 + m' b_2 &= 2 i\pi \end{aligned}$$

avec $lm' - l'm \neq 0$.

Si l'on effectue la substitution

$$\begin{aligned} x' &= lx + my \\ y' &= l'x + m'y \end{aligned}$$

les trois systèmes de périodes deviendront pour les variables x' et y': $(2 i\pi, 0)$, $(0, 2 i\pi)$, (a', b'). La condition (1°) serait alors une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls entre a', b' et $2 i\pi$. Nous avons étudié ce cas dans le Mémoire cité. La condition (2°) serait pour les systèmes actuels de périodes que a' et b' soient tous deux purement imaginaires. Il est facile d'apercevoir les raisons pour lesquelles ce cas doit être écarté de l'étude des fonctions triplement périodiques.

7. On peut, d'après ce qui précède, ramener trois systèmes de périodes non exceptionnels par une simple substitution linéaire faite sur les variables, à la forme $(2 i\pi, 0)$, $(0, 2 i\pi)$, (a, b) où l'on a, en mettant en évidence les parties réelles et les parties imaginaires de a et b:

$$a = \lambda_1 + \mu_1 i, \qquad b = \lambda_2 + \mu_2 i$$

l'une des deux quantités λ_1 ou λ_2 étant nécessairement différente de zéro. De plus il n'y a aucune relation linéaire homogène, à coefficients entiers non tous nuls entre a, b et $2 i\pi$.

On a ainsi une forme normale pour trois systèmes de périodes non exceptionnels. C'est celle qui a été employée par presque tous les auteurs pour la théorie des fonctions abéliennes. Nous allons en donner une autre que nous avons déjà employée dans le Mémoire cité et qui nous semble beaucoup plus propre à mettre en évidence les propriétés des fonctions triplement périodiques: nous l'utiliserons presque constamment dans ce qui suivra.

Supposons pour fixer les idées $\lambda_1 \neq 0$ et effectuons la substitution linéaire

$$X = \frac{2i\pi}{\lambda_1}x, \qquad Y = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x + y;$$

les trois nouveaux systèmes de périodes seront (en changeant l'ordre), $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ en posant:

$$\omega = -\frac{4\pi^2}{\lambda_1}, \qquad \beta = -2\pi\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\omega' = 2i\pi - 2\pi\frac{\mu_1}{\lambda_1}, \qquad \beta' = \frac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\lambda_1}.$$

On voit que β et β' sont *tous deux réels* et que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire.

On a ici:

$$\delta_1 = i(\beta'\omega - \beta\omega'), \quad \delta_2 = 2i\pi\omega', \quad \delta_3 = -2i\pi\omega.$$

Pour qu'il y ait entre δ_1, δ_2 et δ_3 une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers ϱ_1, ϱ_2 et ϱ_3 non tous nuls il faudrait que l'on eut:

$$\varrho_1(\beta'\omega - \beta\omega') + 2\varrho_2\pi\omega' - 2\varrho_3\pi\omega = 0$$

c'est-à-dire:

$$\omega(\varrho_1\beta' - 2\pi\varrho_3) + \omega'(2\varrho_2\pi - \varrho_1\beta) = 0$$

et comme $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire et que β et β' sont réels cela entraîne les deux conditions:

$$\varrho_1\beta' - 2\pi\varrho_3 = 0$$
$$\varrho_1\beta - 2\pi\varrho_2 = 0$$

ce qui n'aura lieu que si β et β' sont tous deux commensurables avec π.

Réciproquement, les trois systèmes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ où β et β' sont réels et ω, ω' quelconques mais à rapport imaginaire ne seront pas *exceptionnels* si β et β' ne sont pas tous deux commensurables avec π (ou nuls comme cas plus particulier).

Il peut arriver que dans la forme normale que nous venons d'indiquer, il y ait entre β, β' et 2π *une* relation linéaire homogène à coefficients entiers non tous nuls, sans que pour cela les trois systèmes soient exceptionnels: c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si l'un des deux nombres β ou β' était commensurable avec π. Un tel cas particulier n'est pas exclu par ce qui précède.

Première Partie.

8. Avant d'aborder l'étude de quelques propriétés des zéros des fonctions triplement périodiques, nous donnerons, pour une fonction régulière de trois variables complexes un théorème qui est un corollaire d'un théorème classique de Weierstrass. Nous désignons par $f(x, y, z)$ une fonction des trois variables complexes x, y, z régulière pour un domaine D limité par trois contours fermés simples (C_1, C_2, C_3) tracés respectivement sur chacun des trois plans représentatifs des variables. Nous comprenons dans ce domaine tous les points *situés sur ses frontières*. En outre nous supposons qu'il n'existe aucun couple de valeurs de y et de z appartenant au domaine (C_2, C_3) pour lequel $f(x, y, z)$ soit nulle qu'elle que soit la valeur de x. Dans ces conditions pour un point quelconque (x_1, y_1, z_1) du domaine D, il existe un polynôme de Weierstrass $P_1(x)$ entier en $x-x_1$ qui a les propriétés suivantes: 1° Le coefficient du terme du plus haut degré en $x-x_1$ est l'unité; 2° Il existe un nombre positif ϱ_1 tel que pour le domaine δ_1 défini par $|x-x_1|<\varrho_1$, $|y-y_1|<\varrho_1$, $|z-z_1|<\varrho_1$ tous les coefficients du polynôme sont des fonctions régulières de y et z et tel en outre qu'à l'intérieur de δ_1 les équations $f(x, y, z)=0$ et $P_1(x)=0$ sont équivalentes; 3° Tous les coefficients du polynôme $P_1(x)$ ordonné suivant les puissances de $(x-x_1)$ (à part celui qui est égal à l'unité) s'annulent pour $y=y_1$, $z=z_1$.

Remarquons que si au point considéré $f(x, y, z)$ ne s'annule pas, on a $P_1(x)\equiv 1$.

Nous ferons la remarque suivante, bien qu'elle soit évidente, pour mieux faire comprendre ce qui suit.

Supposons que les racines du polynôme $P_1(x)$ s'échangent entre elles dans le voisinage de $y=y_1$, $z=z_1$. Si nous prenons un système de valeurs (y_2, z_2) *non particulières* et *très-voisines* de (y_1, z_1) le polynôme $P_1(x)$ admet pour $y=y_2$, $z=z_2$ une racine $x=x_2$ très-voisine de x_1 et, en général, racine simple de $P_1(x)$. Au point (x_2, y_2, z_2) correspondra alors un polynôme de Weierstrass $P_2(x)$ qui sera du premier degré et pour lequel le nombre positif correspondant ϱ_2 sera très-petit puisqu'il sera au plus égal à la plus grande des quantités $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$. Mais si nous ordonnons le polynôme $P_1(x)$ suivant les puissances de

$(x - x_2)$ nous obtiendrons un polynôme $Q(x)$ qui aura, relativement au point (x_2, y_2, z_2) toutes les propriétés du polynôme de WEIERSTRASS, *à part la troisième.* D'une façon plus précise si nous appelons ε le plus grand des modules $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$, $|z_2 - z_1|$ nous voyons que: 1° le polynôme $Q(x)$ a pour coefficient de son terme du plus haut degré l'unité. 2° Pour le domaine $|x - x_2| < \varrho_1 - \varepsilon$, $|y - y_2| < \varrho_1 - \varepsilon$, $|z - z_2| < \varrho_1 - \varepsilon$ les coefficients de $Q(x)$ sont des fonctions régulières de y et z et de plus l'équation $Q(x) = 0$ est équivalente à $f(x, y, z) = 0$. Nous appellerons *polynôme normal* relatif au point (x_2, y_2, z_2) tout polynôme possédant les deux propriétés précédentes pour un domaine déterminé du point x_2, y_2, z_2. Il est clair qu'au point x_2, y_2, z_2 correspondent une infinité de polynômes normaux.

Si l'on compare le polynôme $Q(x)$ au polynôme de WEIERSTRASS $P_2(x)$ relatif au point (x_2, y_2, z_2), on voit que le rayon ϱ_2 du domaine pour lequel $P_2(x)$ est valable, est au plus égal à ε qui est très-petit, tandisque le rayon du domaine pour lequel $Q(x)$ est valable étant $\varrho_1 - \varepsilon$ est très-voisin de ϱ_1.

Cette remarque faite, démontrons le théorème suivant où $f(x, y, z)$ reste soumise aux mêmes hypothèses que ci-dessus. Il existe un nombre positif r tel que, quel que soit le point x_0, y_0, z_0 pris dans le domaine D, il lui correspond un *polynôme normal* $Q_0(x)$ valable pour le domaine $|x - x_0| < r$, $|y - y_0| < r$, $|z - z_0| < r$.

(Il est clair que cet énoncé serait faux en général si l'on remplaçait le mot *polynôme normal* par polynôme de WEIERSTRASS.)

Supposons que le théorème précédent ne soit pas vrai et prenons une suite de nombres positifs décroissants et tendant vers zéro; soit

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots . \varepsilon_n, \ldots .$$

cette suite. Le théorème énoncé n'étant pas vrai, nous pouvons prendre un point (x_n, y_n, z_n) dans le domaine D tel qu'à ce point ne corresponde aucun polynôme normal valable dans le domaine

$$|x - x_n| < \varepsilon_n, \quad |y - y_n| < \varepsilon_n, \quad |z - z_n| < \varepsilon_n,$$

ε_n étant un terme choisi dans la suite précédente. Supposons que l'on prenne successivement $n = 1, 2, \ldots + \infty$. On aura un ensemble infini dénombrable de points (x_n, y_n, z_n) appartenant tous au domaine D. Il existera un point limite de cet ensemble (a, b, c) qui appartiendra à D (puisque D comprend ses frontières). A ce point (a, b, c) correspond un polynôme de WEIERSTRASS valable pour un petit domaine de rayon ϱ autour de ce point. Si l'on considère le domaine $\frac{\varrho}{2}$ du point (a, b, c) et un point quelconque (a', b', c') de ce domaine, il correspond à (a', b', c') un *polynôme normal* convenablement choisi, comme nous l'avons vu plus haut, qui sera valable pour un domaine de rayon $\frac{\varrho}{2}$ autour de (a', b', c'). La contradiction avec ce qui précède est évidente. Le théorème énoncé est donc vrai.

9. Prenons maintenant une fonction méromorphe $\frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ triplement périodique les trois systèmes de périodes *non exceptionnels* étant sous la forme normale $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$; $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ sont deux fonctions entières sans *facteur commun.*

Nous allons étudier les zéros de l'équation

$$\frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)} - u = 0, \tag{1}$$

u étant une valeur donnée arbitrairement; l'équation précédente s'écrira:

$$g_1(x, y) - u g_2(x, y) = 0. \tag{2}$$

Appelons C_1 un parallélogramme du plan de la variable x construit avec ω et ω' pour côtés.

Mettons en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de y en posant:

$$y = \xi + i\eta;$$

puis considérons le rectangle du plan de la variable y défini par:

$$\begin{cases} a \leq \xi \leq b \\ c \leq \eta \leq c + 2\pi \end{cases} \tag{3}$$

où a, b, c sont trois valeurs réelles arbitraires $(a < b)$. Soit C_2 ce rectangle.

Enfin, soit C_3 un contour fermé simple quelconque du plan de la variable u, par exemple un cercle pour fixer les idées.

Il n'y a aucun système de valeurs de y et u pour lequel la différence $g_1(x, y) - u g_2(x, y)$ soit nulle identiquement quelle que soit x. Car si cette circonstance se présentait pour un système de valeurs (y_0, u_0), elle se présenterait aussi, par suite de la triple périodicité, pour les systèmes de valeurs $(y_0 + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi, u_0)$ m, n et p étant trois entiers quelconques.

Mais les valeurs de $m\beta + n\beta' + 2p\pi$ forment un ensemble qui admet, pour valeur limite, toute valeur réelle lorsque l'on suppose que β et β' ne sont pas tous deux commensurables avec π, ce qui est le cas. Donc k étant un nombre réel quelconque on aurait:

$$\frac{g_1(x, y_0 + ik)}{g_2(x, y_0 + ik)} = u_0$$

pour toutes les valeurs de x et les valeurs réelles de k. On aurait par suite

$$\frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)} = u_0$$

pour toutes les valeurs de x et y (voir à ce sujet notre Mémoire cité pages 32 et 33). La fonction considérée serait donc une constante.

Remarquons qu'il peut au contraire exister des systèmes de valeurs de x et u pour lesquels l'équation (2) soit satisfaite quelle que soit y. Si nous appelons (x'_0, u'_0) un tel système de valeurs, la même circonstance se présentera pour les systèmes de valeurs $(x_0 + m\omega + n\omega', u_0)$ ce qui montre que la différence

$$g_1(x, y) - u_0 g_2(x, y)$$

contiendrait en facteur une fonction Θ de la seule variable x, ce qui évidemment peut avoir lieu. Nous pouvons appliquer maintenant le théorème du paragraphe précédent à la fonction des trois variables x, y, u

$$g_1(x, y) - u g_2(x, y)$$

dans le domaine (C_1, C_2, C_3) (parallélogramme, rectangle, cercle) défini ci-dessus: il existe un nombre positif r tel qu'à tout point de ce domaine correspond un polynôme normal entier en x valable pour un domaine de rayon r autour du point considéré.

Considérons maintenant pour les variables x, y, u un domaine Δ comprenant: pour x tout le plan de cette variable (excepté $x = \infty$); pour y toute la bande parallèle à l'axe des η et définie par

$$a \leq \xi \leq b$$

(le point $y = \infty$ excepté); enfin pour u le même cercle C_3 que précédemment.

Il résulte immédiatement de la triple périodicité de la fonction $\frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ que le théorème précédent s'applique à tout le domaine Δ. En effet, soit (x_1, y_1, u_1) un point quelconque du domaine Δ; parmi les points $(x_1 + m\omega + n\omega', y_1 + mi\beta + + ni\beta' + 2ip\pi)$, ($m$, n et p entiers quelconques) il y en a un qui appartient au domaine (C_1, C_2, C_3); car m et n peuvent être choisis de façon que le point $x_1 + m\omega + n\omega'$ appartienne au parallélogramme C_1 et ensuite on peut choisir p de façon que la partie imaginaire de $y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi$ appartienne à l'intervalle c à $c + 2\pi$ des inégalités (3). Si nous posons alors

$$x_2 = x_1 + m\omega + n\omega', \qquad y_2 = y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi$$

au point (x_2, y_2, u_1) du domaine (C_1, C_2, C_3) correspond un polynôme normal valable pour un domaine de rayon r autour de x_2, y_2, u_1. En remplaçant dans ce polynôme x et y respectivement par $x + m\omega + n\omega'$ et $y + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi$ il deviendra un polynôme normal relatif au point (x_1, y_1, u_1) et valable pour un domaine de rayon r autour de ce point: cela résulte de la triple périodicité de $\frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$. Le rayon r est, d'après ce qui précède, le même pour tous les points de Δ.

Remarquons maintenant que si dans l'équation (1) on pose $u' = \frac{1}{u}$ et qu'on renverse le rapport du premier membre, l'équation conserve la même forme. Donc, ce que nous avons dit précédemment pour une valeur finie u_1 de u, s'appliquera encore ici pour $u = \infty$, en changeant comme d'habitude $u - u_1$ en $\frac{1}{u}$ et en appelant domaine de rayon r du point u celui qui est défini par l'inégalité

$$\left|\frac{1}{u}\right| < r$$

Ces conventions et remarques faites, on voit par un raisonnement bien simple, que l'on peut prendre pour C_3, dans l'étude actuelle, tout le plan de la variable u sans même en excepter le point $u = \infty$.

En résumé: il existe un nombre positif r qui convient pour tous les points du domaine formé par: tout le plan de la variable x ($x = \infty$ excepté); toute la bande du plan de y définie par $a \leq \xi \leq b$ ($y = \infty$ excepté); tout le plan de la variable u, le point à l'infini *compris*.

Il résulte de là la conséquence suivante: si dans l'équation (1) on considère x comme fonction des deux variables indépendantes y et u, jamais x ne devient *infinie* et cette fonction n'a d'autres singularités que des singularités de nature algébrique (sauf pour $y = \infty$). En effet, (y_1, u_1) étant un système quelconque de valeurs de y et u du domaine défini ci-dessus recherchons si ce couple de valeurs peut être une singularité pour l'une quelconque des déterminations de x et de quelle nature peut être cette singularité. Appelons δ le domaine de rayon r autour du point (y_1, u_1); prenons un système de valeurs quelconques (y_2, u_2) dans le domaine δ et désignons par x_2 l'une quelconque des déterminations de x pour $y = y_2$, $u = u_2$. Cette détermination est racine d'un polynôme normal $Q(x)$ relatif au point (x_2, y_2, u_2) et valable dans le domaine r de ce point; or le point (y_1, u_1) appartient au domaine r du point (y_2, u_2); donc comme les coefficients de $Q(x)$ sont des fonctions régulières de y et u dans ce domaine et que le coefficient du terme du plus haut degré en x est l'unité, on voit qu'aucune racine de ce polynôme ne devient infinie pour $y=y_1$, $u=u_1$. Quant à la nature de la singularité possible pour $y=y_1$, $u=u_1$, elle est par ce qui précède, évidente. Comme pour la bande du plan des y

$$a \leq \xi \leq b$$

a et b sont arbitraires, on voit que *la dernière* conclusion que nous venons d'énoncer est vraie pour toute valeur finie y_1 et nous pouvons dire que *x ne devient jamais infinie pour aucune valeur de y finie et de u finie ou infinie; les diverses déterminations de x ne peuvent admettre de singularités essentielles que pour y infinie.*

Il est à peine besoin de faire remarquer que la fonction $\dfrac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ peut, comme cas particulier, se réduire à une fonction de x tout seul: c'est alors une fonction elliptique de x aux périodes ω et ω' et la proposition précédente se réduit à la proposition classique que x est une fonction de u (intégrale abélienne de 1ère espèce) qui ne devient jamais infinie même pour $u=\infty$ et qui n'admet que des singularités algébriques.

10. Si dans l'équation (I) nous donnons à x et y un système de valeurs non particulières x_1 et y_1 il en résultera pour u une valeur bien déterminée u_1. Si l'on choisit alors pour $y=y_1$, $u=u_1$ la détermination de x qui est égale à x_1 et si l'on suppose que y et u varient d'une façon continue à partir des valeurs y_1 et u_1, x variera d'après ce qui précède d'une façon continue quelle que soit la suite de valeurs attribuées à y et u. Il pourra y avoir ambiguité sur la continuation de x, si y et u prennent quelque système de valeurs pour lequel il y a ramification, mais il est clair qu'on aura par continuité constamment *au moins une* valeur de x correspondant à n'importe quel système de valeurs de y et u (y finie). Donc l'équation (I) admet en x au moins une racine, pour tout système de valeurs $y=y_2$, $u=u_2$. Le seul cas d'exception serait donc celui que notre raisonnement a écarté dès le début pour lequel la fonction $\dfrac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ serait une constante.

11. Nous pouvons compléter notre dernier résultat de la façon suivante: *étant donné un système de valeurs quelconques $y=y_2$, $u=u_2$, il existe un nombre entier positif q tel que si l'on construit dans le plan de la variable x un réseau de parallélogrammes de côtés $q\omega$, $q\omega'$ l'équation* (I) *aura au moins une racine dans chacun des parallélogrammes du réseau.*

En effet, soit $x=x_2$ une racine de l'équation (I) pour $y=y_2$, $u=u_2$. Prenons la bande

$$a \leq \xi \leq b$$

de telle sorte qu'elle contienne la valeur y_2 de l'énoncé et supposons que y décrive le segment rectiligne qui joint le point y_2 au point $y_2 + 2i\pi$, u restant constant et égal à u_2. Dans l'équation (1) x est alors fonction de y seulement, et si l'on suppose que x part de la valeur x_2 pour $y = y_2$, on pourra suivre par continuité la valeur de x jusqu'à une valeur x_3 pour $y = y_2 + 2i\pi$; il peut y avoir ambiguité dans cette continuation pour certaines valeurs de y qui sont des points de ramification pour la branche de fonction choisie; ces points d'ambiguité seront en nombre fini puisque chaque polynôme normal peut être choisi de façon à être valable pour un domaine de rayon r le même pour tous les points du domaine considéré actuellement. En choisissant, pour chaque point d'ambiguité, arbitrairement la détermination de continuation, la variable x décrira une ligne déterminée (Γ) dans son plan, lorsque y parcourra le segment rectiligne y_2 à $y_2 + 2i\pi$ dans le sens positif. Comme x est une fonction continue, jamais infinie, de y, la ligne Γ est tout entière dans une portion finie du plan de x. Nous pouvons donc prendre l'entier positif q assez grand pour que la ligne Γ soit tout entière à l'intérieur d'un parallélogramme $P_{0,0}$ convenablement choisi de côtés $q\omega$, $q\omega'$. (Notons que Γ peut se réduire à un point si x est constant lorsque y varie: cela n'infirme en rien nos raisonnements). Ceci posé, m et n désignant deux entiers quelconques positifs, negatifs ou nuls, on peut évidemment choisir l'entier p de façon que l'on ait:

$$0 \leq mq\beta + nq\beta' + 2p\pi < 2\pi$$

La valeur

$$y_4 = y_2 + mqi\beta + nqi\beta' + 2pi\pi$$

sera alors un point du segment $(y_2,\ y_2 + 2i\pi)$; il lui correspondra donc une valeur de x, $x = x_4$, sur Γ, c'est-à-dire à l'intérieur de $P_{0,0}$. Mais alors le point $x_{m,n} = x_4 - mq\omega - nq\omega'$, $y = y_2$, $u = u_2$ par suite de la triple périodicité supposée, vérifie l'équation (1). Or $x_{m,n}$ est à l'intérieur du parallélogramme qui se déduit de $P_{0,0}$ par la translation $(-mq\omega,\ -nq\omega')$. Comme m et n sont arbitraires le théorème énoncé se trouve démontré.

12. Lorsqu'on donne dans l'équation (1) à y une valeur constante y_0, x se trouve définie comme une fonction de la seul variable u. Cette fonction a, d'après le paragraphe précédent une infinité de déterminations (qui peuvent toutes s'échanger entre elles) et chacune de ces déterminations est une fonction continue de u, ne devenant jamais infinie, même pour $u = \infty$ et n'admettant, comme singularités que des ramifications algébriques.

Si l'on donne, au contraire, à u une valeur constante u_0 et que y varie, l'équation (1) définit x comme une fonction de y seul. Nous allons établir dans les paragraphes suivants quelques propriétés de cette fonction: nous ne particulariserons pas la question en supposant $u_0 = 0$, l'équation qui lie x à y étant alors:

$$g_1(x, y) = 0, \tag{4}$$

où $g_1(x, y)$ est une fonction entière dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$.

Remarquons que nous pouvons supposer que dans l'équation (4) $g_1(x, y)$ est une fonction entière *quelconque* dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes; ce que nous avons dit plus haut pour l'équation (2) s'appliquera (en supposant $u = 0$) à l'équation (4) *pourvu toutefois que* $g_1(x, y)$ *s'annule* pour quelque système de valeurs (x_1, y_1) de x et de y. Car alors en partant du système de valeurs (x_1, y_1), comme plus haut du système de valeurs (x_1, y_1, u_1) tous les mêmes raisonnements seront applicables; en particulier le théorème du paragraphe 11, en supposant $u_2 = 0$, sera vrai pour l'équation (4).

Ceci posé, si nous considérons la multiplicité à deux dimensions réelles des zéros de l'équation (4), les points de cette multiplicité pour lesquels il peut y avoir ramification de x considérée comme fonction de y sont des points isolés dans la représentation des variables x et y dans l'hyperespace à quatre dimensions. Par conséquent dans un domaine d'étendue finie de cet hyperespace il n'y aura qu'un nombre fini de tels points exceptionnels. Si nous reprenons maintenant la représentation de x et de y sur deux plans et que nous considérions à nouveau le domaine (C_1, C_2) (parallélogramme et rectangle de hauteur 2π) envisagé plus haut, nous voyons que, dans ce domaine, il n'y a qu'un nombre fini N de systèmes de valeurs (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots N)$ pour x et y correspondant à des ramifications de x.

Par chacun des N points y_n du rectangle C_2, menons une parallèle D_n à l'axe des imaginaires. Nous divisons ainsi la bande $a \leq \xi \leq b$ en un nombre déterminé de bandes indéfinies analogues mais plus petites. Montrons qu'à l'intérieur de chacune d'elles (frontières exclues) il n'y a aucun point $y = y'$ pour lequel l'une quelconque des déterminations de x puisse admettre une ramification. En effet, soit x' l'une quelconque des déterminations de x pour $y = y'$; on pourra prendre les entiers m, n et p (comme plus haut) de telle sorte que le point (x'_1, y'_1) défini par

$$x'_1 = x' + m\omega + n\omega', \qquad y'_1 = y' + mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi$$

appartienne au domaine (C_1, C_2). Mais si il y avait ramification pour $x = x'$, $y = y'$, il y aurait aussi ramification, par suite de la triple périodicité, pour $x = x_1'$, $y = y'_1$. Le point y'_1 serait donc l'un des N points y_n; mais cela est impossible puisque y' n'est pas sur l'une des parallèles D_n.

D'autre part, le point y_n correspondant à une ramification de la branche $x = x_n$, le point $y_n + m' i\beta + n' i\beta' + 2p' i\pi$ (m', n' et p étant trois entiers quelconques) correspondra à une ramification pour la branche $x = x_n + m'\omega + n'\omega'$. Or on sait que β et β' n'étant pas tous deux commensurable avec π, la quantité $m'\beta + n'\beta' + 2p'\pi$ pourra être aussi voisine que l'on voudra de toute quantité réelle donnée, pour un choix convenable des trois entiers. Donc les points $y_n + m' i\beta + n' i\beta' + 2p' i\pi$ forment un ensemble admettant pour points limites tous les points de la droite D_n. Donc si, comme cela est évident, pour chaque branche de la fonction x les valeurs de ramification pour y sont isolées, pour l'ensemble de toutes les déterminations de x ces valeurs admettent comme points limites tous les points des droites D_n: nous appellerons ces droites *les droites des ramifications.* On voit par ce qui précède que tout le plan de la variable y se trouve subdivisé par les droites de ramifications en bandes parallèles à l'axe des imaginaires telles qu'à l'intérieur de chacune d'elles, chacune des déterminations de x est une fonction *uniforme et régulière* de y. Cela se déduit de ce qui précède par un raisonnement bien connu. En outre, entre deux parallèles quelconques à l'axe des imaginaires $\xi = a$, $\xi = b$, il n'y a qu'un nombre limité de droites de ramifications.

13. Pour établir certaines propriétés des zéros de $g_1(x, y)$ nous supposerons, ce qui ne restreint pas la généralité (voir Note I à la fin du Mémoire) que la fonction $g_1(x, y)$ satisfait aux identités suivantes:

$$(5) \qquad \begin{cases} g_1(x, y + 2i\pi) = g_1(x, y) \\ g_1(x + \omega, y + i\beta) = e^{\varphi(y) + m_{2,1} y} g_1(x, y) \\ g_1(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) + iAx + m_{3,1} y} g_1(x, y) \end{cases}$$

dans lesquelles $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont deux fonctions entières de la seule variable y, admettant l'une et l'autre la période $2i\pi$, et satisfaisont en outre à l'identité

$$(6) \qquad \psi(y + i\beta) - \psi(y) = \varphi(y + i\beta') - \varphi(y);$$

en outre A est une constante dont la valeur est la suivante

$$(7) \qquad A = \frac{m_{1,3}\beta + m_{2,1}\beta' + 2m_{3,2}\pi}{\omega},$$

$m_{1,3}$, $m_{2,1}$, $m_{3,2}$ sont les entiers caractéristiques relatifs aux trois systèmes de périodes pris dans l'ordre $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Prenons dans le plan de la variable y un segment rectiligne ayant pour origine un point arbitraire y_0 et pour extremité le point $y_0 + 2i\pi$. Lorsque y parcourt ce segment de y_0 à $y_0 + 2i\pi$ les différentes déterminations de x dans l'équation (4) décrivent dans le plan représentatif de x certaines courbes. Choisissons dans ce plan un segment rectiligne d'origine x_0 et d'extrémité $x_0 + \omega$ de telle sorte que x_0 et $x_0 + \omega$ ne soient pas situés sur les courbes décrites par les différentes déterminations de x.

Posons

$$F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Log} g_1(x, y)$$

et considérons l'intégrale, prise le long du segment rectiligne $(x_0, x_0 + \omega)$,

$$\int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x, y)dx = \operatorname{Log} \frac{g_1(x_0 + \omega, y)}{g_1(x_0, y)}, \tag{8}$$

dans laquelle nous donnons tout d'abord à y la valeur y_0 et nous prenons pour le second membre la détermination qui convient pour $\operatorname{Log} \dfrac{g_1(x_0 + \omega, y_0)}{g_1(x_0, y_0)}$.

Nous supposerons ensuite que y varie en se déplaçant sur le segment rectiligne $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ toujours dans le sens de y_0 vers $y_0 + 2i\pi$. Remarquons que $g_1(x_0, y)$ et $g_1(x_0 + \omega, y)$ ne s'annulent pas, d'après l'hypothèse faite, dans cette variation de y. Nous pouvons donc définir une fonction $X(y)$ uniforme sur le segment $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ par l'égalité:

$$X(y) = \operatorname{Log} \frac{g_1(x_0 + \omega, y)}{g_1(x_0, y)}, \tag{9}$$

$X(y_0)$ ayant une valeur égale à celle de l'intégrale (8) pour $y = y_0$.

L'intégrale précédente est fonction continue de y tant que l'une des valeurs de x qui annulent $g_1(x, y)$ ne traverse pas le chemin d'intégration. Lorsqu'une telle valeur traverse le segment $(x_0, x_0 + \omega)$ dans le *sens direct* [sens de la direction obtenue en faisant tourner de $+\frac{\pi}{2}$ le segment $(x_0, x_0 + \omega)$] l'intégrale augmente de $2i\pi$; elle diminue de $2i\pi$ lorsque la traversée a lieu en sens inverse. Il en résulte que la détermination du second membre de (8) doit être augmentée ou diminuée de $2i\pi$ dans les mêmes conditions. La valeur de l'intégrale (8) pour $y = y_0 + 2i\pi$ sera donc égale à:

$$X(y_0 + 2i\pi) + 2ni\pi,$$

où n est la différence algébrique entre le nombre des racines de $g_1(x, y)$ qui ont traversé dans le sens direct et le nombre de celles qui ont traversé dans le sens indirect.

Nous aurons d'après cela:

$$\int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x, y_0 + 2i\pi)\,dx - \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x, y_0)\,dx = X(y_0 + 2i\pi) + 2ni\pi - X(y_0).$$

Mais d'après les identités (5)

$$F(x, y_0 + 2i\pi) = F(x, y_0)$$

et par suite

$$2ni\pi = X(y_0) - X(y_0 + 2i\pi). \tag{10}$$

D'après la première des identités (5), $g_1(x, y)$ est fonction uniforme de x et de e^y; lorsque y parcourt le segment $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ la valeur de e^y décrit dans le sens direct un cercle Γ de rayon égal au module de e^{y_0} et la variation totale de l'argument de $g_1(x_0 + \omega, y)$ est un multiple entier de 2π; ce multiple restera évidemment le même si e^y fait le tour de Γ dans le sens direct en partant d'un autre point de Γ que précédemment. Cela revient à dire que si k désigne un nombre réel quelconque les variations totales des arguments de $g_1(x_0 + \omega, y)$ et de $g_1(x_0 + \omega, y + ik)$ seront les mêmes lorsque y décrira le segment rectiligne $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ dans le sens direct. La différence

$$\frac{1}{i}[X(y_0 + 2i\pi) - X(y_0)]$$

est d'après (9) la variation totale de l'argument de $\dfrac{g_1(x_0 + \omega, y)}{g_1(x_0, y)}$ lorsque y parcourt le segment $(y_0, y_0 + 2i\pi)$; elle est donc aussi égale à la variation totale de l'argument de

$$\frac{g_1(x_0 + \omega, y + i\beta)}{g_1(x_0, y)},$$

fraction qui est égale d'après (5) à $e^{\varphi(y) + m_{2,1} y}$.

La variation de l'argument est donc $2\pi m_{2,1}$ et d'après (10) on aura en tenant compte de ce que $m_{2,1} = -m_{1,2}$:

$$n = m_{1,2}.$$

Donc *l'entier caractéristique* $m_{1,2}$ *est égal à la différence algébrique entre le nombre des traversées par les racines de l'équation* (4) *du segment* $(x_0,\ x_0+\omega)$ *dans le sens direct et le nombre des traversées dans le sens indirect, lorsque* y *parcourt le segment* $(y_0,\ y_0+2i\pi)$ *de* y_0 *à* $y_0+2i\pi$.

D'une façon tout analogue, l'entier $m_{1,3}$ a la même signification relativement à un segment $(x_0,\ x_0+\omega')$.

14. L'intégrale du premier membre de (8) nous servira encore à établir une propriété très importante des zéros de l'équation (1).

Remarquons tout d'abord que la partie imaginaire de cette intégrale a un sens bien déterminé et une valeur finie pour chaque valeur de y appartenant au segment $(y_0,\ y_0+2i\pi)$ même si une racine x de l'équation (4) est sur le segment $(x_0,\ x_0+\omega)$. La partie imaginaire de l'intégrale (8) ne diffère que par des multiples de π de la partie imaginaire de $X(y)$ laquelle est continue sur tout le segment $(y_0,\ y_0+2i\pi)$. Ces multiples de π proviennent des traversés du segment $(x_0,\ x_0+\omega)$ par les racines de l'équation (4). Ce nombre de traversées étant évidemment fini lorsque y parcourt le segment $(y_0,\ y_0+2i\pi)$ dans le sens de y_0 à $y_0+2i\pi$, il en résulte que: x_0 *et* y_0 *étant donnés, il existe un nombre positif* B *tel que la partie imaginaire de l'intégrale* (8) *a un module inférieur à* B pour toute valeur de y appartenant au segment $(y_0,\ y_0+2i\pi)$ et, par suite, pour toute valeur de y appartenant à la droite indéfinie qui joint les points y_0 et $y_0+2i\pi$ puisque $F(x,\ y)$ admet la période $2i\pi$ relativement à la variable y.

Ceci posé, prenons dans le plan de la variable x un parallélogramme $P_{p,q}$ construit sur les deux segments $(x_0,\ x_0+p\omega)$ et $(x_0,\ x_0+q\omega')$ p et q étant deux entiers positifs pour fixer les idées. Nous pouvons supposer, le point x_0 n'étant pas choisi de façon particulière, qu'aucune des racines de

$$g_1(x,\ y_0)=0.$$

n'est située sur le périmètre de $P_{p,q}$.

Dans ces conditions, le nombre $N_{p,q}$ des zéros de $g_1(x,\ y_0)$ intérieurs au parallélogramme $P_{p,q}$ est donné par:

$$2i\pi N_{p,q}=\int F(x,\ y_0)\,dx$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct tout le long du périmètre de $P_{p,q}$.

Posons:

$$S_1=\sum_{m=0}^{m=p-1}\int_{x_0+m\omega}^{x_0+(m+1)\omega}F(x,\ y_0)\,dx\,,$$

$$S_2 = \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0+m\omega'}^{x_0+(m+1)\omega'} F(x, y_0)\,dx,$$

$$S_3 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0+q\omega'+m\omega}^{x_0+q\omega'+(m+1)\omega} F(x, y_0)\,dx,$$

$$S_4 = \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0+p\omega+m\omega'}^{x_0+p\omega+(m+1)\omega'} F(x, y_0)\,dx;$$

chacun des chemins d'intégration est un *segment rectiligne* qui appartient au périmètre de $P_{p,q}$ et l'ensemble de ces chemins comprend tout le périmètre du parallélogramme, de telle sorte que l'on a:

$$(11) \qquad 2i\pi N_{p,q} = \pm (S_1 - S_2 + S_4 - S_3)$$

le signe à prendre devant la parenthèse est celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

Les expressions de S_1, S_2, S_3 et S_4 peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$S_1 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x + m\omega, y_0)\,dx,$$

$$S_2 = \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega'} F(x + m\omega', y_0)\,dx,$$

$$S_3 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x + q\omega' + m\omega, y_0)\,dx,$$

$$S_4 = \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega'} F(x + p\omega + m\omega', y_0)\,dx.$$

Des identités (5) on conclut immédiatement les suivantes, où m est un entier quelconque:

$$F(x + m\omega, y) = F(x, y - mi\beta),$$

$$F(x + m\omega', y) = miA + F(x, y - mi\beta').$$

A l'aide de ces formules on peut transformer les expressions précédentes de S_1, S_2, S_3, S_4 en les suivantes:

$$S_1 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x, y_0 - mi\beta)\,dx,$$

$$S_2 = \frac{q(q-1)}{2} A i \omega' + \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega'} F(x, y_0 - mi\beta')\,dx,$$

$$S_3 = pqAi\omega + \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x, y_0 - qi\beta' - mi\beta)\,dx,$$

$$S_4 = \frac{q(q-1)}{2} A i \omega' + \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega'} F(x, y_0 - pi\beta - mi\beta')\,dx.$$

Appelons pour abréger Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 les sommes d'intégrales qui figurent respectivement dans ces expressions de S_1, S_2, S_3, S_4 de telle sorte que

$$S_1 = \Sigma_1, \quad S_2 = \frac{q(q-1)}{2} A i \omega' + \Sigma_2, \quad S_3 = pqAi\omega + \Sigma_3, \quad S_4 = \frac{q(q-1)}{2} A i \omega' + \Sigma_4$$

et par suite de la formule (11):

$$2i\pi N_{p,q} = \pm(-pqAi\omega + \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \Sigma_3).$$

Comme $A\omega$ est réel (formule 7), les parties réelles de Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 se détruisent dans cette somme. D'autre part, en vertu de la remarque faite au début de ce paragraphe, les parties imaginaires de chacune des intégrales figurant dans les sommes Σ_1, Σ_2, Σ_3 et Σ_4 sont toutes inférieurs à un nombre positif fini B, qui dépend de x_0, y_0, mais pas du tout de p et q. Il résulte de là que les parties imaginaires de Σ_1 et Σ_3 ont des modules inférieurs à pB et celles de Σ_2 et Σ_4 des modules inférieurs à qB, de telle sorte que l'on peut poser:

$$2i\pi N_{p,q} = \pm(-pqAi\omega + i\alpha_1 + i\alpha_2 + i\alpha_3 + i\alpha_4)$$

les α étant quatre nombres réels tels que

$$(12) \qquad |\alpha_1| < pB, \quad |\alpha_2| < qB, \quad |\alpha_3| < pB, \quad |\alpha_4| < qB.$$

La rélation précédente peut encore s'écrire:

$$\frac{N_{p,q}}{pq} = \pm\left(-\frac{A\omega}{2\pi} + \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2\pi pq}\right).$$

Comme

$$\left|\frac{\alpha_1}{pq}\right| < \frac{B}{q}, \quad \left|\frac{\alpha_2}{pq}\right| < \frac{B}{p}, \quad \left|\frac{\alpha_3}{pq}\right| < \frac{B}{q}, \quad \left|\frac{\alpha_4}{pq}\right| < \frac{B}{p},$$

on voit que si p et q augmentent *tous deux* indéfiniment on aura:

$$\lim \frac{N_{p,q}}{pq} = \mp \frac{A\omega}{2\pi} = \mp \frac{m_{1,3}\beta + m_{2,1}\beta' + 2m_{3,2}\pi}{2\pi};$$

le signe supérieur se rapporte au cas où le coefficient de i dans $\frac{\omega'}{\omega}$ est positif.

On peut exprimer le résultat précédent en disant que le nombre réel $\mp\frac{A\omega}{2\pi}$ est le *nombre moyen* de zéros de la fonction $g_1(x, y_0)$ par parallélogramme construit sur les périodes ω et ω' et ce nombre moyen ne dépend pas de la valeur choisie pour y_0: il ne dépend que des entiers caractéristiques et de β, β'. Ce nombre ne peut être évidemment négatif; on en conclut donc que la quantité réelle $\frac{A\omega}{2\pi}$ est de signe contraire à la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega}$. On peut se demander toutefois si ce nombre ne peut pas être nul. On voit que c'est impossible de la façon suivante.

Nous avons montré que l'équation

$$g_1(x, y_0) = 0$$

admet au moins un zéro dans chaque parallélogramme du réseau construit avec les côtés $q_1\omega$, $q_1\omega'$ si q_1 est un entier positif convenablement choisi qui peut dépendre de y_0; ceci a été établi (paragraphe 11) sous la seule hypothèse que $g_1(x, y)$ n'est pas une fonction ne s'annulant pour aucun système de valeurs de x et y et sous l'hypothèse de la triple périodicité de ses zéros. Prenons

$$p = q = sq_1$$

s étant un entier positif. Dans le parallélogramme $P_{p,q}$ il y aura au moins s^2 zéros de $g_1(x, y_0)$ et l'on aura:

$$\frac{N_{p,q}}{pq} > \frac{1}{q_1^2}.$$

Si s augmente indéfiniment, on voit que la limite de $\frac{N_{p,q}}{pq}$ est au moins égale à

$\frac{1}{q_1^2}$ et par suite différente de zéro. Par conséquent A *ne peut pas être nul* et par suite les entiers $m_{1,3}$, $m_{2,1}$, $m_{3,2}$ *ne peuvent être tous nuls*, si $g_1(x, y)$ n'est pas une fonction entière qui ne s'annule pas, les trois systèmes de périodes étant toujours supposés non exceptionnels.

15. Si nous considérons une fonction $f(x, y)$ méromorphe aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ on peut la mettre sous forme du quotient de deux fonctions entières $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ *n'admettant aucun facteur commun qui s'annule.* Les entiers caractéristiques communs à $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ seront appelés les entiers caractéristiques de $f(x, y)$; ils sont ainsi définis d'une façon unique, puisque les entiers caractéristiques de $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ ne changent pas lorsqu'on multiplie ces fonctions par une fonction entière qui ne s'annule pas. Si $m_{1,2}$ $m_{2,3}$, $m_{3,1}$ sont les trois entiers communs à $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$, l'expression $m_{1,3}\beta + m_{2,1}\beta' + 2m_{3,2}\pi$ ne peut pas être nulle si $f(x, y)$ n'est pas une constante. Car si cette expression est nulle $g_2(x, y)$ ne peut pas s'annuler, par conséquent $f(x, y)$ serait une fonction entière avec trois systèmes de périodes non exceptionnels, et par suite une constante.

16. Pour mieux interpréter le résultat précédent relatif au signe de $\pm \frac{A\omega}{2\pi}$, mettons en évidence les parties réelles et imaginaires de ω et ω'; soit

$$\omega = \lambda + \mu i, \quad \omega' = \lambda' + \mu' i.$$

Le signe de i dans $\frac{\omega'}{\omega}$ sera celui de $\lambda\mu' - \mu\lambda'$, de telle sorte que nous aurons dans tous les cas:

$$(\lambda\mu' - \mu\lambda') A\omega < 0$$

ou bien, en remplaçant A par sa valeur et remarquant que $m_{2,1} = -m_{1,2}$:

$$(\lambda\mu' - \mu\lambda')(m_{1,2}\beta' + 2m_{2,3}\pi + m_{3,1}\beta) > 0.$$

Formons maintenant pour les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ l'invariant I dont nous avons donné la définition au paragraphe 5 de l'Introduction. Il vient:

$$I = 2\pi(\lambda\mu' - \mu\lambda')(m_{1,2}\beta' + 2m_{2,3}\pi + m_{3,1}\beta).$$

La condition d'inégalité précédente s'écrit donc

$$I > 0.$$

Nous avons signalé l'invariance du signe de I: il en résulte que si les trois systèmes de périodes sont pris sous la forme la plus générale, au lieu de la forme normale, l'inégalité $I > 0$ doit toujours être vérifiée. Il résultera de la suite de ce Mémoire que cette inégalité nécessaire est la seule condition pour l'existence d'une fonction méromorphe triplement périodique admettant trois systèmes de périodes non exceptionnels donnés arbitrairement avec des entiers caractéristiques donnés également.

L'inégalité précédente que nous avons indiquée antérieurement (C. R. 3 Déc. 1906) s'étend sans aucune difficulté nouvelle au cas des fonctions $(n + 1)$ fois périodiques de n variables. Elle contient en elle-même toutes les inégalités de Riemann relatives aux périodes des fonctions abéliennes.

Bornons-nous ici, pour ne pas trop nous écarter de l'objet spécial de notre Mémoire, à signaler brièvement comment on rattache au résultat qui précède les inégalités de Riemann pour les fonctions abéliennes de deux variables. Si $\Theta(x, y)$ est une fonction Θ sous forme normale, avec les quatre systèmes de périodes $(2i\pi, 0)$, $(0, 2i\pi)$, (a, b), (b, c) ses zéros admettent les trois systèmes de périodes $(2i\pi, 0)$, $(0, 2i\pi)$, $(ma + nb, mb + nc)$ m et n étant des entiers quelconques. En écrivant pour ces trois systèmes l'inégalité $I > 0$ on obtient une forme quadratique en m et n qui doit être définie et positive: c'est la condition classique. Le même procédé s'applique à n variables. On peut donc dire que l'inégalité $I > 0$ contient, en elle-même toutes les inégalités de Riemann: Ces inégalités se trouvent ainsi rattachées à la distribution des zéros de la fonction entière $g_1(x, y_0)$.

17. Nous continuerons l'étude des zéros de léquation

$$g_1(x, y) = 0$$

en considérant les différentes déterminations de x pour les valeurs de y appartenant à une bande B du plan de y comprise entre deux des droites de ramifications définies plus haut et ne contenant à son intérieur (frontières exclues) aucune droite de ramifications.

Soit alors

$$x = f_1(y) \tag{13}$$

l'une des déterminations de x; $f_1(y)$ sera donc, comme nous l'avons vu, une fonction uniforme et régulière à l'intérieur de B.

Nous aurons une infinité d'autres déterminations de x par la formule

$$x + m\omega + n\omega' = f_1(y + mi\beta + ni\beta' + 2si\pi) \tag{14}$$

où m, n et s sont trois entiers quelconques positifs ou négatifs ou nuls; car si (x', y') est un zéro de $g_1(x, y)$ vérifiant l'équation

$$x' = f_1(y')$$

on aura un autre zéro en posant $x = x' - m\omega - n\omega'$, $y = y' - mi\beta - ni\beta' - 2si\pi$ et (x, y) seront liés par la relation (14) et inversement.

Nous allons montrer que toutes les déterminations (14) ne sont pas distinctes entre elles, c'est-à-dire que $f_1(y)$ satisfait à une identité de la forme

$$(15) \qquad f_1(y + m_1 i\beta + n_1 i\beta' + 2 s_1 i\pi) - m_1\omega - n_1\omega' = \\ = f_1(y + m_2 i\beta + n_2 i\beta' + 2 s_2 i\pi) - m_2\omega - n_2\omega'$$

où (m_1, n_1, s_1), (m_2, n_2, s_2) sont six entiers dont les trois derniers ne sont pas respectivement égaux aux trois premiers.

Supposons qu'une telle identité n'existe pas. Deux quelconques, déterminées, des valeurs de x fournies par (14) ne seront égales que pour des valeurs isolées de y; on peut donc toujours attribuer à y une valeur y_1 du domaine B n'appartenant pas à l'ensemble dénombrable des valeurs de y pour lesquelles deux des déterminations de x deviennent égales.

Soient A_0 et A_μ les points du plan de la variable y correspondants respectivement aux valeurs y_1 et $y_1 + 2\mu i\pi$, μ désignant un entier positif choisi arbitrairement. La longueur du segment rectiligne A_0A_μ est égale à $2\mu\pi$. Parmi toutes les valeurs $y_1 - mi\beta - ni\beta' - 2si\pi$ ne prenons que celles qui correspondent à des points du segment A_0A_μ; pour chaque système de valeurs attribuées à m et n, il y aura ainsi μ valeurs de s acceptables et μ points correspondants sur A_0A_μ. (en supposant, pour plus de précision que A_0 fait partie du segment mais pas A_μ). Sur le segment A_0A_μ, $f_1(y)$ a un module inférieur à une quantité fixe positive R. Les valeurs de x correspondant aux valeurs considérées pour y, sont de la forme:

$$(16) \qquad x = m\omega + n\omega' + \alpha_{m,n,s}$$

avec

$$|\alpha_{m,n,s}| < R.$$

Pour chaque couple de valeurs arbitraires de m et de n, il y a μ valeurs de $\alpha_{m,n,s}$ distinctes entre elles, puisque les valeurs de x le sont, et auxquelles correspondent, dans le plan de x, μ points intérieurs au cercle de rayon R et de centre $m\omega + n\omega'$. Considérons à nouveau le parallélogramme $P_{p,q}$ construit sur les segments $(x_0, x_0 + p\omega)$ et $(x_0, x_0 + q\omega)$; $N_{p,q}$ désignera encore le nombre des zéros de $g_1(x, y_1)$ intérieurs à ce parallélogramme. Prenons un second parallélogramme P' *concentrique* au précédent et de côtés $(p-\nu)\omega$ et $(q-\nu)\omega'$; p et q sont supposés très-grands et positifs, et l'entier positif ν est supposé choisi assez grand pour que tout cercle de rayon R et ayant son centre à l'intérieur de P', soit tout entier contenu dans $P_{p,q}$. La valeur de ν ainsi choisie sera indépendante de p et q.

Le parallélogramme P' contient $(p-\nu)(q-\nu)$ des points $m\omega+n\omega'$. Le cercle de rayon R et de centre $m\omega+n\omega'$ contenant μ des points (16), on voit que $P_{p,q}$ contiendra au moins $\mu(p-\nu)(q-\nu)$ des points $m\omega+n\omega'+\alpha_{m,n,s}$; comme ces points sont tous des zéros de $g_1(x, y_1)$ on voit que

$$N_{p,q} \geq \mu(p-\nu)\ (q-\nu);$$

ou bien:

$$\frac{N_{p,q}}{pq} \geq \mu\left(1-\frac{\nu}{q}\right)\left(1-\frac{\nu}{p}\right).$$

Si p et q augmentent indéfiniment, ν restant fixe, on aura

$$\lim \frac{N_{p,q}}{pq} \geq \mu.$$

Or cela est impossible puisque μ est un entier positif arbitraire et que $\frac{N_{p,q}}{pq}$ a une limite déterminée.

Il y a donc nécessairement une identité de la forme (15).

18. Recherchons maintenant tous les systèmes de valeurs des entiers m_1, n_1, s_1, m_2, n_2, s_2 pour lesquels a lieu l'identité (15).

Posons pour cela

$$(17)\qquad m_1-m_2=m',\quad n_1-n_2=n',\quad s_1-s_2=s'$$

et remplaçons dans (15) y par $y-m_2 i\beta'-n_2 i\beta'-2s_2 i\pi$.

Il viendra:

$$(18)\qquad f_1(y+m' i\beta+n' i\beta'+2s' i\pi)=f_1(y)+m'\omega+n'\omega'.$$

Soient m'_1, n'_1, s'_1 les quotients de m', n', s' par leur plus grand commun diviseur positif et posons:

$$(19)\qquad \gamma=m'_1\beta+n'_1\beta'+2s'_1\pi \text{ et } \Omega=m'_1\omega+n'_1\omega'.$$

La relation (18) pourra allors s'écrire comme suit:

$$f_1(y + id\gamma) = f_1(y) + d\Omega \tag{20}$$

d étant le plus grand commun diviseur de m', n', s'.

Si γ était nul, Ω le serait nécessairement aussi d'après la dernière identité; mais comme $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire on aurait $m'_1 = 0$ et $n'_1 = 0$; et ensuite de $\gamma = 0$, on conclurait $s'_1 = 0$. On aurait donc $m' = n' = s' = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse que m_2, n_2, s_2 ne sont pas respectivement égaux tous trois à m_1, n_1, s_1. γ étant donc différent de zéro, la différence

$$f_1(y) - \frac{\Omega}{i\gamma} y,$$

qui admet la période $id\gamma$ et qui est régulière dans la bande B, sera développable à l'intérieur de cette bande en une série d'exponentielles et nous pouvons poser:

$$f_1(y) = \frac{\Omega}{i\gamma} y + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi}{d\gamma} y}. \tag{21}$$

Or on voit bien facilement, en considérant la dérivé de $f_1(y)$ qu'il n'y a pour la fonction $f_1(y)$ qu'un seul développement de la forme (21). Or comme

$$\frac{m'\omega + n'\omega'}{m'\beta + n'\beta' + 2s'\pi} = \frac{\Omega}{\gamma},$$

si m'', n'', s'' est un autre système d'entiers pour lequel l'identité (18) est satisfaite, on aura:

$$\frac{m''\omega + n''\omega'}{m''\beta + n''\beta' + 2s''\pi} = \frac{\Omega}{\gamma}.$$

En remplaçant Ω et γ par leurs valeurs (19), il vient, toutes réductions faites:

$$\omega[(m''n'_1 - m'_1 n'')\beta' + 2\pi(m''s'_1 - m'_1 s'')] +$$
$$+ \omega'[(n''m'_1 - n'_1 m'')\beta + 2\pi(n''s'_1 - n'_1 s'')] = 0.$$

Comme $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire, cette condition entraîne les deux suivantes

$$(m''n'_1 - m'_1 n'')\beta' + 2\pi(m''s'_1 - m'_1 s'') = 0$$
$$(n''m_1' - n'_1 m'')\beta + 2\pi(n''s'_1 - n'_1 s'') = 0.$$

L'un au moins des deux nombres β ou β' est incommensurable avec π. Si c'est β, la deuxième relation donne

$$n''m'_1 - n'_1m'' = 0, \quad n''s'_1 - n'_1s'' = 0,$$

et ensuite la première donne:

$$m''s'_1 - m'_1s'' = 0.$$

Comme m'_1, n'_1, s'_1 sont premiers entre eux, on conclut des trois dernières relations:

$$m'' = \delta m'_1, \quad n'' = \delta n'_1, \quad s'' = \delta s'_1,$$

où δ est un entier positif ou négatif.

La relation

$$f_1(y + m''i\beta + n''i\beta' + 2s''i\pi) = f_1(y) + m''\omega + n''\omega' \tag{22}$$

s'écrit alors

$$f_1(y + i\delta\gamma) = f_1(y) + \delta\Omega \tag{23}$$

et il s'agit de trouver tous les entiers δ pour lesquels cette relation a lieu.

Soit, pour cela, d_1 le plus petit entier positif non nul pour lequel on a

$$f_1(y + id_1\gamma) = f_1(y) + d_1\Omega \tag{24}$$

Un tel entier existe puisque l'on a la relation (20) où d n'est pas nul. Posons

$$\delta = \varrho d_1 + \sigma, \tag{25}$$

où ϱ est un entier positif ou négatif ou nul convenablement choisi et σ un entier positif ou nul inférieur à d_1. De (24) on conclut

$$f_1(y + i\varrho d_1\gamma) = f_1(y) + \varrho d_1\Omega.$$

Changeons dans cette identité y en $y + i\sigma\gamma$; elle devient en tenant compte de (25)

$$f_1(y + i\delta\gamma) = f_1(y + i\sigma\gamma) + \varrho d_1\Omega$$

et d'après (23) et (25):

$$f_1(y + i\sigma\gamma) = f_1(y) + \sigma\Omega.$$

Comme σ est positif ou nul, inférieur à d_1 qui est le plus petit entier non nul vérifiant (24), on a nécessairement:

$$\sigma = 0$$

et d'après (25) et les relations $m'' = \delta m'_1$, $n'' = \delta n'_1$, $s'' = \delta s'_1$ il vient:

$$m'' = \varrho d_1 m'_1, \quad n'' = \varrho d_1 n'_1, \quad s'' = \varrho d_1 s'_1.$$

Réciproquement, si ϱ est un entier quelconque dans ces dernières formules, les valeurs précédentes de m'', n'', s'' conviennent bien à l'identité (22); cela résulte immédiatement de (24). Posons:

$$\gamma_1 = d_1 \gamma = d_1 (m'_1 \beta + n'_1 \beta' + 2 s'_1 \pi),$$
$$\Omega_1 = d_1 \Omega = d_1 (m'_1 \omega + n'_1 \omega').$$

La relation (24) devient

$$f_1(y + i\gamma_1) = f_1(y) + \Omega_1.$$

On en déduit:

$$f_1(y - i\gamma_1) = f_1(y) - \Omega_1.$$

Nous pouvons d'aprés cela supposer que le nombre réel γ_1 est *positif, sans* quoi on le changerait en $-\gamma_1$ en même temps que Ω_1 en $-\Omega_1$. Les quantités $i\gamma_1$ et Ω_1 sont ainsi définies par ce qui précède d'une façon unique. Nous les appellerons les *augments conjugués* relatifs à $f_1(y)$ et nous poserons:

$$\Omega_1 = \mu_1 \omega + \nu_1 \omega', \tag{26}$$
$$\gamma_1 = \mu_1 \beta + \nu_1 \beta' + 2 \sigma_1 \pi > 0;$$

μ_1, ν_1 et σ_1 sont des entiers définis par là d'une façon unique. Revenant maintenant à l'identité (15) et aux formules (17) et (18) nous voyons que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'identité (15) soit satisfaite sont données par les relations:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= \varrho' \mu_1, \\ n_1 - n_2 &= \varrho' \nu_1, \\ s_1 - s_2 &= \varrho' \sigma_1, \end{aligned} \tag{27}$$

où ϱ' est un entier quelconque positif ou négatif.

Ces propriétés établies, on voit par un raisonnement très simple que l'on obtient toutes les déterminations distinctes fournies pour x par la formule (14) et chacune une seule fois, en prenant pour m, n et s toutes les valeurs entières positives, négatives, ou nulles pour lesquelles les inégalités

$$0 \leq m\beta + n\beta' + 2 s\pi < \gamma_1 \tag{28}$$

sont satisfaites.

Plus généralement si M est un entier positif quelconque on aura chaque détermination distincte répétée M fois, en donnant à m, n et s toutes les valeurs pour lesquelles

$$0 \leq m\beta + n\beta' + 2 s\pi < M \gamma_1.$$

19. L'ensemble des déterminations distinctes de x dans la formule (14) constitue un ensemble de déterminations telles que l'on passe de l'une à l'autre en ajoutant à x et à y des multiples conjugués des trois systèmes de périodes, et inversement, si l'on ajoute à x et à y des multiples conjugués des périodes, on passe d'une des déterminations à une autre où à la même détermination. Nous entendons par là que si dans l'équation qui définit l'une des déterminations de x pour y intérieur à B, on ajoute à x et y des multiples conjugués des périodes on a une équation définissant encore une des déterminations de x. Choisissons, par exemple, la plus simple des déterminations de x dans les notations précédentes:

$$x = f_1(y).$$

Nous dirons que $x = f_1(y)$ est une *branche principale*, relative à la bande B, de la fonction x définie par

$$g_1(x, y) = 0.$$

$(\Omega_1, i\gamma_1)$ seront appelés les *augments conjugués* relatifs à cette branche principale. Les autres déterminations de la formule (14) ne sont pas considérées comme des branches principales *distinctes* de la précédente, parce qu'elles n'en diffèrent que par des multiples conjugués des périodes. Toutes les valeurs distinctes de x fournies par la formule (14) seront appelées les zéros de $g_1(x, y) = 0$ *relatifs* ou *se rapportant* à la branche principale $x = f_1(y)$.

Remarquons que tout ce qui précède s'applique même au cas où $f_1(y)$ serait une constante, cas qui peut se présenter. La relation $f_1(y + i\gamma_1) = f(y) + \Omega_1$ montre qu'alors Ω_1 est nécessairement nul, c'est-à-dire que $\mu_1 = \nu_1 = 0$; ensuite $\gamma_1 = 2\sigma_1\pi$ doit être le plus petit multiple positif non nul de 2π pour lequel a lieu l'identité précédente: donc $\sigma_1 = 1$; les deux *augments conjugués* sont donc *ici* $(0, 2\pi i)$.

Il peut arriver que tous les zéros de $g_1(x, y)$ qui se rapportent à la *branche principale* $x = f_1(y)$ soient tous des zéros doubles ou triples, etc.... et cela pour une valeur quelconque de y du domaine B. Nous dirons que la branche principale $x = f_1(y)$ a un degré de multiplicité égal à deux, trois etc....

Si la fonction entière $g_1(x, y)$ admet des zéros qui ne se rapportent pas à la branche principale précédente, (y restant toujours dans le domaine B) nous mettrons n évidence une seconde branche principale $x = f_2(y)$ avec des *augments conjugués* $(\Omega_2, i\gamma_2)$ donnés par les formules

$$\Omega_2 = \mu_2\omega + \nu_2\omega',$$

$$\gamma_2 = \mu_2\beta + \nu_2\beta' + 2\varrho_2\sigma > 0.$$

On aura ainsi une suite de branches principales

$$f_1(y),\ f_2(y),\ f_3(y), \ldots$$

Nous allons montrer que leur nombre est nécessairement fini. Dans tout ce qui va suivre nous supposons toujours, lorsque nous parlerons de l'ensemble des *branches principales* que chacune d'elles est comptée un nombre de fois égal à son degré de multiplicité et que dans la suite

$$f_1(y),\ f_2(y),\ f_3(y), \ldots$$

chacune d'elles est écrite ce nombre de fois.

Ceci posé y_0 étant une valeur quelconque de la bande B posons:

$$x_k^{(0)} = f_k(y_0), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit Π un parallélogramme du plan de x construit sur des côtés ω et ω et soit

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} + m_k \omega + n_k \omega'$$

l'homologue de $x_k^{(0)}$ dans Π. Posons

$$y_k = y_0 + m_k i\beta + n_k i\beta' + 2\, s_k i\pi$$

en choisissant l'entier s_k de façon que y_k appartienne au segment $(y_0,\ y_0 + 2\, i\pi)$. Dès lors $(x_k^{(1)},\ y_k)$ sera un zéro de $g_1(x, y)$ se rapportant à la branche principale $f_k(y)$, $x_k^{(1)}$, y_k appartenant respectivement au parallélogramme Π et au segment $(y_0,\ y_0 + 2\, i\pi)$.

Si les branches principales étaient en nombre infini, les points y_k que nous venons de définir sur le segment $(y_0,\ y_0 + 2\, i\pi)$ auraient un point limite $y = b$ appartenant à ce segment. Or pour un domaine choisi assez petit autour du point b, $g_1(x, y)$ n'a qu'un nombre fini de zéros appartenant au parallélogramme Π et se rapportant à des branches principales déterminées en nombre fini. Or cela est manifestement en contradiction avec ce qui précède. Par conséquent, *il n'y a qu'un nombre limité de branches principales relatives à la bande B* chacune des branches étant comptée par son degré de multiplicité. Chacune des fonctions $f_k(y)$, peut être développée sous la forme (21) pour tout l'intérieur de la bande B, et l'on voit que toutes les déterminations de x dans l'équation

$$g_1(x, y) = 0$$

où y appartient à la bande B se déduisent d'un nombre limité de développements de cette forme.

20. Il résulte de ce qui précède que la fonction entière $g_1(x, y)$ dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ ne peut pas être le produit d'un nombre infini de fonctions entières *ayant la même propriété* et dont chacune s'annule pour quelque système de valeurs de x et y. Car la branche principale $x = f_k(y)$ doit appartenir à l'un des facteurs du produit et, par suite de la triple périodicité des zéros de ce facteur, toutes les déterminations de x relatives à cette branche $f_k(y)$ appartiennent au même facteur. Il résulte donc de là que le produit contient *au plus* un nombre de facteurs égal au nombre des branches principales dans la bande B, chacune étant comptée avec son degré de multiplicité.

Supposons que $g_1(x, y)$ puisse être mise sous forme d'un produit de plusieurs facteurs de cette nature. Si l'un des facteurs est lui-même décomposable de la même façon, remplaçons le par ses facteurs. Après un nombre limité d'opérations de cette sorte $g_1(x, y)$ se trouvera mise sous forme d'un produit d'un nombre fini de fonctions entières dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes, dont chacune s'annule pour quelque système de valeurs de x et de y, et dont aucune n'est décomposable en un produit de plusieurs facteurs de même nature. Nous arrivons ainsi à la notion de *facteur irréductible* ou *premier, relativement aux trois systèmes de périodes* $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Remarquons qu'il est essentiel de spécifier les trois systèmes de périodes; car un facteur irréductible relativement à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ peut se trouver être réductible relativement à $(0, 2i\pi)$, $(2\omega, 2i\beta)$, $(\omega', i\beta')$.

Si l'on ne considère pas comme distincts deux facteurs dont le quotient est une fonction entière qui ne s'annule pas, on voit facilement que $g_1(x, y)$ n'est décomposable que d'une seule façon en ses facteurs irréductibles relativement à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Il suffit de remarquer que si les zéros de deux fonctions entières admettent les trois systèmes de périodes, les zéros communs à ces deux fonctions admettent les mêmes périodes et par suite le *plus grand commun diviseur* des deux fonctions entières est une fonction entière ayant la même propriété. Deux facteurs irréductibles relativement aux trois systèmes de périodes précédents, sont donc ou bien identiques, ou bien sans facteur commun s'annulant.

21. Revenons aux augments conjugués $(\Omega_1, i\gamma_1)$. On peut donner une interprétation des entiers μ_1 et ν_1 qui figurent dans les expressions de Ω_1 et γ_1.

Supposons tout le plan de la variable x subdivisé en un réseau de parallélogrammes de côtés ω, ω'. L'un d'eux étant désigné par $\Pi_{0,0}$ nous désignerons par $\Pi_{p,q}$ celui qui se déduit de $\Pi_{0,0}$ par la translation $(p\omega, q\omega')$ p et q étant des entiers positifs ou négatifs ou nuls.

Prenons une valeur quelconque y_0 dans la bande B et posons

$$x_0 = f_1(y_0).$$

Si y décrit le segment rectiligne $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$ dans le sens positif c'est-à-dire de y_0 vers $y_0 + i\gamma_1$, le point $x = f_1(y)$ décrira dans son plan une ligne déterminée Γ, partant du point x_0 et aboutissant au point $x_0 + \Omega_1$, c'est-à-dire au point $x_0 + \mu_1\omega + \nu_1\omega'$. Le sens dans lequel se déplace x dans ce mouvement sur Γ sera le sens positif sur Γ. Dans ce qui suit lorsque nous parlerons d'un déplacement de y, il s'agira toujours, sans qu'il soit besoin de le répéter, d'un déplacement dans le sens positif, sur la droite indéfinie joignant y_0 à $y_0 + i\gamma_1$.

Si nous supposons, pour fixer les idées, que le point x_0 appartient au parallélogramme $\Pi_{0,0}$, le point $x_0 + \Omega_1$ appartiendra au parallélogramme Π_{μ_1,ν_1}.

Nous désignerons par a_0 celui des sommets du parallélogramme $\Pi_{0,0}$ qui est tel que $a_0 + \omega$ et $a_0 + \omega'$ sont deux autres sommets de $\Pi_{0,0}$.

Supposons que y parcourant le segment $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$ le point $x = f_1(y)$ vienne à passer d'un parallélogramme Π_{p_1,q_1} à un parallélogramme Π_{p_1,q_1+1} et soit (x_1, y_1) le couple de valeurs de (x, y) pour lequel a lieu ce passage; de telle sorte que le point x_1 est situé sur le segment rectiligne $[a_0 + p_1\omega + (q_1 + 1)\omega', a_0 + (p_1+1)\omega + (q_1 + 1)\omega']$ et l'on a

$$x_1 = f_1(y_1). \tag{29}$$

Nous aurons un autre zéro (x'_1, y'_1) de $g_1(x, y)$ relatif à la branche principale $f_1(y)$ en posant

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - p_1\omega - (q_1 + 1)\omega' \\ y'_1 &= y_1 - p_1 i\beta - (q_1 + 1)i\beta' - 2r_1 i\pi \end{aligned} \tag{30}$$

r_1 étant un entier choisi de façon que y'_1 soit situé sur le segment $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ (l'extrémité y_0 comprise, l'autre exclue). r_1 est ainsi défini de façon unique.

Le point x'_1 sera situé sur le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ et lorsque y traverse la valeur y'_1, il y a un zéro de $g_1(x, y)$, relatif à la branche principale $f_1(y)$, qui traverse en x'_1 le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens direct si $\frac{\omega'}{\omega}$ *a sa partie imaginaire positive.*

Soit (x_2, y_2) un autre couple de valeurs correspondant à un passage de x sur Γ, d'un parallélogramme Π_{p_2,q_2} au parallélogramme Π_{p_2,q_2+1}; on aura

$$x_2 = f_1(y_2) \tag{31}$$

et nous poserons, comme plus haut,

$$
(32) \qquad \begin{aligned} x'_2 &= x_2 - p_2\omega - (q_2 + 1)\omega' \\ y'_2 &= y_2 - p_2 i\beta - (q_2 + 1) i\beta' - 2 r_2 i\pi \end{aligned}
$$

y'_2 appartenant au segment $(y_0, y_0 + 2 i\pi)$ et x'_2 au segment $(a_0, a_0 + \omega)$. Pour $y = y'_2$ il y a un zéro de $g_1(x, y)$ relatif à la branche principale $x = f_1(y)$ qui traverse $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens direct au point x'_2. En général y'_1 et y'_2 sont distinctes. Si elles sont égales et que x'_1 et x'_2 ne le soient pas, pour la valeur $y = y'_1 = y'_2$ il y a deux zéros de $g_1(x, y)$ qui traversent le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ respectivement aux points x'_1 et x'_2. Supposons que, plus particulièrement $y'_1 = y'_2$ et $x'_1 = x'_2$. De (29), (30), (31) et (32) on conclut immédiatement en tenant compte de ce que $x'_2 = x'_1$ et $y'_2 = y'_1$ les relations suivantes:

$$
(33) \qquad \begin{aligned} x'_1 + p_1\omega + (q_1 + 1)\omega' &= f_1[y'_1 + p_1 i\beta + (q_1 + 1) i\beta' + 2 r_2 i\pi] \\ x'_1 + p_2\omega + (q_2 + 1)\omega' &= f_1[y'_1 + p_2 i\beta + (q_2 + 1) i\beta' + 2 r_2 i\pi] \\ y_1 - y_2 &= (p_1 - p_2) i\beta + (q_1 - q_2) i\beta' + 2 (r_1 - r_2) i\pi. \end{aligned}
$$

Comme les valeurs y_1 et y_2 sont distinctes et appartiennent toutes deux au segment $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$ la différence précédente est différente de zéro et de module inférieur à γ_1; il en résulte, d'après ce que l'on a vu plus haut (paragraphe 18) que les deux déterminations de x fournies par

$$
\begin{aligned} x + p_1\omega + (q_1 + 1)\omega' &= f_1[y + p_1 i\beta + (q_1 + 1) i\beta' + 2 r_1 i\pi] \\ x + p_2\omega + (q_2 + 1)\omega' &= f_1[y + p_2 i\beta + (q_2 + 1) i\beta' + 2 r_2 i\pi] \end{aligned}
$$

sont distinctes; elles deviennent égales toutes deux à x'_1 pour $y = y'_1$ d'après les formules (33). Donc lorsque y traverse la valeur y'_1, il y a deux zéros de $g_1(x, y)$ qui viennent traverser le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ au même point x'_1.

On raisonnerait exactement de la même façon si un plus grand nombre de couples de valeurs analogues à (x'_1, y'_1) venaient se confondre avec (x'_1, y'_1); si λ est ce nombre, il y aurait pour $y = y'_1$, λ zéros de $g_1(x, y)$ relatifs à la branche principale $y = f_1(x)$ qui traverseraient au même point x'_1 le segment $(a_0, a_0 + \omega)$.

Inversement, désignons maintenant par y'_3 un point du segment $(y_0, y_0 + 2 i\pi)$ pour lequel un zéro de $g_1(x, y)$ *relatif à la branche principale* $x = f_1(y)$ traverse dans le sens direct le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ en un point x'_3. Soit

$$
(34) \qquad x + m\omega + n\omega' = f_1(y + m i\beta + n i\beta' + 2 s i\pi)
$$

la détermination de x à laquelle appartient le zéro (x'_3, y'_3), on aura ainsi:

$$
x'_3 + m\omega + n\omega' = f_1(y'_3 + m i\beta + n i\beta' + 2 s i\pi).
$$

Posons:

$$x''_3 = x'_3 + m\omega + n\omega'$$

$$y''_3 = y'_3 + mi\beta + ni\beta' + 2si\pi.$$

Il viendra

$$x''_3 = f_1(y''_3).$$

Soit

$$x_3 = x''_3 + t\Omega_1$$

$$y_3 = y''_3 + ti\gamma_1,$$

où t est un entier choisi de façon que y_3 appartienne au segment $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$. On aura

$$x_3 = f_1(y_3)$$

et il est clair que lorsque y traverse la valeur y_3, x sur la courbe Γ passe par le point x_3 du parallélogramme Π_{p_3,q_3} au parallélogramme Π_{p_3,q_3+1}, en posant

$$p_3 = m + t\mu_1, \quad q_3 = n + t\nu_1 - 1.$$

Si le zéro (x'_3, y'_3) appartient non seulement à la détermination (34) mais aussi à une détermination distincte, se rapportant toujours à la branche $f_1(y)$:

$$x + m'\omega + n'\omega' = f_1(y + m'i\beta + n'i\beta' + 2s'i\pi) \tag{35}$$

on aurait un autre système de valeurs correspondantes, pour x_3 et y_3; écrivons ces nouvelles valeurs que nous désignerons par $x_3^{(1)}$, $y_3^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = x'_3 + m'\omega + n'\omega' + t'\Omega_1$$

$$y_3^{(1)} = y'_3 + m'i\beta + n'i\beta' + 2s'i\pi + t'i\gamma_1.$$

D'où:

$$y_3^{(1)} - y_3 = (m'-m)i\beta + (n'-n)i\beta' + 2(s'-s)i\pi + (t'-t)i\gamma_1. \tag{36}$$

On peut supposer (paragraphe 18) dans (34) et (35) que m, n, s, m', n', s vérifient les inégalités:

$$0 \leq m\beta + n\beta' + 2s\pi < \gamma_1$$

$$0 \leq m'\beta + n'\beta' + 2s'\pi < \gamma_1.$$

Dès lors, si l'on avait

$$y_3^{(1)} = y_3$$

d'après (36) on aurait nécessairement $t' = t$, car deux quantités réelles comprises entre 0 et γ_1 ne peuvent pas avoir une différence égale à un multiple entier non nul de γ_1. Ensuite on aurait:

$$x_3^{(1)} = f_1(y_3^{(1)}) = f_1(y_3) = x_3.$$

La différence $x_s^{(1)} - x_3 = (m' - m)\omega + (n' - n)\omega' = 0$ montre que $m = m'$, $n = n'$; enfin (36) donnerait $s = s'$. Donc les deux déterminations (34) et (35) ne seraient pas distinctes contrairement à l'hypothèse. Par suite $y_s^{(1)}$ ne peut être égale à y_3. D'une façon plus générale, si (x'_3, y'_3) appartient à un nombre λ' de déterminations distinctes de x de la forme (34), il y aura λ' valeurs distinctes correspondantes $y_3, y_s^{(1)}, \ldots y_s^{(\lambda'-1)}$.

Il résulte de ce qui précède, que si nous désignons par τ_1 le nombre des valeurs de x, fournies par toutes les déterminations distinctes de la forme (34) qui traversent le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens direct lorsque y parcourt tout le segment $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ dans le sens direct; et si d'autre part τ_2 désigne le nombre de fois que $x = f(y)$ passe d'un parallélogramme $P_{p,q}$ au parallélogramme $P_{p,q+1}$ lorsque y parcourt le segment $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$ dans le sens direct, on aura nécessairement

$$\tau_1 = \tau_2.$$

Car, d'après ce qui vient d'être établi, à chaque passage du premier mode correspond un passage du second mode, et inversement.

Par le même raisonnement, si l'on désigne par τ'_1 le nombre des traversées de $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens indirect et par τ'_2 le nombre des passages de $x = f(y)$ d'un parallélogramme $P_{p,q}$ au parallélogramme $P_{p,q-1}$, on aura:

$$\tau'_1 = \tau'_2.$$

Mais le point $x = f(y)$ partant de x_0 pour aboutir au point $x_0 + \mu_1\omega + \nu_1\omega'$, on aura:

$$\tau_2 - \tau'_2 = \nu_1$$

et par suite

$$\tau_1 - \tau'_1 = \nu_1;$$

ν_1 est donc la différence algébrique entre le nombre des traversées directes et le nombre des traversées indirectes du segment $(a_0, a_0 + \omega)$ par toutes les déterminations distinctes de x, relatives à la branche principale $x = f_1(y)$.

Si le rapport $\dfrac{\omega'}{\omega}$ avait sa partie imaginaire négative, dans l'énoncé précédent il faudrait changer ν_1 en $-\nu_1$.

Enfin, on a évidemment un énoncé analogue au précédent, en y changeant ν_1 en $-\mu_1$, et $(a_0, a_0 + \omega)$ en $(a_0, a_0 + \omega')$.

Considérons maintenant toutes les branches principales relatives à la bande B et soit T le nombre de ces branches *chacune d'elles étant répétée un nombre de fois égal à son degré de multiplicité*. Soit $f_k(y)$, $(k = 1, 2, \ldots T)$ l'une quelconque d'entre elles et soient:

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \mu_k\omega + \nu_k\omega' \\ \gamma_k &= \mu_k\beta + \nu_k\beta' + 2\varrho_k\pi > 0 \end{aligned} \tag{37}$$

ses augments conjugués.

Si l'on considère toutes les déterminations de x correspondant à toutes les branches principales, elles correspondent d'une façon univoque aux déterminations de x dans l'équation

$$g_1(x, y) = 0$$

en ayant égard aux degrés de multiplicité.

Donc la différence entre le nombre des zéros de $g_1(x, y)$ qui traversent $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens direct et le nombre de ceux qui le traversent dans le sens indirect est donné par la somme

$$\pm \sum_{k=1}^{k=T} \nu_k .$$

En rapprochant ce résultat de celui du paragraphe 13, nous aurons:

$$m_{1,2} = \pm \sum_{k=1}^{k=T} \nu_k$$

$$m_{1,3} = \mp \sum_{k=1}^{k=T} \mu_k .$$

Les signes supérieurs sont à prendre si $\frac{\omega'}{\omega}$ a sa partie imaginaire positive; les signes inférieurs, dans le cas contraire.

Remarquons que le cas où l'une des fonctions $f_k(y)$ est une constante ne fait pas exception; car on a alors, comme nous l'avons vu, $\mu_k = \nu_k = 0$ et d'autre part les valeurs correspondantes des x étant constantes, aucune ne traverse $(a_0, a_0 + \omega)$. Les formules précédentes peuvent être complétées par une troisième formule analogue relative aux ϱ_k. Pour l'obtenir, comme β et β' ne sont pas nuls tous deux, supposons $\beta \neq 0$ et effectuons le changement de variables

$$X = x - \frac{\omega}{i\beta} y$$

$$Y = \frac{2\pi}{\beta} y .$$

Les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ deviendront respectivement pour les variables X et Y: $(\omega_1, i\beta_1)$, $(0, 2i\pi)$, $(\omega'_1, i\beta'_1)$ en posant:

$$\omega_1 = -\frac{2\pi\omega}{\beta}, \quad \beta_1 = \frac{4\pi^2}{\beta}, \quad \omega'_1 = \omega' - \frac{\omega\beta'}{\beta}, \quad \beta'_1 = \frac{2\pi\beta'}{\beta}.$$

Nous pouvons supposer que β est positif, sans restreindre la généralité des raisonnements. La partie imaginaire de $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$ est alors de signe contraire à celle de $\frac{\omega'}{\omega}$. Les augments conjugués relatifs à $f_k(y)$ seront évidemment pour les nouvelles variables

$$\varrho_k\omega_1 + \nu_k\omega'_1 \text{ et } i(\varrho_k\beta_1 + \nu_k\beta'_1 + 2\mu_k\pi);$$

cette dernière parenthèse est positive puisqu'elle est égale à

$$\frac{2\pi}{\beta}(\mu_k\beta + \nu_k\beta' + 2\pi\varrho_k) = \frac{2\pi}{\beta}\gamma_k.$$

Si $G_1(X, Y)$ est ce que devient $g_1(x, y)$ par le changement de variables, ses entiers caractèristiques $m'_{1,2}$, $m'_{2,3}$, $m'_{3,1}$ relatifs aux trois systèmes de périodes pris dans l'ordre $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega'_1, i\beta'_1)$ seront les suivants:

$$m'_{1,2} = m_{2,1}, \quad m'_{2,3} = m_{1,3}, \quad m'_{3,1} = m_{3,2}.$$

En appliquant à $G_1(X, Y)$ les formules précédentes, on obtient:

$$\pm\sum_{k=1}^{k=T}\varrho_k = m'_{1,3} = m_{2,3}$$

le signe supérieur se rapportant au cas où la partie imaginaire de $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$ est négative et par suite la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega}$ *positive.*

Cette dernière formule, jointe aux deux précédentes fournit le tableau suivant:

$$(38) \qquad \begin{aligned} m_{2,3} &= \pm\Sigma\varrho_k \\ m_{3,1} &= \pm\Sigma\mu_k \\ m_{1,2} &= \pm\Sigma\nu_k \end{aligned}$$

les trois sommations s'étendent à $k = 1, 2, \ldots T$ et les signes supérieurs correspondent au cas où la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega}$ est positive. De ces formules on tire immédiatement les suivantes:

$$\pm\Sigma\Omega_k = m_{1,2}\omega' + m_{3,1}\omega$$

$$\pm\Sigma\gamma_k = m_{1,2}\beta' + 2m_{2,3}\pi + m_{3,1}\beta.$$

Donc: quelle que soit la bande B que l'on considère dans le plan de la variable y, les sommes des augments relatifs à toutes les branches principales restent les mêmes. Remarquons qu'au contraire le nombre T peut changer lorsqu'on change la bande choisie B.

22. Considérons les déterminations distinctes de x relatives à la branche principale $f_k(y)$ qui sont toutes données, et chacune une seule fois, par la formule

$$x + m\omega + n\omega' = f_k(y + mi\beta + ni\beta' + 2\,si\pi) \tag{39}$$

où l'on suppose

$$0 \leq m\beta + n\beta' + 2\,s\pi < \gamma_k$$

et désignons par $N^{(k)}_{p,q}$ le nombre de ces déterminations intérieures à un parallélogramme $P_{p,q}$ de côtés $p\omega$, $q\omega'$ pour une valeur donnée y_0 de y, appartenant à la bande B; p et q sont deux entiers positifs quelconques. Nous prendrons deux autres parallélogrammes P' et P'' *concentriques* au précédent et de côtés $(p-\nu)\omega$, $(q-\nu)\omega'$ pour le premier, $(p+\nu)\omega$, $(q+\nu)\omega'$ pour le second: ν désigne un entier positif inférieur à p et à q. En outre nous supposons qu'aucun des points $m\omega + n\omega'$ ne se trouve sur les périmètres des parallélogrammes ainsi choisis.

Si M est un entier positif quelconque mais fixe et si dans la formule (39) nous donnons aux entiers m, n et s toutes les valeurs pour lesquels on a

$$0 \leq m\beta + n\beta' + 2\,s\pi < M\gamma_k \tag{40}$$

on obtiendra, comme nous l'avons déjà remarqué, M fois chacune des déterminations de x et par conséquent il y aura $MN^{(k)}_{p,q}$ systèmes de valeurs de m, n, s satisfaisant à (40) et fournissant pour $y = y_0$ des valeurs de x intérieures à $P_{p,q}$. Or, pour les valeurs de m, n, s qui satisfont à (40) on peut poser:

$$|f_k(y_0 + mi\beta + ni\beta' + 2\,si\pi)| < R$$

R étant un nombre positif choisi assez grand.

Si p et q sont très-grands, on pourra prendre ν assez grand pour que tout cercle tracé dans le plan de la variable x, de rayon R et de centre $m\omega + n\omega$ soit tout entier intérieur à $P_{p,q}$ si $m\omega + n\omega'$ appartient à P', ou tout entier extérieur à $P_{p,q}$ si $m\omega + n\omega'$ est extérieur à P''. Cette valeur de ν ainsi choisie ne dépend pas des valeurs attribuées à p et q.

Le nombre positif $M\gamma_k$ est compris entre deux multiples entiers consécutifs de 2π; soit

$$2\,M'\pi \leq M\gamma_k < 2\,(M'+1)\pi. \tag{41}$$

Il en résulte que pour chaque système de valeurs prises arbitrairement pour m et n, l'inégalité (40) est satisfaite pour M' valeurs au moins de s, et pour $M'+1$ au plus. Si le point $m\omega+n\omega'$ appartient à P', les M' ou $M'+1$ valeurs de x correspondantes, pour $y=y_0$ seront toutes intérieures à $P_{p,q}$. Comme il y a $(p-\nu)$ $(q-\nu)$ points $m\omega+n\omega'$ intérieurs à P', on voit que

$$M N_{p,q}^{(k)} \geq M'(p-\nu)\,(q-\nu).$$

Si le point $m\omega+n\omega'$ est extérieur à P'' les M' ou $M'+1$ valeurs correspondantes de x pour $y=y_0$ seront extérieurs à $P_{p,q}$. Les points $m\omega+n\omega'$ intérieurs à P'' sont donc les seuls qui *puissent* fournir des valeurs de x intérieures à $P_{p,q}$. Donc

$$M N_{p,q}^{(k)} \leq (M+1)\,(p+\nu)\,(q+\nu).$$

On conclut des deux inégalités précédentes les suivantes

$$(42)\qquad \frac{M'}{M}\left(1-\frac{\nu}{p}\right)\left(1-\frac{\nu}{q}\right) \leq \frac{N_{p,q}^{(k)}}{pq} \leq \frac{M'+1}{M}\left(1+\frac{\nu}{p}\right)\left(1+\frac{\nu}{q}\right).$$

Si p et q augmentent tous deux indéfiniment le premier et le dernier membre de ces inégalités ont respectivement pour limite $\frac{M'}{M}$ et $\frac{M'+1}{M}$. D'autre part l'inégalité (41) s'écrit:

$$\frac{M'}{M} \leq \frac{\gamma_k}{2\pi} \leq \frac{M'+1}{M}.$$

Comme M est arbitraire on voit que $\frac{N_{p,q}^{(k)}}{pq}$ a pour limite $\frac{\gamma_k}{2\pi}$ lorsque p et q augmentent *tous deux* indéfiniment. Nous avons ainsi une interprétation de γ_k.

Remarquons que si $N_{p,q}$ désigne le nombre des zéros de $g_1(x, y_0)$ intérieurs à $P_{p,q}$, on a évidemment

$$\frac{N_{p,q}}{pq} = \sum_{k=1}^{k=T} \frac{N_{p,q}^{(k)}}{pq}$$

et par suite, en passant à la limite et utilisant le résultat du paragraphe 14

$$(43)\qquad \pm\,(m_{1,2}\beta' + 2\,m_{2,3}\pi + m_{3,1}\beta) = \sum_{k=1}^{k=T} \gamma_k.$$

Le signe supérieur est à prendre si $\frac{\omega'}{\omega}$ a sa partie imaginaire positive. Si entre β, β' et 2π il n'y a aucune relation linéaire, homogène à coefficients entiers non tous nuls, cette relation (43) qui est la même qu'une de celles obtenues dans le précédent paragraphe donne immédiatement toutes les formules (38) qui se trouvent démontrées d'une nouvelle manière. Mais cette seconde démonstration est en défaut si il existe entre β, β', 2π une relation de la forme indiquée.

23. Nous nous proposons maintenant de rechercher l'expression générale des fonctions méromorphes triplement périodiques. Pour y parvenir, il suffirait évidemment de trouver l'expression générale des fonctions entières qui satisfont aux identités (5).

On peut tout d'abord apporter dans ces identités une simplification notable; nous avons vu, en effet, que les trois systèmes de périodes peuvent être remplacés par une transformation du premier ordre par trois autres pour lesquels les entiers caractéristiques seront $m'_{2,1} = 0$, $m'_{3,1} = 0$ et $m'_{2,3}$ égal au plus grand commun diviseur positif μ de $m_{1,2}$, $m_{1,3}$, $m_{2,3}$; cette opération faite, on peut par une substitution linéaire convenable effectuée sur les variables ramener les trois systèmes de périodes à la forme normale. Cela revient à dire qu'au lieu des identités (5) nous pouvons considérer les suivantes:

$$(44)\qquad \begin{cases} g_1(x, y + 2i\pi) = g_1(x, y) \\ g_1(x + \omega, y + i\beta) = e^{\varphi(y)} g_1(x, y) \\ g_1(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) - \frac{2i\mu\pi}{\omega} x} g_1(x, y); \end{cases}$$

comme μ est positif, le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ a nécessairement sa partie imaginaire positive; $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ ont le même sens que dans les identités (5). Il apparaît immédiatement, dans la recherche des fonctions entières satisfaisant aux identités (44), que la principale difficulté provient de la présence dans les exposants de e des deux fonctions entières $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ qui satisfont aux identités

$$(45)\qquad \begin{cases} \varphi(y + 2i\pi) = \varphi(y), \quad \psi(y + 2i\pi) = \psi(y) \\ \varphi(y + i\beta') - \varphi(y) = \psi(y + i\beta) - \psi(y). \end{cases}$$

On se demande tout d'abord si l'on ne pourrait pas en multipliant $g_1(x, y)$ par une fonction entière qui ne s'annule pas $e^{h(x,y)}$, faire en sorte que dans les équations fonctionnelles (44) tous les exposants de e soient des expressions linéaires en x et y.

Il faut pour cela que l'on ait:

$$
(46) \qquad \begin{cases} h(x, y+2i\pi) - h(x, y) = L_1(x, y) \\ \varphi(y) + h(x+\omega,\ y+i\beta) - h(x, y) = L_2(x, y) \\ \psi(y) + h(x+\omega',\ y+i\beta') - h(x, y) = L_3(x, y) \end{cases}
$$

$L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$, $L_3(x, y)$ étant trois expressions linéaires en x et y. On en conclut:

$$
\frac{\partial^2 h(x, y+2i\pi)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} = 0
$$

$$
\frac{\partial^2 h(x+\omega, y+i\beta)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} = 0
$$

$$
\frac{\partial^2 h(x+\omega', y+i\beta')}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} = 0
$$

et par conséquent puisque $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ est une fonction entière triplement périodique:

$$
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2C
$$

C étant une constante.

Par suite

$$
h(x, y) = Cx^2 + xf_1(y) + f_2(y)
$$

$f_1(y)$ et $f_2(y)$ étant deux fonctions entières de y.

On peut évidemment supprimer dans $h(x, y)$ le terme en Cx^2 sans inconvénient au point de vue du résultat qu'on veut obtenir. (Les expressions de $L_2(x, y)$ et $L_3(x, y)$ seront seulement modifiées.) Posons donc

$$
h(x, y) = xf_1(y) + f_2(y).
$$

Des équations (46) on déduit, en dérivant une seule fois par rapport à x:

$$
\begin{aligned} f_1(y+2i\pi) - f_1(y) &= \text{const.} \\ f_1(y+i\beta) - f_1(y) &= \text{const.} \\ f_1(y+i\beta') - f_1(y) &= \text{const.} \end{aligned}
$$

Comme β et β' ne sont pas *tous les deux* commensurables avec π, on en conclut que $f_1(y)$ est une expression du premier degré en y: on peut donc encore dans $h(x, y)$ supprimer le terme $xf_1(y)$ sans inconvénient au point de vue du résultat qu'on veut obtenir et l'on prend finalement:

$$
h(x, y) = f_2(y).
$$

On voit alors par les relations (46) que $f_2(y)$ peut être prise de la forme:

$$f_2(y) = C_1 y + X(y)$$

où C_1 est une constante et $X(y)$ une fonction entière de période $2i\pi$, qui satisfait, d'après les deux dernières relations (46) aux identités suivantes:

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{l} X(y+2i\pi) = X(y) \\ X(y+i\beta) - X(y) = -\varphi(y) + C_2 \\ X(y+i\beta') - X(y) = -\psi(y) + C_3 \end{array}\right.$$

où C_2 et C_3 sont des constantes. On voit que pour qu'il existe une fonction $h(x, y)$ satisfaisant à la question posée, il faut et il suffit qu'il existe une fonction entière $X(y)$ satisfaisant aux relations (47). Cette fonction entière, si elle existe, pourra être développée, ainsi que $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ suivant les puissances entières positives et négatives de e^y. L'identification dans les équations (47) fournit alors tous les coefficients du développement de $X(y)$ (à part le terme constant) sans aucune ambiguité et aussi sans aucune incompatibilité en ayant égard aux identités (45) et à ce fait que β et β' ne sont pas tous deux commensurables avec π. Toute la question est de savoir si la série obtenue pour $X(y)$ est convergente et définit bien une fonction entière. Or si $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions entières *quelconques* satisfaisant seulement aux identités (45), il est aisé de voir que la série obtenue pour $X(y)$ n'est pas *toujours* convergente pour toute valeur de y. D'une façon plus précise, la convergence de la série peut avoir toujours lieu pour *certains* systèmes de valeurs de β, β', mais ne pas avoir toujours lieu pour d'autres systèmes de valeurs. Cela dépend de l'ordre d'approximation possible de $\frac{\beta}{2\pi}$ et $\frac{\beta'}{2\pi}$ par deux fractions arithmétiques de même dénominateur, l'ordre d'approximation étant évalué relativement au dénominateur commun. En particulier si l'un des nombres $\frac{\beta}{2\pi}$ ou $\frac{\beta'}{2\pi}$ est algébrique, non rationnel, la série qui donne $X(y)$ est *toujours* convergente. Il en est encore de même si l'un de ces nombres étant incommensurable son développement en fraction continue a tous ses quotients incomplets successifs inférieurs à un nombre déterminé. Il est d'autre part facile de former deux nombres β et β' pour lesquels la série ne serait pas toujours convergente. Mais nous n'insisterons pas davantage sur ces raisonnements qui aboutissent en somme à ce résultat négatif: l'impossibilité de déterminer *dans tous les cas* la fonction $X(y)$ et par suite de débarrasser les équations fonctionnelles (44) des fonctions entières $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ si ces deux dernières fonctions sont deux fonctions entières *quelconques* satisfaisant aux identités (45).

La question se pose ainsi de savoir si ces deux fonctions *peuvent être quelconques*. Nous allons démontrer, à cet égard, *qu'il existe toujours une fonction entière* satisfaisant aux identités (44) où $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont deux fonctions entières, données arbitrairement, satisfaisant seulement aux identités (45).

Nous supposerons, pour simplifier, que dans les identités (44) $\mu = 1$. Cela ne restreint pas la généralité des raisonnements; car si $g_1(x, y)$ satisfait aux identités (44) pour $\mu = 1$, la puissance $n^{\text{ème}}$ de $g_1(x, y)$ satisfait à des identités analogues, avec $\mu = n$ (n étant ici un entier positif arbitraire).

24. Nous aurons dans la démonstration qui va suivre à appliquer plusieurs fois le lemme suivant:

Si $\lambda(y)$ et $\mu(y)$ sont deux fonctions entières de y satisfaisant aux identités

$$\lambda(y + 2i\pi) = \lambda(y), \quad \mu(y + 2i\pi) = \mu(y), \quad \lambda(y + i\beta') - \lambda(y) = \mu(y + i\beta) - \mu(y) \tag{48}$$

et satisfaisant en outre à l'identité

$$\omega'\lambda(y + i\beta') - \omega\mu(y + i\beta) = f_1(y + i\beta) - f_1(y) + f_2(y + i\beta') - f_2(y) + C \tag{49}$$

où $f_1(y)$ et $f_2(y)$ sont deux fonctions entières de y admettant toutes deux la période $2i\pi$ et C une constante, on pourra déterminer une fonction entière $X_1(y)$ de la variable y satisfaisant aux identités

$$\begin{cases} X_1(y + 2i\pi) = X_1(y) \\ X_1(y + i\beta) - X_1(y) = \lambda(y) + c_1, \quad X_1(y + i\beta') - X_1(y) = \mu(y) + c_2 \end{cases} \tag{50}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes.

Les fonctions $\lambda(y)$, $\mu(y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$ sont développables en séries de la forme:

$$\lambda(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{ny} \qquad \mu(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} B_n e^{ny}$$

$$f_1(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{ny} \qquad f_2(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n e^{ny}$$

De la troisième des identités (48), on conclut:

$$A_n(e^{ni\beta'} - 1) = B_n(e^{ni\beta} - 1) \quad (n \neq 0;\ n = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \infty)$$

Comme β et β' ne sont pas tous deux commensurables avec π, on peut écrire cette dernière relation sous la forme:

$$\frac{A_n}{e^{ni\beta}-1}=\frac{B_n}{e^{ni\beta'}-1}=C_n \quad (n=\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \infty)$$

C_n ayant ainsi une valeur finie, bien déterminée. Pour satisfaire aux identités (50) on voit immédiatement que $X_1(y)$ doit être la somme de la série:

$$X_1(y)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{ny} \tag{51}$$

où l'on prendra pour C_0 une constante arbitraire; la sommation s'étend à toutes les valeurs positives, négatives, ou nulles de l'entier n. Tout revient donc à démontrer la convergence de la série (51). Soit ε un nombre positif très-petit mais fixe. Les termes de (51) correspondant aux valeurs de n pour lesquelles l'une des inégalités suivantes

$$|e^{ni\beta}-1|>\varepsilon \quad \text{ou} \quad |e^{ni\beta'}-1|>\varepsilon$$

est satisfaite, forment évidement une série convergente. Il nous suffit donc d'étudier la série

$$\Sigma C_p e^{py} \tag{52}$$

comprenant tous les autres termes pour lesquels on a simultanément

$$|e^{pi\beta}-1|<\varepsilon, \quad |e^{pi\beta'}-1|<\varepsilon. \tag{53}$$

La convergence de la série (52) va résulter de l'identité (49). En remplaçant, en effet, les fonctions qui y figurent par leurs développements et en substituant à A_p et B_p leurs valeurs $C_p(e^{pi\beta}-1)$ est $C_p(e^{pi\beta'}-1)$, il vient:

$$C_p[\omega' e^{pi\beta'}(e^{pi\beta}-1)-\omega e^{pi\beta}(e^{pi\beta'}-1)]=a_p(e^{pi\beta}-1)+b_p(e^{pi\beta'}-1).$$

D'où:

$$C_p=\frac{a_p(e^{pi\beta}-1)+b_p(e^{pi\beta'}-1)}{\omega' e^{pi\beta'}(e^{pi\beta}-1)-\omega e^{pi\beta}(e^{pi\beta'}-1)}. \tag{54}$$

Posons

$$\omega=r_1 e^{i\Theta_1}, \qquad \omega'=r_2 e^{i\Theta_2}$$

en mettant ainsi en évidence les modules et les arguments de ω et de ω'. D'une façon analogue nous pouvons poser:

$$e^{pi\beta}-1=\varrho_p e^{i\left(\iota_p\pm\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$e^{pi\beta'}-1=\varrho'_p e^{i\left(\iota'_p\pm\frac{\pi}{2}\right)}$$

ϱ_p et ϱ'_p sont inférieurs à ε d'après (53); l'un d'eux peut être nul, mais non tous les deux. Comme $e^{pi\beta}$ et $e^{pi\beta'}$ ont pour module l'unité, on voit que les arguments de $e^{pi\beta}-1$ et de $e^{pi\beta'}-1$ seront très-voisins de $\pm\frac{\pi}{2}$ par suite des inégalités (53) c'est-à-dire que ε_p et ε'_p désignent ici deux nombres très-petits (positifs ou négatifs). Enfin $e^{pi\beta}$ et $e^{pi\beta'}$ ont eux mêmes des arguments très-petits ε''_p et ε'''_p. Ceci posé, le dénominateur de C_p, dans la formule (54) a même module que l'expression:

$$r_2\varrho_p - r_1\varrho'_p\, e^{i\left(\theta_1-\theta_2+\varepsilon'_p-\varepsilon_p+\varepsilon''_p-\varepsilon'''_p+K\pi\right)}$$

où K est 0 ou ± 1. Ce module est supérieur à chacune des quantités

$$|r_2\varrho_p \sin(\theta_1-\theta_2+\varepsilon'_p-\varepsilon_p+\varepsilon''_p-\varepsilon'''_p)|$$
$$|r_1\varrho'_p \sin(\theta_1-\theta_2+\varepsilon'_p-\varepsilon_p+\varepsilon''_p-\varepsilon'''_p)|.$$

Comme $\theta_1-\theta_2$ n'est pas un multiple de π et comme les ε'_p, ε_p, ε''_p, ε'''_p sont tous inférieurs à un nombre positif choisi arbitrairement petit si ε a lui-même été pris assez petit, on voit que les sinus précédents sont tous supérieurs en valeur absolue à un nombre positif fixe η. On a donc enfin en posant:

$$|\omega' e^{pi\beta'}(e^{pi\beta}-1)-\omega e^{pi\beta}(e^{pi\beta'}-1)| = R_p$$
$$R_p > r_2\varrho_p\eta$$
$$R_p > r_1\varrho'_p\eta$$

pour toutes les valeurs de p correspondant à tous les termes de la série (52). Il résulte ensuite de l'expression (54) l'inégalité suivante:

$$|C_p| \leq \frac{|a_p|}{\eta r_2}+\frac{|b_p|}{\eta r_1};$$

η, r_1 et r_2 étant trois nombres fixes, on voit que la série (52) est bien convergente puisque les séries $\Sigma a_p e^{py}$ et $\Sigma b_p e^{py}$ sont elles-mêmes absolument convergentes.

Le lemme énoncé se trouve ainsi démontré. Faisons remarquer que les constantes c_1 et c_2 des identités (50) sont respectivement égales à $-A_0$ et $-B_0$.

25. Désignons par $F(y)$ une fonction entière de la variable y, admettant la période $2i\pi$:

$$F(y+2i\pi) = F(y)$$

et cherchons à former une fonction entière de x et y admettant pour zéros toutes les valeurs de x et y satisfaisant aux relations suivantes

(55) $$x - m\omega - n\omega' = F(y - mi\beta - ni\beta')$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. On voit tout de suite, soit directement, soit en se reportant à ce que nous avons dit à propos des branches principales que toutes les déterminations de x fournies par ces relations sont distinctes (c'est-à-dire que deux d'entre elles ne deviennent égales que pour des valeurs particulières de y). En outre si l'on considère $F(y)$ comme une branche principale ses augments conjugués sont $(0, 2i\pi)$.

Posons pour abréger

$$u(m, n) = x - F(y - mi\beta - ni\beta')$$
$$v(m, n) = m\omega + n\omega'$$

pour toutes les valeurs de m et n.

Soit ensuite

$$U(m, n) = \operatorname{Log}\left[1 - \frac{u(m, n)}{v(m, n)}\right] + \frac{u(m, n)}{v(m, n)} + \frac{1}{2}\left[\frac{u(m, n)}{v(m, n)}\right]^2$$

pour toutes les valeurs de m et n, sauf pour $m = n = 0$.

Pour $m = n = 0$, nous posons

$$U(0, 0) = \operatorname{Log}[x - F(y)] = \operatorname{Log} u(0, 0).$$

La fonction $F(y)$ admettant la période $2i\pi$, si x et y ont un système de valeurs données quelconques mais fixes, toutes les quantités $u(m, n)$ ont des modules inférieurs à un nombre positif fixe. Il en résulte que l'on définit une fonction entière $g(x, y)$ en posant:

(56) $$g(x, y) = \Pi e^{U(m, n)}$$

le produit Π s'étendant à toutes les valeurs de m et de n entières, positives, négatives ou nulles. La fonction $g(x, y)$ admet évidemment les zéros définis par les relations (55) et n'en admet pas d'autres.

Posons:

$$h(x, y) = \operatorname{Log}[g(x, y)] = \Sigma U_{m, n}$$

(57) $$\begin{cases} k(x, y) = \dfrac{\partial h(x, y)}{\partial x} = \Sigma \dfrac{\partial U(m, n)}{\partial x} \\[2ex] l(x, y) = \dfrac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} = \Sigma \dfrac{\partial^2 U(m, n)}{\partial x^2} \end{cases}.$$

Les sommations s'étendent à toutes les valeurs de m et n; $k(x, y)$ et $l(x, y)$ sont ainsi définies d'une façon unique; $h(x, y)$ est définie à un multiple près de $2i\pi$. On a:

$$\frac{\partial U(m,n)}{\partial x}=\frac{1}{u(m,n)-v(m,n)}+\frac{1}{v(m,n)}+\frac{u(m,n)}{[v(m,n)]^2}\tag{58}$$

sauf pour $m=n=0$: $$\frac{\partial U(0,0)}{\partial x}=\frac{1}{u(0,0)}.$$

De même

$$\frac{\partial^2 U(m,n)}{\partial x^2}=\frac{-1}{[u(m,n)-v(m,n)]^2}+\frac{1}{[v(m,n)]^2}\tag{59}$$

sauf pour $m=n=0$: $$\frac{\partial^2 U(0,0)}{\partial x^2}=\frac{-1}{[u(0,0)]^2}.$$

Il résulte immédiatement de l'expression (57) de $l(x, y)$ en série que chacune des différences $l(x+\omega,\ y+i\beta)-l(x,y)$ et $l(x+\omega',\ y+i\beta')-l(x,y)$ est une constante; ces deux constantes sont nulles; car elles ne dépendent en rien du choix de $F(y)$ et si l'on prend $F(y)$ nulle identiquement, $l(x, y)$ se réduit alors à la fonction de WEIERSTRASS px changée de signe. Comme $k(x, y)$ a pour dérivée, par rapport à x, $l(x, y)$ nous pouvons poser:

$$\begin{cases} k(x+\omega,\ y+i\beta)-k(x,y)=\lambda_1(y)\\ k(x+\omega',\ y+i\beta')-k(x,y)=\mu_1(y)\end{cases}\tag{60}$$

où $\lambda_1(y)$ et $\mu_1(y)$ sont évidemment des fonctions entières de y admettant la période $2i\pi$, ainsi que cela résulte immédiatement de l'expression (57) de $k(x, y)$ en série. En outre, $k(x, y)$ étant uniforme on déduit de (60):

$$\lambda_1(y+i\beta')-\lambda_1(y)=\mu_1(y+i\beta)-\mu_1(y).\tag{61}$$

Les fonctions $\lambda_1(y)$ et $\mu_1(y)$ satisfont à une autre identité que nous obtiendrons en considérant la fonction primitive $h(x, y)$ de $k(x, y)$ relativement à variable x.

La fonction $h(x, y)$ a des déterminations multiples, différant entre elles par des multiples de $2i\pi$. Mais chacune des déterminations des différences $h(x+\omega,\ y+i\beta)-h(x,y)$ et $h(x+\omega',\ y+i\beta')-h(x,y)$ est une fonction uniforme, entière de x et y. Nous choisirons deux quelconques de ces déterminations et nous poserons, en ayant égard aux identités (60)

$$\begin{cases} h(x+\omega,y+i\beta)-h(x,y)=x\lambda_1(y)+\lambda_2(y)\\ h(x+\omega',y+i\beta')-h(x,y)=x\mu_1(y)+\mu_2(y).\end{cases}\tag{62}$$

Dans ces relations $\lambda_2(y)$ et $\mu_2(y)$ sont des fonctions uniformes entières de y. Elles admettent la période $2i\pi$; on le voit immédiatement en employant l'expression (57) de $h(x, y)$ en série et en réunissant, dans la différence des séries qui donnent

$h(x+\omega,\ y+i\beta)$ et $h(x, y)$, en un seul terme les deux termes, pris respectivement dans chaque série, dont la différence est une fonction entière de x et y. Dans la série ainsi obtenue, tous les termes sont alors des fonctions uniformes dans lesquelles y n'entre que par la fonction $F(y)$ qui admet la période $2i\pi$.

Des identités (62), on conclut la suivante, en changeant x et y dans la première en $x+\omega',\ y+i\beta'$ et dans la seconde en $x+\omega,\ y+i\beta$:

$$(x+\omega')\lambda_1(y+i\beta')+\lambda_2(y+i\beta')-x\lambda_1(y)-\lambda_2(y)=$$
$$=(x+\omega)\mu_1(y+i\beta)+\mu_2(y+i\beta)-x\mu_1(y)-\mu_2(y)-2iK\pi;$$

K est un nombre entier positif, négatif ou nul (dont la valeur sera obtenue plus loin); le terme $2iK\pi$ provient des déterminations multiples possibles de $h(x, y)$.

Cette dernière identité se simplifie à cause de l'identité (61) et nous avons, toutes réductions faites:

(63) $$\omega'\lambda_1(y+i\beta')-\omega\mu_1(y+i\beta)=\mu_2(y+i\beta)-\mu_2(y)+\lambda_2(y)-\lambda_2(y+i\beta')-2iK\pi.$$

Les fonctions $\lambda_1(y)$ et $\mu_1(y)$ satisfont ainsi à toutes les conditions du lemme du paragraphe précédent. Il existe donc une fonction entière de y, $X_1(y)$ admettant la période $2i\pi$ et vérifiant en outre les identités:

(64) $$X_1(y+i\beta)-X_1(y)=\lambda_1(y)-c_1,\quad X_1(y+i\beta')-X_1(y)=\mu_1(y)-c_2.$$

Les constantes c_1 et c_2 sont les termes constants des développements de $\lambda_1(y)$ et $\mu_1(y)$ suivant les puissances entières de e^y. Elles sont liées par une relation qui se déduit immédiatement de l'identité (63) en y remplaçant toutes les fonctions par leurs développements.

On a ainsi

(65) $$\omega'c_1-\omega c_2=-2iK\pi.$$

Nous pouvons donc poser

(66) $$c_1=c\omega,\quad c_2=c\omega'+\frac{2iK\pi}{\omega},$$

où c est une constante convenablement choisie.

Si nous posons:

(67) $$\begin{cases} k_1(x, y)=k(x, y)-cx-X_1(y) \\ h_1(x, y)=h(x, y)-\dfrac{cx^2}{2}-xX_1(y) \end{cases}$$

on aura encore:

$$\frac{\partial h_1(x, y)}{\partial x} = k_1(x, y).$$

Il résulte des relations (60), (66) et (64) les suivantes:

$$(68) \qquad \begin{cases} k_1(x + \omega, \ y + i\beta) - k_1(x, y) = 0 \\ k_1(x + \omega', \ y + i\beta') - k_1(x, y) = \dfrac{2iK\pi}{\omega}. \end{cases}$$

On pourra ensuite poser

$$(69) \qquad \begin{cases} h_1(x + \omega, \ y + i\beta) - h_1(x, y) = \lambda_3(y) \\ h_1(x + \omega', \ y + i\beta') - h_1(x, y) = \dfrac{2iK\pi}{\omega} x + \mu_3(y); \end{cases}$$

$\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ sont données par les formules

$$\lambda_3(y) = \lambda_2(y) - \frac{c\omega^2}{2} - \omega X_1(y + i\beta)$$

$$\mu_3(y) = \mu_2(y) - \frac{c\omega'^2}{2} - \omega' X_1(y + i\beta')$$

$\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ admettent donc la période $2i\pi$. D'ailleurs de (69) on conclut, en ayant égard aux déterminations multiples de $h_1(x, y)$:

$$\lambda_3(y + i\beta') - \lambda_3(y) = \mu_3(y + i\beta) - \mu_3(y) + \text{multiple de } 2i\pi.$$

Mais ce dernier multiple est nécessairement nul comme on le voit en imaginant $\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ remplacées par leurs développements suivant les puissances de e^y. Par conséquent on a l'identité

$$(70) \qquad \lambda_3(y + i\beta') - \lambda_3(y) = \mu_3(y + i\beta) - \mu_3(y).$$

(que l'on pourrait d'ailleurs déduire des expressions de $\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ écrites ci-dessus).

Considérons maintenant la fonction $g_1(x, y)$ définie par l'égalité

$$g_1(x, y) = e^{h_1(x, y)}.$$

Nous aurons, d'après (57) et (67)

$$(71) \qquad g_1(x, y) = g(x, y) e^{-\frac{cx^2}{2} - x X_1(y)}$$

La fonction $g_1(x, y)$ a les mêmes zéros que $g(x, y)$ et elle vérifie les identités suivantes:

$$(72)\qquad \begin{cases} g_1(x,\ y+2i\pi)=g_1(x,\ y) \\ g_1(x+\omega,\ y+i\beta)=e^{\lambda_3(y)}\,g_1(x,\ y) \\ g_1(x+\omega',\ y+i\beta')=e^{\frac{2iK\pi}{\omega}x+\mu_3(y)}\,g_1(x,\ y) \end{cases}$$

Dans une bande B du plan de la variable y, limitée par deux parallèles quelconques à l'axe des imaginaires, les zéros de $g_1(x, y)$ n'admettent qu'une seule branche principale $x=F(y)$ avec les augments $(0,\ 2i\pi)$. D'après les formules (38), en supposant toujours que la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega}$ est positive, les entiers caractéristiques de $g_1(x, y)$ sont: $m_{2,3}=1$; $m_{3,1}=m_{1,2}=0$. Donc dans la troisième des identités (72) on a:

$$K=-1.$$

Poursuivons l'analyse qui précède en établissant entre $\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ une identité *analogue* à l'identité (63) et par l'emploi des mêmes moyens; c'est-à-dire que nous prendrons une fonction primitive de $h_1(x, y)$ relativement à la variable x. Pour cela nous poserons:

$$V(m,\ n)=[u(m,\ n)-v(m,\ n)]\,\mathrm{Log}\left[1-\frac{u(m,\ n)}{v(m,\ n)}\right]-u(m,\ n)+\frac{[u(m,\ n)]^2}{2v(m,\ n)}+\frac{[u(m,\ n)]^3}{6[v(m,\ n)]^2}$$

pour toutes les valeurs de m et n, sauf $m=n=0$. Pour ce système de valeurs nous poserons:

$$V(0,\ 0)=u(0,\ 0)\log u(0,\ 0)-u(0,\ 0).$$

Nous définirons une fonction $Z(x, y)$ par la série évidemment convergente:

$$(73)\qquad Z(x,\ y)=\Sigma\, V(m,\ n)$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles de m et n. On suppose, bien entendu, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point classique, que l'on prend des déterminations des logarithmes qui figurent dans les $V(m, n)$ de façon à assurer la convergence de la série.

La fonction $Z(x, y)$ a une infinité de déterminations possibles et la différence entre deux de ses déterminations est égale à la somme algébrique d'un nombre fini de termes dont chacun est de la forme

$$\pm\, 2i\pi[u(m,\ n)-v(m,\ n)]$$

un même terme pouvant se trouver répété plusieurs fois. Chacune des déterminations de $Z(x, y)$ a pour dérivée par rapport à x, l'une des déterminations de $h(x, y)$.

Nous poserons

$$Z_1(x, y) = Z(x, y) - \frac{cx^3}{6} - \frac{x^2}{2} X_1(y) \tag{74}$$

de telle sorte que:

$$\frac{\partial Z_1(x, y)}{\partial x} = h_1(x, y) + \text{un multiple de } 2i\pi. \tag{75}$$

Il en résulte d'après (69), où $K = -1$, les identités suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} Z_1(x+\omega,\ y+i\beta) - Z_1(x, y) = [2ip\pi + \lambda_3(y)]x + \lambda_4(y) \\ Z_1(x+\omega',\ y+i\beta') - Z_1(x, y) = [2iq\pi + \mu_3(y)]x + \mu_4(y) - \frac{i\pi}{\omega} x^2 \end{array}\right. \tag{76}$$

dans lesquelles on a choisi arbitrairement une détermination pour chacun des premiers membres; p et q sont deux entiers; $\lambda_4(y)$ et $\mu_4(y)$ sont deux fonctions entières de y admettant la période $2i\pi$: on le voit à l'aide de la série (73) en raisonnant comme on l'a fait pour $\lambda_2(y)$ et $\mu_2(y)$.

Si dans les identités (76) nous changeons x et y dans la première en $x+\omega'$, $y+i\beta'$, dans la seconde en $x+\omega$, $y+i\beta$, nous obtenons une nouvelle identité qui s'écrira de la façon suivante, en tenant compte de (70) et aussi des déterminations multiples possibles de $Z_1(x, y)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \omega'\lambda_3(y+i\beta') - \omega\mu_3(y+i\beta) = \mu_4(y+i\beta) - \mu_4(y) - \lambda_4(y+i\beta') + \\ \qquad\qquad + \lambda_4(y) + (2q-1)i\pi\omega - 2ip\pi\omega' - 2i\pi x + S' - S'' \end{array}\right. \tag{77}$$

où S' et S'' désignent chacune une somme de termes de la forme $+2i\pi[u(m, n) - - v(m, n)]$, un même terme pouvant être répété plusieurs fois.

Or on a:

$$u(m, n) - v(m, n) = x - m\omega - n\omega' - F(y - im\beta - in\beta').$$

On voit alors par l'identification des termes en x dans (77) que S' renferme un terme de plus que S''; on peut toujours supposer que S' renferme le terme $2i\pi[x - F(y)]$, car on peut toujours ajouter ce terme à la fois à S' et S''. Nous poserons alors:

$$S' = 2i\pi[x - F(y)] + S'_1 \tag{78}$$

S'_1 aura alors le même nombre de termes que S'' et par suite la différence $S'_1 - S''$ sera une somme de termes de la forme

$$2i\pi[F(y - mi\beta - ni\beta') - F(y - m'i\beta - n'i\beta')] \tag{79}$$

augmentée d'une somme de multiples de $2i\pi\omega$ et $2i\pi\omega'$.

On peut donc poser:

$$(80)\quad \begin{cases} (2q-1)i\pi\omega - 2ip\pi\omega' - 2i\pi x + S' - S'' = -2i\pi F(y) + \\ \qquad + (2q_1+1)i\pi\omega + 2p_1 i\pi\omega' + T \end{cases}$$

où p_1 et q_1 sont deux entiers et T est une somme d'un nombre fini de termes de la forme (79) avec

$$(81)\qquad T = S'_1 - S'' + 2(q - q_1 - 1)i\pi\omega - 2(p + p_1)i\pi\omega'.$$

Si nous posons:

$$F_1(y) = F(y - mi\beta - n'i\beta')$$

et

$$n' - n = \nu, \qquad m - m' = \mu$$

il en résultera:

$$(82)\quad \begin{cases} F(y - mi\beta - ni\beta') - F(y - m'i\beta - n'i\beta') = F_1(y + \nu i\beta') - \\ \qquad - F_1(y) + F_1(y) - F_1(y + \mu i\beta). \end{cases}$$

Si ν était nul, la différence $F_1(y+\nu i\beta') - F_1(y)$ serait nulle et il n'y aurait pas à en tenir compte dans ce qui suit. Supposons $\nu \neq 0$ et tout d'abord pour fixer les idées $\nu > 0$. On pourra alors poser:

$$(83)\qquad F_1(y + \nu i\beta') - F_1(y) = F_2(y + i\beta') - F_2(y)$$

avec
$$F_2(y) = \sum_{r=0}^{r=\nu-1} F_1(y + ri\beta').$$

Si ν était négatif et égal à $-\nu'$, on prendrait:

$$F_2(y) = -\sum_{r=1}^{r=\nu'} F_1(y - ri\beta')$$

et l'on aurait encore l'identité (83), où $F_2(y)$ est manifestement une fonction entière admettant la période $2i\pi$ comme $F(y)$.

De façon analogue, on pourra poser:

$$F_1(y) - F_1(y + \mu i\beta) = F_3(y + i\beta) - F_3(y)$$

de telle sorte que le terme général (79) de la somme T peut être mis sous la forme:

$$2i\pi[F_2(y + i\beta') - F_2(y) + F_3(y + i\beta) - F_3(y)].$$

Mais la somme d'un nombre quelconque de termes de la forme $f(y+i\beta)-f(y)$, [ou de la forme $f_1(y)-f_1(y+i\beta)$ qui n'en est pas distincte], où $f(y)$ et $f_1(y)$ sont des fonctions entières de y admettant la période $2i\pi$, est évidemment elle-même de la forme $\Phi(y+i\beta)-\Phi(y)$, où $\Phi(y)$ est une fonction entière admettant la période $2i\pi$.

Il résulte de là que l'on peut poser:

$$(84)\quad \mu_4(y+i\beta)-\mu_4(y)-\lambda_4(y+i\beta')+\lambda_4(y)+T=\Phi_1(y+i\beta)-\Phi_1(y)+\Phi_2(y+i\beta')-\Phi_2(y)$$

où $\Phi_1(y)$ et $\Phi_2(y)$ sont deux fonctions entières admettant la période $2i\pi$. A l'aide des relations (77), (80) et 84) on obtient l'identité suivante:

$$(85)\left\{\begin{array}{l} \omega'\lambda_3(y+i\beta')-\omega\mu_3(y+i\beta)=\Phi_1(y+i\beta)-\Phi_1(y)+\Phi_2(y+i\beta')-\Phi_2(y)-2i\pi F(y)+C \\ \qquad\qquad \text{avec} \qquad C=(2q_1+1)i\pi\omega+2ip_1\pi\omega' \end{array}\right.$$

Soient maintenant $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ deux fonctions entières de y prises arbitrairement sous les seules conditions exprimées par les relations suivantes:

$$(86)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(y+2i\pi)=\varphi(y), \qquad \psi(y+2i\pi)=\psi(y) \\ \varphi(y+i\beta')-\varphi(y)=\psi(y+i\beta)-\psi(y). \end{array}\right.$$

La fonction $F(y)$ ayant été prise au début d'une façon arbitraire, nous pouvons supposer que son choix a été déterminé par la relation suivante:

$$(87)\qquad 2i\pi F(y)=\omega\psi(y+i\beta)-\omega'\varphi(y+i\beta')$$

car cette égalité définit bien une fonction entière admettant la période $2i\pi$.

Si $F(y)$ a été ainsi choisie l'identité (85) devient:

$$(88)\qquad \omega'\lambda(y+i\beta')-\omega\mu(y+i\beta)=\Phi_1(y+i\beta)-\Phi_1(y)+\Phi_2(y+i\beta')-\Phi_2(y)+C$$

où l'on a posé:

$$(89)\qquad \lambda(y)=\lambda_3(y)-\varphi(y) \quad \text{et} \quad \mu(y)=\mu_3(y)-\psi(y).$$

Des identités (70) et (86), on conclut pour $\lambda(y)$ et $\mu(y)$ la suivante:

$$\lambda(y+i\beta')-\lambda(y)=\mu(y+i\beta)-\mu(y).$$

D'autre part $\lambda(y)$ et $\mu(y)$ admettent la période $2i\pi$; donc on peut appliquer le lemme démontré; il existe une fonction entière $X_2(y)$ satisfaisant aux identités:

$$(90)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_2(y+2i\pi)=X_2(y) \\ X_2(y+i\beta)-X_2(y)=\lambda(y)-c_3, \ X_2(y+i\beta')-X_2(y)=\mu(y)-c_4. \end{array}\right.$$

Les constantes c_3 et c_4 sont liées par la relation

$$\omega' c_3 - \omega c_4 = C = (2q_1 + 1) i\pi\omega + 2ip_1\pi\omega'$$

qui résulte de (88) par un raisonnement déjà employé pour c_1 et c_2. Nous pouvons donc poser, c'' désignant une constante convenablement choisie:

$$(91) \qquad \begin{cases} c''\omega = c_3 - 2ip_1\pi \\ c''\omega' = c_4 + (2q_1 + 1) i\pi. \end{cases}$$

Prenons ensuite:

$$(92) \qquad h_2(x, y) = h_1(x, y) - X_2(y) - c''x.$$

Il résulte des identités (69) et (90) les deux suivantes: (en se souvenant que $K = -1$)

$$(93) \qquad \begin{cases} h_2(x + \omega,\ y + i\beta) - h_2(x, y) = \lambda_3(y) - \lambda(y) + c_3 - c''\omega \\ h_2(x + \omega',\ y + i\beta') - h_2(x, y) = \mu_3(y) - \dfrac{2i\pi x}{\omega} - \mu(y) + c_4 - c''\omega'. \end{cases}$$

D'après (89) on a:

$$\lambda_3(y) - \lambda(y) = \varphi(y)$$
$$\mu_3(y) - \mu(y) = \psi(y).$$

Il vient alors en remplaçant dans (93) $c''\omega$ et $c''\omega'$ par leurs valeurs (91):

$$(94) \qquad \begin{cases} h_2(x + \omega,\ y + i\beta) - h_2(x, y) = \varphi(y) + 2ip_1\pi \\ h_2(x + \omega',\ y + i\beta') - h_2(x, y) = \psi(y) - \dfrac{2i\pi}{\omega}\left(x + \dfrac{\omega}{2}\right) - 2iq_1\pi. \end{cases}$$

Prenons la fonction entière dont le logarithme est $h_2(x, y)$:

$$g_2(x, y) = e^{h_2(x, y)}$$

et qui est liée à $g_1(x, y)$ par la relation:

$$g_2(x, y) = g_1(x, y)\, e^{-c''x - X_2(y)}.$$

Cette fonction satisfait aux identités:

$$(95) \qquad \begin{cases} g_2(x, y + 2i\pi) = g_2(x, y) \\ g_2(x + \omega,\ y + i\beta) = e^{\varphi(y)} g_2(x, y) \\ g_2(x + \omega',\ y + i\beta') = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(x + \frac{\omega}{2}\right) + \psi(y)} g_2(x, y) \end{cases}$$

Enfin la fonction entière

$$g_3(x, y) = g_2\left(x - \frac{\omega}{2},\ y\right)$$

satisfait aux identités:

$$(96)\qquad \begin{cases} g_3(x, y + 2\,i\pi) = g_3(x, y) \\ g_3(x + \omega,\ y + i\beta) = e^{\varphi(y)} g_3(x, y) \\ g_3(x + \omega',\ y + i\beta') = e^{\psi(y) - \frac{2\,i\pi x}{\omega}} g_3(x, y) \end{cases}$$

dans lesquelles $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions entieres de y choisies arbitrairement sous la seule condition de vérifier les identités (86).

26. Revenons à l'expression d'une fonotion méromorphe triplement périodique: on peut, comme nous l'avons vu précédemment la mettre sous forme du quotient de deux fonctions entieres

$$f(x, y) = \frac{G_1(x, y)}{G_2(x, y)}$$

$G_1(x, y)$ et $G_2(x, y)$ satisfaisant toutes les deux aux identités

$$(97)\qquad \begin{cases} G_k(x, y + 2\,i\pi) = G_k(x, y) \\ G_k(x + \omega,\ y + i\beta) = e^{\varphi(y)} G_k(x, y) \qquad (k = 1, 2) \\ G_k(x + \omega',\ y + i\beta') = e^{\psi(y) - \frac{2\,i\pi\mu x}{\omega}} G_k(x, y) \end{cases}$$

avec $\mu > 0$ et la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega} > 0$.

Du dernier résultat que nous avons obtenu, il résulte que $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ peuvent être, dans ces équations, des fonctions entières quelconques satisfaisant aux identités (86), si la fonction méromorphe $f(x, y)$ est elle même quelconque.

De là résulte l'impossibilité, comme nous l'avons vu, de faire disparaître dans tous les cas $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ des équations fonctionnelles (97) en multipliant $G_k(x, y)$ par une fonction entière de x et y se s'annulant pas. Mais il en résulte aussi immédiatement la possibilité d'arriver dans tous les cas à ce résultat en multipliant par une fonction entière *qui s'annule:* Car $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ satisfaisant aux relations (86), il en est de même de $-\varphi(y)$ et $-\psi(y)$. Par conséquent, il existe une fonction entière $g_4(x, y)$ satisfaisant aux identités suivantes:

$$g_4(x, y + 2\,i\pi) = g_4(x, y)$$
$$g_4(x + \omega, y + i\beta) = e^{-\varphi(y)} g_4(x, y)$$
$$g_4(x + \omega', y + i\beta') = e^{-\psi(y) - \frac{2\,i\pi x}{\omega}} g_4(x, y).$$

Si l'on pose:

$$H_k(x, y) = g_4(x, y) G_k(x, y) \qquad (k = 1, 2)$$

les deux fonctions $H_k(x, y)$ satisferont aux identités:

$$(98) \qquad \begin{cases} H_k(x, y + 2 i\pi) = H_k(x, y) \\ H_k(x + \omega, y + i\beta) = H_k(x, y) \\ H_k(x + \omega', y + i\beta') = e^{-\frac{2 i\pi(\mu+1)x}{\omega}} H_k(x, y) \end{cases}$$

et la fonction $f(x, y)$ sera égale au quotient $\dfrac{H_1(x, y)}{H_2(x, y)}$.

Il est à remarquer que d'après la façon dont on l'a formé ce quotient n'est pas *irréductible* c'est-à-dire que ses deux termes ont un diviseur commun qui s'annule.

Dans le cas où l'on pourrait obtenir les fonctions $H_k(x, y)$ en multipliant $G_k(x, y)$ par une fonction entiere qui ne s'annule pas, il est clair qu'il serait préférable d'opérer ainsi. Dans les équations (98) on aurait alors μ au lieu de $(\mu + 1)$.

27. Nous devons maintenant rechercher l'expression générale d'une fonction entière de x et y, $H(x, y)$ satisfaisant aux équations fonctionnelles (98), où nous remplacerons $(\mu + 1)$ par ν; ν sera un entier positif quelconque, $\dfrac{\omega'}{\omega}$ ayant toujours sa partie imaginaire positive. Par suite de la première des équations (98), $H(x, y)$ est égale à une série procédant suivant les puissances entières de e^y, les coefficients étant des fonctions entières de x.

Soit donc

$$(99) \qquad H(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) e^{ny}.$$

Par identification dans les deux autres équations (98) il vient, ($\mu + 1$ étant remplacé par ν)

$$(100) \qquad \begin{cases} \Phi_n(x + \omega) = e^{-ni\beta} \Phi_n(x) \\ \Phi_n(x + \omega') = e^{-ni\beta' - \frac{2 i\pi\nu x}{\omega}} \Phi_n(x). \end{cases}$$

On voit d'après ces relations que toutes les fonctions $\Phi_n(x)$ sont des fonctions Θ de la variable x, d'ordre ν.

Posons

$$(101) \qquad \Psi_n(x) = e^{\frac{ni\beta}{\omega} x} \Phi_n(x).$$

On aura:

$$(102) \qquad \begin{cases} \Psi_n(x+\omega) = \Psi_n(x) \\ \Psi_n(x+\omega') = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(\nu x + nb)}\Psi_n(x) \end{cases}$$

en posant:

$$(103) \qquad b = \frac{\beta'\omega - \beta\omega'}{2\pi}.$$

Considérons une fonction $\theta(x)$ du premier ordre satisfaisant aux identités:

$$(104) \qquad \begin{cases} \theta(x+\omega) = \theta(x) \\ \theta(x+\omega') = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)}\theta(x) \end{cases}$$

et qui s'annule, comme on sait, pour $x=0$. Il y a une infinité de fonctions $\theta(x)$ satisfaisant à ces conditions: elles ne diffèrent entre elles que par un facteur constant. Nous en choisirons une arbitrairement, mais prise une fois pour toutes. (Par exemple celle pour laquelle $\theta\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$).

Imaginons maintenant le plan de la variable x divisé en un réseau de parallélogrammes de côtés ω et ω', et appelons P_0 l'un de ces parallélogrammes.

Nous considérerons suivant l'usage que l'un des côtés ω et l'un des côtés ω' de P_0 appartient au parallélogramme P_0, les deux autres côtés ne lui appartenant pas; de telle sorte qu'un point quelconque du plan n'aura qu'un seul homologue appartenant à P_0. La fonction $\Psi_n(x)$ étant d'ordre ν a ν zéros distincts ou non dans le parallélogramme P_0. Nous appelons $a_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots \nu)$, ces ν zéros. Comme ce sont ν points de P_0, il existe un nombre positif C tel que la somme:

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=\nu} a_k^{(n)}$$

a un module inférieur à C pour toutes les valeurs de n de $-\infty$ a $+\infty$. Soit donc

$$|s_n| < C \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty).$$

D'autre part l'expression de $\Psi_n(x)$ s'obtient sous forme de produit à l'aide de $\theta(x)$ par les procédés ordinaires. On trouve ainsi:

$$(105) \qquad \Psi_n(x) = c_n e^{\frac{-2i\pi K_n}{\omega}x} \prod_{k=1}^{k=\nu} \theta(x - a_k^{(n)}) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty)$$

où c_n est une constante et K_n est un entier qui se trouve défini par la relation suivante qui doit nécessairement avoir lieu:

$$nb = K_n\omega' + K'_n\omega - s_n + \nu\frac{\omega}{2}$$

où K'_n est un autre entier.

Remplaçons dans cette relation b par sa valeur (103); elle devient:

$$\frac{n\beta'}{2\pi}\omega - \frac{n\beta}{2\pi}\omega' = K_n\omega' + K'_n\omega - s_n + \nu\frac{\omega}{2}. \tag{106}$$

Les quantités $\frac{n\beta'}{2\pi}$ et $\frac{n\beta}{2\pi}$ sont réelles et nous pouvons poser:

$$\frac{n\beta'}{2\pi} = p'_n + r'_n, \qquad \frac{n\beta}{2\pi} = -p_n - r_n$$

où p_n et p'_n sont deux entiers et r_n, r'_n deux nombres positifs, plus petits que 1.

L'identité (106) devient alors

$$s_n - \nu\frac{\omega}{2} + r'_n\omega + r_n\omega' = (K_n - p_n)\omega' + (K'_n - p'_n)\omega.$$

Le premier membre est donc une somme de multiples de ω et ω'; mais $|s_n| < C$, $|r'_n\omega| < |\omega|$; $|r_n\omega'| < |\omega'|$ et $\nu\frac{\omega}{2}$ une constante indépendante de n. Donc les entiers $K_n - p_n$ et $K'_n - p'_n$ sont, en valeur absolue inférieurs à un nombre positif Q indépendant de n. Nous poserons:

$$K_n = p_n + q_n \text{ avec } |q_n| < Q \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty).$$

Si l'on remplace p_n par sa valeur, il viendra:

$$K_n = -\frac{n\beta}{2\pi} - r_n + q_n, \quad |q_n| < Q. \tag{107}$$

Si dans l'expression (101), nous remplaçons $\Psi_n(x)$ par l'expression (105), nous aurons pour $\Phi_n(x)$ l'expression suivante:

$$\Phi_n(x) = c_n e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(K_n + \frac{n\beta}{2\pi}\right)x} \prod_{k=1}^{k=\nu} \theta[x - a_k^{(n)}]$$

ou, en tenant compte de (107)

$$\Phi_n(x) = c_n e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(q_n - r_n)x} \prod_{k=1}^{k=\nu} \theta[x - a_k^{(n)}]. \tag{108}$$

Telle est l'expression générale de $\Phi_n(x)$. Pour former une fonction $\Phi_n(x)$ rentrant dans la formule précédente, on voit que l'on peut prendre arbitrairement $(\nu - 1)$ points $a_k^{(n)}$ à l'intérieur de P_0; le $\nu^{\text{ème}}$ point est alors défini à l'intérieur de P_0 d'une façon unique par la condition (106) où K_n et K'_n doivent être deux entiers qui se trouvent par là définis d'une façon unique: car il n'y a pas à l'intérieur de P_0 deux points distincts homologues l'un de l'autre. Ensuite $q_n - r_n$ est donné par (107). Il reste enfin la constante c_n qui peut être prise arbitrairement.

Il nous faut maintenant discuter la convergence de la série qui fournit $H(x, y)$ et voir sous quelles conditions cette série définit une fonction entière de x et y. Nous allons démontrer à cet égard le résultat suivant:

Pour que la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) e^{ny} \tag{109}$$

définisse une fonction entière de x et y, *il faut et il suffit* que la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{ny}$$

soit elle-même une fonction entière de y.

Cette condition est suffisante: car lorsque x reste dans son plan à l'intérieur d'un domaine quelconque D de dimensions finies, dans la formule (108) toutes les valeurs de $\theta[x - a_k^{(n)}]$ ont un module inférieur à un nombre positif fixe puisque tous les $a_k^{(n)}$ appartiennent à P_0; et de plus comme $|q_n| < Q$ et $|r_n| < 1$, le facteur exponentiel reste aussi inférieur à un nombre positif fixe. La condition est donc manifestement suffisante, la série étant uniformément convergente dans tout domaine d'étendue finie pour les deux variables x et y.

Pour montrer qu'elle est nécessaire prenons à l'intérieur de P_0, $\nu + 1$ points distincts x_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu + 1)$ non situés sur le périmètre de P_0 et entourons chacun d'eux d'un petit cercle γ_j de centre x_j, de telle sorte que tous ces cercles soient extérieurs les uns aux autres et tous intérieurs à P_0.

Cela posé, appelons m_j un nombre entier, positif, ou négatif, ou nul pour lequel $\Phi_{m_j}(x)$ n'ait aucun zéro à l'intérieur de γ_j et considérons la série:

$$\Sigma \Phi_{m_j}(x_j) e^{m_j y} \tag{110}$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs de m_j satisfaisant à la condition précédente. La fonction $\theta(x_j - z)$ où z est une variable, aura son module supérieur à un nombre fixe C_1 lorsque z sera *intérieure* à P_0 et *extérieure* à γ_j. Car à l'intérieur de P_0, $\theta(x_j - z)$ ne s'annule que pour $z = x_j$. D'autre part, toutes les exponentielles

$$e^{\frac{-2i\pi}{\omega}(q_n - r_n)x_j}$$

ont évidemment un module supérieur à un nombre positif C_2, puisque $|q_n|$ et r_n sont inférieurs à Q.

Donc on aura:

$$|\Phi_{m_j}(x_j)| > |c_{m_j}| C_2 C_1^{\nu}.$$

La série (110) procédant suivant les puissances entières de e^y ne peut donc être une fonction entière de y que si

$$\Sigma c_{m_j} e^{m_j y}$$

est une fonction entière de y.

En prenant $j = 1, 2, \ldots (\nu + 1)$ nous mettrons en évidence $(\nu + 1)$ séries définissant des fonctions entières de y. Mais comme $\Phi_n(x)$ n'a que ν zéros dans P_0, il y a au moins, pour chaque valeur de n, un des $\nu + 1$ cercles γ_j qui ne contient aucun zéro de $\Phi_n(x)$; donc chaque terme de la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{ny}$$

figure au moins dans l'une des $(\nu + 1)$ séries:

$$\Sigma c_{m_j} e^{m_j y}.$$

La série $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{ny}$ est, d'après cela, et par un raisonnement très-simple, convergente et définit une fonction entière de y. La condition énoncée est donc bien nécessaire.

Nous ne rechercherons pas ici les autres formes que l'on pourrait donner à l'expression générale de $H(x, y)$. Dans ce qui suit nous laissons de côté les fonctions triplement périodiques les plus générales pour étudier des classes de ces fonctions, possédant des propriétés qui les rapprochent d'une façon remarquable des fonctions abéliennes.

Deuxième partie.

28. Désignons par $f(x, y)$ une fonction méromorphe de x et y de la forme:

$$f(x, y) = \frac{P(x, e^y)}{Q(x, e^y)} \tag{1}$$

où $P(x, e^y)$ et $Q(x, e^y)$ sont des polynômes entiers en e^y, les coefficients étant des fonctions entières de x. De plus on suppose que la fraction est irréductible, c'est-à-dire que les deux termes ne sont pas divisibles tous les deux par une même fonction entière de x et de y qui s'annule. Ceci revient à dire 1° que $P(x, e^y)$ et $Q(x, e^y)$ n'ont pas en e^y de racine commune quelle que soit la valeur de x; 2° que tous les coefficients, pris ensemble, des deux polynômes P et Q n'ont aucun zéro commun.

Nous supposons que $f(x, y)$ est triplement périodique avec les trois systèmes de périodes *non exceptionnels* (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3). On pourrait prendre pour l'un de ces systèmes $(0, 2i\pi)$ mais nous ne le faisons pas pour la généralité de ce qui suit.

Nous poserons, en désignant par p et q les degrés respectifs de P et de Q en e^y:

$$(2)\qquad \begin{cases} P(x, e^y) = \sum\limits_{n=1}^{n=p} f_n(x) e^{ny} \\ Q(x, e^y) = \sum\limits_{m=1}^{m=q} \varphi_m(x) e^{my}. \end{cases}$$

En écrivant que (a_1, b_1), (a_2, b_2) et (a_3, b_3) sont des systèmes de périodes pour $f(x, y)$, on obtient les identités suivantes, en ayant égard à l'irréductibilité de $\frac{P}{Q}$

$$(3)\qquad P[x + a_k,\ e^{y+b_k}] = e^{h_k(x)} P(x, e^y) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$(4)\qquad f_n(x + a_k) = e^{h_k(x) - nb_k} f_n(x) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3 \\ n = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$$

où $h_k(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ sont trois fonctions entières de x. Si l'une des fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots p)$ ne s'annulait pour aucune valeur de x, ses trois entiers caractéristiques correspondant à a_1, a_2, a_3 pris deux à deux seraient nuls. Or il ressort des identités (3) et (4) que ces entiers caractéristiques sont les mêmes que les trois entiers caractéristiques de $f(x, y)$ pour (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3). Comme les trois systèmes de périodes ne sont pas exceptionnels $f(x, y)$ serait une constante, comme ayant ses trois entiers caractéristiques nuls. Donc chacune des fonctions $f_n(x)$ s'annule pour quelque valeur de x; si deux des quantités a_1, a_2, a_3 avaient un rapport réel et incommensurable toutes les fonctions $f_n(x)$ seraient par suite nulles identiquement. D'autre part les rapports de a_1, a_2, a_3 pris deux à deux ne peuvent pas être *tous* réels commensurables. Car on aurait:

$$a_1 = m_1 a, \quad a_2 = m_2 a, \quad a_3 = m_3 a \tag{5}$$

m_1, m_2 et m_3 étant trois entiers non tous nuls et a une constante. Or il résulte de (5), l'égalité suivante:

$$m_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + m_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + m_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

c'est-à-dire (Introduction paragraphe 6): $m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + m_3 \delta_3 = 0$ et les trois systèmes seraient exceptionnels, contrairement à l'hypothèse.

Comme conclusion: on voit qu'il y a nécessairement deux des quantités a_1, a_2, a_3 dont le rapport est imaginaire. Si nous supposons, pour fixer les idées, le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ imaginaire on voit alors sans difficulté qu'en multipliant toutes les fonctions $f_n(x)$ et $\varphi_m(x)$ par une même fonction entière de x, ne s'annulant pas, et convenablement choisie, tous les produits obtenus seront des fonctions Θ de la seule variable x, aux périodes a_1 et a_2; $f(x, y)$ est ainsi mise, sous forme d'une fraction rationnelle en e^y, les coefficients étant des fonctions Θ de la seule variable x. On voit en outre qu'il existe entre a_1, a_2, a_3 une relation de la forme:

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = 0$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant des entiers non tous nuls et premiers entre eux.

29. Cette remarque faite, désignons par $\varphi(x, y)$ une fonction méromorphe, triplement périodique, les trois systèmes de périodes non exceptionnels étant $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Nous dirons que cette fonction est semi-rationnelle, si il existe une substitution linéaire

$$\begin{cases} x = A\,X + B\,Y \\ y = A'X + B'Y \end{cases} \tag{6}$$

telle que $\varphi(x, y)$ se réduise, par cette substitution, à une fraction rationnelle en e^Y, les coefficients étant des fonctions entières de X seul.

Désignons par $\Phi(X, Y)$ ce que devient $\varphi(x, y)$ par la substitution (6) et soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) les trois systèmes de périodes de cette fonction qui correspondent respectivement à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ de telle sorte qu'on a:

$$\begin{aligned} 2i\pi &= A'a_1 + B'b_1 \\ i\beta &= A'a_2 + B'b_2 \\ i\beta' &= A'a_3 + B'b_3. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, il y a deux des nombres a_1, a_2, a_3 dont le rapport est imaginaire: donc B' *ne peut pas être nul.* Posons:

$$(7) \qquad \begin{aligned} X &= X_1 \\ Y &= CX_1 + Y_1 \end{aligned}$$

C étant une constante quelconque; la fonction $\Phi(X, Y)$ devient par cette substitution $\Phi_1(X_1, Y_1)$ et il est manifeste que cette fonction sera aussi une fraction rationnelle en e^{Y_1}, puisque $e^Y = e^{CX_1} . e^{Y_1}$. De (6) et (7) on conclut:

$$\begin{aligned} x &= (A + BC)X_1 + BY_1 \\ y &= (A' + B'C)X_1 + B'Y_1 . \end{aligned}$$

Comme $B' \neq 0$, on peut choisir C de façon que:

$$A' + B'C = 0$$

et l'on aura ainsi:

$$(8) \qquad \begin{aligned} x &= A_1 X_1 + BY_1 \\ y &= B'Y_1 \end{aligned}$$

en posant pour abréger

$$A_1 = \frac{AB' - BA'}{B'} \neq 0 .$$

Désignons par (a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2) (a'_3, b'_3) les trois systèmes de périodes qui pour (X_1, Y_1) correspondent à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Il y a, d'après ce qui précède, une relation de la forme

$$(9) \qquad \mu_1 a'_1 + \mu_2 a'_2 + \mu_3 a'_3 = 0$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois entiers premiers entre eux.

Résolvons les équations (8) par rapport à X_1 et Y_1:

$$(10) \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{A_1}\left(x - \dfrac{BA_1}{B'} y\right) \\ Y_1 = \dfrac{y}{B'} \end{cases}$$

et considérons le système de périodes $(\mu_2\omega + \mu_3\omega', 2\mu_1 i\pi + \mu_2 i\beta + \mu_3 i\beta')$ pour x et y, auquel correspond pour X_1, Y_1 le système de périodes $(0, \mu_1 b'_1 + \mu_2 b'_2 + \mu_3 b'_3)$, à cause de la relation (9). On aura donc:

$$0 = \mu_2\omega + \mu_3\omega' - \frac{BA_1}{B'}(2\mu_1 i\pi + \mu_2 i\beta + \mu_3 i\beta').$$

Les équations (10) deviennent ainsi:

$$(11)\qquad \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{A_1}\left(x - \frac{\mu_2\omega + \mu_3\omega'}{i(2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta')}\, y\right) \\ Y_1 &= \frac{y}{B'}. \end{aligned}$$

Posons:

$$(12)\qquad \begin{aligned} X_2 &= x - \frac{\mu_2\omega + \mu_3\omega'}{i(2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta')}\, y \\ Y_2 &= \frac{2\pi}{2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta'}\, y. \end{aligned}$$

On aura ainsi:

$$(13)\qquad \begin{aligned} X_1 &= A_3 X_2 \\ Y_1 &= B_3 Y_2 \end{aligned}$$

A_3 et B_3 étant deux constantes.

La fonction $\Phi(A_3X_2,\ B_3Y_2)$ s'exprimera comme fonction rationnelle en $e^{B_3Y_2}$, comme $\Phi(X_1,\ Y_1)$ en e^{Y_1}. Or au système de périodes $(\mu_2\omega + \mu_3\omega',\ 2\mu_1 i\pi + \mu_2 i\beta + \mu_3 i\beta')$ pour x et y correspond pour X_2, Y_2 le système de périodes $(0,\ 2i\pi)$. Donc, il est clair que la fonction $\Phi(A_3X_2,\ B_3Y_2)$ pourra *finalement* s'exprimer comme fonction rationnelle en e^{Y_2}.

En résumé, si la fonction $\varphi(x, y)$ est *semi-rationnelle* on pourra la ramener à la *forme* semi-rationnelle par une substitution linéaire de la forme (12). Remarquons que dans la substitution (12) on peut sans inconvénient pour le résultat final, changer les signes des trois nombres μ_1, μ_2 et μ_3 à la fois. Donc la quantité $2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta'$ qui est différente de zéro peut être supposée positive, ce que nous ferons:

$$2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta' > 0.$$

Les entiers μ_1, μ_2 et μ_3 étant premiers entre eux prenons des entiers λ_1, λ_2, λ_3, ν_1, ν_2, ν_3 tels que

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = 1$$

et considérons pour x et y les trois systèmes de périodes fournis par la transformation dont le déterminant est le précédent. Il leur correspondra pour $(X_2,\ Y_2)$ les trois systèmes de périodes $(0,\ 2i\pi)$, $(\omega_2,\ i\beta_2)$, $(\omega'_2,\ i\beta'_2)$ qui auront la forme normale, puisque l'on a:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \beta_2 &= \frac{2\pi(2\lambda_1\pi + \lambda_2\beta + \lambda_3\beta')}{2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta'} \\ \beta'_2 &= \frac{2\pi(2\nu_1\pi + \nu_2\beta + \nu_3\beta')}{2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta'}. \end{aligned}$$

La fonction $\Phi_1(A_3X_2, B_3Y_2)$ étant rationnelle en e^{Y_2}, on voit que ses entiers caractéristiques relatifs à $(0, 2i\pi)$, $(\omega_2, i\beta_2)$ d'une part, et $(0, 2i\pi)$, $(\omega'_2, i\beta'_2)$ d'autre part, sont nuls. Si nous appelons $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$ les entiers caractéristiques de $\varphi(x, y)$ relatifs à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$, nous aurons en appliquant les formules données dans l'introduction pour le calcul des entiers caractéristiques après une transformation

$$m_{1,2}(\mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2) + m_{2,3}(\mu_2\lambda_3 - \lambda_2\mu_3) + m_{3,1}(\mu_3\lambda_1 - \lambda_3\mu_1) = 0$$
$$m_{1,2}(\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2) + m_{2,3}(\mu_2\nu_3 - \nu_2\mu_3) + m_{3,1}(\mu_3\nu_1 - \nu_3\mu_1) = 0.$$

On en déduit immédiatement que $m_{1,2}$, $m_{2,3}$ et $m_{3,1}$ sont proportionnels à μ_3, μ_1 et μ_2; donc que μ_1, μ_2 et μ_3, qui sont premiers entre eux, sont les quotients de $m_{2,3}$, $m_{3,1}$, $m_{1,2}$ par leur plus grand commun diviseur pris avec un signe tel que $2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta' > 0$, d'après notre convention. De la resulte cette conséquence: si la fonction $\varphi(x, y)$ est semi-rationnelle, elle peut être ramenée à *la forme* semi-rationnelle par *une* et *une seule* des substitutions de la forme (12), où μ_1, μ_2, μ_3 sont premiers entre eux et où $2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta' > 0$.

Inversement, si nous formons, comme nous avons vu qu'on peut le faire, d'une infinité de façons, une fraction rationnelle en e^{Y_2} ayant pour coefficients des fonctions Θ *convenablement choisies* de X_2 nous aurons une fonction triplement périodique aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, $(\omega'_2, i\beta'_2)$. Si on l'exprime en x et y, par la substitution inverse de (12), elle se transforme en une fonction méromorphe $\varphi(x, y)$ aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$ et $(\omega', i\beta')$ (car la transformation effectuée sur les périodes était du premier ordre) et qui sera *semi-rationnelle*.

Si nous considérons comme appartenant à une même classe toutes les fractions rationnelles en e^{Y_2} que l'on peut ainsi former et admettant les trois systèmes de périodes indiqués plus haut, on voit que parmi les fonctions $\varphi(x, y)$ semi-rationnelles aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ il y a une *infinité de classes* correspondant à tous les choix possibles de μ_1, μ_2, μ_3 qui sont trois entiers quelconques, premiers entre eux et tels que

$$2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta' > 0.$$

Toutes ces classes sont distinctes, car une même fonction $\varphi(x, y)$ ne peut pas être ramenée par deux substitutions linéaires (12) distinctes, à la forme semi-rationnelle, c'est-à-dire ne peut pas appartenir à la fois à deux des classes que nous venons de définir.

30. Les fonctions semi-rationnelles qui appartiennent à une même classe possèdent des propriétés qui les rapprochent d'une façon remarquable des fonctions abéliennes de deux variables. Il est très-facile de mettre en evidence ces propriétés.

Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ ayant toujours sa partie imaginaire positive, nous pouvons former deux fonctions entières de x, $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ satisfaisant aux identités:

$$
(15) \qquad \begin{cases} \theta_1(x+\omega) = e^{-i\beta}\theta_1(x) \\ \theta_1(x+\omega') = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}x - i\beta'}\theta_1(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_2(x+\omega) = \theta_2(x) \\ \theta_2(x+\omega') = e^{-\frac{2i\pi x}{\omega}}\theta_2(x). \end{cases}
$$

La fonction u de x et y définie par l'égalité

$$
(16) \qquad u = \frac{\theta_1(x)e^y}{\theta_2(x)}
$$

sera une fonction semi-rationelle aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Posons en outre:

$$
(17) \qquad v = \frac{\partial}{\partial x}(\log u), \qquad w = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log u) = \frac{\partial v}{\partial x}.
$$

La fonction v sera une fonction elliptique de la seule variable x, aux périodes ω et ω' et avec deux pôles simples de résidus ± 1 dans un parallélogramme de côtés ω et ω'. Elle sera donc liée à sa dérivée w par une relation de la forme

$$
(18) \qquad w^2 = R(v)
$$

où $R(v)$ est un polynôme du quatrième degré en v, dont le coefficient du terme en v^4 est égal à 1.

Considérons u, v et w comme les coordonnées cartésiennes d'un point d'un espace à trois dimensions. La relation (18) définit un cylindre et si u_1, v_1, w_1 est un *point* de ce cylindre les équations:

$$(19)\qquad \begin{aligned} u(x, y) &= u_1 \\ v(x) &= v_1 \\ w(x) &= w_1 \end{aligned}$$

admettent en x et y les systèmes de solutions suivants: les deux dernières équations ne sont vérifiées que par une valeur de x, soit x_1, et par celles qui s'en déduisent par l'addition de multiples de ω et ω'. En faisant ensuite $x = x_1 + m\omega + n\omega'$ dans la première équation, on obtient facilement pour y des valeurs de la forme:

$$y = y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2\,pi\pi$$

m, n et p étant des entiers quelconques. Les équations (19) n'admettent en (x, y) qu'un seul système de solutions abstraction faite des multiples des périodes conjuguées. D'ailleurs ce système de solutions est donné par les formules suivantes, en appleant u_0, v_0, w_0 un point du cylindre et (x_0, y_0) un système de valeurs correspondant pour x et y, et en supprimant l'indice de u_1, v_1, w_1:

$$(20)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \int_{v_0,\, w_0}^{v,\, w} \frac{dv}{w} \\ y &= y_0 + \int_{u_0,\, v_0,\, w_0}^{u,\, v,\, w} \frac{du}{u} - \frac{vdv}{w}. \end{aligned}$$

Les intégrales précédentes peuvent être considérées comme des intégrales de différentielles totales exactes rationelles en u, v, w attachées à la surface cylindrique (18). La première de ces intégrales est de première espèce; la seconde n'admet que des singularités logarithmiques simples, c'est-à-dire non superposées à des singularités polaires; ou encore, si l'on considère une courbe algébrique quelconque tracée sur la surface du cylindre, la deuxième intégrale est pour cette courbe une intégrale abélienne n'ayant que des singularités logarithmiques simples. On peut facilement voir, mais cela ne nous servira pas dans la suite, que l'intégrale qui donne y a comme courbes logarithmiques: 1° la section $u = 0$ du cylindre avec résidu égal à $+1$; 2° une droite dans le plan de l'infini $\left(\text{celle qui correspond à } \frac{w}{v^2} = 1\right)$ avec résidu égal à -1; 3° une droite dans le plan de l'infini $\left(\text{celle qui correspond à } \frac{w}{v^2} = -1\right)$ avec résidu égal à -3; 4° le point conique à l'infini du cylindre qui peut être considéré comme une courbe logarithmique réduite à un point, tout au moins au point de vue de la représentation paramétrique de la surface.

Nous nous bornons à énoncer ces propriétés que nous n'emploierons pas.

Considérons une fonction semi-rationnelle appartenant à la même classe que u, v et w. Cette fonction $f(x, y)$ pourra être mise sous la forme:

$$f(x, y) = \frac{\sum_{n=1}^{n=p} \varphi_n(x) e^{ny}}{\sum_{m=1}^{m=q} \psi_m(x) e^{my}} \tag{21}$$

où $\varphi_n(x)$ et $\psi_m(x)$ satisferont aux identités:

$$\varphi_n(x + \omega) = e^{-ni\beta} \varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots p)$$
$$\varphi_n(x + \omega') = e^{\frac{-2i\mu\pi x}{\omega} - ni\beta'} \varphi_n(x)$$

où μ est un entier. Les $\psi_m(x)$ satisfont aux mêmes identités, sauf le changement de n en m.

Prenons une fonction entière $X(x)$ satisfaisant à

$$X(x + \omega) = X(x)$$
$$X(x + \omega') = e^{\frac{-2i\mu\pi x}{\omega}} X(x).$$

L'expression

$$\frac{\varphi_n(x) e^{ny}}{u^n X(x)} = \frac{\varphi_n(x) \theta_3^n(x)}{X(x) \theta_1^n(x)}$$

est une fonction elliptique de la seule variable x, aux périodes ω et ω', comme en peut s'en assurer facilement. Elle est donc une fonction rationnelle de v et w. Par suite l'expression $\frac{\varphi_n(x) e^{ny}}{X(x)}$ est une fonction rationnelle de u, v et w. On en conclut immédiatement en divisant dans l'expression (21) tous les coefficients $\varphi_n(x)$, $\psi_m(x)$ de e^y par $X(x)$ que $f(x, y)$ est elle-même une fonction rationnelle de u, v et w. Donc toutes les fonctions semi-rationnelles de la classe considérée sont des fonctions rationnelles de u, v et w, et réciproquement. Si U, V et W désignent trois quelconques de ces fonctions, on voit qu'elles sont liées par une relation algébrique; exceptionnellement elles peuvent être liées par deux relations algébriques. Supposons U, V, W liées par une seule relation algébrique et soit

$$R(U, V, W) = 0 \tag{22}$$

cette relation; nous la considérons comme définissant une surface S qui se déduit du cylindre (18) par une transformation rationnelle: à un point quelconque du cylindre correspond un point de S; à un point de S correspondent un nombre déterminé ν de points du cylindre. Par suite à un système de valeurs de U, V, W non particulier satisfaisant à (22) correspondent ν systèmes de valeurs de x et y aux multiples près des périodes. Si la transformation par laquelle on passe du cylindre à la surface S est bi-rationnelle, alors $\nu = 1$ et les expressions (20) données pour x et y se réduisent, en fonction de (U, V, W) à des intégrales de différentielles totales relatives à la surface S. Enfin, dans ce cas, toutes les fonctions semi-rationnelles de la même classe s'expriment rationnellement en U, V, W et d'ailleurs, toute fonction rationnelle de U, V, W appartient à la classe considérée.

Si l'on compare ces propriétés à celles des fonctions abéliennes, on remarque immédiatement l'analogie qui ressort de ce rapprochement avec les dégénérescences des fonctions elliptiques en fonctions trigonométriques et avec la dégénérescence correspondante de l'intégrale de première espèce en une intégrale à points singuliers logarithmiques simples.

L'analogie se trouve encore plus complète par le théorème que nous démontrons plus loin et dont nous allons donner l'énoncé.

Remarquons que entre une fonction $f(x, y)$ semi-rationnelle aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ et ses dérivées du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ il existe nécessairement une relation algébrique, puisque ces trois fonctions appartiennent manifestement à une même classe.

Il est naturel de se demander si cette propriété est pour les fonctions méromorphes triplement périodiques aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ caractéristique des fonctions semi-rationnelles, comme pour les fonctions méromorphes d'une variable *simplement* périodiques, la propriété analogue est caractéristique des fonctions trigonometriques. La réponse est affirmative et la fin de ce Mémoire est consacrée à la démonstration du théorème suivant:

Si une fonction méromorphe, $f(x, y)$ admet les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ et n'en admet *aucun autre* distinct des précédents, si, de plus, cette fonction $f(x, y)$ est liée à ses dérivées partielles du premier ordre par une relation algébrique, on peut en conclure que $f(x, y)$ est semi-rationnelle, c'est-à-dire que, en remplaçant les variables x est y à l'aide d'une substitution linéaire convenablement choisie de la forme (12) par des variables X et Y, $f(x, y)$ sera une fonction rationnelle de e^Y.

31. Soit donc $f(x, y)$ une fonction méromorphe de x et y admettant les trois systèmes de périodes non exceptionnels $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$; on suppose que la fonction $f(x, y)$ est liée à ses deux dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ par une relation algébrique:

$$F\left[f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = 0. \tag{1}$$

où F est un polynôme entier en $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{dy}$. On suppose bien entendu cette relation irréductible.

Nous poserons pour abréger l'écriture

$$z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

La relation (1) s'écrira donc:

$$F(z, p, q) = 0. \tag{2}$$

Dans ce qui suit nous utiliserons pour simplifier les raisonnements et le langage les résultats connus de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre ainsi que les expressions usitées dans cette théorie telles que: surface intégrale, caractéristiques, élément (x, y, z, p, q) d'une intégrale etc.

Nous pourrons supposer que la fonction $z = f(x, y)$ ne satisfait pas à une équation de même forme que (2) et de degré total moindre en z, p et q. Car sans cela nous remplacerions l'équation (2) par l'équation de degré moindre.

Il résulte de cette hypothèse que $z = f(x, y)$ n'est pas une intégrale singulière de l'équation (2); car sans cela elle satisferait à chacune des équations $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$ de degré moindre que $F = 0$, et dont l'une au moins n'est pas une identité si z ne se réduit pas à une constante.

L'intégrale considérée n'étant pas singulière, si x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 est un *élément* de l'intégrale pour lequel tous les dénominateurs des équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{-dp}{p\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dq}{q\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{3}$$

ne sont pas nuls, toute la caractéristique issue de cet élément initial appartiendra à l'intégrale.

Nous allons étudier tout d'abord un cas particulier afin d'en débarrasser la démonstration qui suivra pour le cas général.

Nous supposons que l'intégrale $z=f(x, y)$ satisfait à l'équation

$$(4) \qquad p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}=0$$

en même temps qu'à l'équation (2).

Si $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ est un élément de l'intégrale pour lequel tous les dénominateurs de (3) ne sont pas nuls et pour lequel en outre p_0 et q_0 ne sont pas tous les deux nuls, on aura pour la caractéristique correspondante:

$$(5) \qquad \frac{p}{p_0}=\frac{q}{q_0}$$

(même si $\frac{\partial F}{\partial z}$ était nulle identiquement).

En outre pour la caractéristique considérée, on a

$$z=z_0.$$

Puis, en combinant (4) et (5) on aura

$$(6) \qquad p_0\frac{\partial F}{\partial p}+q_0\frac{\partial F}{\partial q}=0;$$

les deux premiers rapports de (3) donnent alors:

$$p_0dx+q_0dy=0$$

d'où enfin

$$(7) \qquad p_0x+q_0y=p_0x_0+q_0y_0.$$

Comme la caractéristique définie par les équations précédentes appartient à l'intégrale $z=f(x, y)$, on voit que l'équation

$$(8) \qquad z_0=f(x, y)$$

est vérifiée comme conséquence de l'équation (7).

Mais il est impossible que (8) soit vérifiée, comme nous l'avons vu, pour une valeur constante de y, quelle que soit x (paragraphe 9); donc p_0 dans l'équation (7) est différent de zéro. De l'existence nécessaire des augments conjugués pour une branche principale on conclut alors, en écrivant d'abord l'équation (7) sous la forme,

$$(9) \qquad x=-\frac{q_0}{p_0}y+\frac{p_0x_0+q_0y_0}{p_0}$$

que $-\frac{q_0}{p_0}$ est de la forme

$$-\frac{q_0}{p_0}=\frac{m\omega+n\omega'}{i(m\beta+n\beta'+2p\pi)}$$

m, n et p étant trois entiers premiers entre eux. Comme l'élément $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ est un élément quelconque de l'intégrale $z=f(x, y)$, on en conclut que le rapport $\frac{q}{p}$ est constant et égal à $\frac{m\omega+n\omega'}{i(m\beta+n\beta'+2p\pi)}$ et par suite que $f(x, y)$ n'est fonction que de $x-\frac{m\omega+n\omega'}{i(m\beta+n\beta'+2p\pi)}y$.

Si l'on effectue la substitution linéaire

$$X=x-\frac{m\omega+n\omega'}{i(m\beta+n\beta'+2p\pi)}y$$

$$Y=\frac{2\pi}{m\beta+n\beta'+2p\pi}y$$

on voit, en raisonnant comme au paragraphe 29 que $f(x, y)$ se réduit à une fonction elliptique de la seule variable X; elle est donc bien une fonction semi-rationnelle, (mais qui ne dépend pas de e^Y).

32. Si nous revenons au cas général nous supposons que l'équation

$$p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}=0$$

n'est pas vérifiée par la fonction $z=f(x, y)$. Nous supposerons en outre que pour cette fonction le rapport $\frac{p}{q}$ n'est pas constant, sans quoi on retomberait encore sur la conclusion précédente.

En remplaçant dans $p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}$, z, p et q par leurs expressions $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en x et y, on aura une identité de la forme

$$p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}=\psi(x, y)$$

où $\psi(x, y)$ sera une fonction méromorphe, bien déterminée, aux trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$, non nulle identiquement.

D'une façon analogue posons:

$$\frac{p}{q} = \varphi(x, y)$$

et considérons le système des deux équations:

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = u \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

où u est une valeur donnée arbitrairement. Les fonctions $\varphi(x, y) - u$ et $\psi(x, y)$ ne peuvent admettre en facteur commun une fonction entière de x et y, $g(x, y)$ dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ que pour un nombre limité de valeurs exceptionnelles de u, puisque le numérateur de la fonction méromorphe $\psi(x, y)$ n'a qu'un nombre limité de *facteurs irréductibles relativement à ces périodes* (paragraphe 20). Le nombre de ces valeurs exceptionnelles de u, est au plus égal au nombre des facteurs *irréductibles* de $\psi(x, y)$. D'ailleurs $\varphi(x, y) - u$ et $\psi(x, y)$ admettant les trois systèmes de périodes, ne peuvent avoir de facteur commun sans avoir un facteur commun tel que $g(x, y)$.

De la même façon $\varphi(x, y) - u$ ne peut avoir de facteur commun avec l'une des fonctions $\frac{1}{z}$, q, ou $\frac{1}{q}$ que pour un nombre limité de valeurs exceptionnelles de u. A supposer qu'il existe quelques valeurs exceptionnelles de cette nature, nous désignerons par E_2 leur ensemble, en y comprenant celles qui sont relatives à $\psi(x, y)$ et $\varphi(x, y) - u$. Ceci posé, attribuons à u une valeur n'appartenant pas à l'ensemble E_2 et désignons par M_1 une *multiplicité simple de zéros* de la fonction $\varphi(x, y) - u$. Nous appelons *multiplicité simple de zéros*, une multiplicité formant un seul *continuum analytique* (de telle sorte que l'on peut passer de l'un quelconque de ses zéros à un autre par continuation analytique). Il y a au moins *une* telle multiplicité puisque $\frac{p}{q} = \varphi(x, y)$ n'est pas une constante par hypothèse (paragraphe 10).

La valeur u n'appartenant pas à E_2, la multiplicité M_1 ne peut appartenir aux zéros d'aucune des fonctions $\psi(x, y)$, $\frac{1}{z}$, q, ou $\frac{1}{q}$. On peut donc prendre sur la multiplicité M_1 un point (x_1, y_1) pour lequel $q_1 = \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y_1}$ sera fini et différent de zéro; pour lequel $z_1 = f(x_1, y_1)$ sera fini; pour lequel $p_1 = u q_1$ sera fini; et enfin pour lequel $\psi(x_1, y_1) \neq 0$. Nous avons ainsi un élément $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ de l'intégrale $z = f(x, y)$, composé de valeurs finies et tel que

$$p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + q_1 \frac{\partial F}{\partial q_1} \neq 0 \quad \text{et} \quad q_1 \neq 0.$$

En outre on peut supposer que (x_1, y_1) n'est un point d'indétermination pour aucune des fonctions z, p, q, de telle sorte que z_1, p_1, q_1, sont définis sans ambiguité.

L'élément $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ est l'élément initial d'une caractéristique bien déterminée par les équations (3) où z peut être prise comme variable indépendante puisque le dénominateur de dz a une valeur initiale non nulle.

Les deux derniers rapports des équations (3) donnent:

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = u. \tag{11}$$

L'équation $F(z, p, q) = 0$ donne ensuite q en fonction de z:

$$F(z, uq, q) = 0. \tag{12}$$

Les trois premiers rapports des équations (3) où l'on remplace p par uq donnent alors:

$$dx = P(z, q, u)dz$$
$$dy = Q(z, q, u)dz$$

où P et Q sont des fractions rationnelles en z, q et u. u est ici une constante et z et q sont liées par la relation algébrique (12). Donc x et y sont données par des intégrales abéliennes attachées à la *courbe* (12), intégrales qui sont prises à partir du *point* (z_1, q_1). Soit donc:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} P(z, q, u)\,dz \\ y &= y_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} Q(z, q, u)\,dz. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Les deux intégrales abéliennes de ces formules sont attachées à la relation (12). Mais il peut se faire que cette *courbe* se décompose, même pour une valeur non particulière de u. Tout d'abord, si elle renferme en facteur une certaine puissance de q, nous supprimerons ce facteur, car la valeur initiale q_1 est différente de zéro. Soit n le nombre des facteurs entiers irréductibles en lesquels se décompose alors la relation (12) pour une valeur non particulière de u et soit:

$$R_1(z, q)\, R_2(z, q) \ldots\ldots R\ (z\ q) = 0$$

cette décomposition où les R sont des polynômes entiers en z et q. On suppose bien entendu que $F(z, p, q) = 0$ est une relation algébrique irréductible. Dès lors les facteurs $R_1, R_2, \ldots R_n$ sont distincts si u est quelconque. De plus un quelconque de ces facteurs peut s'échanger en l'un quelconque des autres facteurs (à un facteur constant près) lorsque u varie en décrivant un circuit fermé convenablement choisi. Pour le montrer, prenons un système de valeurs (z', q') annulant le seul facteur R_1 et un système de valeurs (z'', q'') annulant le seul facteur R_2. Si l'on pose $p' = uq'$, $p'' = uq''$ les deux systèmes de valeurs (z', p', q') et (z'', p'', q'') vérifient la relation $F(z, p, q) = 0$. Comme cette relation est irréductible on peut imaginer que le *point* (z, p, q) décrit une ligne joignant sur la surface $F(z, p, q) = 0$ le point (z', p', q') au point (z'', p'', q'') sans que q s'annule dans cette variation. La variable $u = \frac{p}{q}$ décrira un circuit fermé puisque $\frac{p'}{q'} = \frac{p''}{q''}$ et il est clair que le facteur R_1 sera devenu le facteur R_2 (à un facteur constant près).

Les n facteurs R pouvant ainsi s'échanger entre eux nous pourrons les prendre sous la forme:

$$R_k(z, q) = R(z, q, u, \gamma_k) \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

où γ_k est l'une des déterminations d'une fonction algébrique de u, convenablement choisie, et admettant n déterminations permutables entre elles et où R est un polynôme entier en z, q, u, γ_k.

Pour certaines valeurs particulières de u, il pourrait arriver que deux des n facteurs précédents soient proportionnels ou encore que l'un d'eux soit décomposable. Ces valeurs exceptionnelles de u sont évidemment en nombre fini: nous les ajouterons à l'ensemble E_2 et nous appellerons E_3 l'ensemble résultant. Nous supposons actuellement que u n'appartient pas à l'ensemble E_3.

Dans les formules (13) les intégrales sont attachées à celle des courbes

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0$$

qui contient le *point* initial z_1, q_1 et il n'y a qu'une seule de ces courbes qui contient ce point. Car, sans cela, le point (z_1, q_1) serait un point double pour la courbe totale (12) et par suite on aurait:

$$\frac{\partial}{\partial q}[F(z_1, uq_1, q_1)] = 0$$

ou en remarquant que $uq_1 = p_1$:

$$p_1 \frac{\partial F(z_1, p_1, q_1)}{\partial p_1} + q_1 \frac{\partial F(z_1, p_1, q_1)}{\partial q_1} = 0.$$

Or cette égalité n'a pas lieu, d'après le choix du point (x_1, y_1) sur M_1.

Nous supposerons pour fixer les idées que c'est à la courbe $k = 1$ que se rapportent les intégrales des formules (13).

La caractéristique définie par les formules données ci-dessus et issue de l'élément $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ appartient tout entière à l'intégrale $z = f(x, y)$. Donc on aura pour tous les éléments de cette caractéristique:

$$(14) \qquad \frac{p}{q} = \varphi(x, y) = u, \quad z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Les valeurs de x et y fournies par les équations (13) vérifient donc la relation $\varphi(x, y) - u = 0$. Donc les formules (13) donnent les expressions d'un point (x, y) de la multiplicité M_1 sous forme d'intégrales abéliennes; on peut dire que ce sont les équations de la multiplicité M_1. Comme M_1 est l'une quelconque des *multiplicités simples de zéros* de $\varphi(x, y) - u$, on voit que toutes ces multiplicités sont données par des intégrales abéliennes attachées à l'une des courbes $R = 0$, avec un système de valeurs initiales convenablement choisies pour x, y, z, q.

Il existe une fonction entière de x et y, $g_1(x, y)$ admettant pour zéros tous les points de M_1 et *n'admettant pas d'autres zéros*. Cela résulte immédiatement des théorèmes généraux, en remarquant que l'on sait que M_1 appartient déjà, comme multiplicité de zéros, à une fonction entière de x et y, à savoir au numérateur de la fonction méromorphe $\varphi(x, y) - u$.

Si nous considérons les différentes fonctions entières $g_1(x + m\omega + n\omega', y + mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi)$ obtenues en donnant à m, n et p toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles, chacune de ces fonctions admet comme zéros une seule multiplicité simple qui se déduit de M_1 par la *translation* $(m\omega + n\omega', mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi)$ dans l'hyperespace à quatre dimensions représentatif des variables x et y. Les multiplicités obtenues par ces translations peuvent être ou bien distinctes de M_1, ou bien confondues avec M_1. Nous considérerons toutes celles qui sont *distinctes entre elles*, en ne prenant qu'une fois chacune d'elles; nous avons ainsi un nombre de multiplicités qui pourra être infini, ou bien fini ou même égal à 1: nous ne pouvons rien affirmer à cet égard. Toutes ces multiplicités distinctes font évidemment partie des zéros de la fonction $\varphi(x, y) - u$ et par conséquent, nous pouvons former une fonction entière $G_1(x, y)$ admettant pour zéros toutes ces multiplicités distinctes et pas d'autres zéros. Les zéros de $G_1(x, y)$ admettent évidemment les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. De plus $G_1(x, y)$ est *irréductible relativement à ces trois systèmes de périodes*, d'après la façon même dont on l'a formée.

33. La considération de cette fonction entière $G_1(x, y)$ va nous permettre de démontrer que les intégrales des équations (13) ne peuvent pas admettre de modules de périodicité qui ne soient pas des constantes *indépendantes de u.*

Soient en effet a et b un système de modules de périodicité conjugués pour les deux intégrales des équations (13), a étant relatif à x et b à y. Si u a une valeur non particulière a et b seront, au moins dans un certain domaine de la valeur considérée pour u, des fonctions analytiques régulières de u, (ou des constantes).

Si le point (x, y) de la courbe

$$R(z, q, u, \gamma_1) = 0$$

décrit à partir du point (z_1, q_1) un cycle correspondant aux périodes (a, b), l'élément (x, y, z, p, q) de la caractéristique part de l'élément initial $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ pour aboutir à l'élément final $(x_1 + a, y_1 + b, z_1, p_1, q_1)$ et comme ce dernier élément doit appartenir à l'intégrale $z = f(x, y)$, on aura:

$$f(x_1 + a, y_1 + b) = f(x_1, y_1) = z_1 \tag{15}$$

$$\frac{\partial f(x_1 + a, y_1 + b)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x} = p_1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial f(x_1 + a, y_1 + b)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y} = q_1. \tag{17}$$

Le système de valeurs (x_1, y_1) a été choisi de façon à satisfaire à:

$$\varphi(x_1, y_1) = u. \tag{18}$$

Supposons que nous laissions y_1 constant et que nous fassions varier u; x_1 est alors fonction de u, et par suite aussi a et b. Dérivons la relation (15) par rapport à u en tenant compte de (16) et (17); il vient toutes réductions faites

$$p_1 da + q_1 db = 0$$

ou bien comme $p_1 = uq_1$ et $q_1 \neq 0$

$$da + u db = 0. \tag{19}$$

D'autre part (a, b) est un système de périodes pour les zéros de la fonction $G_1(x, y)$. Donc les zéros de $G_1(x, y)$ admettent chacun des quatre systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$, (a, b). Désignons par $\mu_{1,2}$, $\mu_{1,3}$, $\mu_{2,3}$, $\mu_{1,4}$,

$\mu_{2,4}$, $\mu_{3,4}$ les six entiers caractéristiques relatifs à ces quatre systèmes pris deux à deux pour $G_1(x, y)$.

Nous aurons alors, que ces systèmes soient distincts ou non, la relation indiquée paragraphe 2, et qui, dans les notations actuelles prend la forme suivante:

$$a(\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi)i + b(\mu_{1,2}\omega' - \mu_{1,3}\omega) + \mu_{1,4}(\omega\beta' - \omega'\beta)i + \\ + 2i\pi\mu_{2,4}\omega' + 2i\pi\mu_{3,4}\omega = 0.$$

Comme les entiers ne peuvent être fonctions de u, on aura:

$$da(\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi)i + db(\mu_{1,2}\omega' - \mu_{1,3}\omega) = 0.$$

Or la quantité $\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi$ est nécessairement différente de zéro, puisque la fonction $G_1(x, y)$ s'annule; en comparant cette relation à (19) on voit que si da et db n'étaient pas nuls tous deux, on aurait

$$u(\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi)i - (\mu_{1,2}\omega' - \mu_{3,1}\omega) = 0$$

et cette relation est impossible puisque u a une valeur quelconque. On a donc nécessairement $da = 0$, $db = 0$; a et b sont des constantes indépendantes de u.

Ceci posé, la relation (15) doit être en x_1 et y_1 une identité; car sans cela elle établirait une relation entre x_1 et y_1, qui ne sont assujettis qu'à vérifier la relation (18) où u est arbitraire. Donc (a, b) est un système de périodes de $f(x, y)$; si *nous supposons que $f(x, y)$ n'a pas d'autres systèmes de périodes* que ceux qui sont des sommes de multiples conjugués de $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ on voit que a et b sont de la forme:

$$a = m\omega + n\omega'$$
$$b = mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi.$$

En particulier, si l'on considère un point singulier logarithmique des intégrales des formules (13) les résidus en ce point seront de la forme $\frac{m'\omega + n'\omega'}{2i\pi}$ pour la première intégrale et $\frac{m'\beta + n'\beta' + 2p'\pi}{2\pi}$ pour la seconde. Les trois entiers m', n' et p' sont ainsi définis d'une façon unique pour chaque point logarithmique, car on ne pourrait, sans modifier la valeur d'une au moins des deux fractions précédentes, modifier les valeurs des entiers m', n' et p'.

34. Des deux intégrales des formules (13) celle dont la nature des points singuliers est le plus facile à discuter, est celle qui est relative à y. En se reportant à la Note II de la fin de ce Mémoire, on trouvera la démonstration de ce fait que l'intégrale qui donne la valeur de y ne peut avoir que des singularités logarithmiques simples. On peut affirmer qu'elle possède effectivement quelque point singulier logarithmique; car ses modules de périodicité sont purement imaginaires, elle ne peut donc pas être de première espèce; elle ne peut non plus se réduire à une constante, car on ne peut pas avoir pour tous les points de M_1, $y = \text{const.}$ (paragraphe 9). Cela résulte aussi, d'ailleurs, d'une relation entre les résidus de cette intégrale et les entiers $\mu_{1,2}$, $\mu_{3,2}$, $\mu_{3,1}$ déjà considérés et relatifs à $G_1(x, y)$; tous les résidus de l'intégrale considérée sont réels; *la somme de tous les résidus de même signe* est égale à $\pm \frac{1}{2\pi}(\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi)$; nous supposons toujours que u n'a pas une valeur exceptionnelle).

En effet, l'intégrale $\int Q(z, q, u)\,dz$ n'ayant que des modules de périodicité de la forme $mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi$, sa partie réelle est une fonction uniforme sur la surface de Riemann (Σ) relative à la courbe

$$R(z, q, u, \gamma_1) = 0.$$

Cette partie réelle ne devient infinie qu'aux points singuliers logarithmiques de l'intégrale; elle est infinie positive aux points logarithmiques de résidu négatif, et inversement. Désignons par A_s l'un quelconque des points logarithmiques à résidu négatif et sur la surface de Riemann Σ (supposée fermée) entourons chaque point A_s d'un très-petit contour c_s et appelons Σ' la surface Σ dont on a retranché toutes les petites portions intérieures aux contours c_s. Sur la surface Σ' la partie réelle de

$$y_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} Q(z, q, u)\,dz$$

sera inférieure à un nombre réel K choisi assez grand; si donc on pose:

$$y = \alpha + i\alpha'$$

où α et α' sont les parties réelle et imaginaire de y, aux valeurs de y pour lesquelles:

$$\alpha > K$$

ne pourront correspondre, dans la formule (13), que des points de la surface Σ intérieurs à l'un des contours c_s.

Choisissons pour un point (z, q) intérieur à c_s l'une des déterminations possibles de

$$y = y_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} Q(z, q, u)\, dz$$

et exprimons z et q pour la portion *très-petite* c_s de Σ, comme fonctions régulières d'un paramètre très-petit t, (de façon, bien entendu, qu'à un point de c_s ne corresponde qu'une valeur de t).

Dans ces conditions, y est une fonction de t, définie aux multiples près de la période polaire purement imaginaire relative à A_s; si K_s désigne un nombre positif *assez grand* supérieur à K, à une valeur de y pour laquelle $\alpha > K_s$ correspondra une seule valeur de t, et par suite une seule valeur de x par la formule

$$x = x_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} P(z, q, u)\, dz$$

où l'intégrale a la valeur conjuguée de celle de y; remarquons que l'intégrale qui donne x n'a pas d'autres points singuliers que ceux de l'intégrale relative à y; car sur M_1 x ne peut pas devenir infinie sans que y le devienne (paragraphe 9).

Nous avons ainsi défini x comme une fonction uniforme de y pour $\alpha > K_s$; et comme sur la multiplicité M_1, x considérée comme fonction de y n'a pas d'autres points singuliers que des points de ramification, on voit que x sera une une fonction régulière de y dans la portion du plan de y défini par $\alpha > K_s$; soit

$$x = X_s(y)$$

la fonction ainsi définie.

Appelons

$$\frac{-(m_s\omega + n_s\omega')}{2i\pi} \quad \text{et} \quad \frac{-(m_s\beta + n_s\beta' + 2p_s\pi)}{2\pi}$$

les deux résidus en A_s des deux intégrales précédentes.

On a

$$m_s\beta + n_s\beta' + 2p_s\pi > 0$$

puisque le résidu est négatif pour l'intégrale relative à y. Si le point t fait, dans son plan représentatif, le tour de l'origine dans le sens indirect x et y augmentent respectivement de $(m_s\omega + n_s\omega')$, $(im_s\beta + in_s\beta' + 2ip_s\pi)$. Donc on a

$$x + m_s\omega + n_s\omega' = X_s(y + m_s i\beta + n_s i\beta' + 2p_s i\pi).$$

Cherchons tous les entiers m, n, p, pour lesquels on a, en supposant toujours $\alpha > K_s$:

$$x + m\omega + n\omega' = X_s(y + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi).$$

Comme z et q sont des fonctions uniformes de x et y aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ (formules 14), si y augmente de $(mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi)$ et x de $(m\omega + n\omega')$ le point (z, q) décrit un contour fermé qui, dans le cas actuel, est tout entier dans c_s, puisque α reste supérieure à K_s. Or dans c_s les intégrales précédentes n'admettent qu'un seul système de modules conjugués $(m_s\omega + n_s\omega')$, $(m_s i\beta + n_s i\beta' + 2p_s i\pi)$ et par conséquent on doit avoir λ étant un entier

$$m\omega + n\omega' = \lambda(m_s\omega + n_s\omega')$$

$$mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi = \lambda(m_s i\beta + n_s i\beta' + 2p_s i\pi)$$

ce qui montre que les augments conjugés pour la branche principale

$$x = X_s(y)$$

sont $m_s\omega + n_s\omega'$ et $i(m_s\beta + n_s\beta' + 2p_s\pi)$.

Si il y a en tout h points A_s, en faisant $s = 1, 2, \ldots h$ nous aurons mis en évidence h branches principales; si K' désigne le plus grand des nombres K_s, nous aurons ainsi pour $\alpha > K'$ h branches principales pour les zéros de $G_1(x, y)$.

Montrons que ces h branches sont distinctes pour les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ et qu'il n'y en a pas d'autre.

Si, en effet, deux des h branches n'étaient pas distinctes, on passerait de l'une à l'autre par l'addition à x et y de multiples des périodes; mais comme z et q sont des fonctions uniformes de x et y admettant ces périodes, les points (z, q) correspondant sur la surface de Riemann aux deux branches principales seraient les mêmes: cela est absurde puisque les deux branches correspondent à deux des contours c_s différents.

Si maintenant (x, y) est un zéro quelconque de $G_1(x, y)$ pour lequel la partie réelle de y est supérieure à K', il y a un zéro homologue $(x + m\omega + n\omega'$, $y + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi)$ situé sur M_1 et pour lequel on a aussi $\alpha > K'$. A ce zéro correspond donc un point (z, q) intérieur à l'un des contours c_s et, par conséquent le zéro considéré aura bien un certain homologue sur la branche principale correspondante. Il n'y a donc pas d'autre branche principale que les h branches trouvées plus haut.

Enfin, il est bien évident que chaque branche principale ne doit être comptée qu'une fois, d'après la façon même dont on a formé $G_1(x, y)$.

Nous pouvons alors appliquer les formules obtenues au paragraphe (21). Elles donnent, si $\frac{\omega'}{\omega}$ a sa partie imaginaire positive

$$(20)\qquad \begin{cases} \mu_{2,3} = \sum_{s=1}^{s=h} p_s \\ \mu_{3,1} = \sum_{s=1}^{s=h} m_s \\ \mu_{1,2} = \sum_{s=1}^{s=h} n_s . \end{cases}$$

On voit d'après cela que la somme des résidus négatifs de l'intégrale $\int Q(z, q, u)dz$, qui est la somme des h quantités $-\frac{m_s\beta + n_s\beta' + 2p_s\pi}{2\pi}$ est égale à $-\frac{\mu_{3,1}\beta + \mu_{1,2}\beta' + 2\mu_{2,3}\pi}{2\pi}$.

35. Revenons maintenant à la décomposition de $\varphi(x, y) - u$ en ses facteurs irréductibles quant aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Nous avons mis en évidence un premier facteur $G_1(x, y)$. Supposons que le quotient $\frac{\varphi(x, y) - u}{G_1(x, y)}$ admette encore des zéros. En prenant l'un de ces zéros (x_2, y_2) arbitrairement mais sous les mêmes restrictions que pour (x_1, y_1) nous aurons les équations d'une multiplicité M_2 sous la forme

$$x = x_2 + \int_{z_2, q_2}^{z, q} P(z, q, u)dz$$

$$y = y_2 + \int_{z_2, q_2}^{z, q} Q(z, q, u)dz$$

où les intégrales sont attachées à *l'une* des courbes

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0$$

à savoir, à la courbe sur laquelle est situé le point (z_2, q_2). Or nous avons vu que les modules de périodicité et en particulier les résidus des intégrales $\int P(z, q, u)dz$ et $\int Q(z, q, u)dz$ sont indépendants de u. On peut, comme nous l'avons vu, faire décrire à la variable u un cycle choisi de telle sorte que la courbe $R(z, q, u, \gamma_1) = 0$ se change en l'une quelconque des courbes $R(z, q, u, \gamma_k) = 0$. Donc les divers résidus des deux intégrales sont les mêmes, quelle que soit celle des courbes à laquelle elles sont attachées (u ayant toujours une valeur non particulière).

Donc si avec M_2 nous formons une fonction entière $G_2(x, y)$, comme $G_1(x, y)$ a été formée avec M_1, les entiers caractéristiques de $G_2(x, y)$ seront les mêmes que ceux de $G_1(x, y)$, d'après les formules (20).

En poursuivant la décomposition de $\varphi(x, y) - u$ on ne pourra obtenir qu'un nombre limité de *facteurs irréductibles* tels que $G_1(x, y)$; soit ϱ ce nombre. D'autre part, appelons $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$, les trois entiers caractéristiques pour la fonction triplement périodique $\varphi(x, y)$ aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Imaginons $\varphi(x, y)$ écrite sous la forme du quotient de deux fonctions entières, $H_1(x, y)$ et $H_2(x, y)$ *sans facteur commun*. $H_1(x, y)$ admet les entiers caractéristique $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, et $m_{3,1}$ et *ses facteurs premiers relativement à* $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ sont les ϱ fonctions $G_1(x, y)$, $G_2(x, y)$, ... $G_\varrho(x, y)$. Il en résulte que:

$$m_{1,2} = \varrho\mu_{1,2}, \quad m_{2,3} = \varrho\mu_{2,3}, \quad m_{3,1} = \varrho\mu_{3,1}. \tag{21}$$

D'après cela ϱ ne peut être qu'un diviseur commun à $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$.

Il est facile de montrer que ϱ est un multiple de n (en désignant toujours par n le nombre des courbes $R(z, q, u, \gamma_k) = 0$).

Reportons nous à la relation (18):

$$\varphi(x_1, y_1) = u$$

avec

$$R(z_1, q_1, u, \gamma_1) = 0.$$

Laissons y_1 constant et faisons décrire à u un cycle fermé ayant pour effet de changer γ_1 en γ_2; appelons x'_1 la valeur finale de x_1 et z'_1, q'_1 les valeurs correspondantes de z et q.

Il est clair que l'on aura:

$$R(z'_1, q'_1, u, \gamma_2) = 0$$

et que par conséquent (x'_1, y_1) sera un zéro de $\varphi(x, y) - u$ appartenant à une multiplicité simple relative à $R(z'_1, q'_1, u, \gamma_2) = 0$.

Il est bien facile d'en conclure qu'à chaque facteur $G_1(x, y)$ relatif à $R(z, q, u, \gamma_1) = 0$ correspond un facteur analogue relatif à $R(z, q, u, \gamma_2) = 0$ et inversement. Par suite, parmi les ϱ facteurs de décomposition de $\varphi(x, y) - u$ il y en a le même nombre relativement à chacune des n courbes $R(z, q, u, \gamma_k) = 0$.

On peut par suite poser:

$$\varrho = n\varrho'$$

ϱ' étant un entier positif.

36. A l'aide des résultats obtenus, il est facile de résoudre la question suivante:

Étant données les deux équations:

$$(22)\qquad \begin{cases} f(x, y) = \zeta \\ \varphi(x, y) = u \end{cases}$$

où ζ et u ont des valeurs données *quelconques*, combien y a-t-il de systèmes de valeurs *distincts* de x et de y qui vérifient ces deux équations? On considère ici, comme *non distincts* des systèmes de valeurs de x et de y ne différant que par des multiples conjugués des périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$.

De plus, il n'est question que des systèmes de valeurs de x et y qui dépendent de ζ et u, en d'autres termes nous excluons les points d'indétermination de $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$.

Il s'agit donc, d'après ce qui précède, de trouver toutes les solutions de l'un ou de l'autre des ϱ systèmes d'équations:

$$(23)\qquad \begin{cases} f(x, y) = \zeta \\ G_k(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots \varrho)$$

Soit M_k la *multiplicité simple de zéros* qui a servi à former $G_k(x, y)$. Tout zéro de $G_k(x, y)$ a un *homologue* sur M_k. Il suffit donc de chercher les points de M_k, pour lesquels on a:

$$f(x, y) = \zeta.$$

Substituons pour cela dans $f(x, y)$ les expressions d'un point de la multiplicité M_k, expressions qui sont de la forme:

$$(24)\qquad \begin{cases} x = x_k + \displaystyle\int_{z_k, q_k}^{z, q} P(z, q, u)\, dz \\ y = y_k + \displaystyle\int_{z_k, q_k}^{z, q} Q(z, q, u)\, dz. \end{cases}$$

Comme la caractéristique que définissent ces formules est tout entière sur la surface $z = f(x, y)$, les expressions précédentes de x et y substituées dans $f(x, y)$, donneront identiquement:

$$f(x, y) = z$$

Donc pour que les formules (24) donnent un point de M_k vérifiant

$$f(x, y) = \zeta$$

il faut et il suffit que, dans ces formules, $z = \zeta$.

Soit ν le degré commun par rapport à q des différentes courbes $R(z, q, u, \gamma_k) = 0$. Pour chacune de ces courbes il y a donc ν points pour lesquels $z = \zeta$. Soient $(\zeta, q_k^{(l)})$ (avec $l = 1, 2, \ldots \nu$), les ν points qui se rapportent à la courbe à laquelle se rapporte M_k; ils seront distincts puisque ζ a une valeur *quelconque*. Les ν points (x, y) correspondants seront aussi *distincts* car l'on a toujours dans les formules (24): $q = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$; deux points (x, y) homologues donneraient la même valeur de q. En donnant à k successivement les ϱ valeurs $1, 2, \ldots \varrho$ on aura donc $\nu\varrho$ systèmes de valeurs distincts comme solutions des équations (22). Ces $\nu\varrho$ systèmes de valeurs sont bien distincts: car si deux systèmes de valeurs proviennent d'une même multiplicité M_k nous avons vu qu'ils sont distincts; si ils proviennent de deux multiplicités différentes M_k, M_s relatives par conséquent à deux facteurs différents $G_k(x, y)$ et $G_s(x, y)$, si pour une valeur quelconque de ζ ils étaient homologues, c'est que les deux multiplicités M_k, M_s seraient ellesmêmes homologues, comme on le voit en laissant u constant et en faisant varier ζ de façon quelconque. Par suite les facteurs $G_k(x, y)$ et $G_s(x, y)$ auraient les mêmes zéros, ou en d'autres termes $\varphi(x, y) - u$ aurait un facteur double. Mais comme $\varphi(x, y)$ n'est pas une constante et admet les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ elle renferme nécessairement la variable x d'une façon effective (paragraphe 2) c'est-à-dire que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ n'est pas nulle identiquement. Or $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ n'admet qu'un nombre limité de facteurs tels que $G_k(x, y)$, donc la circonstance d'un facteur double dans $\varphi(x, y) - u$ ne peut se produire que pour un nombre limité de valeurs de u. Parmi les $\nu\varrho$ points $(\zeta, q_k^{(l)})$ obtenus précédemment, on voit facilement combien il y en a de distincts. Sur chacune des n courbes $R(z, q, u, \gamma) = 0$, il y en a ν distincts: donc, en tout, il y a $n\nu$ points distincts parmi les $\nu\varrho$ points $(\zeta, q_k^{(l)})$. Nous avons posé plus haut: $\varrho = n\varrho'$; ϱ' désigne le nombre de facteurs $G_k(x, y)$ qui se rapportent à une même courbe. Donc chacun des $n\nu$ points distincts figure ϱ' fois parmi les points $(\zeta, q_k^{(l)})$; en d'autres termes à chacun des $n\nu$ points distincts correspondent ϱ' systèmes de valeurs distinctes pour x et y. Nous emploierons, en conséquence, les notations suivantes: chacun des $n\nu$ points distincts sera désigné par (ζ, q_t) $(t = 1, 2, \ldots n\nu)$ et les ϱ' points (x, y) correspondants seront désignés par $(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})$ où $r = 1, 2, \ldots \varrho'$.

On aura d'après cela:

$$q_t = \frac{\partial f(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})}{\partial y} \qquad (r = 1, 2, \ldots \varrho'; \; t = 1, 2, \ldots n\nu) \tag{25}$$

en posant

$$\frac{p_t}{q_t} = u$$

on aura:

$$p_t = \frac{\partial f(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})}{\partial x} \qquad (r = 1, 2, \ldots \varrho') \tag{26}$$

(puisque $\varphi(x_t^{(r)}, y_t^{(r)}) = u$).

Si l'on considère deux systèmes de valeurs $(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})$ et $(x_t^{(r')}, y_t^{(r')})$ de même indice inférieur et d'indices supérieurs différents, comme ils se rapportent au même point (ζ, q_t) ils se rapportent à la même courbe $R = 0$. Il résulte alors immédiatement des expressions de $x_t^{(r)}$, $y_t^{(r)}$, $x_t^{(r')}$, $y_t^{(r')}$ sous la forme (24) que les différences $x_t^{(r)} - x_t^{(r')}$ et $y_t^{(r)} - y_t^{(r')}$ restent invariables lorsque u étant constant on fait varier ζ: elles ne sont donc fonctions que de u. D'ailleurs l'une au moins de ces deux différences doit dépendre effectivement de u. Car si elles étaient constantes toutes les deux, on voit facilement qu'elles seraient pour $f(x, y)$ un système de périodes et par conséquent de la forme $(m\omega + n\omega', mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi)$. Les points $(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})$ et $(x_t^{(r')}, y_t^{(r')})$ ne seraient pas distincts contrairement à ce que l'on a vu.

Désignons maintenant par z', p', q' un système quelconque (non particulier) de valeurs satisfaisant à

$$F(z', p', q') = 0 \tag{27}$$

et recherchons les systèmes de valeurs de x et y distincts satisfaisant aux trois équations:

$$f(x, y) = z', \quad \frac{\partial f}{\partial x} = p', \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q'. \tag{28}$$

Posons pour cela $u = \frac{p'}{q'}$; z' et u auront des valeurs quelconques et les solutions cherchées devront être comprises dans les $\nu\varrho$ solutions des équations:

$$\begin{cases} f(x, y) = z' \\ \varphi(x, y) = u. \end{cases} \tag{29}$$

Les $n\nu$ valeurs distinctes de q_t de la discussion précédente sont données manifestement, par l'équation

$$F(z', qu, q) = 0 \tag{30}$$

débarrassée si il y a lieu des solutions $q = 0$; car $F(z', qu, q)$ est le produit des n facteurs $R(z', q, u, \gamma)$.

Mais l'équation (30) est vérifiée pour $q = q'$, car $uq' = p'$, et elle se réduit alors à (27). Donc q' est une des $n\nu$ valeurs distinctes de q_i. Les seules solutions du système (29) qui peuvent convenir au système (28) sont celles pour lesquelles $q_i = q'$; elles sont en nombre ϱ' et comme $\frac{q'}{p'} = u$ on voit d'après (25) et (26) qu'elles conviennent effectivement.

Donc le système (28) a ϱ' solutions distinctes pour un *point* (z', p', q') non particulier de la *surface*

$$F(z, p, q) = 0. \tag{31}$$

Nous avons ainsi une interprétation de l'entier ϱ'.

Considérons maintenant le système d'équations:

$$\begin{cases} f(x, y) = z \\ \varphi(x, y) = u \end{cases} \tag{32}$$

comme définissant x et y en fonction des deux variables indépendantes z et u. Les dérivées partielles du premier ordre de x et y par rapport à z et u, $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ ont, d'après ce qui précède $\nu\varrho$ déterminations pour chaque système de valeurs non particulières de z et u, puisqu'il n'y a pour x et y que $\nu\varrho$ déterminations *distinctes* aux multiples près des périodes.

37. Ce fait est de nature à faire prévoir la nature algébrique de ces quatre dérivées comme fonctions de z et u. En ce qui concerne les deux premières $\frac{\partial x}{\partial z}$ et $\frac{\partial y}{\partial z}$ on voit immédiatement qu'elles sont des fonctions algébriques de z et u (formules 24). On a, en effet,

$$\frac{\partial x}{\partial z} = P(z, q, u), \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = Q(z, q, u)$$

où z, q et u sont liés par une relation algébrique:

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0$$

ou bien encore par la relation:

$$F(z, qu, q) = 0 \tag{33}$$

débarrassée, si il y a lieu, des solutions $q = 0$.

Nous allons montrer que $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial u}$ sont aussi des fonctions algébriques de z et u.

Considérons la relation (33) comme définissant une surface, dont un point quelconque a pour coordonnées (z, q, u). Cette surface ne se décompose pas en plusieurs autres, sans cela comme on le voit sans peine, la relation

$$F(z, p, q) = 0$$

se decomposerait aussi. Mais sa section par un *plan* $u =$ constante peut se décomposer en plusieurs courbes

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0$$

comme nous l'avons supposé plus haut.

Les intégrales

$$\int P(z, q, u) dz \text{ et } \int Q(z, q, u) dz$$

relatives à l'une de ces courbes $u =$ const. n'ont que des modules de périodicité indépendants de u et qui sont de la forme $m\omega + n\omega'$ et $mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi$. On peut alors trouver deux fonctions rationelles $P_1(z, q, u)$ et $Q_1(z, q, u)$ de z, q et u telles que

$$P(z, q, u)dz + P_1(z, q, u)du$$

et

$$Q(z, q, u)dz + Q_1(z, q, u)du$$

soient, relativement à la surface (33) des différentielles totales exactes de z et u prises comme variables indépendantes.

Que z et u puissent être prises comme variables indépendantes cela résulte de la discussion que nous avons faite des équations (32), discussion établie sous l'hypothèse du début que $p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}$ n'est pas nul pour tous les éléments de $z = f(x, y)$; mais on le voit aussi directement sur l'équation (33); car cette relation renferme nécessairement q lorsque $F(z, p, q)$ n'est pas homogène en p et q, c'est-à-dire lorsque $p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = 0$ n'est pas nécessairement vérifiée comme conséquence de $F = 0$. L'existence des fonctions rationnelles $P_1(z, q, u)$ et $Q_1(z, q, u)$ satisfaisant aux conditions posées est un théorème connu de la théorie des différentielles totales attachées à une surface. (PICARD, Fonctions algébriques de deux variables indépendantes, tome I, page 102).

Toutefois, comme nous supposons possible ici la décomposition des sections $u = \text{const.}$ nous allons rappeler brièvement la démonstration en l'adaptant à ce cas.

Soit (z, u, q) un point quelconque non particulier de la surface (33). Il appartient à une, et à une seule des courbes:

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0.$$

Soit z_0 une constante absolue. Il y a sur la courbe précédente ν points pour lesquels $z = z_0$. Soient (z_0, q'_n) $(n = 1, 2, \ldots \nu)$ ces points et posons:

$$S = \sum_{n=1}^{n=\nu} \int_{z_0, q'_n}^{z, q} P(z, q, u) dz. \tag{34}$$

Dès que le point (z, q, u) est donné (non particulier) S a une valeur bien déterminée aux multiples près des périodes. Comme ces périodes sont des constantes $\frac{\partial S}{\partial u}$ aura une valeur déterminée sans ambiguité. (S est considérée ici comme fonction des deux variables indépendantes z et u). Si donc nous posons:

$$P_1 = \frac{1}{\nu} \sum_{n=1}^{n=\nu} \int_{z_0, q'_n}^{z, q} \frac{\partial P}{\partial u} dz$$

où $\frac{\partial P}{\partial u}$ se rapporte à P considérée comme fonction des deux variables indépendantes z et u, P_1 aura une valeur unique en un point quelconque de la surface. On en conclut ensuite facilement que P_1 est une fonction rationelle de (z, u, q). On a évidemment:

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial u} \tag{35}$$

les dérivations ayant toujours la même signification. On trouvera de la même façon une fraction rationnelle $Q_1(z, q, u)$ telle que:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial u}, \tag{36}$$

et, par conséquent, on aura deux différentielles totales exactes:

$$Pdz + P_1 du$$
$$Qdz + Q_1 du.$$

Ceci posé, nous pouvons prendre dans les équations (32) pour x et y les expressions (24) où l'on suppose:

$$\varphi(x_k, y_k) = u. \tag{37}$$

Dans cette dernière relation lorsque u varie nous pouvons laisser y_k constant et considérer x_k comme une fonction de u (paragraphe 9). Alors z_k et q_k qui sont donnés par

$$z_k = f(x_k, y_k), \quad q_k = \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}$$

sont fonctions de u seul. En dérivant les formules (24), il vient:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{dx_k}{du} + \int_{z_k, q_k}^{z, q} \frac{\partial P}{\partial u} dz - P(z_k, q_k, u)\frac{dz_k}{du}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \int_{z_k, q_k}^{z, q} \frac{\partial Q}{\partial u} dz - Q(z_k, q_k, u)\frac{dz_k}{du}.$$

Ces formules se simplifient à l'aide de (35) et (36). On obtient:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= P_1(z, q, u) - P_1(z_k, q_k, u) + \frac{dx_k}{du} - P(z_k, q_k, u)\frac{dz_k}{du} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= Q_1(z, q, u) - Q_1(z_k, q_k, u) - Q(z_k, q_k, u)\frac{dz_k}{du}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Dans la première de ces formules, les trois derniers termes et dans la seconde les deux derniers termes ne sont fonctions que de u.

Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} \eta_1(u) &= -P_1(z_k, q_k, u) + \frac{dx_k}{du} - P(z_k, q_k, u)\frac{dz_k}{du} \\ \eta_2(u) &= -Q_1(z_k, q_k, u) - Q(z_k, q_k, u)\frac{dz_k}{du}. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

D'où

$$(40)\quad \begin{cases} \eta_1(u) = \dfrac{\partial x}{\partial u} - P_1(z, q, u) \\ \eta_2(u) = \dfrac{\partial y}{\partial u} - Q_1(z, q, u). \end{cases}$$

Nous avons vu que $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ ont $\nu\varrho$ déterminations lorsque z et u sont donnés de façon quelconque. A chacune de ces déterminations correspond une valeur déterminée de q, de telle sorte que, d'après (40), $\eta_1(u)$ et $\eta_2(u)$ ont $\nu\varrho$ déterminations. Il est inutile pour ce qui suit de se demander si ces déterminations sont toutes distinctes. Etudions la nature des points singuliers de $\eta_1(u)$ et $\eta_2(u)$. Il résulte de ce que nous avons dit paragraphe 9, que si u_1 désigne une valeur quelconque, sans aucune exclusion de valeurs particulières, il existe un nombre positif ε tel que toute détermination de x dans la relation $\varphi(x, y_k) = u$ où l'on suppose $|u - u_1| < \varepsilon$ et y_k constant, sera racine d'un polynôme entier en x, $P(x)$ dont le terme du plus haut degré en x a pour coefficient l'unité, les autres coefficients étant des fonctions régulières de u pour $|u - u_1| < \varepsilon$; et cela est encore vrai même si $u_1 = \infty$, en changeant $u - u_1$ en $\frac{1}{u}\cdot$ En effet, on peut choisir ε assez petit pour que à chaque système de valeurs (x', u') de x et u corresponde un polynôme normal $r(x)$ valable pour le domaine 2ε autour de (x', u'). Si u' appartient au domaine $|u - u_1| < \varepsilon$, tous les coefficients de $r(x)$ sont des fonctions régulières dans le domaine $|u - u_1| < \varepsilon$. Si $u_1 = \infty$, on raisonne en changeant u en $\frac{1}{u}$. Il résulte alors de là, que, quelle que soit la détermination choisie pour x_k, u appartenant au domaine $|u - u_1| < \varepsilon$, on pourra toujours la développer au voisinage de $u = u_1$ en une série de la forme:

$$(41)\qquad x_k = a_0 + a_1(u - u_1)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + a_n(u - u_1)^{\frac{n}{\mu}} + \cdots$$

procédant suivant les puissances entières et *positives* de $(u - u_1)^{\frac{1}{\mu}}$, μ étant un entier positif, et convergente pour un domaine $|u - u_1| < \varepsilon$. Si l'on substitue ce développement de x_k dans les expressions de z_k et q_k

$$z_k = f(x_k, y_k), \quad q_k = \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}$$

on voit clairement que $u = u_1$ est un point ordinaire ou un pôle algébrique, ou seulement un point de ramification algébrique pour l'une ou pour l'autre des fonctions z_k et q_k.

Il en est évidemment de même pour tous les termes des seconds membres de (39) puisque P_1, P, Q_1 et Q sont des fractions rationnelles. La détermination que l'on considère de $\eta_1(u)$ ou de $\eta_2(u)$ est donc régulière pour $u = u_1$, ou bien admet ce point comme point de ramification algébrique, ou bien l'admet comme pôle algébrique. Le résultat subsiste même pour $u_1 = \infty$, d'après ce que nous avons fait remarquer. Il en est de même pour chacune des $\nu\varrho$ déterminations de $\eta_1(u)$ et $\eta_2(u)$.

Si l'on considère alors une fonction symétrique rationnelle et entière des $\nu\varrho$ déterminations de $\eta_1(u)$, cette fonction étant une fonction *uniforme* de u, ou bien sera régulière pour $u = u_1$ ou bien admettra u_1 comme pôle. Cette conclusion subsiste même pour $u_1 = \infty$. Or une fonction uniforme de u qui n'a pour points singuliers que des pôles, même pour $u = \infty$, est une fraction rationnelle de u. Il résulte de là que $\eta_1(u)$ et $\eta_2(u)$ sont des fonctions algébriques de u. Les formules (40) montrent alors que $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial u}$ sont des fonctions algébriques de u et z.

38. Déterminons maintenant une fonction algébrique v de z et u permettant d'exprimer les cinq fonctions algébriques $q, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial z}$ sous forme de fraction rationnelle en z, u et v.

Il suffit de poser pour cela:

$$v = \lambda_1 q + \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial u} + \lambda_3 \frac{\partial x}{\partial z} + \lambda_4 \frac{\partial y}{\partial u} + \lambda_5 \frac{\partial y}{\partial z} \tag{42}$$

où les λ sont cinq constantes arbitraires, non choisies de façon particulière.

Soit:

$$\Phi(z, u, v) = 0 \tag{43}$$

la relation algébrique, entière et irréductible qui lie v à z et u.

Les relations

$$f(x, y) = z,$$

$$\varphi(x, y) = u$$

permettent de calculer $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}$, en fonction méromorphe et triplement périodique de x et y aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$ $(\omega', i\beta')$. Comme de plus $q = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, on voit dans la relation (42) que v est une fonction méromorphe de x et y aux mêmes périodes.

Soit:

(44) $$v = f_1(x, y).$$

Soient maintenant

$$\frac{\partial x}{\partial z} = R_1(z, u, v), \quad \frac{\partial x}{\partial u} = S_1(z, u, v),$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = R_2(z, u, v), \quad \frac{\partial y}{\partial u} = S_2(z, u, v)$$

les expressions des dérivées de x et y en fractions rationnelles de z, u et v. Nous aurons:

(45) $$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{z_0, u_0, v_0}^{z, u, v} R_1(z, u, v)dz + S_1(z, u, v)du, \\ y &= y_0 + \int_{z_0, u_0, v_0}^{z, u, v} R_2(z, u, v)dz + S_2(z, u, v)du, \end{aligned}$$

où x_0, y_0 sont deux constantes arbitraires, pour lesquelles toutefois $f(x_0, y_0)$, $\varphi(x_0, y_0)$ et $f_1(x_0, y_0)$ ne sont pas indéterminées, de telle sorte que z_0, u_0, v_0 sont définis sans ambiguité par

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad v_0 = f_1(x_0, y_0), \quad u_0 = \varphi(x_0, y_0).$$

On suppose encore que (z_0, u_0, v_0) n'est pas un point singulier des intégrales précédentes, qui, bien entendu, se rapportent à la surface (43).

Supposons que le point (z, u, v) décrive sur cette surface une ligne quelconque fermée; si (a, b) est le système de modules de périodicité conjugués des deux intégrales pour ce cycle fermé, on aura

$$f(x + a, y + b) = f(x, y)$$

puisque z a repris finalement sa valeur initiale. Comme $f(x, y)$ n'a, par hypothèse, d'autres systèmes de périodes que des sommes de multiplies de $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ on a nécessairement:

$$a = m\omega + n\omega'$$

$$b = mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi$$

$(m, n, p$ entiers). Donc à un point (z, u, v) *non particulier* de la surface (43) correspond, aux multiples près des périodes, un seul système de valeurs pour (x, y).

Inversement à un point (x, y), correspond un seul point de la surface, par les formules:

$$z = f(x, y), \quad u = \varphi(x, y), \quad v = f_1(x, y);$$

il n'y a exception que pour les points d'indétermination de $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ et $f_1(x, y)$.

Nous savons que $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ s'exprime en fonction rationnelle de z, u et v. Il en est par suite de même de $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, puisque $\frac{p}{q} = u$.

Donc à un point de la surface

$$\Phi(z, u, v) = 0$$

correspond un seul point de la surface

$$F(z, p, q) = 0.$$

Mais à un point (z, p, q) de cette dernière surface correspondent ϱ' points de la surface $\Phi(z, u, v) = 0$, puisque nous avons vu qu'à ce point (z, p, q) correspondent ϱ' systèmes de valeurs distincts pour x et y.

Pour arriver à la conclusion qui est notre but, il nous faut étudier la nature des singularités des deux intégrales qui figurent dans les seconds membres des équations (45). Il est avantageux pour cette étude d'effectuer sur la surface

$$\Phi(z, u, v) = 0$$

une transformation bi-rationnelle, la changeant en une surface

$$\Phi_1(U, V, W) = 0$$

n'admettant pas d'autres singularités que des courbes doubles avec points triples, de telle sorte que chaque point de la surface est ordinaire pour la nappe à laquelle il appartient, à l'exception des *points-pince;* mais on peut supposer qu'aucun de ces points spéciaux n'est singulier pour l'une des intégrales (45).

Les coordonnées U, V, W d'un point de $\Phi_1 = 0$ étant des fonctions rationnelles de z, u et v seront des fonctions méromorphes de x et y aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $\omega', i\beta')$. Soient:

$$U = \Psi_1(x, y), \quad V = \Psi_2(x, y), \quad W = \Psi_3(x, y). \tag{46}$$

Ces trois fonctions n'admettent pas d'autres systèmes de périodes qui leur soient communs, que ceux qui sont de la forme $(m\omega + n\omega', mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi)$ puisque U, V, W reprenant les mêmes valeurs, z reprend aussi la même valeur. Les intégrales (45) n'admettent que des modules de périodicité de cette forme. Si (x_1, y_1) est un système de valeurs données pour x et y, à tous les systèmes de valeurs $(x_1 + m\omega + n\omega', y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi)$ correspond un même système de valeurs de U, V, W défini d'une façon unique; il n'y a exception que si (x_1, y_1) est un point d'indétermination pour l'une des trois fonctions Ψ_1, Ψ_2 ou Ψ_3. Ces points d'indétermination forment un ensemble dénombrable et nous appellerons E l'ensemble dénombrable des valeurs de y correspondantes. Nous appelons J_x et J_y les deux intégrales des seconds membres des équations (45) et nous supposerons, ce qui est évidemment permis, que x_0 et y_0 sont nuls. On aura:

$$(47) \qquad \begin{cases} x = J_x \\ y = J_y, \end{cases}$$

où J_x et J_y sont exprimées en fonction du point (U, V, W).

39. Nous montrerons tout d'abord que l'intégrale J_y n'a pas d'autres singularités que des singularités logarithmiques simples (c'est-à-dire non superposées à des singularités polaires).

Il nous suffira de montrer que le long d'une courbe algébrique arbitraire Γ prise sur $\Phi_1(U, V, W) = 0$ l'intégrale J_y se réduit à une intégrale abélienne n'ayant d'autres points singuliers que des points logarithmiques simples.

Or les coordonnées (U, V, W) d'un point de Γ satisfont à une relation algébrique entière $\Phi_2(U, V, W) = 0$ distincte de $\Phi_1 = 0$. Si dans Φ_2 on remplace U, V, W par leurs expressions en fonction de x et y, $\Phi_2(U, V, W)$ se réduira à une fonction méromorphe de x et y aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Soit $H(x, y)$ le numérateur de cette fonction méromorphe (mise sous forme irréductible). Tout le long de Γ on aura

$$H(x, y) = 0$$

et par suite les équations

$$(48) \qquad \begin{cases} x = (J_x)_\Gamma \\ y = (J_y)_\Gamma, \end{cases}$$

où $(J_x)_\Gamma$ et $(J_y)_\Gamma$ sont les intégrales J_x et J_y prises le long de Γ, seront les équations d'une multiplicité simple de zéros appartenant à $H(x, y) = 0$. Comme les zéros de $H(x, y)$ admettent les trois systèmes de périodes fondamentaux et que de plus les coordonnées d'un point de la courbe Γ sont données par

$$U = \Psi_1(x, y), \quad V = \Psi_2(x, y), \quad W = \Psi_3(x, y),$$

où Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 admettent les mêmes systèmes de périodes, il en résulte (Note II de la fin du Mémoire) que $(J_y)_\Gamma$ ne peut avoir *d'autres points singuliers que des points logarithmiques simples.*

En outre, sur la multiplicité de zéros considérée x ne pouvant pas devenir infini tant que y reste finie, on voit que:

J_x n'a pas de points singuliers qui ne soient des points singuliers de J_y.

D'ailleurs, d'après un raisonnement fait précédemment, J_y a certainement quelque point singulier, c'est-à-dire quelque courbe logarithmique.

40. Soit donc G une courbe logarithmique pour J_y; les résidus respectifs de J_x et J_y relatifs à G sont nécessairement de la forme $\frac{m\omega + n\omega'}{2i\pi}$ et $\frac{m\beta + n\beta' + 2p\pi}{2\pi}$; le premier de ces résidus peut être nul si m et n le sont; le second est différent de zéro et réel.

Posons

$$X = x - \frac{m_1\omega + n_1\omega'}{i(m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi)} y, \quad Y = \frac{2\pi}{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi} y$$

m_1, n_1 et p_1 étant les quotients de m, n, p par leur plus grand commun diviseur.

Pour ces variables les trois systèmes de périodes, après une transformation convenable du *premier ordre* seront comme nous l'avons vu $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, (β_1 et β_2 réels, non commensurables tous deux avec π, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ imaginaire). Nous poserons:

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= J_x - \frac{m_1\omega + n_1\omega'}{i(m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi)} J_y = K_X \\ Y &= \frac{2\pi}{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi} J_y = K_Y. \end{aligned} \right.$$

Sur la courbe G, K_X aura un résidu nul, et K_Y aura pour résidu le plus grand commun diviseur d de m, n et p.

Pour les points de G (sauf peut-être en des points particuliers de cette courbe appartenant à une autre courbe logarithmique de J_y) ou bien K_X sera régulière ou bien elle admettra la courbe G comme courbe polaire. Nous allons montrer que cette dernière hypothèse est en réalité impossible.

Prenons sur G un point non particulier (U_1, V_1, W_1). Au voisinage de ce point l'une des coordonnées d'un point de la surface, W par exemple, sera une fonction régulière des deux autres, puisque le point (U_1, V_1, W_1) est un point ordinaire pour la nappe de surface à laquelle il appartient.

Posons

$$U = U_1 + \xi, \quad V = V_1 + \eta.$$

Dans l'hypothèse où G est une courbe polaire pour K_X, nous aurons pour des valeurs de ξ et η assez petites:

$$(50) \qquad X = \frac{\lambda_1(\xi, \eta)}{[\lambda(\xi, \eta)]^r}, \qquad e^{\frac{Y}{d}} = \lambda(\xi, \eta) e^{\mu(\xi, \eta)},$$

où $\lambda(\xi, \eta)$, $\lambda_1(\xi, \eta)$, $\mu(\xi, \eta)$ sont trois fonctions régulières pour $\xi = \eta = 0$; r est un entier positif. De plus le facteur $\lambda(\xi, \eta)$ est *irréductible* dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'est pas le produit de deux facteurs réguliers s'annulant aussi pour $\xi = \eta = 0$). Les termes de la fraction $\frac{\lambda_1(\xi, \eta)}{[\lambda(\xi, \eta)]^r}$ n'ont pas de facteur commun s'annulant dans le voisinage de $\xi = \eta = 0$; enfin $\lambda_1(0, 0)$ est différent de zéro, le point (U_1, V_1, W_1) n'étant pas *particulier* sur la courbe G. Nous pouvons donc poser:

$$\lambda_2(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt[r]{\lambda_1(\xi, \eta)}}$$

où $\sqrt[r]{\lambda_1(\xi, \eta)}$ désigne l'une des déterminations, choisie arbitrairement de $\sqrt[r]{\lambda_1(\xi, \eta)}$ dans le voisinage de $\xi = \eta = 0$; $\lambda_2(\xi, \eta)$ sera régulière pour les valeurs de ξ et η prises assez petites et $\lambda_2(0, 0) \neq 0$.

Considérons alors les équations suivantes:

$$(51) \qquad \begin{cases} t = \lambda(\xi, \eta)\lambda_2(\xi, \eta) \\ \tau = \lambda(\xi, \eta) e^{\mu(\xi, \eta)}. \end{cases}$$

Il existe (Note III de la fin du Mémoire) une relation de la forme

$$(52) \qquad t = a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots + a_{s-1}\tau^{s-1} + (a_s + \alpha)\tau^s$$

où $a_1, a_2, \ldots a_s$ sont s constantes dont le nombre et les valeurs sont bien déterminées, [et dont la première a_1 est différente de zéro et égale à $\lambda_2(0, 0)e^{-\mu(0, 0)}$] qui possède la propriété suivante.

Etant donné un nombre ε_1 positif, arbitrairement petit, il existe un nombre positif ε_2, tel que si τ et α sont deux valeurs arbitraires assujetties à la seule condition:

$$|\tau| < \varepsilon_2, \quad |\alpha| < \varepsilon_2,$$

si dans les équations (51) on remplace τ par la valeur choisie et t par celle que fournit la relation (52), les deux équations ainsi obtenues admettent en ξ et η un système de solutions (ξ', η') tel que

$$|\xi'| < \varepsilon_1, \quad |\eta'| < \varepsilon_1.$$

Il en résulte immédiatement pour le système (50) la propriété suivante.

Si l'on pose:

$$\frac{1}{X} = \left[a_1 e^{\frac{Y}{d}} + a_2 e^{\frac{2Y}{d}} + \cdots + a_{s-1} e^{\frac{(s-1)Y}{d}} + (a_s + \alpha) e^{\frac{sY}{d}}\right]^r \tag{53}$$

puis si l'on prend Y et α arbitraires tels que:

$$\left|e^{\frac{Y}{d}}\right| < \varepsilon_2, \qquad |\alpha| < \varepsilon_2$$

et si l'on substitue dans (50) à Y la valeur ainsi choisie et à X celle qui est fournie par (53), les équations obtenues admettent un système de solutions en ξ et η appartenant au domaine

$$|\xi| < \varepsilon_1, \quad |\eta| < \varepsilon_1.$$

Ceci posé, les trois systèmes de périodes fondamentaux pour X et Y étant pris sous la forme indiquée plus haut $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$ et l'un des nombres β_1 et β_2 étant incommensurable avec π, supposons que ce soit β_1. En désignant par M un entier arbitraire, nous poserons:

$$\theta = e^{\frac{Mi\beta_1}{d}} \tag{54}$$

de telle sorte que $|\theta| = 1$ et $\theta \neq 1$.

Si nous posons

$$e^{\frac{Y}{d}} = \tau \tag{55}$$

nous aurons

$$e^{\frac{Y+Mi\beta_1}{d}} = \theta\tau.$$

Prenons deux valeurs α et α' arbitrairement sous la seule condition

$$|\alpha| < \varepsilon_2, \qquad |\alpha'| < \varepsilon_2$$

et considérons les deux équations simultanées en X et τ:

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{X} = [a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots + (a_s + \alpha)\tau^s]^r \\[2ex] \dfrac{1}{X + M\omega_1} = [a_1\theta\tau + a_2\theta^2\tau^2 + \cdots + (a_s + \alpha')\theta^s\tau^s]^r. \end{cases}$$

En éliminant X entre ces deux équations on obtient:

$$(57)\quad \begin{cases} M\omega_1 = \dfrac{1}{\tau^r[a_1\theta + a_2\theta^2\tau + \cdots + (a_s + \alpha')\theta^s\tau^{s-1}]^r} - \\[2ex] \qquad\qquad\qquad \dfrac{1}{\tau^r[a_1 + a_2\tau + \cdots + (a_s + \alpha)\tau^{s-1}]^r}. \end{cases}$$

Cette équation algébrique en τ étant mise sous forme entière et ordonnée, on trouve comme terme du plus haut degré en τ:

$$M\omega_1(a_s + \alpha)^r(a_s + \alpha')^r\theta^{rs}\tau^{r(2s-1)}.$$

Comme r et s sont l'un et l'autre au moins égaux à 1, on a:

$$r(2s - 1) \geq 1.$$

D'ailleurs $a_s + \alpha$ et $a_s + \alpha'$ ne sont pas nuls si α et α' ont des valeurs *quelconques* comme nous le supposons. Le terme indépendant de τ est

$$a_1^r(\theta^r - 1) \text{ si } s > 1, \text{ ou } \theta^r(a_1 + \alpha')^r - (a_1 + \alpha)^r \text{ si } s = 1.$$

Dans l'un et l'autre cas ce terme est, quel que soit M, différent de 0, si α et α' sont *quelconques*. En outre, comme $|\theta| = 1$, ce terme a un module inférieur à un nombre positif fixe quel que soit M. Le produit des $r(2s - 1)$ racines de l'équation sera, suivant les cas

$$\frac{a_1^r(\theta^r - 1)}{M\omega_1(a_s + \alpha)^r(a_s + \alpha')^r\theta^{rs}} \text{ ou } \frac{\theta^r(a_1 + \alpha')^r - (a_1 + \alpha)^r}{M\omega_1(a_s + \alpha)^r(a_s + \alpha')^r\theta^{rs}}.$$

Si l'on prend M très grand ce produit sera, d'après tout ce qui précède, aussi petit que l'on voudra et différent de zéro. L'équation (57) aura donc, si M est choisi assez grand une racine τ_1 différente de zéro et satisfaisant à l'inégalité $|\tau_1| < \varepsilon_2$.

La valeur τ_1 n'étant pas nulle, on peut prendre Y_1 telle que

$$e^{\frac{Y_1}{d}} = \tau_1.$$

On peut supposer que cette valeur Y_1 ne correspond à aucun des systèmes de valeurs de X et Y qui fournissent des points d'indétermination pour les fonctions U, V, W de X et Y; car ces points constituent un ensemble dénombrable, et d'autre part il résulte immédiatement de la forme de l'équation (57) que la racine τ_1 ne peut pas être indépendante de α et α' qui sont choisis arbitrairement. Donc on peut supposer que τ_1 et par suite Y_1, n'a pas une valeur particulière.

Pour la valeur $\tau = \tau_1$ les équations (56) ont en X une solution commune X_1, évidemment finie.

Si nous posons alors:

$$X_2 = X_1 + M\omega_1, \qquad Y_2 = Y_1 + Mi\beta_1$$

on a les deux équations:

$$\frac{1}{X_1} = \left[a_1 e^{\frac{Y_1}{d}} + a_2 e^{\frac{2Y_1}{d}} + \cdots + (a_s + \alpha) e^{\frac{sY_1}{d}}\right]^r,$$

$$\frac{1}{X_2} = \left[a_1 e^{\frac{Y_2}{d}} + a_2 e^{\frac{2Y_2}{d}} + \cdots + (a_s + \alpha') e^{\frac{sY_2}{d}}\right]^r$$

avec

$$|\alpha| < \varepsilon_2, \quad \left|e^{\frac{Y_1}{d}}\right| < \varepsilon_2, \quad |\alpha'| < \varepsilon_2, \quad \left|e^{\frac{Y_2}{d}}\right| < \varepsilon_2.$$

Donc à chacun des systèmes de valeurs (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) de X et Y correspondent respectivement pour les équations (50) au moins un système de solutions, soit (ξ_1, η_1) pour (X_1, Y_1), et (ξ_2, η_2) pour (X_2, Y_2) avec:

$$|\xi_1| < \varepsilon_1, \qquad |\eta_1| < \varepsilon_1,$$
$$|\xi_2| < \varepsilon_1, \qquad |\eta_2| < \varepsilon_1.$$

Ces deux systèmes de valeurs sont forcément distincts puisque les systèmes de valeurs (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont différents. Ils fournissent deux points (U', V', W') et (U'', V'', W'') sur la surface $\Phi_1(U, V, W) = 0$ et ces points sont distincts puisque l'on a:

$$U' = U_1 + \xi_1, \ V' = V_1 + \eta_1; \ U'' = U_1 + \xi_2, \ V'' = V_1 + \eta_2.$$

Mais ce résultat est contradictoire avec ce qui précède. Car (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont deux systèmes de valeurs ne différant que par un multiple du système de périodes $(\omega_1, i\beta_1)$ et ne sont pas, comme nous l'avons montré, des valeurs d'indétermination pour U, V, W. Donc il ne peut leur correspondre deux points distincts (U', V', W') et (U'', V'', W'').

L'hypothèse faite de l'existence d'une singularité polaire le long de G pour K_X est donc impossible. Par suite pour J_x, G ne peut être qu'une singularité logarithmique *simple* comme pour J_y. Comme il en est de même pour chaque courbe logarithmique de J_y et que J_x ne peut pas devenir infinie sans que J_y le devienne, on voit que J_x comme J_y, n'a que des singularités logarithmiques simples.

41. En continuant l'étude des singularités de J_x, nous allons montrer que tous ses résidus sont proportionnels aux résidus correspondants de J_y. Nous montrerons d'abord cette proportionnalité pour deux courbes logarithmiques C et C' correspondant pour J_y à des résidus de *même signe* (à supposer qu'il existe deux telles courbes). Soient

$$\frac{m\omega + n\omega'}{2\,i\pi}, \ \frac{m\beta + n\beta' + 2\,p\pi}{2\,\pi} \text{ et } \frac{m'\omega + n'\omega'}{2\,i\pi}, \ \frac{m'\beta + n'\beta' + 2\,p'\pi}{2\,\pi}$$

les résidus conjugués relatifs à C et C' avec

$$m\beta + n\beta' + 2\,p\pi > 0 \text{ et } m'\beta + n'\beta' + 2\,p'\pi > 0.$$

En posant:

$$c = \frac{m\omega + n\omega'}{i(m\beta + n\beta' + 2\,p\pi)}$$

la différence $x - cy = J_x - cJ_y$ aura le long de C son résidu nul, et comme elle ne peut pas avoir de singularités polaires elle sera régulière en un point quelconque, non particulier, (U_1, V_1, W_1) de C.

On aura par suite, ξ et η conservant la même signification que plus haut:

$$(58) \qquad \begin{cases} x - cy = \nu(\xi, \eta) \\ e^{\frac{2\pi y}{m\beta+n\beta'+2\,p\pi}} = \lambda(\xi, \eta)\, e^{\mu(\xi, \eta)} \end{cases}$$

où λ, μ et ν sont régulières pour $\xi = \eta = 0$. De plus $\lambda(\xi, \eta)$ s'annule pour $\xi = \eta = 0$ et est *irréductible* au voisinage de ce système de valeurs. Comme $m\beta + n\beta' + 2\,p\pi$ est positif, la partie réelle de y sera très-grande et négative lorsque ξ et η seront très-petits.

En outre, aux valeurs de x et y liées par la relation:

$$(59) \qquad x - cy = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \cdots + (b_s + \alpha)\tau^s$$

où $b_0, b_1, \ldots b_s$ sont des constantes (qui peuvent être toutes nulles) et où

$$|\alpha| < \varepsilon_2, \qquad |\tau| < \varepsilon_3$$

avec

$$\tau = e^{\frac{2\pi y}{m\beta+n\beta'+2p\pi}}$$

correspondra dans les équations (58) un système au moins de valeurs de ξ et η pour lequel

$$|\xi| < \varepsilon_1, \qquad |\eta| < \varepsilon_1$$

ε_1 et ε_2 ayant ici le même rôle que plus haut.

D'une façon tout analogue, en prenant un point *quelconque* (U_2, V_2, W_2) sur la courbe C', nous poserons

$$(60) \qquad \begin{cases} x - c'y = \nu_1(\xi', \eta') \\ e^{\frac{2\pi y}{m'\beta+n'\beta'+2p'\pi}} = \lambda_1(\xi', \eta')\, e^{\mu_1(\xi', \eta')} \end{cases}$$

et ensuite:

$$\tau' = e^{\frac{2\pi y}{m'\beta+n'\beta'+2p'\pi}}$$

avec

$$(61) \qquad x - c'y = c_0 + c_1\tau' + c_2\tau'^2 + \cdots + (c_{s'} + \alpha')\tau'^{s'}$$

où $c_0, c_1, \ldots c_{s'}$ sont s' constantes.

La relation (61) a, à l'égard du système (60) le même sens que la relation (59) à l'égard du système (58). Il est clair que l'on peut supposer que les nombres ε_1 et ε_2 sont les mêmes pour les relations (58) et (59) d'une part et (60) et (61) d'autre part, afin de simplifier les notations.

Nous désignerons pour abréger par $\varrho(\tau, \alpha)$ et par $\varrho'(\tau', \alpha')$ les seconds membres des relations (59) et (61) et nous remarquerons que si l'on a

$$|\tau| < \varepsilon_2, \quad |\alpha| < \varepsilon_2, \quad |\tau'| < \varepsilon_2, \quad |\alpha'| < \varepsilon_2$$

les modules de $\varrho(\tau, \alpha)$ et de $\varrho'(\tau', \alpha')$ seront inférieurs à un nombre positif fixe R.

Dans tout ce qui suit, sans qu'il soit besoin de le répéter, α et α' auront leurs modules inférieurs à ε_2.

Si nous désignons par $-A$ la partie réelle de y, nous pouvons choisir un nombre positif A_1 assez grand pour que l'inégalité

$$A > A_1$$

entraine

$$|\tau| < \varepsilon_2, \qquad |\tau'| < \varepsilon_2.$$

Formons le système de deux équations simultanées en x et y, obtenues en prenant l'équation (59) d'une part et d'autre part l'équation (61) où x et y sont changés en $x + M\omega + N\omega'$ et $y + (M\beta + N\beta' + 2P\pi)i$ en désignant par M, N, P trois entiers quelconques.

En posant:

$$\theta = e^{\frac{2\pi(M\beta+N\beta'+2P\pi)i}{m'\beta+n'\beta'+2p'\pi}}$$

ces équations seront

$$(62)\qquad \begin{cases} x - cy = \varrho(\tau, \alpha) \\ x + M\omega + N\omega' - c'(y + iM\beta + iN\beta' + 2iP\pi) = \varrho'(\theta\tau', \alpha'). \end{cases}$$

α et α' étant *donnés* arbitrairement, cherchons si ces deux équations admettent en x et y un système commun de solutions pour lequel la partie réelle de y, $-A$, satisfasse à l'inégalité écrite plus haut $A > A_1$.

Eliminons x entre les équations (62) ce qui donnera:

$$(63)\qquad M\omega + N\omega' - (c' - c)y - c'i(M\beta + N\beta' + 2P\pi) = \varrho'(\theta\tau', \alpha') - \varrho(\tau, \alpha).$$

Supposons $c' - c \neq 0$ et écrivons l'équation du premier degré obtenue en égalant à zéro le premier membre de l'équation précédente, en remplaçant y par y_1; cette équation résolue sera:

$$(64)\qquad y_1 = \frac{M\omega + N\omega'}{c' - c} - \frac{c'i(M\beta + N\beta' + 2P\pi)}{c' - c}.$$

Si A_2 est un nombre positif arbitraire, montrons qu'on pourra choisir les entiers M, N et P de façon que la partie réelle de y_1 soit négative et supérieure en valeur absolue à $A_1 + A_2$.

En effet, en peut prendre M et N de façon que $\frac{M\omega + N\omega'}{c' - c}$ ait une partie réelle aussi grande que l'on veut en valeur absolue et négative puisque le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire. Ensuite M et N étant ainsi choisis, on prend P de façon que $M\beta + N\beta' + 2P\pi$ soit compris dans l'intervalle 0 à 2π. Il est bien clair d'après cela, qu'on peut supposer M, N, P choisis de façon que la partie réelle de y_1 soit inférieure à $-(A_1 + A_2)$.

L'équation (63) peut ensuite s'écrire de la façon suivante:

$$(65)\qquad (c - c')(y - y_1) - \varrho'(\theta\tau', \alpha') + \varrho(\tau, \alpha) = 0$$

ou encore:

$$(66)\qquad (c - c')(y - y_1)\left[1 + \frac{\varrho(\tau, \alpha) - \varrho'(\theta\tau', \alpha')}{(c - c')(y - y_1)}\right] = 0.$$

Désignons par R_1 le module de $c - c'$ et supposons qu'on fasse décrire au point y, dans le plan représentatif de cette variable, la circonférence de centre y_1 et de rayon A_2 dans le sens direct. La partie réelle de y restera inférieure à $-A_1$ puisque celle de y_1 est inférieure à $-(A_1 + A_2)$. Donc tout du long du cercle on aura:

$$|\tau| < \varepsilon_2, \qquad |\theta\tau'| < \varepsilon_2$$

et par suite, comme on l'a vu plus haut

$$|\varrho'(\theta\tau', \alpha')| < R, \qquad |\varrho(\tau, \alpha)| < R.$$

La fraction $\dfrac{\varrho(\tau, \alpha) - \varrho'(\theta\tau', \alpha')}{(c - c')(y - y_1)}$ aura donc un module inférieur à $\dfrac{2R}{R_1 A_2}$. Or R et R_1 ne dépendent nullement du choix de A_2; donc si A_2 a été pris assez grand cette fraction aura un module inférieur à un nombre fixe plus petit que 1, inférieur à $\dfrac{1}{2}$ par exemple. On en conclut alors, par un raisonnement classique, que l'équation (66) dont le premier membre est une fonction régulière de y a une racine à l'intérieur du cercle considéré. Par conséquent l'équation (63) a bien une racine y, de partie réelle inférieure à $-A_1$, pour le choix que nous avons fait de M, N, P. Soit y_2 cette racine. Pour $y = y_2$ les équations (62) ont une racine commune en x, soit x_2. La valeur y_2 n'est pas *particulière* car elle dépend évidemment, d'après la forme même de l'équation (63) de α et α' qui sont arbitraires. Le système de valeurs (x_2, y_2) n'est donc un point d'indétermination pour aucune des fonctions $U = \Psi_1(x, y)$, $V = \Psi_2(x, y)$, $W = \Psi_3(x, y)$.

Le système de valeurs (x_2, y_2) convient à l'équation (59) et le système de valeurs $(x_2 + M\omega + N\omega', y_2 + Mi\beta + Ni\beta' + 2Pi\pi)$ à l'équation (61), avec les inégalités requises; par conséquent, en reprenant le raisonnement du paragraphe précédent, on voit que à (x_2, y_2) correspond un point (U', V', W') de la surface $\Phi_1(U, V, W) = 0$ voisin du point (U_1, V_1, W_1) et à $(x_2 + M\omega + N\omega', y_2 + Mi\beta + + Ni\beta' + 2Pi\pi)$ un point (U'', V'', W'') voisin du point (U_2, V_2, W_2). Les deux points (U', V', W'), (U'', V'', W'') sont distincts, car ils sont aussi voisins qu'on le veut, (ε_1 étant arbitrairement petit) respectivement de (U_1, V_1, W_1) et (U_2, V_2, W_2) qui sont eux-mêmes distincts. Mais cela est en contradiction avec la triple périodicité de $\Psi_1(x, y)$, $\Psi_2(x, y)$, $\Psi_3(x, y)$, en remarquant que (x_2, y_2) n'est pas un point d'indétermination.

L'hypothèse faite que $c \neq c'$ est donc impossible, il faut nécessairement que $c = c'$.

Si l'on remplace c et c' par leurs valeurs et qu'on se reporte à ce que nous avons déjà vu (paragraphe 18) on voit que:

$$\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{p'}{p}.$$

Désignons par m_1, n_1 et p_1 les quotients de m, n et p par leur plus grand commun diviseur. Il est clair que m', n' et p' seront des équimultiples de m_1, n_1, p_1. Cela revient à dire que pour toutes les courbes logarithmiques de J_y, à résidus positifs, les résidus conjugués de J_x, J_y seront des équimultiples de $\frac{m_1\omega + n_1\omega'}{2i\pi}$ et de $\frac{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}{2\pi}$.

Si l'on considère une section plane quelconque, non particulière, de la surface $\Phi_1 = 0$, pour cette courbe les intégrales J_x et J_y se réduisent à des intégrales abéliennes, que nous désignons par (J_x) et (J_y); la somme des résidus positifs, multipliés par $2i\pi$, de (J_y) est de la forme $N_1(m_1 i\beta + n_1 i\beta' + 2p_1 i\pi)$ et la somme des résidus correspondants de J_x, multipliés par $2i\pi$, est de la forme $N_1(m_1\omega + n_1\omega')$ où N_1 est un entier. D'une façon analogue, on aura, en considérant les résidus négatifs de (J_y) les sommes $N_2(m_2 i\beta + n_2 i\beta' + 2p_2 i\pi)$ et $N_2(m_2\omega + n_2\omega')$. En remarquant que (J_x) ne peut pas devenir infinie sans que (J_y) le devienne, c'est-à-dire que (J_x) n'a pas de point logarithmique en dehors de ceux qu'on vient de considérer, on peut écrire, la somme des résidus d'une intégrale abélienne étant nulle:

$$N_1(m_1\omega + n_1\omega') + N_2(m_2\omega + n_2\omega') = 0,$$

$$N_1(m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi) + N_2(m_2\beta + n_2\beta' + 2p_2\pi) = 0.$$

Or N_1 et N_2 ne peuvent pas être nuls car (J_y) a au moins un point logarithmique, comme nous l'avons déjà montré. On tire de là, par un calcul déjà fait (paragraphe 18):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

et comme les numérateurs sont premiers entre eux ainsi que les dénominateurs on voit que

$$m_1 = \pm m_2, \quad n_1 = \pm n_2, \quad p_1 = \pm p_2.$$

Donc tous les résidus conjugués pour J_x et J_y sont des équimultiples de $\frac{m_1\omega + n_1\omega'}{2i\pi}$ et de $\frac{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}{2\pi}$, qu'il s'agisse de résidus positifs ou de résidus négatifs pour J_y.

Il en résulte que la différence $J_x - cJ_y$ a *tous* ses résidus nuls. Comme elle n'a pas de singularités polaires, c'est une intégrale de première espèce.

Si nous posons à nouveau

$$X = x - \frac{m_1 \omega + n_1 \omega'}{i(m_1 \beta + n_1 \beta' + 2 p_1 \pi)} y,$$

$$Y = \frac{2\pi}{m_1 \beta + n_1 \beta' + 2 p_1 \pi} y,$$

puis:

$$X = J_x - \frac{m_1 \omega + n_1 \omega'}{i(m_1 \beta + n_1 \beta' + 2 p_1 \pi)} J_y = K_X,$$

$$Y = \frac{2\pi}{m_1 \beta + n_1 \beta' + 2 p_1 \pi} J_y = K_Y$$

K_X est une intégrale de première espèce; comme les résidus de J_y sont des multiples de $\frac{m_1 \beta + n_1 \beta' + 2 p_1 \pi}{2\pi}$ ceux de K_Y sont tous des nombres entiers.

42. Il est facile maintenant de mettre en évidence une propriété remarquable des zéros et pôles de U, V, W considérées comme fonctions de X et Y.

Nous supposons, pour simplifier les raisonnements que les sections planes de $\Phi_1(U, V, W) = 0$ définies par $U = 0$; $V = 0$; $W = 0$, sont des courbes qui ne se décomposent pas en plusieurs autres; cela ne restreint pas la généralité puisqu'on pourrait toujours effectuer sur la surface une transformation homographique, sans rien changer à ce qui précède.

Nous désignerons par $U(X, Y)$, $V(X, Y)$, $W(X, Y)$ les fonctions méromorphes obtenues en considérant U, V, W comme fonctions de X et Y.

Si dans K_X et K_Y, on suppose $U = 0$, ces intégrales se réduisent à deux intégrales abéliennes $(K_X)_U$, $(K_Y)_U$ relatives à la courbe $U = 0$ de la surface $\Phi_1(U, V, W) = 0$ et les équations

$$(67) \qquad \begin{cases} X = (K_X)_U \\ Y = (K_Y)_U \end{cases}$$

définissent une multiplicité simple de zéros appartenant à $U(X, Y)$, lorsque le point (U, V, W) se déplace sur toute la courbe $U = 0$. Remarquons que $U(X, Y)$ admet aussi toutes les multiplicités de zéros qui se déduisent de la précédente par l'addition à X et à Y des sommes de multiples des périodes que l'on peut prendre sous la forme $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$.

Nous allons montrer que, parmi toutes ces multiplicités, il n'y en a qu'un nombre fini de distinctes.

En effet, l'intégrale $(K_X)_U$ est de première espèce et ne se réduit pas à une constante puisque la courbe $U = 0$ n'est pas une courbe plane particulière sur la surface et que K_X n'est pas une constante puisqu'elle admet certainement les périodes ω_1 et ω_2 (comme on le voit en faisant varier x et y, d'un système de valeurs x_0, y_0 arbitraire jusqu'à un système de valeurs $x_0 + m\omega + n\omega'$, $y_0 + mi\beta + ni\beta' + 2\,pi\pi$). Donc l'intégrale de première espèce $(K_X)_U$ a deux modules de périodicité distincts Ω_1, Ω_2 de rapport imaginaire et de la forme:

$$\Omega_1 = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2,$$
$$\Omega_2 = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$$

(λ_1, λ_2, μ_1 et μ_2 étant quatre entiers qui forment un déterminant différent de zéro) et tels que tous ses autres modules de périodicité sont des sommes de multiples de Ω_1 et Ω_2.

$(K_Y)_U$ admettra des modules de périodicité, correspondant à Ω_1 et Ω_2 de la forme

$$iB_1 = i(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + 2\lambda_3\pi),$$
$$iB_2 = i(\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + 2\mu_3\pi).$$

Elle admettra, en outre, nécessairement des périodes auxquelles correspondront zéro pour $(K_X)_U$ et qui seront des multiples de $2i\pi$, puisque l'intégrale $(K_Y)_U$ a au moins un point logarithmique dont le résidu est entier. Tous les modules de cette nature pour (K_Y) seront tous les multiples entiers d'un certain multiple entier de $2i\pi$; soit $2\nu i\pi$ ce multiple. Les intégrales $(K_X)_U$, $(K_Y)_U$ admettront donc les trois systèmes de modules conjugués: (Ω_1, iB_1), (Ω_2, iB_2), $(0, 2\nu i\pi)$ tels que tous leurs autres modules de périodicité conjugués seront des sommes de multiples entiers des précédents. Or ces trois systèmes de périodes se déduisent des trois systèmes $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, $(0, 2i\pi)$ par la transformation dont le déterminant est:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \nu \end{vmatrix} = \nu(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1).$$

Si l'on pose $\delta = \nu(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$, il y aura parmi les multiplicités de zéros qui se déduisent de (67) par addition des multiples de $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta)$, $(0, 2i\pi)$ en tout δ multiplicités distinctes.[1]

[1] Car parmi les homologues d'un point (x, y) relativement aux trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$ il y en a δ qui sont distincts relativement aux trois systèmes de périodes $(0, 2\nu i\pi)$, (Ω_1, iB_1), (Ω_2, iB_2).

La fonction $U(X, Y)$ a donc δ multiplicités simples de zéros et n'admet pas d'autres zéros. Remarquons que $U(X, Y)$ ne saurait admettre un multiplicité de zéros doubles si $U = 0$ est une section plane quelconque de la surface; en effet la même circonstance ne pourrait pas se présenter pour la fonction $U(X, Y) - h$, où h est une constante *quelconque*, d'après un raisonnement déjà fait.

Cherchons maintenant, pour la multiplicité simple (67) quelles sont les valeurs de Y qui correspondent à une valeur donnée de X. Il nous suffira, pour cela, d'appliquer un théorème de M. E. PICARD, à l'intégrale de première espèce $(K_X)_U$ qui n'a que deux périodes distinctes. D'après ce théorème à chaque valeur finie X_0 de X correspondent N points de la courbe $U = 0$, N étant un entier déterminé. A chacun de ces points correspondront pour y une valeur y_n $(n = 1, 2, \ldots N)$ et toutes celles qui s'en déduisent en ajoutant des multiples de $2\nu i\pi$: il n'y a pas à ajouter de multiples de iB_1 et de iB_2, car sans cela il faudrait ajouter à X_0 les multiples correspondants de Ω_1 et Ω_2. Donc à $X = X_0$ correspondent pour e^Y seulement N valeurs.

On voit bien facilement que chacune des déterminations de e^Y, considérée comme fonction de X ne peut admettre d'autres singularités que des points singuliers algébriques (pôles ou simplement points de ramification) pour toute valeur finie de X. Il en résulte que les fonctions entières symétriques simples des N déterminations de e^Y, qui sont des fonctions uniformes de X, se réduisent à des fonctions méromorphes de X. Par suite, la multiplicité (67) a une équation de la forme:

$$P_1(e^Y) = 0$$

où P_1 est un polynôme entier de degré N en e^Y; les coefficients sont des fonctions entières de X, qui n'admettent pas de facteur *commun;* c'est-à-dire qu'ils ne sont pas divisibles par une même fonction entière de X qui s'annule.

Il en sera de même pour ce qui concerne les $(\delta - 1)$ autres multiplicités de zéros de $U(X, Y)$. L'équation de l'ensemble des δ multiplicités aura donc la forme:

$$Q(e^Y) = 0$$

Q étant un polynôme analogue à P_1 de degré $N\delta$.

Cette dernière équation donne, d'après ce qui précède tous les zéros de $U(X, Y)$. Il est clair que les pôles de $U(X, Y)$ seront donnés d'une façon analogue par une équation

$$Q_1(e^Y) = 0$$

analogue à la précédente, car on peut changer U en $\frac{1}{U}$ dans l'équation de la surface.

Soit:

$$Q(e^Y) = \sum_{p=0}^{p=\delta N} A_p(X) e^{pY}$$

le polynôme Q ordonné suivant les puissances de e^Y.

Les zéros de $Q(e^Y)$ admettent les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$. On aura donc comme au paragraphe (28) les identités:

$$(68)\qquad \begin{aligned} A_p(X+\omega_1) &= e^{g_1(X)-pi\beta_1} A_p(X) \\ A_p(X+\omega_2) &= e^{g_2(X)-pi\beta_2} A_p(X). \end{aligned}$$

En multipliant $Q(e^Y)$ par une fonction entère de X qui ne s'annule pas, on peut supposer que dans les formules précédentes $g_1(X)=0$ et $g_2(X)=aX+b$ où a et b sont deux constantes; si nous posons

$$Q(e^Y) = R_1(X, e^Y)$$

nous pouvons supposer que l'on a les identités:

$$(69)\qquad \begin{aligned} R_1(X+\omega_1, e^{Y+i\beta_1}) &= R_1(X, e^Y) \\ R_1(X+\omega_2, e^{Y+i\beta_2}) &= e^{aX+b} R_1(X, e^Y). \end{aligned}$$

Si $m_{1,2}$ est l'entier caractéristique de la fonction U relatif aux systèmes de pèriodes $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, il sera aussi l'entier caractéristique pour $R_1(X, e^Y)$; par suite

$$a = -\frac{2i\pi m_{1,2}}{\omega_1}.$$

De la même façon, pour les pôles de U, on pourra multiplier $Q_1(e^Y)$ par une fonction entière de X, ne s'annulant pas de sorte que le produit $R_2(X, e^Y)$ satisfera aux identités:

$$(70)\qquad \begin{aligned} R_2(X+\omega_1, e^{Y+i\beta_1}) &= R_2(X, e^Y) \\ R_2(X+\omega_2, e^{Y+i\beta_2}) &= e^{aX+b'} R_2(X, e^Y) \end{aligned}$$

où a est la même constante $-\frac{2i\pi m_{1,2}}{\omega_1}$ que plus haut; b' est une autre constante.

Le quotient $\frac{R_1(X, e^Y)}{R_2(X, e^Y)}$ admettra les mêmes zéros et les mêmes pôles que $U(X, Y)$ et par suite nous pouvons poser:

$$U(X, Y) = \frac{R_1(X, e^Y)}{R_2(X, e^Y)} e^{H(X, Y)}$$

où $H(X, Y)$ est une fonction entière de X et Y; $U(X, Y)$ admettant les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, il résulte de (69) et (70) les identités:

$$e^{H(X+\omega_1,\, Y+i\beta_1)} = e^{H(X,\, Y)}$$

$$e^{H(X+\omega_2,\, Y+i\beta_2)} = e^{b'-b}\, e^{H(X,\, Y)}$$

$$e^{H(X,\, Y+2i\pi)} = e^{H(X,\, Y)}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques on voit que $\frac{\partial H}{\partial X}$ et $\frac{\partial H}{\partial Y}$ admettent les trois systèmes de périodes: comme ce sont des fonctions entières elles se réduisent à des constantes et par suite on a:

$$H(X, Y) = a_1 X + b_1 Y + c_1$$

a_1, b_1, c_1 étant trois constantes. Mais comme $e^{H(X,\, Y)}$ admet la période $2i\pi$ relativement à la variable Y, b_1 est un nombre entier. Finalement on aura:

$$U(X, Y) = \frac{e^{a_1 X + b_1 Y + c_1} R_1(X, e^Y)}{R_2(X, e^Y)}.$$

Comme b_1 est un entier, le second membre est une fonction rationnelle de e^Y, et les coefficients sont manifestement des fonctions Θ de la variable X.

On aura ensuite des expressions de même forme pour $V(X, Y)$ et $W(X, Y)$. Si nous revenons à la fonction $z = f(x, y)$, nous avons vu qu'elle est une fonction rationnelle de U, V, W. Elle sera donc elle-même une fraction rationnelle en e^Y, les coefficients étant des fonctions Θ de la variable X.

Ainsi se trouve établi le théorème qui était le but de cette dernière partie.

Note I.

Les zéros de la fonction entière $g_1(x, y)$ admettant les trois systèmes de périodes *non exceptionnels* $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ si l'on fait le changement de variables

$$X = \frac{2i\pi}{\omega} x, \qquad Y = y - \frac{i\beta}{\omega} x \tag{1}$$

la fonction $g_1(x, y)$ deviendra une fonction entière $G_1(X, Y)$ dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes:

$$(0,\ 2\,i\pi),\ (2\,i\pi,\ 0),\ (a,\ b)$$

en posant:

$$a = 2\,i\pi\frac{\omega'}{\omega} = \lambda_1 + \mu_1 i, \qquad b = i\beta' - \frac{i\beta\omega'}{\omega} = \lambda_2 + \mu_2 i. \tag{2}$$

λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 sont les parties réelles et les parties imaginaires de a et de b. Nous aurons

$$\lambda_1 \neq 0$$

puisque le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est nécessairement imaginaire.

De plus nous pouvons supposer que la fonction $G_1(X, Y)$ (et par suite aussi $g_1(x, y)$) a été multipliée préalablement par une fonction entière ne s'annulant pas et choisie de telle sorte que l'on ait les trois identites suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} G_1(X,\ Y + 2\,i\pi) = G_1(X,\ Y) \\ G_1(X + 2\,i\pi,\ Y) = e^{m_{2,1}Y} G_1(X,\ Y) \\ G_1(X + a,\ Y + b) = e^{G_2(X,\,Y) + AX + m_{3,1}Y} G_1(X,\ Y) \end{array}\right. \tag{3}$$

où $m_{2,1}$, $m_{3,1}$ sont les entiers caractéristiques relatifs à $(2\,i\pi,\ 0)$ et $(0,\ 2\,i\pi)$ pour le premier, (a, b) et $(0,\ 2\,i\pi)$ pour le second. $G_2(X,\ Y)$ est une fontion entière admettant la période $2\,i\pi$ relativement à chacune des variables X et Y; A est une constante dont il est inutile ici de préciser l'expression. C'est là, aux notations près, le résultat déjà rappelé de M. Appell. Or on peut trouver une fonction entière $H(X,\ Y)$ satisfaisant aux identités suivantes:

$$H(X + 2\,i\pi,\ Y) = H(X,\ Y + 2\,i\pi) = H(X,\ Y)$$

$$H(X + a,\ Y + b) - H(X,\ Y) = \lambda_1\frac{\partial G_2}{\partial X} + \lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial Y}.$$

(Voir à ce sujet notre Mémoire cité, page 36).

En revenant aux variables x et y, $G_2(X,\ Y)$ et $H(X,\ Y)$ deviendront respectivement $g_2(x, y)$ et $h(x, y)$ et ces deux fonctions entières satisferont aux identités suivantes:

$$\left\{\begin{array}{ll} g_2(x, y + 2\,i\pi) = g_2(x, y) & h(x + \omega, y + i\beta) = h(x, y) \\ g_2(x + \omega, y + i\beta) = g_2(x, y) & h(x + \omega', y + i\beta') - h(x, y) = \frac{\lambda_1\omega}{2\,i\pi}\frac{\partial g_2}{\partial x} \\ h(x, y + 2\,i\pi) = h(x, y) & \end{array}\right. \tag{4}$$

car il résulte des formules (2), β et β' étant réels, que $\lambda_2 = -\frac{\lambda_1 \beta}{2\pi}$ et par suite que l'on a:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{2 i\pi}{\lambda_1 \omega}\left[\lambda_1 \frac{\partial G_2}{\partial X} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial Y}\right]. \tag{5}$$

On posera ensuite, x_0 désignant une constante

$$k(x, y) = \frac{2 i\pi}{\lambda_1 \omega}\int_{x_0}^{x} h(x, y)\,dx$$

et l'on aura les identités suivantes (voir Mémoire cité page 38)

$$\left\{\begin{aligned} &k(x, y + 2 i\pi) = k(x, y)\\ &k(x + \omega, y + i\beta) - k(x, y) = -\varphi(y)\\ &k(x + \omega', y + i\beta') - k(x, y) = g_2(x, y) - \psi(y)\end{aligned}\right. \tag{6}$$

où $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont deux fonctions entières de y, admettant la période $2 i\pi$.

Considérons maintenant la fonction $g_3(x, y)$ définie en posant

$$g_3(x, y) = e^{-k(x, y)} g_1(x, y). \tag{7}$$

Cette nouvelle fonction satisfait aux identités suivantes qui résultent sans difficulté, des identités (3) et (6)

$$\begin{aligned} &g_3(x, y + 2 i\pi) = g_3(x, y)\\ &g_3(x + \omega, y + i\beta) = e^{m_{2,1}\left(y - \frac{i\beta}{\omega}x\right) + \varphi(y)} g_3(x, y)\\ &g_3(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) + A_1 x + m_{3,1} y} g_3(x, y)\end{aligned}$$

où A_1 est une constante.

Si l'on pose ensuite:

$$g_4(x, y) = g_3(x, y)\, e^{m_{2,1}\frac{i\beta}{2\omega^2}x^2}$$

$g_4(x, y)$ satisfera aux nouvelles identités:

$$\begin{aligned} &g_4(x, y + 2 i\pi) = g_4(x, y)\\ &g_4(x + \omega, y + i\beta) = e^{\varphi(y) + c_1 + m_{2,1} y} g_4(x, y)\\ &g_4(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) + A_2 x + m_{3,1} y + c_2} g_4(x, y)\end{aligned}$$

où A_2, c_1 et c_2 sont trois nouvelles constantes.

En écrivant l'expression de l'entier caractéristique $m_{3,2}$ on obtient:

$$2\,i\pi m_{3,2} = \psi(y + i\beta) - \psi(y) + A_2\omega + m_{3,1}i\beta - \varphi(y + i\beta') + \varphi(y) - m_{2,1}i\beta'.$$

En remarquant que $\psi(y)$ et $\varphi(y)$ sont deux fonctions entières admettant la période $2\,i\pi$, et par conséquent deux séries procédant suivant les puissances positives et négatives de e^y, l'identification donne immédiatement:

$$\psi(y + i\beta) - \psi(y) = \varphi(y + i\beta') - \varphi(y)$$

et

(8) $$A_2 = \frac{m_{1,3}i\beta + m_{2,1}i\beta' + 2\,m_{3,2}i\pi}{\omega}.$$

Posons en outre

$$\varphi_1(y) = \varphi(y) + c_1, \qquad \psi_1(y) = \psi(y) + c_2$$

nous obtenons finalement les formules

$$\begin{cases} g_4(x, y + 2\,i\pi) = g_4(x, y) \\ g_4(x + \omega, y + i\beta) = e^{\varphi_1(y) + m_{2,1}y} g_4(x, y) \\ g_4(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi_1(y) + A_2x + m_{3,1}y} g_4(x, y) \end{cases}$$

où $\varphi_1(y)$ et $\psi_1(y)$ sont des fonctions entières admettant la période $2\,i\pi$ et satisfaisant à l'identité:

$$\varphi_1(y + i\beta') - \varphi_1(y) = \psi_1(y + i\beta) - \psi_1(y)$$

et A_2 ayant la valeur (8).

Note II.

Soit, entre les variables y et t, une relation de la forme

(1) $$y = ALt + \frac{B}{t^p}\varphi(t)$$

où A et B sont deux constantes dont la seconde est supposée différente de zéro, la première pouvant être nulle; p est un entier positif, non nul; $\varphi(t)$ est une fonction de t qui, pour $t = 0$, est régulière et différente de zéro; on peut supposer $\varphi(0) = 1$.

Dans le plan de la variable t menons par l'origine deux demi-droites OD, OD', la première faisant avec ox un angle quelconque, mais fixe, α et la seconde faisant avec ox l'angle $\alpha + \frac{2\pi}{p}$. Si t reste à l'intérieur de l'angle de OD sur OD', en prenant une détermination quelconque de Lt on aura une fonction uniforme de t, telle que le produit $t^p Lt$ tende vers zéro avec t.

Si nous écrivons alors:

$$(2) \qquad y = \frac{B}{t^p}\left[\varphi(t) + \frac{A}{B} t^p Lt\right]$$

la quantité entre crochets aura pour limite 1 lorsque t tend vers zéro, puisque $\varphi(0) = 1$.

On peut donc choisir un nombre positif r, inférieur au rayon de convergence de $\varphi(t)$ et en outre assez petit pour que si

$$|t| \leq r,$$

t restant toujours dans l'angle DOD', l'argument de

$$\varphi(t) + \frac{A}{B} t^p Lt$$

reste compris entre $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, ε étant un nombre positif très petit donné à l'avance.

Sous ces hypothèses, si nous appelons d et d' les points de rencontre de OD et OD' avec le cercle ayant pour centre l'origine et r pour rayon, le point t reste à l'intérieur du secteur circulaire dod' d'angle $\frac{2\pi}{p}$ et de rayon r. Dans tout ce qui suit t sera toujours supposé à l'intérieur de ce secteur ou sur son périmètre.

Désignons par m un nombre positif, limite supérieure du module de y, lorsque t reste sur l'arc de cercle dd'. Choisissons un nombre positif M supérieur à m. Comme il résulte de l'équation (2) que y augmente indéfiniment lorsque t tend vers zéro, on peut choisir un nombre positif ϱ assez petit pour que si

$$|t| \leq \varrho$$

on ait

$$|y| > M.$$

Nous désignerons par δ et δ' les points où le cercle de centre O et de rayon ϱ coupe OD et OD'. Nous allons supposer que le point t reste à l'intérieur du contour limité par les deux arcs de cercles dd', $\delta\delta'$ et par les deux segments rectilignes $d\delta$, $d'\delta'$. Imaginons maintenant, que le point t soit sur le segment rectiligne $d\delta$. L'argument de t est alors égal à α; désignons par β l'argument de B; celui de $\varphi(t)+\frac{A}{B}t^p Lt$ est compris, comme il a été dit, entre $-\varepsilon$ et ε. Donc l'argument de y est lui-même compris entre $\beta-p\alpha-\varepsilon$ et $\beta-p\alpha+\varepsilon$; or l'angle α, resté jusqu'ici arbitraire peut être choisi de façon que $\beta-p\alpha=0$. L'argument précédent de y est alors compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.

Si dans le plan de y nous traçons deux demi-droites $\omega\Delta$, $\omega\Delta'$ issues de l'origine ω, et correspondant aux arguments $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, les valeurs de y qui correspondent aux valeurs de t situées sur $d\delta$, seront intérieures à l'angle $\Delta\omega\Delta'$.

Si on suppose que t est sur $d'\delta'$ c'est-à-dire a un argument égal à $\alpha+\frac{2\pi}{p}$, la conclusion reste la même: les valeurs de y sont encore dans l'angle $\Delta\omega\Delta'$.

Il est maintenant facile d'étudier le contour que décrira le point y, si t parcourt dans le sens direct le contour $\delta'\delta d d'\delta'$ formé par les deux arcs de cercle et les deux segments rectilignes.

Traçons pour cela dans le plan de y les cercles de centre ω et de rayons respectifs m et M et qui couperont le premier en l et n, le second en L et N les demi-droites $\omega\Delta$ et $\omega\Delta'$.

Si t parcourt l'arc dd' dans le sens direct le module de y reste inférieur à m; y part d'un point y_1 intérieur au cercle de rayon m et intérieur à l'angle $\Delta\omega\Delta'$, et aboutit à un point y_2 situé de façon analogue, après avoir fait une fois le tour de l'origine dans le sens indirect et à l'intérieur du cercle de rayon m.

t parcourant $d'\delta'$, y reste dans l'angle $\Delta\omega\Delta'$ et parcourt un chemin y_2y_3 aboutissant au point y_3 de module supérieur à M.

t parcourant l'arc $\delta'\delta$, y parcourt un chemin y_3y_4 tout entier extérieur au cercle de rayon M et aboutissant au point y_4 intérieur à $\Delta\omega\Delta'$, après avoir fait une fois le tour de l'origine dans le sens direct. Enfin t parcourant δd, y reste dans l'angle $\Delta\omega\Delta'$ et y décrit un chemin y_4y_1 aboutissant au point initial y_1.

Désignons par U l'aire de la couronne comprise entre les deux cercles précédents de rayons M et m, et dont on a retranché toute la portion intérieure à l'angle $\Delta\omega\Delta'$.

Si y_0 est une valeur intérieure à U, il résulte de ce qui précède (il suffit de faire la figure pour s'en rendre compte) que l'argument de $(y-y_0)$ augmente de 2π lorsque t parcourt le contour $dd'\delta'\delta d$ et que par conséquent l'équation

$$y_1 = ALt + \frac{B}{t^p}\varphi(t)$$

admet en t une racine et une seule intérieure à $dd'\delta'\delta d$, et par suite évidemment, une seule dans le secteur $d'od$ (Lt ayant toujours, bien entendu, la même détermination que celle qui a été choisie au début).

Mais comme M est tout à fait arbitraire et assujetti seulement à la condition d'être supérieur à m, on voit que l'aire U peut comprendre toute la portion du plan représentatif de y, dont on a retranché les portions intérieures soit au cercle de rayon m soit à l'angle $\varDelta \omega \varDelta'$.

La variable y restant dans cette aire U, nous avons ainsi défini une fonction uniforme t de y satisfaisant à la relation (1). Cette fonction est évidemment régulière et *tend vers zéro lorsque y augmente indéfiniment* en restant toujours dans l'aire U.

2) Supposons que l'on ait:

$$x = \int R_1(u, v) du, \quad y = \int R_2(u, v) du,$$

où les deux intégrales sont deux intégrales abéliennes attachées à une même courbe algébrique, (u, v) étant les coordonnées d'un point de la courbe. Si un point (u_0, v_0) est un point singulier pour l'intégrale y, exprimons les coordonnées (u, v) d'un point de la courbe au voisinage de (u_0, v_0) comme fonctions régulières, pour $t = 0$, d'un certain paramètre t, $t = 0$ correspondant à (u_0, v_0), et à un point (u, v) très voisin de (u_0, v_0) ne correspondant qu'une seule valeur de t.

L'expression de y sera de la forme suivante (en choisissant l'une des déterminations de l'intégrale)

$$y = ALt + \frac{B}{t^p}\varphi(t)$$

$\varphi(t)$ étant régulière pour $t = 0$, A et B des constantes, p un entier positif qui ne sera pas nul si le point singulier n'est pas logarithmique simple ce que nous supposerons d'abord; B est alors $\neq 0$; A peut être nul. Nous retrouvons ainsi l'équation (1) du paragraphe précédent. Nous supposons que les expressions de x et de y satisfont à la relation

$$g(x, y) = 0, \tag{3}$$

où $g(x, y)$ est une fonction entière dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes conjuguées non exceptionnels $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Prenons dans le plan de la variable y une bande V limitée par deux parallèles à l'axe des imaginaires pures et choisies de telle sorte que la bande V ne contienne aucun point de ramification de x considérée comme fonction de y dans la relation (3).

Retranchons de la bande V, si il y a lieu, la portion qui pourrait se trouver extérieure à l'aire U définie dans le paragraphe précédent et soit V_1 ce qui reste, après cela, de V. La bande V_1 s'étend certainement jusqu'à l'infini dans les deux sens.

Nous pouvons donc supposer que y se déplace sur une parallèle G à l'axe des imaginaires située dans V_1 de telle façon que la partie imaginaire de y va en croissant au delà de toute limite.

Puisque x et y satisfont à l'équation (3), nous avons vu qu'il existe pour x considérée comme fonction de y à l'intérieur de V des augments conjugués, et par suite que $\frac{dx}{dy}$ a une période non nulle de la forme $\mu_1 i\beta + \nu_1 i\beta' + 2\varrho_1 i\pi$. Donc y parcourant la droite G, dans le sens indiqué, le point representant $\frac{dx}{dy}$ parcourt un nombre illimité de fois un contour fermé déterminé Γ; mais d'autre part, y augmentant indéfiniment, t tend vers o comme nous l'avons vu; donc (u, v) tend vers (u_0, v_0) et par suite

$$\frac{dx}{dy} = \frac{R_1(u, v)}{R_2(u, v)}$$

tend vers une valeur parfaitement déterminée. Il est donc nécessaire que le contour Γ se réduise à un seul point, c'est-à-dire que $\frac{dx}{dy} = \text{const.}$ On aura alors entre x et y la relation du premier degré:

$$x = \frac{\mu_1\omega + \nu_1\omega'}{\mu_1 i\beta + \nu_1 i\beta' + 2\varrho_1 i\pi} y + c \tag{4}$$

c étant une constante, et le coefficient de y se trouvant déterminé par l'existence des augments conjugués $(\mu_1\omega + \nu_1\omega', \mu_1 i\beta + \nu_1 i\beta' + 2\varrho_1 i\pi)$. Donc, l'intégrale

$$y = \int R_1(u, v)\,du$$

ne peut admettre de singularité polaire, même superposée à une singularité logarithmique que si x et y sont liées par la relation (4) c'est-à-dire si $g(x, y)$ admet une multiplicité simple de zéros fournie par (4). A part ce cas exceptionnel, l'intégrale $\int R_2(u, v)\,du$ ne peut avoir que des points logarithmiques simples.

Mais ce cas d'exception se trouve lui-même écarté dans les circonstances suivantes. Supposons que les formules précédentes

$$x = \int R_1(u, v)\,du, \qquad y = \int R_2(u, v)\,du$$

aient pour conséquence nécessaire les formules suivantes

$$u = f_1(x, y)$$
$$v = f_2(x, y),$$

où $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ sont deux fonctions méromorphes de x et y aux périodes $(0, 2\,i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. (C'est là le cas qui se rencontre aux paragraphes 34 et 39 de la 2ème partie de notre mémoire). Si nous supposons comme plus haut, que y parcourt la droite G dans le sens positif de l'axe des imaginaires, y augmentant de $\mu_1 i\beta + \nu_1 i\beta' + 2\varrho_1 i\pi$, x augmente de $\mu_1\omega + \nu_1\omega'$ et u et v reprennent les mêmes valeurs par suite de la périodicité de $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$. Donc u et v ne tendent pas vers u_0, v_0 et par suite t ne peut pas tendre vers zéro. La contradiction avec ce qui précède est évidente, et l'impossibilité d'une singularité polaire pour y se trouve démontrée dans ce cas.

Note III.

1. Considérons le système d'équations:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = \varphi(u, v), \end{cases}$$

où $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ sont deux fonctions qui pour $u = 0$, $v = 0$ sont régulières et s'annulent et qui, dans le voisinage de ce point $u = v = 0$ n'ont pas de *facteur commun*. On peut supposer que $f(0, v)$ et $\varphi(0, v)$ ne sont nuls identiquement ni l'un ni l'autre: dans le cas contraire, on effectuerait sur u et v une substitution linéaire générale, ce qui ne changerait rien aux conclusions qui suivent.

Enfin $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ sont deux fonctions indépendantes, c'est-à-dire dont le déterminant fonctionnel n'est pas nul identiquement, mais *peut s'annuler pour* $u = v = 0$.

Dans ces conditions, montrons que pour chaque système de valeurs arbitraires d' x et y, mais choisies dans un domaine assez petit défini par les inégalités

$$|x| < \varepsilon, \qquad |y| < \varepsilon$$

les équations (1) admettent un système de solutions au moins en u et v, dans un certain domaine

$$|u| < \eta, \qquad |v| < \eta$$

η pouvant être aussi petit qu'on le veut, si ε a été choisi assez petit.

En effet, comme la fonction $x - f(u, v)$ des trois variables x, u, v ne s'annule pas identiquement pour $x = 0$, $u = 0$, l'équation

$$x - f(u, v) = 0$$

est, dans un domaine assez petit du point $u = v = x = 0$, équivalente à l'équation

$$P(v) = 0,$$

où $P(v)$ est un polynôme entier en v, d'un certain degré n, dans lequel le coefficient de v^n est l'unité, tous les autres coefficients étant des fonctions régulières de u et x pour $u = x = 0$ et s'annulant pour ce système de valeurs.

De la même façon, l'équation

$$y - \varphi(u, v) = 0$$

peut être remplacée par l'équation équivalente

$$Q(v) = 0,$$

où $Q(v)$ est analogue à $P(v)$.

Entre les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} P(v) = 0 \\ Q(v) = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

on peut éliminer v et on obtient un résultant

$$R(u, x, y) = 0.$$

$R(u, x, y)$ est régulière et s'annule pour $u = x = y = 0$. Mais $R(u, o, o)$ n'est pas nul quel que soit u, car sans cela les équations

$$0 = f(u, v)$$
$$0 = \varphi(u, v)$$

auraient en v une solution commune quel que soit u, ce qui est impossible puisqu'on suppose que $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ n'ont pas de facteur commun.

Il en résulte que la relation

$$R(u, x, y) = 0$$

est, dans un petit domaine du point $u = x = y = 0$, équivalente à l'équation

$$S(u) = 0, \tag{3}$$

où $S(u)$ est un polynôme entier en u dont les coefficients sont, pour $x = y = 0$, des fonctions régulières et qui s'annulent, sauf le coefficient du terme du plus haut degré qui est égal à 1.

Si l'on donne à x et y dans l'équation (3) un système de valeurs arbitraires x_1, y_1 choisies dans un domaine très-petit

$$|x| < \varepsilon, \qquad |y| < \varepsilon$$

cette équation fournira au moins une valeur $u = u_1$ très-petite aussi. Le résultant des équations (2) étant nul pour $x = x_1$, $y = y_1$, $u = u_1$, ces équations admettront en v une racine commune très petite $v = v_1$, si x, y, u sont remplacés par x_1, y_1, u_1.

La propriété énoncée se trouve donc établie.

2. Considérons en second lieu le système suivant

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \lambda(u, v) f(u, v) \\ y = \lambda(u, v) \varphi(u, v), \end{cases}$$

où $\lambda(u, v)$, $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ sont trois fonctions régulières pour $u = v = 0$; de plus $\lambda(u, v)$ s'annule pour $u = v = 0$ et l'on suppose que $\lambda(u, v)$ est *irréductible* au voisinage de $u = v = 0$, c'est-à-dire n'est pas le produit de deux fonctions régulières et s'annulant pour $u = v = 0$; en outre on peut supposer que $\lambda(0, v)$ n'est pas nul identiquement, sans cela on effectuerait sur u et v une substitution linéaire générale. Enfin $\varphi(0, 0)$ est supposé différent de zéro, de sorte que au voisinage de $u = v = 0$, y ne peut s'annuler que si $\lambda(u, v)$ s'annule.

Dans ce qui suit nous écrirons λ, f, φ au lieu de $\lambda(u, v)$, $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ pour abréger l'écriture.

Le quotient $\frac{f}{\varphi}$ est une fonction régulière dans un domaine

$$(5) \qquad |u| < \varepsilon_1, \qquad |v| < \varepsilon_1$$

choisi assez petit puisque $\varphi(0, 0) \neq 0$. Posons:

$$(6) \qquad \frac{f}{\varphi} = \psi_1;$$

ψ_1 sera régulière pour $u = v = 0$; soit a_1 la valeur de $\psi_1(0, 0)$; la différence $\psi_1 - a_1$ s'annule pour $u = v = 0$; supposons qu'elle soit divisible par le facteur $\lambda(u, v)$ et posons

$$(7) \qquad \psi_1 = a_1 + \lambda f_1;$$

f_1 sera une fonction de u et v régulière pour $u = v = 0$.

Posons:

(8)
$$\frac{f_1}{\varphi} = \psi_2,$$

et a_2 étant la valeur de $\psi_2(0, 0)$, supposons que $\psi_2 - a_2$ est encore divisible par $\lambda(u, v)$, et soit

(9)
$$\psi_2 = a_2 + \lambda f_2,$$

f_2 étant régulière pour $u = v = 0$. Posons encore:

(10)
$$\frac{f_2}{\varphi} = \psi_3$$

en appelant a_3 la valeur de $\psi_3(0, 0)$, si la différence $\psi_3 - a_3$ est aussi divisible par λ, nous poserons

(11)
$$\psi_3 = a_3 + \lambda f_3;$$

en poursuivant ainsi, supposons qu'on arrive à une fonction ψ_s, telle que la différence $\psi_s - a_s$ ne soit pas divisible par λ. Si cette circonstance s'était présentée pour la première différence $\psi_1 - a_1$, on aurait dans ce qui suit $s = 1$.

On a entre les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_s$ les identités suivantes

(12)
$$\begin{cases} \psi_1 = a_1 + \lambda\varphi\psi_2 \\ \psi_2 = a_2 + \lambda\varphi\psi_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \psi_{s-1} = a_{s-1} + \lambda\varphi\psi_s \end{cases}$$

D'où l'on tire la suivante:

(13)
$$\psi_1 = a_1 + a_2(\lambda\varphi) + a_3(\lambda\varphi)^2 + \cdots + a_{s-1}(\lambda\varphi)^{s-2} + \psi_s(\lambda\varphi)^{s-1}.$$

x et y étant liées à u et à v par les relations (4), l'identité précédente multipliée par $\lambda\varphi$, peut être écrite sous la forme:

(14)
$$x = a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{s-1} y^{s-1} + y^s \psi_s.$$

Si $s = 1$, il n'y a pas d'identités (12), mais on a immédiatement d'après (6)

$$x = y\psi_1$$

qui rentre dans la relation (14) pour $s = 1$.

Considérons les deux équations

$$(15) \qquad \begin{cases} \alpha = \psi_s(u, v) - a_s \\ y = \lambda(u, v)\varphi(u, v) \end{cases}$$

les seconds membres sont des fonctions régulières pour $u = 0$, $v = 0$, sans facteur commun dans le voisinage de ce point. Car $\lambda(u, v)$ est le seul facteur, *irréductible* par hypothèse, du second membre de la deuxième équation et il n'appartient pas, par hypothèse, à $\psi_s(u, v) - a_s$. D'ailleurs les deux seconds membres du système (15) sont des fonctions indépendantes de u et v; car si $\psi_s(u, v)$ était fonction de y, d'après (14) x serait aussi fonction de y, et dans les équations (4) les seconds membres seraient liés par une relation, cas que nous écartons ici.

Il résulte de là, d'après le premier paragraphe de cette note, que si nous prenons pour α et y deux valeurs arbitraires α_1 et y_1 d'un domaine assez petit:

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \qquad |y_1| < \varepsilon$$

les équations (15) admettront en u et v un système de solutions (u_1, v_1) dans un domaine très-petit

$$|u| < \eta, \qquad |v| < \eta$$

donné à l'avance. Par suite, si x_1 est la valeur de x fournie par la relation:

$$(16) \qquad x_1 = a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + \cdots + a_{s-1} y_1^{s-1} + (\alpha_1 + a_s) y_1^s$$

on aura:

$$x_1 = \lambda(u_1, v_1) f(u_1, v_1)$$
$$y_1 = \lambda(u_1, v_1)\varphi(u_1, v_1).$$

En résumé, si dans la relation (16) on prend y_1 et α_1 arbitraires mais assez petits, les équations (4) pour $x = x_1$, $y = y_1$ admettent un système de solutions en u et v appartenant au domaine

$$|u| < \eta, \qquad |v| < \eta$$

où η a été pris arbitrairement petit.

Nous avons supposé, pour parvenir à ce resultat, que, après un certain nombre d'opérations, on parvenait à une fonction ψ_s telle que $\psi_s - a_s$ ne soit pas divisible par $\lambda(u, v)$. Montrons maintenant qu'il en est toujours ainsi.

Si dans les équations (4) on remplace u et v par deux fonctions *arbitraires* d'un paramètre t, régulières pour $t = 0$ et s'annulant pour cette valeur, pour des valeurs assez petites de t les seconds membres seront des fonctions régulières de t, et x et y se présentent ainsi comme fonctions régulières d'un seul paramètre. On peut alors considérer x comme fonction de y, et le développer, comme on sait, suivant les puissances entières et positives de $(y)^{\frac{1}{p}}$ p étant un entier positif. Or les premiers termes du développement sont manifestement donnés par la formule (14) jusqu'au terme en y^{s-1} inclusivement. Si on ne parvient pas à une fonction ψ_s, telle que $\psi_s - a_s$ ne soit pas divisible par $\lambda(u, v)$, on pourrait avoir tous les termes du développement de x suivant les puissances de y; cela revient à dire que x serait toujours la même fonction de y quelles que soient les deux fonctions de t qui remplacent u et v. Mais alors il y aurait évidemment une relation entre x et y considérées comme fonctions de u et v, hypothèse que nous avons écartée.