

SUR LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LE PROBLÈME DU CONTINU

PAR

J. KÖNIG.

à BUDAPEST.

(2^{me} communication.)

Ces quelques pages se rattachent directement aux développements que j'ai donnés sous le même titre il y a quelques mois (Acta, T. 30 pag 329.) Cependant le mode de raisonnement¹ exposé au paragraphe 3 de mon précédent article ne sera pas utilisé ici. Je lui substituerai, pour étayer mes vues demeurées les mêmes, une méthode nouvelle, qui repose essentiellement sur un approfondissement et une généralisation du concept de «définition finie».

Je ferai précéder cette exposition d'une seule remarque de principe. Poser les fondements de la théorie des ensembles, c'est exprimer sous forme explicite, c'est légaliser certains faits qui relèvent de l'intuition interne de notre entendement; en sorte que notre «pensée scientifique» se trouve être elle-même objet de la pensée scientifique. Cette parenté de la théorie des ensembles avec la logique et la doctrine de la connaissance est inéluctable, et elle apparaît déjà dans les éléments de l'arithmétique.

Dans cet ordre d'idées, la logique algébrique, créée à l'imitation des mathématiques, pourra, telle qu'elle est aujourd'hui, nous rendre des services: néanmoins, à elle seule, elle ne nous fera pas triompher des difficultés du problème. Les faits et les principes sur lesquels repose notre pensée scientifique doivent être analysés de plus près qu'ils ne l'ont encore été, et — avant tout — il est nécessaire de créer une discipline, que par analogie avec la «Physique mathématique», je serais tenté d'appeler: Théorie de l'évidence logique.

¹ Ce raisonnement peut et doit être modifié conformément aux nouveaux concepts, qui vont être traités ici.

Je me propose de poursuivre prochainement mes recherches en ce sens dans une publication plus détaillée.

I. Les éléments du continu dont la définition est finie forment un ensemble dénombrable que l'on peut écrire comme il suit, suivant le type ω :

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1k}, \dots) \\ (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2k}, \dots) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kk}, \dots) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (\text{I})$$

Dans ce tableau, les a_{ik} sont des entiers positifs quelconques, car nous avons défini le continu comme étant l'ensemble des objets

$$(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots),$$

où a_k désigne un entier positif quelconque. A l'aide du tableau (I), — appliquant un procédé semblable au «procédé diagonal» de CANTOR, c'est-à-dire posant

$$a_k = a_{kk} + d, \quad (\text{II})$$

— nous pouvons définir un nouvel élément du continu, soit $(a_1, a_2, \dots) = a^{(d)}$, où d a une valeur entière positive déterminée. Toutefois la définition de $a^{(d)}$ ne sera exempte de contradiction qu'à la condition que $a^{(d)}$ ne figure pas dans le tableau (I), c'est-à-dire n'ait pas une définition finie. En effet, si $a^{(d)}$ figurait dans (I) (par exemple à la $n^{\text{ième}}$ ligne), l'égalité (II) ne pourrait pas être satisfaite pour $k=n$, puisque l'on devrait avoir à la fois $a_n = a_{nn}$ et $a_n = a_{nn} + d$. Il semble donc que la définition de $a^{(d)}$, définition que nous avons établie en nous servant d'un nombre fini de signes, est une définition contradictoire, partant impossible. Mais, d'autre part, il nous est également impossible d'écarter comme faux le «fait» que nous tirions directement de notre intuition, à savoir qu'à l'aide du «procédé diagonal» nous pouvons réellement former un nouvel élément du continu. Ce paradoxe, si étrange en apparence, va précisément nous permettre d'approfondir d'une manière fondamentale les méthodes logiques qu'il convient d'employer dans la théorie des ensembles. Le *sens* de la méthode du «procédé diagonal» est clair et inattaquable: la contradiction n'apparaît que lorsque nous cherchons à exprimer ce *sens* sous la *forme* d'une définition finie. C'est là ce qui est *impossible*. Si nous pouvions, — sans en modifier le sens, — changer la forme de notre définition, de manière qu'elle ne soit plus une défini-

tion finie, alors nous aurions à faire à une définition véritable et non-contradictoire de l'élément du continu $\alpha^{(d)}$. Ainsi il nous faut, — et il en est fréquemment ainsi; il en est ainsi, à vrai dire, chaque fois que nous précisons notre pensée scientifique sur quelque point essentiel, — il nous faut, dis-je, perfectionner notre «langage». C'est à quoi nous parviendrons de la manière suivante.

A côté des définitions finies, nous introduirons des définitions que nous appellerons «pseudofinies». Ces définitions s'exprimeront par une infinité (dénombrable) de signes (mots, lettres); mais, à partir d'un certain rang n (n nombre ordinal fini), il n'y figurera plus qu'un seul et même signe (N.V.).¹ Pour donner un sens (contenu) à ces définitions, nous dirons: une définition pseudofinie équivant, comme sens, à la définition finie que l'on obtiendrait en supprimant tous les signes (N.V.), c'est-à-dire en se bornant aux n premiers signes. La condition nécessaire et suffisante pour que la suite infinie de signes considérée constitue une définition logique, est que, sans arbitraire et sans contradiction, la suite finie correspondante (que nous appellerons *partie principale* de la définition pseudofinie) définisse (quant à son sens, non nécessairement quant à sa forme) un élément du continu.

Ainsi avec une définition finie, on pourra former différentes définitions pseudofinies: il suffira d'adjoindre (N.V.) un nombre de fois égal à ω , $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... en général à α , en désignant par α un nombre quelconque de la seconde classe de nombres $Z(\aleph_0)$.

2. D'après ce qui précède, il existe des éléments du continu qui, par la partie principale de leur définition, sont sans doute entièrement déterminés, mais dont la définition cependant ne se dégage de toute contradiction que lorsqu'on adjoint à la partie principale finie (H) le signe (N.V) répété ω fois. La définition d'un tel élément sera parfaitement représentée par l'image $H(N.V.)^\omega$. Mais il faut soigneusement distinguer cette image de la définition proprement dite: car cette dernière, pour être formellement exempte de contradiction, doit comprendre une infinité de signes. L'ensemble des éléments du continu dont la définition est donnée par une image telle que $H(N.V.)^\omega$, — en y comprenant même tous les éléments à définition finie, — formera un ensemble dénombrable: en effet, à deux éléments différents correspondent nécessairement des parties principales différentes, et celles-ci constituent un ensemble dénombrable.

L'ensemble dénombrable d'éléments du continu que nous obtenons ainsi, — en y comprenant les éléments à définition finie, — sera représenté, suivant le

¹ (N.V.) = ne varietur.

3. Les considérations qui précèdent nous conduisent finalement à ce résultat que, si l'on était en droit de regarder la deuxième classe de nombres comme un ensemble, c'est à dire comme un composé d'éléments parfaitement séparés et distingués, cet ensemble serait dénombrable. Nous démontrons en effet que, si l'hypothèse était admise: d'une part, les nombres de première espèce seraient dénombrables; d'autre part, tout nombre de la deuxième classe serait de première espèce.

De fait, l'ensemble des suites finies de signes telles que H est dénombrable, et il en est de même, par suite, de l'ensemble des nombres de première espèce, puisqu'à des α différents correspondent par définition des H différents.

Supposons d'autre part que les nombres de la seconde classe ne soient pas tous de première espèce: il existerait alors nécessairement un premier α_0 , plus petit que tous les autres, qui ne serait pas de première espèce, tandis que ω , $\omega + 1$, etc. seraient de première espèce. Mais ceci conduit à une contradiction. En effet, les suites finies de signes dont le rang est un nombre de la deuxième classe, sont dénombrables, puisque l'ensemble de toutes les suites finies de signes est lui-même dénombrable: nous pouvons donc les désigner, suivant le type ω , par H_1, H_2, \dots . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ les rangs correspondants. Les définitions pseudofinies

$$H_1(N.V.)^{\alpha_1}, \quad H_2(N.V.)^{\alpha_2}, \quad (IV)$$

définiront respectivement les éléments du continu

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11}, a_{12}, \dots) \\ \dots \dots \dots \\ (a_{i1}, a_{i2}, \dots) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (IV')$$

Appliquant à (IV') le «procédé diagonal»,

$$a_k = a_{kk} + d,$$

et désignant par H_0 l'énoncé de ce procédé, nous voyons que la définition.

$$H_0(N.V.)^{\alpha_0}$$

sera exempte de contradiction, puisque, par hypothèse, (IV) ne contient aucune définition de la forme $H_0(N.V.)^{\alpha_0}$. Tout α_i inférieur à α_0 figure dans le tableau (IV) et, dès lors, la définition $H_0(N.V.)^{\alpha_i}$ est contradictoire. Il en résulte que H_0 est de rang α_0 , c'est à dire que le nombre ordinal transfini α_0 est de première espèce. Ainsi nous sommes bien conduits à une contradiction si nous supposons que la seconde classe de nombres comprend des nombres de seconde espèce.