SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DISCONTINUES

PAR

RENÉ BAIRE

à MONTPELLIER.

PREMIÈRE PARTIE.

Introduction.

Le présent mémoire constitue la première partie d'un travail dans lequel je me propose d'exposer l'ensemble des résultats que j'ai obtenus dans l'étude du problème suivant: Caractériser les fonctions discontinues (de n variables) représentables par des séries simples, doubles, triples, etc. de fonctions continues, et que j'appelle fonctions de classes $1, 2, 3, \ldots$.

En ce qui concerne le cas des séries simples (fonctions de classe 1), j'ai exposé d'une manière complète la solution du problème dans mes »Leçons sur les fonctions discontinues».[1] Je renverrai souvent le lecteur à ce livre, dans lequel j'ai eu l'occasion de traiter plusieurs questions qui me sont utiles pour l'étude que j'ai en vue, en particulier la théorie des nombres transfinis (Chapitre II).

Voici un résumé des matières traitées dans le présent mémoire.

Je donne, au chapitre I, la définition des diverses classes de fonctions, ainsi que quelques propriétés générales qui en résultent d'une manière immédiate.

Je rappelle, au chapitre II, les principaux théorèmes de la théorie des ensembles de points à n dimensions dont j'ai besoin pour la suite.

---

[1] Editées chez Gauthier-Villars, dans la »Collection de monographies sur la théorie des fonctions» publiée sous la direction de M. BOREL. Voir, dans les »Leçons sur les fonctions de variables réelles», de M. BOREL (même collection), Note II, une autre solution, de M. LEBESGUE.

Dans le chapitre III, après avoir rappelé le théorème général concernant les fonctions représentables par des séries de fonctions continues, je donne à ce résultat une extension, relative au cas où l'on se donne une fonction définie en des points dont l'ensemble ne constitue pas un continu, ni même un ensemble fermé, et où l'on veut savoir sous quelles conditions on peut compléter la définition de la fonction de manière à obtenir une fonction de classe 1 sur un ensemble fermé. Cette généralisation, outre l'intérêt qu'elle présente par elle-même, m'est nécessaire pour la suite de mes recherches.

Au chapitre IV, j'établis l'existence d'une certaine propriété qui appartient aux fonctions continues et qui *se conserve à la limite,* c'est-à-dire qui, dès qu'elle appartient à tous les termes d'une suite de fonctions tendant vers une fonction limite, appartient aussi à cette dernière fonction.

J'aborde, au chapitre V, l'étude des fonctions de classes 2 et 3, dont je démontre l'existence effective. Pour poursuivre cette étude, j'ai été conduit, comme je l'ai indiqué d'une façon succincte dans des notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (décembre 1899), à transformer les notions d'ensemble de points et de point limite. Toutefois, la notion nouvelle dont il s'agit n'apparaît pas dans le présent mémoire; elle sera exposée avec tous les développements nécessaires dans un mémoire ultérieur.

CHAPITRE I.

Définition des diverses classes de fonctions.

1. Désignons par R l'ensemble des nombres réels, par R' l'ensemble obtenu en adjoignant à R les éléments $+\infty$, $-\infty$. Une suite: u_1, $u_2, \ldots, u_n, \ldots$ a pour limite λ ($u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et λ appartenant à R') si, quels que soient les nombres λ' et λ'' tels que $\lambda' < \lambda < \lambda''$ (l'un des nombres λ' et λ'' pouvant ne pas exister), il y a un entier p tel que $n > p$ entraîne $\lambda' < u_n < \lambda''$.

P étant un ensemble *fermé* de l'espace à n dimensions G_n, si, à chaque point A de P correspond un nombre de R', $f(A)$, l'ensemble de ces nombres constitue une fonction définie sur P. Si tous les nombres

$f(A)$ appartiennent à R, la fonction est dite *finie.* Si les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des nombres $f(A)$ appartiennent à R, la fonction est dite *bornée.*

Une fonction f définie sur P est dite *continue* si elle a en chaque point une valeur finie et si, $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ étant une suite de points de P tendant vers un point A_0 (qui fait nécessairement partie de P), on a: $\lim\limits_{h=\infty} f(A_h) = f(A_0)$.

Toute fonction non continue est *discontinue.*

Si l'on a des fonctions: $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$ et f, définies sur P, et telles que, A étant un point quelconque de P, on a: $\lim\limits_{p=\infty} f_p(A) = f(A)$, on dit que *$f$ est la limite de f_p.*

P étant toujours un ensemble fermé de G_n, aux différents nombres ordinaux des classes I et II nous ferons correspondre des classes de fonctions définies sur P au moyen de la définition suivante.

1° Une fonction continue appartient à la classe 0.

2° Une fonction appartient à la classe α ($\alpha > 0$) si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant à des classes marquées par des nombres inférieurs à α, et si elle ne fait pas partie de l'une de ces classes.

Soit E l'ensemble des fonctions appartenant à toutes les classes marquées par les nombres des classes I et II. Je dis que E contient toutes ses fonctions limites, c'est-à-dire que si une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ a pour limite f, et si toutes les fonctions f_ν appartiennent à E, il en est de même de f. En effet, les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ appartiennent à certaines classes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, il existe un nombre α des classes I ou II supérieur à tous les α_ν; donc f est de classe α ou de classe inférieure; donc f fait partie de E.

2. Soit f une fonction quelconque définie sur l'ensemble fermé P. Soient b et B deux nombres finis ($b < B$). Appelons transformation $\theta(b, B)$ la transformation qui remplace f par une fonction φ ainsi définie:

En un point A de P où: $\quad f(A) \leqq b, \quad \varphi(A) = b.$

En un point où: $\quad b \leqq f(A) \leqq B, \quad \varphi(A) = f(A).$

En un point où: $\quad B \leqq f(A), \quad \varphi(A) = B.$

On voit d'abord que, si f est continue, φ l'est aussi. Car, pour deux points quelconques A et A', on a:

$$|\varphi(A) - \varphi(A')| \leqq |f(A) - f(A')|.$$

Donc, si A' varie et tend vers A supposé fixe, le second membre tend vers o, par suite aussi le premier.

Supposons maintenant qu'on considère une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ ayant une limite f; la transformation $\theta(b, B)$, appliquée à toutes ces fonctions, donne de nouvelles fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ et φ; je dis que φ_ν tend vers φ. Il y a, pour un point A de P, trois cas possibles:

1° $b < f(A) < B$. Quand ν dépasse une certaine valeur p, on a: $b < f_\nu(A) < B$, et par suite: $\varphi_\nu(A) = f_\nu(A)$; comme $\varphi(A) = f(A)$, on a: $\lim \varphi_\nu(A) = \varphi(A)$.

2° $B \leqq f(A)$. A $\varepsilon > 0$ correspond p tel que, si $\nu \geqq p$, on a: $B - \varepsilon < f_\nu(A)$. Dans ces conditions, que $f_\nu(A)$ surpasse ou non B, on a: $B - \varepsilon < \varphi_\nu(A) \leqq B$; comme $\varphi(A) = B$, on a encore: $\lim \varphi_\nu(A) = \varphi(A)$.

3° $f(A) \leqq b$. La démonstration est analogue.

Cela posé, je dis que la transformation $\theta(b, B)$, appliquée à une fonction f de classe $\leqq \alpha$, donne une fonction φ de classe $\leqq \alpha$. Le fait a été établi pour $\alpha = 0$. Pour qu'il soit établi dans le cas général, il suffit, d'après le principe de récurrence généralisé, de montrer qu'en l'admettant pour tous les nombres inférieurs au nombre déterminé α, il a encore lieu pour α. Or, si f est de classe $\leqq \alpha$, f est la limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ dont chacune est de classe $< \alpha$; en appliquant à toutes ces fonctions la transformation $\theta(b, B)$, on obtient une suite φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tendant vers φ, et chacune des fonctions φ_ν est de classe $< \alpha$, d'après l'hypothèse admise; donc φ est de classe $\leqq \alpha$.

Si f, supposée de classe $\leqq \alpha$, est bornée, si m et M sont ses bornes inférieure et supérieure, en prenant: $b = m$, $B = M$, on a $\varphi = f$, la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tend vers f, et on a: $m \leqq \varphi_\nu \leqq M$. Donc, *une fonction bornée de classe $\leqq \alpha$ peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions de classes $< \alpha$, dont chacune est comprise entre les bornes de f.*

3. La somme algébrique, le produit d'un nombre fini de fonctions finies de classe $\leqq \alpha$ est de classe $\leqq \alpha$. Dans le cas de $\alpha = 0$, cela résulte de la définition des fonctions continues. Admettons le théorème pour tous

les nombres inférieurs au nombre α, et étendons-le à ce nombre; il suffit de considérer le cas de deux fonctions. Soient donc f et g deux fonctions finies et de classes $\leqq \alpha$; elles sont respectivement limites de fonctions f_ν et g_ν de classes $< \alpha$; d'après l'hypothèse admise, $f_\nu \pm g_\nu$, $f_\nu g_\nu$ sont de classes au plus égales à la plus grande des classes de f_ν et g_ν, donc de classes $< \alpha$; or $f_\nu \pm g_\nu$, $f_\nu g_\nu$ tendent vers $f \pm g$, fg, qui sont donc de classes $\leqq \alpha$.

Une série, dont tous les termes sont des fonctions finies de classes $< \alpha$, si elle est convergente en tout point de P, définit par sa somme une fonction de classe $\leqq \alpha$; car la somme des n premiers termes est une fonction de classe $< \alpha$.

Une série, dont tous les termes $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$ sont des fonctions finies définies en tous les points de P, et qui est convergente en chacun de ces points, est dite *uniformément convergente sur P* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, et quel que soit l'entier h, il existe un entier $n > h$ tel qu'on a, en tout point de P:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots| < \varepsilon.$$

Nous allons montrer que, *si les termes d'une telle série sont des fonctions de classes $\leqq \alpha$, la somme f de la série est aussi de classe $\leqq \alpha$.* Dans le cas de $\alpha = 0$, ce théorème se réduit à une proposition connue relative aux fonctions continues. [1]

Pour traiter le cas de $\alpha > 0$, j'utiliserai la remarque suivante: [2] *Étant donnée une série uniformément convergente: $u_1, u_2 \ldots, u_n, \ldots$, on peut, par un certain groupement de termes consécutifs, la remplacer par une série: $U_0, U_1, \ldots, U_i, \ldots$ dont les termes sont, à partir du second, inférieurs en valeur absolue à ceux d'une série convergente à termes positifs numériques donnée.*

Si les u_n sont de classes $< \alpha$, il en sera de même des U_i, dont chacun est la somme d'un nombre fini de termes u_n.

Tout revient donc à montrer que si l'on a une série de fonctions de classes $\leqq \alpha$: $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$ et une série convergente à termes numériques positifs: $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, telles que: $|u_\nu| \leqq a_\nu$, la somme f de la série est de classe $\leqq \alpha$.

D'après l'hypothèse, il y a, pour u_ν, une suite de fonctions $u_{\nu,1}$, $u_{\nu,2}, \ldots, u_{\nu,p}, \ldots$, tendant vers u_ν, toutes de classes $< \alpha$, et telles que,

[1] *Leçons sur les fonctions discontinues*, p. 111.

[2] Pour la démonstration, voir loc. cit., p. 112.

quel que soit p: $|u_{\nu,p}| \leqq a_\nu$. Si on pose: $f_i = u_{1,i} + u_{2,i} + \ldots + u_{i,i}$, on vérifie [1] que f_i a pour limite f. Or, f_i est de classe $< \alpha$, comme somme d'un nombre fini de fonctions de classes $< \alpha$. Donc f est de classe $\leqq \alpha$.

Etant donnée une série uniformément convergente, on dit que la somme f_ν des ν premiers termes tend uniformément vers la somme de la série. On voit que, si une fonction f_ν de classe $\leqq \alpha$ tend uniformément vers une limite f, f est aussi de classe $\leqq \alpha$.

Si une fonction f est telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ de classe $\leqq \alpha$ différant de f de moins de ε, f est de classe $\leqq \alpha$. En effet, prenons une suite de nombres positifs tendant vers 0, soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ et prenons, pour chaque ε_ν, une fonction f_ν de classe $\leqq \alpha$ telle que $|f_\nu - f| < \varepsilon_\nu$; on voit que f_ν tend uniformément vers f, qui est par suite de classe $\leqq \alpha$.

4. Montrons que l'étude des fonctions non finies ou non bornées peut se ramener à l'étude des fonctions bornées. Nous utiliserons pour cela la transformation T qui remplace la variable y pouvant prendre toutes les valeurs de R' par une nouvelle variable z définie comme il suit:

$$T \begin{cases} \text{Pour} \quad -\infty \leqq y \leqq 0, & z = \dfrac{y}{1-y}, \\ \text{Pour} \quad 0 \leqq y \leqq +\infty, & z = \dfrac{y}{1+y}. \end{cases}$$

On sait [2] que si les nombres: $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ et y_0, appartenant à R', ont pour transformés par T les nombres $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ et z_0, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim y_\nu = y_0 \quad \text{et} \quad \lim z_\nu = z_0.$$

En appliquant la transformation T aux valeurs d'une fonction f définie sur un ensemble P, on obtient une fonction φ, comprise entre -1 et 1, qui est la transformée de f par T; f est la transformée de φ par T^{-1}.

I. Si on considère une suite de points de P: $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ ayant pour limite un point A, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim f(A_h) = f(A) \quad \text{et} \quad \lim \varphi(A_h) = \varphi(A).$$

[1] loc. cit., p. 113.

[2] loc. cit., p. 122.

II. Si l'on a des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ et f, définies sur P, et si leurs transformées par T sont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ et φ, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim f_\nu = f \quad \text{et} \quad \lim \varphi_\nu = \varphi.$$

Nous avons réservé le mot de fonction continue aux fonctions *finies*. Une fonction peut avoir en certains points l'une des valeurs $+\infty$, $-\infty$, et posséder en tout point A la propriété: $\lim f(A_h) = f(A)$ pour toute suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ tendant vers A. Nous dirons qu'une telle fonction est continue (sens étendu). D'après I, on voit que:

Une fonction f et sa transformée φ sont continues (sens étendu) ou non en même temps.

Si f est de classe 0, il en est de même de φ; mais, si φ est de classe 0, f n'est de classe 0 que si elle est finie. Je dis que, *étant données une fonction f et sa transformée φ, si l'une de ces deux fonctions est de classe α $(\alpha \geqq 1)$, il en est de même de l'autre.*

Admettons cette proposition pour toutes les valeurs de $\alpha \geqq 1$ et inférieures à un nombre β, et démontrons-la pour β.

1° Si f est de classe β, il y a une suite $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ tendant vers f, chaque fonction f_ν étant de classe $< \beta$. Les transformées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ sont, d'après la proposition admise, de classes $< \beta$ et tendent vers φ; donc φ est de classe $\leqq \beta$.

2° Si φ est de classe β, il y a une suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tendant vers φ, chaque fonction φ_ν étant de classe $< \beta$ et étant comprise, comme φ, entre -1 et 1. Prenons une suite de nombres positifs inférieurs à 1 et tendant vers 1, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$. La fonction $\lambda_\nu \varphi_\nu$, qui tend vers φ, est comprise entre des nombres intérieurs à l'intervalle $(-1, 1)$; donc la transformée de $\lambda_\nu \varphi_\nu$ par T^{-1}, soit f_ν, est bornée; f_ν est de même classe que $\lambda_\nu \varphi_\nu$, c'est-à-dire que φ_ν, si cette classe est $\geqq 1$, d'après la proposition admise, et aussi dans le cas où elle est égale à 0, car alors f_ν, étant bornée, est une fonction continue proprement dite; ainsi les f_ν, qui tendent vers f, sont de classes $< \beta$; donc f est de classe $\leqq \beta$.

Les fonctions f et φ appartiennent donc à deux classes dont aucune ne peut surpasser l'autre; donc f et φ sont de même classe.

On voit, en outre, qu'une fonction f *quelconque* de classe $\leqq \alpha$ peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions *bornées* de classes $< \alpha$.

Supposons qu'on soit parvenu à déterminer une condition (A) nécessaire et suffisante pour qu'une fonction *bornée* soit de classe $\leqq \alpha$ (α étant $\geqq 1$ et déterminé); supposons que la condition (A) soit invariante par rapport aux transformations T et T^{-1}, c'est-à-dire que, φ étant la transformée par T d'une fonction f, les fonctions f et φ remplissent en même temps ou non la condition (A); je dis que (A) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction *quelconque* soit de classe $\leqq \alpha$. En effet: 1° si f est de classe $\leqq \alpha$, φ est aussi de classe $\leqq \alpha$, et, étant bornée, satisfait à (A); donc f satisfait à (A). 2° si f satisfait à (A), il en est de même de φ; φ, étant bornée, est de classe $\leqq \alpha$, donc f aussi. Cela nous permettra, dans la suite, d'introduire le plus souvent la restriction qu'on s'occupe de fonctions bornées, les résultats s'étendant facilement au cas général.

CHAPITRE II.

Les ensembles à n dimensions.

5. J'indique ici les résultats relatifs à la théorie des ensembles de points à n dimensions dont j'ai besoin pour la suite; pour la plupart d'entre eux, je me contente de donner les énoncés, renvoyant pour les démonstrations aux »Leçons sur les fonctions discontinues», (Ch. V, section I).

$P, Q, R, \ldots$ étant des ensembles de points dans G_n, on désigne par $D(P, Q, R, \ldots)$ l'ensemble des points communs à $P, Q, R, \ldots$, par $M(P, Q, R, \ldots)$ l'ensemble formé par la réunion de $P, Q, R, \ldots$; quand $P, Q, R, \ldots$ n'ont deux à deux aucun point commun, on écrit aussi: $M(P, Q, R, \ldots) = P + Q + R + \ldots$.

Si $P, Q, R, \ldots$ sont *fermés* et en nombre *fini*, $M(P, Q, R, \ldots)$ est *fermé*, car tout point limite pour cet ensemble est limite pour l'un au moins des ensembles $P, Q, R, \ldots$.

Si $P, Q, R, \ldots$ sont *fermés*, $D(P, Q, R, \ldots)$, s'il existe, est *fermé*.

Si on a des ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ tels que:

$$P_1 \geqq P_2 \geqq \ldots \geqq P_\nu \geqq \ldots$$

chacun contenant au moins un point, et si P_1 est borné, il y a au moins un point commun à tous.

6. P étant un ensemble quelconque, on désigne par P^1 l'ensemble dérivé, ou dérivé d'ordre 1, de P. Nous désignerons par P^0 l'ensemble $M(P, P^1)$, et nous dirons que c'est le *dérivé d'ordre* 0 de P. On voit que P^0 comprend, outre les points de P^1, les points qui font partie de P sans faire partie de P^1, c'est-à-dire les points isolés de P. Ainsi, *un point A appartient à P^0 si toute sphère de centre A contient au moins un point de P*, et il appartient à P^1 si toute sphère de centre A contient une infinité de points de P.

L'ensemble P^0 est fermé et a pour dérivé P^1, car si un point A est limite pour P^0, c'est que toute sphère de centre A contient une infinité de points de P^0: ces points appartenant à P ou P^1, le point A fait partie de P^1; réciproquement, un point de P^1, étant limite pour P, est limite pour P^0, qui contient P.

Si un point A n'appartient pas à P^0, il y a une sphère de centre A et de rayon positif qui ne contient aucun point de P: on dit que *A est extérieur à P.*

Si P est *dense en lui-même*, on a $P \leqq P^1$; il y a donc identité entre P^0 et P^1: P^0 est *parfait.*

7.[1] Si l'on a des ensembles fermés ou nuls correspondant aux nombres des classes I et II:

$$P_0, P_1, \ldots, P_\alpha, \ldots \tag{1}$$

avec la condition que $\alpha < \alpha'$ entraîne $P_\alpha \geqq P_{\alpha'}$, ces ensembles sont tous identiques entre eux à partir d'une certaine valeur β de α, c'est-à-dire que:

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots .$$

En désignant par P_Ω l'ensemble commun à tous les ensembles (1), on a, en outre, les résultats suivants:

[1] loc. cit., p. 103, 104, 105.

I. Si, pour tout nombre α de seconde espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ d'indice inférieur à α, on a:

$$P_0 = \sum (P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega, \qquad \gamma = 0, 1, \ldots < \beta.$$

II. Si, outre la condition I, on a $P_\Omega = 0$, et si P_0 est borné, il y a un nombre γ tel que P_γ contient des points, $P_{\gamma+1}$ étant nul.

III. Si les ensembles (1) sont tels qu'un point isolé de l'un d'eux ne fait pas partie du suivant, P_Ω est nul ou parfait.

Ces considérations s'appliquent en particulier aux ensembles dérivés d'un ensemble quelconque P. En tenant compte de la définition donnée plus haut du dérivé d'ordre 0, on voit que P a des dérivés marqués par les nombres des classes I et II à partir de 0, et par Ω, soit

$$P^0, P^1, P^2, \ldots, P^\alpha, \ldots, P^\Omega.$$

On a

$$P^0 = \sum (P^\gamma - P^{\gamma+1}) + P^\Omega. \tag{2}$$

P^Ω est nul ou parfait, et les ensembles P^γ sont tous identiques à P^Ω à partir d'une certaine valeur de γ. Si, dans un domaine borné, P^Ω est nul, il y a un nombre γ tel que P^γ contient des points dans ce domaine, tandis que $P^{\gamma+1}$ y est nul: P^γ contient dans ce domaine un nombre fini de points.

Dans la formule (2), chaque terme $P^\gamma - P^{\gamma+1}$ est un ensemble isolé, par suite dénombrable, donc $\sum (P^\gamma - P^{\gamma+1})$ est aussi dénombrable.

8. Soit P un ensemble parfait. Désignons par Σ, soit une sphère à n dimensions, soit un parallélépipède de côtés parallèles aux axes, contenant au moins un point de P à son intérieur. Considérons l'ensemble K des points de P qui sont *intérieurs* à Σ; K est dense en lui-même, car, au voisinage de tout point A de K existent des points de P intérieurs à Σ; donc (§ 6) K^0 est parfait. D'ailleurs K^0 est contenu dans P. Nous appellerons *portion*[1] *de P déterminée par Σ* l'ensemble parfait $P_1 = K^0$;

[1] La définition actuelle diffère légèrement de la définition donnée dans les »Leçons etc.», (p. 105), en ce qu'un point de la surface de Σ n'est ici considéré comme appartenant à la portion que *s'il est limite de points de P intérieurs à Σ*. Cela ne modifie en rien la définition des ensembles non denses.

de plus, nous conviendrons de dire que tout point de K est *intérieur à la portion* P_1 *de* P. D'après cela, pour qu'un point A de P soit intérieur à une portion déterminée P_1 de P, il faut et il suffit qu'il existe une sphère de centre A et de rayon positif telle que tous les points de P contenus dans cette sphère appartiennent à P_1.

Soit P un ensemble parfait, et Q un ensemble contenu dans P. Deux cas seulement sont possibles:

1° Dans toute portion P_1 de P existe une portion P_2 qui ne contient aucun point de Q, (et par suite aucun point de Q^0). Nous dirons dans ce cas que Q est *non dense* dans P.

2° Il existe une portion P_1 de P telle que toute portion P_2 de P_1 contient des points de Q. La partie de Q contenue dans P_1 est alors *partout dense* par rapport à P_1, et la partie de Q^0 contenue dans P_1 coïncide avec P_1.

On voit que, si Q est non dense dans P, on peut, au voisinage de tout point de P, trouver un point de P n'appartenant pas à Q^0, et réciproquement, si ce fait a lieu, Q est non dense.

Si Q est *fermé* et ne coincide pas avec P, il y a une portion de P qui ne contient aucun point de Q.

9.[1] En supposant toujours que Q est un ensemble contenu dans l'ensemble parfait P, nous dirons que Q est *de première catégorie par rapport à* P si Q peut être formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité *dénombrable* d'ensembles *non denses* par rapport à P.

Tout ensemble qui n'est pas de première catégorie est dit de *deuxième catégorie.*

Un ensemble contenu dans un ensemble de première catégorie est lui-même de première catégorie.

Un ensemble formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie, est lui-même de première catégorie.

Si Q *est de première catégorie dans* P: 1° *la partie de* Q *contenue dans une portion* P_1 *de* P *est de première catégorie dans* P_1; 2° *il y a,*

[1] loc. cit., § 65, p. 105.

dans toute portion P_1 de P, des points de P qui n'appartiennent pas à Q;
3° *$P - Q$ est de deuxième catégorie.*

Dans les applications, nous aurons souvent à considérer un ensemble Q_n contenu dans un ensemble parfait P et dépendant d'un entier n de manière qu'on ait:

$$Q_1 \leqq Q_2 \leqq \cdots \leqq Q_n \leqq \cdots.$$

Soit:

$$Q = M(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots).$$

Nous dirons que Q est l'ensemble *limite* de Q_n. On voit que si Q_n est de première catégorie, l'ensemble limite Q l'est aussi.

La même remarque s'applique au cas d'un ensemble Q_ρ dépendant d'un nombre positif ρ, avec la condition que $\rho' < \rho$ entraîne $Q_{\rho'} \geqq Q_\rho$. Prenons une suite quelconque de nombres positifs décroissants tendant vers o: ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ et soit Q l'ensemble limite de Q_{ρ_n}. On reconnaît que Q est indépendant de la suite choisie; nous dirons encore que Q est l'ensemble *limite* de Q_ρ quand ρ tend vers o. Si, pour toute valeur positive de ρ, Q_ρ est de première catégorie, il en est de même de Q.

CHAPITRE III.

Les fonctions de classe 1.

10. Supposons qu'une fonction f soit définie en tous les points d'un ensemble Γ de G_n, Γ étant *quelconque*, et f pouvant prendre toutes les valeurs de l'ensemble R' défini au § 1.

Si Γ_1 est un ensemble contenu dans Γ, f est définie aux différents points de Γ_1, l'ensemble des valeurs de f en ces points a une borne supérieure, une borne inférieure et une oscillation,[1] que nous désignons respectivement par:

$$M(f, \Gamma_1), \qquad m(f, \Gamma_1), \qquad \omega(f, \Gamma_1) = M(f, \Gamma_1) - m(f, \Gamma_1).$$

[1] On convient de poser, si a est fini:

$$+\infty - a = a - (-\infty) = +\infty - (-\infty) = +\infty,$$
$$+\infty - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0.$$

On a évidemment, si Γ_2 est contenu dans Γ_1:

$$M(f, \Gamma_1) \geqq M(f, \Gamma_2), \qquad m(f, \Gamma_1) \leqq m(f, \Gamma_2), \qquad \omega(f, \Gamma_1) \geqq \omega(f, \Gamma_2).$$

Soit maintenant A un point de Γ^0 (§ 6). En appelant Γ_ρ la partie de Γ contenue dans la sphère de centre A et de rayon ρ, on reconnaît que, lorsque ρ décroît et tend vers 0, les nombres $M(f, \Gamma_\rho)$, $\omega(f, \Gamma_\rho)$ ne croissent pas, le nombre $m(f, \Gamma_\rho)$ ne décroît pas; ces trois nombres ont donc des limites, que nous désignons par:

$$M(f, \Gamma, A), \qquad m(f, \Gamma, A),$$

$$\omega(f, \Gamma, A) = M(f, \Gamma, A) - m(f, \Gamma, A) \geqq 0,$$

et que nous appelons respectivement *maximum, minimum, oscillation de f en A par rapport à Γ.*

D'après ces définitions, si un point A de Γ^0 est *intérieur* à une sphère Σ et si Γ_1 est la partie de Γ contenue dans Σ, on a:

$$M(f, \Gamma, A) \leqq M(f, \Gamma_1); \qquad m(f, \Gamma, A) \geqq m(f, \Gamma_1); \qquad \omega(f, \Gamma, A) \leqq \omega(f, \Gamma_1).$$

11. Si f est définie au point A_0 de Γ^0, (ce qui n'a pas lieu nécessairement), on a

$$M(f, \Gamma, A_0) \geqq f(A_0).$$

Supposons qu'on ait:

$$M(f, \Gamma, A_0) = f(A_0). \tag{1}$$

Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre positif ρ tel que, dans la sphère de centre A_0 et de rayon ρ, on ait, en tout point A de Γ:

$$f(A) < f(A_0) + \varepsilon.$$

Réciproquement, cette propriété entraîne la condition (1). Nous dirons que la fonction f est *semi-continue supérieurement en A_0 par rapport à Γ.*

De même, nous dirons que f est *semi-continue inférieurement en A_0 par rapport à Γ* si l'on a:

$$m(f, \Gamma, A_0) = f(A_0).$$

Si, au point A_0, on a:

$$M(f, \Gamma, A_0) = m(f, \Gamma, A_0) = f(A_0),$$

la fonction est *continue en* A_0 *par rapport à* Γ; la condition de continuité s'exprime par:

$$\omega(f, \Gamma, A_0) = 0.$$

Si une fonction f définie en tous les points d'un ensemble *fermé* P possède en chaque point de cet ensemble la semi-continuité supérieure, ou inférieure, ou la continuité, nous dirons qu'elle est *semi-continue supérieurement,* ou *inférieurement,* ou *continue* sur P. Toutefois, dans ce dernier cas, pour nous conformer aux définitions du chapitre I, la fonction ne devra être considérée comme une fonction continue proprement dite que si elle a en chaque point une valeur finie.

Si P_1 est un ensemble fermé contenu dans l'ensemble fermé P, la semi-continuité supérieure (inférieure) sur P entraîne la semi-continuité supérieure (inférieure) sur P_1.

Si f est semi-continue supérieurement, $-f$ est semi-continue inférieurement.

La somme d'un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement est aussi semi-continue supérieurement.

Si f définie sur l'ensemble fermé P est semi-continue supérieurement, l'ensemble H des points où l'on a: $f \geqq k$, k étant un nombre quelconque, est *fermé*. En effet, si A_0 est limite d'une suite de points en chacun desquels on a: $f \geqq k$, il en résulte: $M(f, P, A_0) \geqq k$, et par suite:

$$f(A_0) = M(f, P, A_0) \geqq k;$$

donc l'ensemble H contient tous ses points limites.

12. Soit f une fonction définie sur un ensemble Γ *quelconque.* Nous avons défini, en chaque point A de Γ^0, le nombre $M(f, \Gamma, A)$; ce nombre est donc une fonction $\varphi(A)$ définie en tout point de l'ensemble fermé Γ^0; je dis que cette fonction est *semi-continue supérieurement* sur Γ^0. En effet, soit A_0 un point de Γ^0 et ε un nombre positif; nous pouvons déterminer une sphère Σ_1 de centre A_0 telle que, Γ_1 étant la partie de Γ contenue dans cette sphère, on ait:

$$M(f, \Gamma_1) < M(f, \Gamma, A_0) + \varepsilon,$$

et par suite, si A est un point *quelconque* de Γ_1 *intérieur* à Σ_1:

$$M(f, \Gamma, A) \leqq M(f, \Gamma_1) < M(f, \Gamma, A_0) + \varepsilon,$$

d'où l'on déduit que, dans une sphère Σ_2 concentrique et intérieure à Σ_1, on a, *en tout point* de Γ:

$$\varphi(A) < \varphi(A_0) + \varepsilon.$$

C'est la propriété qui caractérise les fonctions semi-continues supérieurement.

On reconnaît de même que $\psi(A) = m(f, \Gamma, A)$ est semi-continue inférieurement sur Γ^0.

La fonction $\omega(A)$, qui est égale en chaque point A de Γ^0 à l'oscillation de f, étant la somme des fonctions $\varphi = M(f, \Gamma, A)$ et $-\psi = -m(f, \Gamma, A)$, est *semi-continue supérieurement.* Il en résulte que l'ensemble des points de Γ^0 où l'oscillation de f est $\geqq \sigma$, σ étant un nombre positif, est *fermé.*

13. Une fonction f définie en tous les points d'un ensemble *parfait* P est *ponctuellement discontinue* sur P, si, quel que soit $\sigma > 0$, l'ensemble des points A de P où $\omega(f, P, A) \geqq \sigma$ est non dense dans P; alors l'ensemble des points de discontinuité est de première catégorie; il y a, dans toute portion de P, des points de continuité; la fonction $\omega(f)$ a, dans toute portion, et par suite en tout point, son minimum nul. (Nous faisons rentrer le cas des fonctions continues dans ce cas.) Dans le cas contraire, f est *totalement discontinue;* il existe un nombre positif α et une portion Π de P telle qu'en tout point de Π on a $\omega \geqq \alpha$; on voit que $\omega(f)$ a son minimum $\geqq \alpha$ dans la portion Π. [1]

Théorème I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P soit de classe $\leqq 1$ est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait contenu dans P.* [2]

---

[1] loc. cit., § 67, p. 108.

[2] La démonstration de ce théorème résulte des §§ 68, 73 et 74 des »Leçons sur les fonctions discontinues», où toutefois l'ensemble P est supposé parfait; mais les raisonnements des §§ 73 et 74, qui établissent que la condition est suffisante, sont valables en supposant seulement que P est fermé. L'extension du résultat, démontré d'abord pour les fonctions bornées, aux fonctions quelconques, (§ 77) peut se faire en remarquant que la condition de l'énoncé est invariante par rapport aux transformations T et T^{-1} (§ 4 du présent mémoire).

14. Une fonction semi-continue, supérieurement par exemple, sur un ensemble fermé P, est de classe $\leqq 1$.[1]

Une telle fonction a la propriété suivante. Σ étant une sphère contenant des points de P, soit $\varphi(\Sigma)$ le maximum de f dans Σ; étant donné un point A de P, et une sphère Σ de centre A dont le rayon tend vers 0, $\varphi(\Sigma)$ a pour limite $f(A)$. Nous allons établir une propriété en quelque sorte réciproque.

Soit P un ensemble fermé. Supposons qu'à chaque sphère Σ contenant des points de P corresponde un nombre $\varphi(\Sigma)$, avec la condition que si Σ' est contenu dans Σ, on ait: $\varphi(\Sigma') \leqq \varphi(\Sigma)$. Soit A_0 un point de P, et soit Σ la sphère de centre A_0 et de rayon ρ; quand ρ décroît et tend vers 0, $\varphi(\Sigma)$, qui ne croît pas, a une limite déterminée. Soit $f(A_0)$ cette limite; je dis que $f(A)$ est *semi-continue supérieurement.* En effet, soit ε un nombre positif; nous pouvons déterminer une sphère Σ de centre A_0 telle qu'on ait: $\varphi(\Sigma) < f(A_0) + \varepsilon$. Soit A un point quelconque de P intérieur à Σ, il y a une sphère de centre A contenue dans Σ, d'où il résulte qu'on a:

$$f(A) \leqq \varphi(\Sigma) < f(A_0) + \varepsilon.$$

La fonction f possède donc bien la semi-continuité supérieure.

15. Il résulte du théorème I que si une fonction n'est pas de classe $\leqq 1$, il existe un ensemble parfait sur lequel elle est totalement discontinue. *Pour démontrer qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$, il suffira donc de démontrer que dans tout ensemble parfait H contenu dans P existe une portion sur laquelle f est de classe $\leqq 1$.* En particulier, une fonction quelconque définie sur un ensemble fermé dénombrable (autrement dit réductible) est de classe $\leqq 1$. Une fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$ si elle est de classe $\leqq 1$ sur l'ensemble parfait P^{Ω}.

Soit f_1 une fonction de classe $\leqq 1$ définie sur un ensemble fermé P_1, f_2 une fonction de classe $\leqq 1$ sur un ensemble fermé P_2; je considère la fonction f qui est égale à f_1 en tout point de P_1, et à f_2 en tout point de P_2 qui n'appartient pas à P_1. Je dirai que f est obtenue par la *super-*

[1] loc cit., § 78, p. 124; même observation que plus haut.

position de f_1 à f_2; f est définie sur l'ensemble fermé $M(P_1, P_2)$. Je dis que f est de classe $\leqq 1$.

Il faut montrer que, dans tout ensemble parfait H contenu dans $M(P_1, P_2)$, existe une portion de H dans laquelle f est de classe $\leqq 1$. Posons: $H_1 = D(H, P_1)$. Ou bien H_1 coïncide avec H, et f est identique sur H à f_1, donc de classe $\leqq 1$. Ou bien H_1 ne coïncide pas avec H, et comme H_1 est fermé, il y a (§ 8) une portion K de H ne contenant aucun point de H_1 et par suite de P_1; sur K, f est identique à f_2, donc de classe $\leqq 1$.

Le théorème est donc établi; il s'étend de suite au cas de h fonctions superposées, et l'on a l'énoncé suivant: Soient $f_1, f_2, \ldots, f_h$ des fonctions de classe $\leqq 1$ respectivement définies sur les ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_h$. Prenons f égale à f_i aux points de P_i qui ne font pas partie de $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$. La fonction f, définie sur $M(P_1, P_2, \ldots, P_h)$, est de classe $\leqq 1$.

16. Nous nous sommes occupés, dans les § 13, 14, 15, de fonctions définies en tous les points d'un ensemble *fermé*. Nous allons maintenant, dans le cas où l'on donne une fonction sur un ensemble P *quelconque*, étudier la question suivante: à quelles conditions est-il possible de compléter la définition de f aux points de l'ensemble fermé P^0 où elle ne se trouve pas définie, de manière à obtenir une fonction F de classe 0, ou de classe $\leqq 1$, etc.? Si ce problème est possible, nous conviendrons de dire que la fonction f, *incomplètement définie sur* P^0, est de classe $0, 1, \ldots$ suivant le cas.

Le cas des fonctions continues se traite sans difficulté. Il est évidemment nécessaire, pour que f, définie sur l'ensemble P quelconque, soit de classe 0, qu'en chaque point A de P^0 on ait: $\omega(f, P, A) = 0$. Cette condition est aussi suffisante, car si elle est remplie, il suffit de poser, en tout point A de P^0:

$$F(A) = M(f, P, A) = m(f, P, A).$$

La fonction F, continue sur P^0, est identique à f sur P.

17. Pour traiter le cas des fonctions de classe 1, nous donnerons d'abord une extension aux notions rappelées au § 13.

Soit H un ensemble parfait, f se trouvant définie seulement en certains points de H, formant un ensemble Γ; l'ensemble Γ^0 est contenu dans H; nous dirons que f, au voisinage d'un point de Γ^0, se trouve définie sur H, et au voisinage d'un point de $H - \Gamma^0$, n'est pas définie. En chaque point A de Γ^0 existent des valeurs déterminées pour le maximum, le minimum et l'oscillation de f relativement à Γ; nous désignerons ces nombres par $M(f, H, A)$, $m(f, H, A)$, $\omega(f, H, A)$.

Nous dirons que f est *ponctuellement discontinue sur* H si l'ensemble des points où $\omega(f, H, A) \geqq \sigma$ ($\sigma > 0$), est non dense dans H; sinon, f sera dite *totalement discontinue*. Cette définition comprend évidemment la définition relative au cas où f est complètement définie sur H.

Si f est ponctuellement discontinue sur H, l'ensemble K des points de discontinuité est de première catégorie par rapport à H; un point de $H - K$ est, ou bien un point de continuité pour f, ou bien un point au voisinage duquel f n'est pas définie. Si f est totalement discontinue, il y a une portion H_1 de H et un nombre positif λ tel qu'en tout point de H_1, l'oscillation de f est $\geqq \lambda$.

18. Etant donnée une fonction f sur un ensemble P quelconque, s'il existe une fonction F définie sur l'ensemble fermé P^0, égale à f sur P, et de classe $\leqq 1$, cette fonction F, d'après le théorème I, doit être ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait H contenu dans P^0: donc f doit aussi être, sur tout ensemble parfait, ponctuellement discontinue, au sens étendu du § 17. *Je dis que cette condition nécessaire est aussi suffisante.*

Supposons donc f ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Je vais tout d'abord déterminer, étant donné un nombre positif σ, une fonction F_0 définie en tout point de P^0, différant de f de moins de σ en tout point de P, de classe $\leqq 1$, et enfin comprise entre les bornes de f.

Définissons des ensembles fermés:

$$(1) \qquad P_0, P_1, \ldots, P_\alpha, \ldots$$

au moyen des trois conventions suivantes:

1° $P_0 = P^0$.

2° $P_{\alpha+1}$ est, quel que soit α, l'ensemble des points A de P_α^Ω où l'on a:

$$\omega(f, P_\alpha^\Omega, A) \geqq \sigma.$$

3° Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les ensembles d'indice inférieur à α.

On voit que, si P_α^Ω existe, f étant ponctuellement discontinue sur cet ensemble, $P_{\alpha+1}$ est non dense dans P_α^Ω, et l'on en déduit que les ensembles (1) sont nuls[1] à partir d'un certain indice β; par suite, on peut écrire:

$$P_0 = P^0 = \sum_\alpha (P_\alpha - P_{\alpha+1}) \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, < \beta.$$

Chaque ensemble $P_\alpha - P_{\alpha+1}$ se décompose comme il suit:

$$P_\alpha - P_{\alpha+1} = \sum_\gamma (P_\alpha^\gamma - P_\alpha^{\gamma+1}) + (P_\alpha^\Omega - P_{\alpha+1}).$$

Pour définir F_0 en chaque point A de P^0, donnons-nous tout d'abord un nombre C compris entre les bornes de f, et distinguons deux cas:

1° Le point A fait partie d'un ensemble $P_\alpha^\gamma - P_\alpha^{\gamma+1}$. Ce cas se subdivise en deux:

a) f est définie en A. Nous posons: $F_0(A) = f(A)$.

b) f n'est pas définie en A. Nous posons: $F_0(A) = C$.

2° Le point A fait partie d'un ensemble $P_\alpha^\Omega - P_{\alpha+1}$. Soit Π_α l'ensemble des points de P_α^Ω où f est définie; en chaque point A de Π_α^0 existe une valeur pour $m(f, P_\alpha^\Omega, A)$. Subdivisons en deux cas:

c) A fait partie de Π_α^0. Nous posons: $F_0(A) = m(f, P_\alpha^\Omega, A)$.

d) A ne fait pas partie de Π_α^0. Nous posons: $F_0(A) = C$.

On voit que si A fait partie de Π_α, et ne fait pas partie de $P_{\alpha+1}$, ensemble des points de P_α^Ω où $\omega(f, P_\alpha^\Omega, A) \geqq \sigma$, on a:

$$M(f, P_\alpha^\Omega, A) - m(f, P_\alpha^\Omega, A) < \sigma,$$

d'où il résulte:

$$0 \leqq f(A) - F_0(A) < \sigma. \tag{2}$$

Cette condition est remplie aussi dans le cas a); elle est donc remplie en tout point où f se trouve définie. F_0 est évidemment compris entre les bornes de f. Il reste à montrer que F_0 est de classe $\leqq 1$, et pour cela (§ 15), que dans tout ensemble parfait H existe une portion sur laquelle

---

[1] Cf. loc. cit., § 74, p. 117.

F_0 est de classe $\leqq 1$. H étant un ensemble parfait quelconque contenu dans $P^0 = P_0$, posons: $H_\alpha = D(H, P_\alpha)$. On en déduit:

$$H_\alpha - H_{\alpha+1} = D(H, P_\alpha - P_{\alpha+1})$$

et par suite:

$$H = \sum_\alpha (H_\alpha - H_{\alpha+1}) \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, < \beta.$$

Les ensembles $H_\alpha - H_{\alpha+1}$ ne peuvent être tous nuls; soit η le plus petit des nombres pour lesquels $H_\alpha - H_{\alpha+1}$ n'est pas nul. On a:

$$H = H_0 = H_1 = \ldots = H_\eta > H_{\eta+1}.$$

De $H = H_\eta \leqq P_\eta$ on déduit: $H^\Omega \leqq P_\eta^\Omega$, et comme H est parfait:

$$H = H^\Omega \leqq P_\eta^\Omega.$$

Comme l'ensemble fermé $H_{\eta+1} = D(H, P_{\eta+1})$ ne coïncide pas avec H, il y a une portion K de H qui ne contient aucun point de $H_{\eta+1}$, par suite aucun point de $P_{\eta+1}$. L'ensemble parfait K est contenu dans P_η^Ω et ne contient aucun point de $P_{\eta+1}$; donc, d'après les définitions c) et d), F_0 est égal sur K à la constante C, sauf aux points A de l'ensemble fermé $D(\Pi_\eta^0, K)$, où F_0 est égal à $m(f, P_\eta^\Omega, A)$; cette dernière fonction est semi-continue inférieurement, par suite de classe $\leqq 1$, sur Π_η^0 et aussi sur $D(\Pi_\eta^0, K)$; ainsi F_0 est obtenu, sur K, par la superposition de cette fonction à la fonction constante C; donc (§ 15), F_0 est de classe $\leqq 1$ sur K, qui est une portion de H. Ainsi F_0 remplit toutes les conditions indiquées.

Posons, en tout point de P:

$$f = F_0 + \phi_1.$$

On a, d'après (2):

$$0 \leqq \phi_1 < \sigma.$$

La fonction ϕ_1 définie sur P est ponctuellement discontinue par rapport à tout ensemble parfait H, car l'ensemble des points de discontinuité de $\phi_1 = f - F_0$, ne pouvant comprendre que des points de discontinuité de f ou de F_0, est de première catégorie par rapport à H. On peut donc appliquer la méthode précédente à ϕ_1 et, remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}$, déterminer une fonction F_1 de classe $\leqq 1$ définie sur P^0 telle que:

$$\psi_1 = F_1 + \psi_2, \qquad 0 \leqq \psi_2 < \frac{\sigma}{2}, \qquad 0 \leqq F_1 \leqq \sigma.$$

En continuant l'application de la méthode, en obtient successivement:

$$\psi_2 = F_2 + \psi_3, \qquad 0 \leqq \psi_3 \ < \frac{\sigma}{2^2}, \qquad 0 \leqq F_2 \leqq \frac{\sigma}{2},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\psi_i = F_i + \psi_{i+1}, \qquad 0 \leqq \psi_{i+1} < \frac{\sigma}{2^i}, \qquad 0 \leqq F_i \leqq \frac{\sigma}{2^{i-1}},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Les F_i sont des fonctions de classe $\leqq 1$ définies sur P^0, et forment une série uniformément convergente; donc la fonction

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_i + \ldots$$

est définie sur P^0 et est de classe $\leqq 1$.

On a, en tout point de P:

$$f = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_i + \psi_{i+1},$$

et comme ψ_{i+1} tend vers 0, il en résulte: $f = F$.

En résumé, on a déterminé une fonction F de classe $\leqq 1$ sur P^0, égale à f en tout point de P, ce qui démontre la proposition énoncée.

CHAPITRE IV.

Propriété commune aux fonctions de E.

19. Soit H un ensemble parfait; supposons qu'une fonction f soit définie en tous les points de H.

Je désigne par $M'(f, H)$ la borne supérieure des nombres λ tels que l'ensemble des points de H où $f > \lambda$ est de deuxième catégorie. L'ensemble des points où $f > M' - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$, est de deuxième catégorie. L'ensemble des points où $f > M' + \varepsilon$ est de première catégorie; ce dernier ensemble, qui dépend de ε, et ne peut que s'accroître quand ε décroît, a pour limite, quand ε tend vers o, l'ensemble des points où $f > M'$, lequel est par suite de première catégorie (§ 9). En résumé, il existe un nombre $M'(f, H)$ tel que l'ensemble des points où $f > M'(f, H)$ est de première catégorie, tandis que l'ensemble des points où $f > M'(f, H) - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie. Cette double propriété ne peut évidemment appartenir qu'à un seul nombre, elle caractérise donc le nombre $M'(f, H)$.

On a évidemment: $M(f, H) \geqq M'(f, H)$.

De la même manière, on voit qu'il existe un nombre déterminé $m'(f, H)$ caractérisé par ce double fait que l'ensemble des points où $f < m'(f, H)$ est de première catégorie dans H, tandis que l'ensemble des points où $f < m'(f, H) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie. On a: $m'(f, H) \geqq m(f, H)$.

Je dis qu'on a: $M'(f, H) \geqq m'(f, H)$. En effet, l'ensemble Q des points où $f > M'$ est de première catégorie; donc l'ensemble $H - Q$ est de deuxième catégorie, et en chaque point de cet ensemble, on a $f \leqq M'$. Donc, d'après la propriété caractéristique de m', on a $M' \geqq m'$.

On a donc:

$$M(f, H) \geqq M'(f, H) \geqq m'(f, H) \geqq m(f, H).$$

Posons:

$$\omega'(f, H) = M'(f, H) - m'(f, H);$$

nous aurons:

$$\omega'(f, H) \leqq \omega(f, H).$$

Nous dirons que M', m', ω', *sont le maximum, le minimum, l'oscillation de f sur H, quand on néglige les ensembles de première catégorie.* Remarquons que si P est un ensemble de première catégorie dans H, on peut, dans la définition de M', m', ω', faire complètement abstraction des valeurs de f aux points de P; de plus on a:

$$M(f, H - P) \geqq M'(f, H), \qquad m(f, H - P) \leqq m'(f, H),$$
$$\omega(f, H - P) \geqq \omega'(f, H).$$

20. Je dis que si H_1 est une *portion* (§ 8) de H, on a

$$M'(f, H_1) \leqq M'(f, H).$$

En effet, l'ensemble des points de H où $f > M'(f, H)$ est de première catégorie dans H, donc (§ 9) la partie de cet ensemble contenue dans H_1 est aussi de première catégorie dans H_1, par suite le nombre $M'(f, H_1)$ ne peut surpasser le nombre $M'(f, H)$.[1]

On a, dans les mêmes conditions:

$$m'(f, H_1) \geqq m'(f, H) \quad \text{et} \quad \omega'(f, H_1) \leqq \omega'(f, H).$$

Cela posé, soit A un point de H. Désignons par H_ρ la portion de H déterminée par la sphère Σ de centre A et de rayon ρ. Quand ρ décroît et tend vers 0, les nombres $M'(f, H_\rho)$, $\omega'(f, H_\rho)$ ne croissent pas, le nombre $m'(f, H_\rho)$ ne décroît pas; ces trois nombres ont donc des limites, que nous désignons par:

$$M'(f, H, A), \qquad m'(f, H, A), \qquad \omega'(f, H, A) = M'(f, H, A) - m'(f, H, A).$$

D'après ces définitions, si un point A de H est *intérieur* à une sphère S, et si H_1 est la portion de H déterminée par S, on a:

$$M'(f, H, A) \leqq M'(f, H_1), \qquad m'(f, H, A) \geqq m'(f, H_1),$$
$$\omega'(f, H, A) \leqq \omega'(f, H_1).$$

21. Le nombre $M'(f, H, A)$, défini en chaque point A de H, constitue une fonction φ', qui fait évidemment partie de la catégorie de fonctions étudiées au § 14. Donc φ' est semi-continue supérieurement. De même, $\psi' = m'(f, H, A)$ est semi-continue inférieurement, et enfin $\omega' = \varphi' - \psi'$ est semi-continue supérieurement.

En chaque point de H, on peut avoir $f > \varphi'$ ou bien $f \leqq \varphi'$, mais je dis que *l'ensemble des points où $f > \varphi'$ est de première catégorie dans H.*

Pour le montrer, considérons[2] l'ensemble (Δ) des cubes:

$$\frac{a_i - 1}{2^p} \leqq x_i \leqq \frac{a_i + 1}{2^p} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

---

[1] Mais, à l'inverse de ce qui a lieu pour la fonction M, du fait qu'un ensemble parfait K est contenu dans H, ne résulte nullement la condition $M'(f, K) \leqq M'(f, H)$ Par exemple, soit $f = 0$ aux points de l'ensemble H des points du segment $(0, 1)$, sauf aux points d'un ensemble parfait non dense K, où $f = 1$. On a: $M'(f, H) = 0$ et $M'(f, K) = 1 > M'(f, H)$.

[2] loc. cit., § 61, p. 101.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant entiers, p étant un entier positif. Cet ensemble est dénombrable et a la propriété suivante: si A est un point, et si Σ est une sphère de centre A, il est possible de trouver un domaine Δ auquel A est intérieur et tout entier contenu dans Σ.

En désignant les domaines de (Δ) par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i, \ldots$, soit H_i la portion de H déterminée par Δ_i si cette portion existe; le nombre $M'(f, H_i)$ est alors déterminé, et l'ensemble K_i des points de H_i où l'on a $f > M'(f, H_i)$ est de première catégorie dans H_i, par suite dans H. L'ensemble

$$K = M(K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots)$$

est donc aussi de première catégorie dans H. Je dis que cet ensemble contient tous les points de H où $f > \varphi'$.

En effet, soit A un tel point. On peut poser:

$$f(A) = \varphi'(A) + \alpha, \qquad \alpha > 0.$$

Soit ε tel que: $0 < \varepsilon < \alpha$. Nous pouvons déterminer une sphère Σ de centre A telle qu'on ait, R étant la portion de H déterminée par Σ:

$$M'(f, R) < \varphi'(A) + \varepsilon,$$

et il existe un domaine de l'ensemble (Δ) auquel A est intérieur et contenu dans Σ; soit Δ_j un tel domaine; H_j est une portion de R et l'on a:

$$M'(f, H_j) \leqq M'(f, R) < \varphi'(A) + \varepsilon < \varphi'(A) + \alpha = f(A).$$

Ainsi, au point A, on a $f(A) > M'(f, H_j)$, ce qui montre que A fait partie de K_j, et par suite de K.

L'ensemble des points de H où $f > \varphi'$, étant compris dans K, est de première catégorie. Il en est de même pour l'ensemble des points où $f < \psi'$. Soit P la réunion de ces deux ensembles, on voit qu'*il y a un certain ensemble P de première catégorie dans H, tel qu'en tout point A de $H - P$, on a:*

$$\psi'(A) \leqq f(A) \leqq \varphi'(A).$$

22. La fonction φ', définie dans ce qui précède, possède, outre la semi-continuité supérieure, une propriété spéciale, que nous allons établir. Nous avons d'abord, en vertu de cette première propriété:

$$(1) \qquad \varphi'(A) = M(\varphi', A) \geqq M'(\varphi', A).$$

D'autre part, dans une sphère S de centre A déterminant une portion R de H, l'ensemble des points où $f > \varphi'$ est de première catégorie, on peut le négliger dans la définition des nombres $M'(f, R)$ et $M'(\varphi', R)$; comme en tous les autres points où f est définie, $f \leqq \varphi'$, on a:

$$M'[f, R] \leqq M'[\varphi', R].$$

En faisant tendre le rayon de S vers 0, cette inégalité donne, pour les limites des deux membres:

$$\varphi'(A) = M'[f, A] \leqq M'[\varphi', A]. \tag{2}$$

De (1) et (2) résulte:

$$\varphi'(A) = M(\varphi', A) = M'(\varphi', A),$$

propriété plus particulière que la semi-continuité supérieure.

23. On a vu, dans le chapitre III, l'importance de la notion de *discontinuité ponctuelle* d'une fonction f sur un ensemble parfait H; cette propriété s'exprime par la condition que, H_1 étant une portion quelconque de H, on a:

$$m[\omega(f, H, A), H_1] = 0$$

ou encore

$$m[\omega(f, H, A), H, A] = 0$$

en tout point A de H.

D'une manière analogue, considérons une fonction f définie sur H et telle qu'on ait:

$$m[\omega'(f, H, A), H_1] = 0$$

pour toute portion H_1 de H, ou, ce qui revient au même,

$$m[\omega'(f, H, A), H, A] = 0$$

pour tout point A de H. Pour abréger, nous conviendrons de dire que f satisfait dans ce cas à la condition

$$m[\omega'(f)] = 0 \tag{1}$$

sur l'ensemble H.

Remarquons que, en vertu de la propriété exprimée par $\omega' \leqq \omega$, les fonctions *ponctuellement discontinues* sur H satisfont à la condition (1), de sorte que les fonctions de classe 0 et 1 possèdent, sur tout ensemble parfait H, la propriété (1).

Si f satisfait à la condition (1) sur H, l'ensemble fermé des points où $\omega'(f, H, A) \geqq \sigma$ $(\sigma > 0)$ est non dense dans H, car sans cela, dans une certaine portion de H, le minimum de $\omega'(f, H, A)$ serait $\geqq \sigma$; donc l'ensemble Q des points où $\omega' > 0$ est de première catégorie, et en tout point de $H - Q$, on a $\omega' = 0$, d'où $\varphi' = \psi'$.

D'autre part, d'après le § 21, en tout point de $H - P$, P étant un certain ensemble de première catégorie, on a: $\psi' \leqq f \leqq \varphi'$. L'ensemble $\Pi = M(P, Q)$ est encore de première catégorie, et, en tout point de $H - \Pi$, on a:

$$f = \varphi' = \psi'.$$

D'après cela, f, étant sur $H - \Pi$ égale à φ' et à ψ', est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en tout point A de $H - \Pi$ par rapport à $H - \Pi$, c'est-à-dire continue.

En résumé, *si f satisfait sur H à $m(\omega'(f)) = 0$, il y a un ensemble de première catégorie Π tel qu'en tout point A de $H - \Pi$, f est continue par rapport à $H - \Pi$.*

24. Réciproquement, supposons cette dernière condition vérifiée. Soit A_0 un point de $H - \Pi$, et soit $\varepsilon > 0$; il y a une sphère Σ de centre A_0 telle que, dans la portion H_1 de H déterminée par Σ, on a, pour tout point A de $H - \Pi$:

$$f(A_0) - \varepsilon < f(A) < f(A_0) + \varepsilon.$$

Comme Π est de première catégorie dans H, on peut en faire abstraction dans la définition des nombres $M'(f, H_1)$, $m'(f, H_1)$, lesquels sont par suite compris entre $f(A_0) - \varepsilon$ et $f(A_0) + \varepsilon$; il en est a fortiori de même pour les nombres $\varphi'(A_0) = M'(f, H, A_0)$, et $\psi'(A_0) = m'(f, H, A_0)$ compris entre les précédents; le résultat étant vrai quel que soit ε, on a:

$$f(A_0) = \varphi'(A_0) = \psi'(A_0),$$

d'où:

$$\omega'(A_0) = 0,$$

A_0 étant un point quelconque de $H - \Pi$. Enfin, $H - \Pi$ étant dense dans toute portion de H, la fonction ω' a son minimum nul dans toute portion de H, et par suite en tout point, c'est-à-dire satisfait à la condition (1): $m(\omega'(f)) = 0$.

La fonction φ', étant semi-continue, est de classe $\leqq 1$; donc, *si f satisfait à $m(\omega'(f)) = 0$, f diffère d'une certaine fonction de classe $\leqq 1$ aux points d'un ensemble de première catégorie.*

Remarquons, en dernier lieu, que la condition (1) est invariante par rapport aux transformations T et T^{-1} du § 4; cela résulte de ce que, si A est un point de $H - \Pi$ où f est continue par rapport à $H - \Pi$, la transformée de f par T ou par T^{-1} a la même propriété.

25. Nous allons démontrer que *la condition $m(\omega'(f)) = 0$ se conserve à la limite*, c'est-à-dire qu'on a le théorème suivant:

Théorème. *Si, sur un ensemble parfait P, une suite de fonctions f_1, $f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ a une limite f, et si chacune des fonctions f_i satisfait à la condition $m(\omega'(f_i)) = 0$, il en est de même de f.*

Dans la démonstration de ce théorème, nous supposerons que les fonctions f_i et f sont *finies*, ce qui n'enlèvera rien à la généralité du résultat.

Tout revient à montrer que l'hypothèse contraire à l'énoncé conduit à une contradiction; cette hypothèse est qu'il existe une portion H de P dans laquelle on a:

$$m[\omega'(f, P, A), H] > 0. \tag{2}$$

Prenons deux nombres λ et μ tels qu'on ait:

$$m[\omega'(f, P, A), H] > 2\lambda > 2\mu > 0$$

et posons:

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon, \qquad (\varepsilon > 0). \tag{3}$$

Pour toute portion H' de H, on a:

$$\omega'(f, H') > 2\lambda. \tag{4}$$

D'autre part, à la fonction f_i correspond un ensemble Π_i de première catégorie dans H tel qu'en tout point de $H - \Pi_i$, f_i est continue par rapport à $H - \Pi_i$. Si l'on pose: $\Pi = M(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_i, \ldots)$, l'ensemble Π est de première catégorie; quel que soit i et quel que soit le point A de $H-\Pi$ (qui est contenu dans tous les $H-\Pi_i$), *f_i est continue en A par rapport à $H-\Pi$.*

Cela posé, soit p un entier, et soit H_1 une portion quelconque de H, déterminée par une sphère Σ_1. L'ensemble $H-\Pi$ étant partout dense dans H, on peut choisir un point A_0 qui fasse partie de $H-\Pi$ et soit *intérieur à* Σ_1. Comme on a: $\lim f_\nu(A_0) = f(A_0)$, on peut déterminer un entier $\alpha > p$ tel que:

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon. \tag{5}$$

La fonction f_α étant continue en A_0 par rapport à $H-\Pi$, on peut trouver une sphère Σ_2 de centre A_0, contenue dans Σ_1, telle que, A étant un point quelconque de $H-\Pi$ intérieur à Σ_2, on ait:

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Prenons une sphère Σ_3 de centre A_0 et intérieure à Σ_2, et soit H_3 la portion de H déterminée par Σ_3. D'après (4), on a: $\omega'(f, H_3) > 2\lambda$.

Or, si l'on pose: $Q = D(H-\Pi, H_3)$, on a, d'après une remarque du § 19:

$$\omega(f, Q) \geqq \omega'(f, H_3) > 2\lambda.$$

Les valeurs de f aux points de Q forment donc un ensemble dont l'oscillation surpasse 2λ; donc, d'après un lemme connu,[1] l'une de ces valeurs diffère du nombre $f(A_0)$ de plus de λ, c'est-à-dire qu'on peut trouver un point A_1 de Q tel que:

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda. \tag{7}$$

On a: $\lim f_\nu(A_1) = f(A_1)$; on peut donc choisir un entier $\beta > p$ tel que:

$$|f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Enfin, A_1, qui appartient à Q, par suite à Σ_3, est intérieur à Σ_2, et appartient aussi à $H-\Pi$; f_β est donc continue en A_1 par rapport à $H-\Pi$; déterminons une sphère Σ_4 de centre A_1, contenue dans Σ_2, et telle que, A étant un point quelconque de $H-\Pi$ contenu dans Σ_4, on ait:

$$|f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon. \tag{9}$$

[1] loc. cit., p. 80.

Comme Σ_4 est contenu dans Σ_2, le même point A vérifie aussi la relation (6).

En combinant, d'une part (5) et (6), d'autre part (8) et (9), on trouve:

$$|f_\alpha(A) - f(A_0)| < 2\varepsilon, \qquad |f_\beta(A) - f(A_1)| < 2\varepsilon,$$

inégalités qui, combinées avec (7):

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda = \mu + 4\varepsilon,$$

donnent, *pour tout point A de $H - \Pi$ contenu dans Σ_4*:

$$|f_\alpha(A) - f_\beta(A)| > \mu, \tag{10}$$

et par suite, comme α et β sont supérieurs à p:

$$\omega[f_p(A), f_{p+1}(A), \ldots] > \mu. \tag{11}$$

Ainsi, p étant donné, toute portion H_1 de H contient une portion dont tous les points, sauf peut-être ceux de Π, satisfont à (11). Par suite, l'ensemble K_p des points de H qui ne satisfont pas à (11), se compose d'un ensemble non dense dans H et d'un ensemble compris dans Π, donc est de première catégorie. Donnons à p toutes les valeurs possibles, et soit:

$$K = M(K_1, K_2, \ldots, K_p, \ldots).$$

K est de première catégorie par rapport à H. L'ensemble complémentaire $H - K$ contient donc effectivement des points, lesquels ne font partie d'aucun des ensembles K_p; si A est l'un de ces points, A satisfait à (11), quel que soit p, ce qui est contradictoire avec le fait que $f_\nu(A)$ tend vers une limite finie.

Ainsi, l'hypothèse (2) conduit à une contradiction.

On a donc, dans toute portion H de P:

$$m[\omega'(f, P, A), H] = 0.$$

Autrement dit, la condition $m(\omega'(f)) = 0$ se conserve à la limite.

26. Cette propriété appartient à toutes les fonctions de l'ensemble E défini au § 1. En effet, elle appartient aux fonctions des classes 0 et 1; supposons établi qu'elle appartient à toutes les fonctions de classes inférieures à α, et montrons qu'elle appartient aussi aux fonctions de classe

α. Soit f une fonction de classe α; il existe une suite $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ tendant vers f, chaque fonction f_ν appartenant à une classe $< \alpha$, et par suite satisfaisant à $m[\omega'(f_\nu)] = 0$. Donc la fonction $f = \lim f_\nu$ satisfait à la même condition.

D'après cela, on serait assuré qu'une fonction f n'appartient pas à l'ensemble E si, sur un certain ensemble parfait H, f satisfaisait à la condition: $m[\omega'(f, H, A), H] > 0$. Par exemple, si l'on pouvait partager H en deux ensembles K et $H - K$ qui, dans chaque portion de H, seraient tous deux de deuxième catégorie, en posant $f = 0$ sur H, $f = 1$ sur $H - K$, on aurait, dans toute portion, et par suite en tout point de H: $M' = 1$, $m' = 0$, d'où $\omega' = 1$, et f ne ferait pas partie de E.

CHAPITRE V.

Premières recherches sur les fonctions de classes 2 et 3.

27. Abordons maintenant la recherche des conditions suffisantes pour qu'une fonction f définie sur un ensemble fermé P de l'espace à n dimensions soit de classe $2, 3, \ldots$. D'après les résultats du chapitre précédent, nous devons nous borner à considérer des fonctions satisfaisant, sur tout ensemble parfait, à la condition $m(\omega'(f)) = 0$, puisque ce sont les seules qui appartiennent à l'ensemble E. D'un autre côté, d'après le § 15, une fonction f définie aux points d'un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$ si elle est de classe $\leqq 1$ sur l'ensemble parfait P^Ω; a fortiori, f est de classe $\leqq \alpha$ $(\alpha > 1)$ sur P si elle est de classe $\leqq \alpha$ sur P^Ω; nous pouvons donc, dans la suite, nous borner à considérer des fonctions définies sur un ensemble *parfait*.

Soit donc f définie sur l'ensemble parfait P et satisfaisant à la condition: $m[\omega'(f)] = 0$ sur P. D'après le § 24, il existe sur P une fonction φ de classe $\leqq 1$ telle que f ne diffère de φ qu'aux points d'un ensemble de première catégorie K. Soit $K = M(K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots)$, les K_i étant non denses dans P. Remplaçons chaque ensemble K_i par son dérivé d'ordre 0, K_i^0, qui est aussi non dense dans P, de plus, est fermé, et contient K_i, de sorte que si $K' = M(K_1^0, K_2^0, \ldots, K_i^0, \ldots)$, on a $f = \varphi$ en tout point de $P-K'$. Chaque ensemble K_i^0 se compose de l'ensemble parfait K_i^Ω (s'il existe), plus un ensemble dénombrable, soit H_i. Posons:

$$H = M(H_1, \ldots, H_i, \ldots) \quad \text{et} \quad K'' = M(K_1^\Omega, \ldots, K_i^\Omega, \ldots).$$

On a:

$$K' = M(K'', H)$$

et H est dénombrable. En résumé, *on peut supposer que l'ensemble de première catégorie K tel que $f=\varphi$ aux points de $P-K$ se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits, plus un ensemble dénombrable.* Nous sommes conduits à étudier f sur chacun des ensembles K_i^0, et pour cela sur chacun des ensembles parfaits K_i^Ω.

Nous devons supposer que f satisfait sur K_i^Ω à la condition $m(\omega'(f))=0$, de telle sorte qu'on peut déterminer une fonction φ_i de première classe sur K_i^Ω et une infinité dénombrable d'ensembles fermés et non denses dans K_i^Ω, soit $K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{ij}, \ldots$, avec la condition que $f=\varphi_i$ en tout point de K_i^Ω qui n'appartient pas à l'un des ensembles K_{ij}. On sera conduit ensuite à étudier f sur les ensembles K_{ij}^Ω, et à introduire de nouveaux ensembles non denses par rapport aux ensembles K_{ij}^Ω, et ainsi de suite.

Pour montrer l'utilité de ce procédé, démontrons d'abord un théorème qui nous permettra de définir des fonctions de classe 2.

28. **Théorème.** Soit P_0 un ensemble fermé, et $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ une infinité dénombrable d'ensembles fermés tous contenus dans P_0; soit f_0 une fonction définie sur P_0 et de classe $\leqq 2$, et $f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$ des fonctions respectivement définies sur $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ et toutes de classes $\leqq 2$. La fonction f qui est égale à f_1 sur P_1, à f_i $(i=2, 3, \ldots)$ aux points de P_i qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$, enfin à f_0 sur les points de P_0 qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

En effet, d'après les hypothèses de l'énoncé, h étant un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, i, \ldots$, f_h est de classe $\leqq 2$ sur P_h. Il y a donc une suite de fonctions de classe $\leqq 1$ tendant vers f_h, soit:

$$f_{1,h}, f_{2,h}, \ldots, f_{j,h}, \ldots.$$

En tout point A de P_h, on a: $\lim\limits_{j=\infty} f_{jh}(A) = f_h(A)$.

Cela posé, définissons des fonctions φ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) de la manière suivante: φ_ν est égale à $f_{\nu,1}$ sur P_1, à $f_{\nu,h}$ ($h = 2, 3, \ldots, \nu$) sur les points de P_h qui n'appartiennent à aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}$, enfin à $f_{\nu,0}$ sur les points de P_0 qui n'appartiennent à aucun des ensembles P_1, $P_2, \ldots, P_\nu$. La fonction φ_ν, qui est ainsi définie sur P_0, est de classe $\leqq 1$, d'après le § 15, car elle est obtenue par superposition des fonctions de classe $\leqq 1$: $f_{\nu,1}, f_{\nu,2}, \ldots, f_{\nu,\nu}, f_{\nu,0}$. Je dis en outre qu'on a: $\lim \varphi_\nu = f$.

En effet, soit A un point de P_0. Si A fait partie d'un des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, soit i le plus petit indice tel que A appartient à P_i; alors A n'appartient à aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ (dans l'hypothèse $i > 1$). D'après la définition de φ_ν, dès que $\nu \geqq i$, on a: $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,i}(A)$. On a donc: $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_{\nu,i}(A) = f_i(A)$; or, d'après la définition de f, on a aussi $f(A) = f_i(A)$; donc $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = f(A)$.

Si A ne fait partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, on a, quel que soit ν: $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,0}(A)$; donc, on a: $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_{\nu,0}(A) = f_0(A)$; on a aussi, d'autre part, $f(A) = f_0(A)$, par suite $\lim \varphi_\nu(A) = f(A)$.

En résumé, f est la limite de φ_ν, qui est de classe $\leqq 1$, donc f est de classe $\leqq 2$.

29. Indiquons des cas particuliers de la proposition générale qui précède.

Si f_0 est de classe $\leqq 2$ sur l'ensemble fermé P_0, la fonction f obtenue en remplaçant par des valeurs arbitraires les valeurs de f_0 aux points d'un ensemble *dénombrable* Q est de classe $\leqq 2$. En effet, soient $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ les points de Q; il suffit d'appliquer la proposition du § 28 en prenant $P_i = A_i$, et $f_i = f$. La proposition est vraie a fortiori si f_0 est de classe $\leqq 1$. On peut aussi conclure de ce qui précède que *si R est un ensemble dénombrable, la classe α d'une fonction f ne dépend pas de ses valeurs aux points de R, dès que $\alpha \geqq 2$.*

Reprenons maintenant le procédé du § 27. Partons d'une fonction f satisfaisant sur l'ensemble parfait P_0 à la condition $m[\omega'(f)] = 0$. Il existe, d'une part une fonction φ_0 de classe $\leqq 1$, d'autre part un ensemble de première catégorie dans P_0, soit P_1, tel qu'en tout point de $P_0 - P_1$, on a $f = \varphi_0$; de plus, d'après une remarque du § 27, on peut supposer que P_1 se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans P_0, soit $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. Si f se trouve être de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles p_i, l'application du théorème du § 28 (en remplaçant f_0 par φ_0, et tous les f_i $(i > 0)$ par f) montre que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

Sinon, nous traiterons chaque ensemble parfait p_i comme nous avons traité P_0; nous définissons donc une fonction φ_i de classe $\leqq 1$ sur p_i, et un ensemble de première catégorie dans p_i, soit p'_i, tel que $f = \varphi_i$ en tout point de $p_i - p'_i$; en outre, p'_i se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans p_i, soit: $p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots, p_{i,j}, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. Soit P_2 l'ensemble formé par la réunion de tous les ensembles à deux indices $p_{i,j}$. Supposons que f soit de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i,j}$; alors f est de classe $\leqq 2$ sur chacun des ensembles p_i, d'après le § 28; ce point étant établi, on voit, par une seconde application du même théorème, que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

Si les conditions précédentes ne sont pas remplies, c'est-à-dire si f n'est pas de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i,j}$, nous serons conduits à continuer l'application du procédé précédent; nous introduirons donc des fonctions $\varphi_{i,j}$ de classe $\leqq 1$ et des ensembles à trois indices $p_{i,j,k}$, puis s'il y a lieu, des fonctions $\varphi_{i,j,k}$, et des ensembles $p_{i,j,k,l}$. D'une manière générale, si nous avons été conduits à introduire l'ensemble parfait $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, et si f n'est pas de classe $\leqq 1$ sur cet ensemble, comme f satisfait sur cet ensemble à la condition $m[\omega'(f)] = 0$, il y a une fonction $\varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ de classe $\leqq 1$ sur $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, et un ensemble de première catégorie par rapport à $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, soit $p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, tel qu'on a: $f = \varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ en tout point de $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha} - p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$. L'ensemble $p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ se compose, outre un certain ensemble dénombrable, d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$; nous les désignons par $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha,i_{\alpha+1}}$, l'indice $i_{\alpha+1}$ prenant les valeurs $1, 2, \ldots$. Désignons par P_α l'ensemble formé par la réunion des ensembles p à α indices.

Cela posé, si, par l'application du procédé dont la loi vient d'être indiquée, nous obtenons un ensemble P_h tel que f soit de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$, dont se compose P_h, je dis que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0. Il suffit en effet, pour le faire voir, d'appliquer successivement le théorème du § 28, d'abord à chacun des ensembles à $h - 1$ indices, ce qui montre que f est de classe $\leqq 2$ sur chacun de ces ensembles, puis ensuite à chacun des ensembles à $h - 2$ indices, et ainsi de suite en remontant jusqu'à chacun des ensembles $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ et finalement à P_0.

30. Nous allons, pour éclaircir les généralités exposées dans ce qui précède, les appliquer à des exemples. Nous nous bornerons tout d'abord, pour plus de simplicité, à étudier des fonctions d'une seule variable x définies dans le champ $0 \leqq x \leqq 1$.

Je rappelle d'abord des résultats relatifs à la notion d'ensemble parfait non dense par rapport à un continu linéaire.[1]

Si P est un ensemble parfait non dense dans le segment de droite AB, il existe, sur AB, une infinité dénombrable d'intervalles, que j'appelle contigus à P, qui n'ont deux à deux aucun point commun, et tels que l'ensemble $AB - P$ est constitué par les points intérieurs à ces intervalles. L'ensemble P contient des points de deux sortes: 1° les points e, extrémités des intervalles contigus à P; 2° les points l, dont chacun est extérieur à tous ces intervalles. Chaque point de P, qu'il soit e ou l, est limite de points des deux catégories; mais, tandis qu'il y a, au voisinage d'un point l, des points de P, *à gauche et à droite de ce point,*[2] il n'y a, au voisinage d'un point e, de points de P que *d'un seul côté.* L'ensemble des points e est dénombrable.

31. Rappelons d'autre part certaines propriétés relatives à la représentation des nombres par des fractions continues, limitées ou illimitées. Nous poserons;

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots \cfrac{1}{a_\nu + \ddots}}}} = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots);$$

chaque nombre a_ν est un entier positif; les quotients incomplets $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ sont en nombre fini, ou en nombre infini.

Un nombre irrationnel de l'intervalle $(0, 1)$ est représentable d'une manière bien déterminée par une fraction continue illimitée $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$

[1] loc. cit., Ch. III, section II.

[2] Sauf dans le cas où le point coincide avec A ou B, extrémités du segment AB.

et réciproquement, de telle sorte qu'il y a une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des nombres irrationnels du segment $(0, 1)$ et l'ensemble des suites infinies d'entiers positifs $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$.

Un nombre rationnel de l'intervalle $(0, 1)$ [les nombres 0 et 1 étant mis à part], est représentable d'une manière bien déterminée par une fraction continue limitée dont le dernier quotient est > 1; mais, si on supprime cette restriction, il y a, pour tout nombre rationnel, deux représentations possibles, car on a, si $a_p > 1$:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p) = (a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p - 1, 1).$$

Étant donné un système de h entiers positifs rangés dans un ordre déterminé, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, tous les nombres représentables par des fractions continues, limitées ou illimitées, commençant par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, sont compris dans la formule

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_h + y}}} \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq y \leqq 1.$$

Ils forment donc, dans le segment représentatif $(0, 1)$, un intervalle continu, points extrêmes compris, que je désigne par $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, et dont les extrémités sont les deux points rationnels:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h) \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1).$$

Pour tout point intérieur à l'intervalle, on a: $0 < y < 1$, de sorte que la représentation d'un point *intérieur* à cet intervalle commence toujours par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$.

Soit A un point rationnel, admettant les deux représentations:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h) = (a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h - 1, 1) \qquad [a_h > 1].$$

Le point A est l'extrémité commune des deux intervalles:

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h) \quad \text{et} \quad I(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h - 1, 1),$$

et ces deux intervalles sont situés de part et d'autre de A.

Soit B un point irrationnel, représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots).$$

Le point B est *intérieur* à chacun des intervalles:

$$I(a_1)\ ,\ I(a_1\ ,\ a_2)\ ,\ \ldots\ ,\ I(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_\nu)\ ,\ \ldots$$

dont chacun est contenu dans le précédent, et c'est le seul point contenu dans tous ces intervalles.

Enfin, étant donnée une fraction continue, limitée ou illimitée, si on y remplace le quotient incomplet d'ordre h par un nombre plus grand, on augmente ou on diminue le nombre représenté suivant que h est pair ou impair.

32. Cela posé, donnons-nous d'une part un entier positif n, d'autre part un système de h entiers positifs dans un ordre donné, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$; je me propose d'étudier *l'ensemble Q des points représentables par des fractions continues limitées ou illimitées commençant par* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, *chacun des quotients suivants, s'il existe, étant* $> n$.

Tout d'abord, l'ensemble Q est évidemment compris dans l'intervalle $I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h)$, de sorte que tout point, rationnel ou irrationnel, qui est en dehors de cet intervalle, ne fait pas partie de Q, et n'est pas point limite pour Q.

Étudions maintenant les points de cet intervalle, et en premier lieu, les points rationnels. En mettant à part pour l'instant les deux points extrêmes, tout point rationnel A de l'intervalle $I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h)$ admet une représentation de la forme:

$$(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_k) \quad \text{avec} \quad k > h \quad \text{et} \quad \beta_k > 1 .$$

Le point A est donc l'extrémité commune de deux intervalles situés de part et d'autre de lui, savoir:

$$I_1 = I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_k)$$

et

$$I_2 = I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_{k-1}\ ,\ \beta_k - 1\ ,\ 1).$$

Un point *intérieur* à l'intervalle I_2 ne peut, dans aucun cas, faire partie de Q, car la fraction qui représente un tel point contient nécessairement un quotient $\leqq n$, à savoir le quotient de rang $k + 1$, qui est égal à 1.

En ce qui concerne I_1, deux cas sont à distinguer. Si A *ne fait pas partie de* Q, c'est que l'un des nombres $\beta_{h+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_k$ est $\leqq n$; alors, pour tout point intérieur à I_1, il y a un quotient incomplet $\leqq n$, tous ces points sont donc en dehors de Q, de sorte que le point A est *extérieur à* Q (§ 6). Si au contraire A *fait partie de* Q, les nombres $\beta_{h+1}, \ldots \beta_k$, sont supérieurs à n; considérons alors les points:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k, \gamma)$$

où γ reçoit des valeurs supérieures à n et croissant indéfiniment, nous obtenons ainsi une suite de points distincts de A, qui appartiennent à Q et *qui tendent vers* A; donc A *est point limite pour* Q, *mais d'un seul côté.*

Nous avons laissé de côté les extrémités de l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$. Le point B: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, *fait partie de* Q; il est, d'une part, extrémité de l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h - 1, 1)$ si $\alpha_h > 1$ ou $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1} + 1)$ si $\alpha_h = 1$, dont aucun point intérieur ne fait partie de Q; d'autre part, il est limite de la suite de points de Q représentés par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \gamma)$, où γ croît indéfiniment, de sorte que B *est limite pour* Q, *mais d'un seul côté.* Quant au point $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1)$, *il ne fait pas partie de* Q, et comme il est l'extrémité des deux intervalles

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1) \quad \text{et} \quad I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_h + 1),$$

dont aucun point intérieur ne fait partie de Q, il est *extérieur à* Q. On a, en résumé, les résultats suivants, concernant les points rationnels du segment $(0, 1)$:

1° *Tout point rationnel de* Q *est limite pour* Q, *d'un seul côté.*

2° *Tout point rationnel qui ne fait pas partie de* Q *est extérieur à* Q.

Passons maintenant aux points irrationnels de l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$. Si C est un point irrationnel *ne faisant pas partie de* Q, la fraction correspondante est de la forme:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k, \ldots)$$

avec la condition qu'un certain quotient β, soit β_k, est $\leqq n$. Dans ces conditions, tous les points intérieurs à l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k)$, auquel C est intérieur, sont en dehors de Q; donc C est *extérieur à* Q.

Si D est un *point irrationnel de* Q, la fraction correspondante est de la forme:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots, \beta_k, \ldots),$$

tous les β étant supérieurs à n. On obtiendra un autre point de Q en remplaçant un quelconque des nombres β, soit β_r, par un nombre supérieur; en prenant r assez grand, et successivement pair ou impair, ce nouveau point pourra être pris d'un côté ou d'autre de D, et aussi voisin qu'on voudra de D. Donc D est *limite pour* Q, et *des deux côtés*. En résumé:

3° *Tout point irrationnel de Q est limite pour Q, des deux côtés.*

4° *Tout point irrationnel qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q.*

Tirons maintenant des conclusions des propositions 1°, 2°, 3°, 4°. D'après 2° et 4°, tout point qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q, donc Q est *fermé*. D'après 1° et 3°, tout point de Q est limite pour Q, donc Q, qui est fermé, est *parfait*. D'après 1° et 2°, il y a, au voisinage de tout point rationnel, par suite dans toute portion du continu, un inter valle qui ne contient aucun point de Q, c'est-à-dire que Q est *non dense* par rapport au continu.

Ainsi, *Q est un ensemble parfait non dense dans le continu linéaire;* d'après le § 30, les points de Q sont de deux sortes, les points e, et les points l; d'après 1°, tout point rationnel de Q est un point e; d'après 3°, tout point irrationnel de Q est un point l; il en résulte que réciproquement tous les points e de Q sont rationnels, tous les points l de Q sont irrationnels. En résumé, on a la proposition suivante:

L'ensemble des points représentables par des fractions continues limitées ou illimitées commençant par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, les autres quotients étant supérieurs à n, est un ensemble parfait non dense, et ceux de ces points qui sont irrationnels constituent les points l de cet ensemble.

Nous désignerons dans la suite cet ensemble par $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, et l'ensemble de ses points l par $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$.

33. Supposons qu'on donne à n une valeur fixe, et qu'on fasse varier de toutes les manières possibles les entiers h, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$. On obtient ainsi une infinité dénombrable d'ensembles $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$. Je désigne par P_n l'ensemble formé par la réunion de tous les $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ correspondants. On reconnaît que:

Tout point de P_n est un point irrationnel représentable par une fraction continue dont tous les quotients incomplets surpassent n, à partir d'un *certain rang; et réciproquement, un point qui remplit ces conditions appartient à* P_n.

Un point déterminé de P_n appartient évidemment à une infinité d'ensembles $p^{(n)}$, car soit $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$ ce point, les quotients de rang supérieur à ν étant supérieurs à n; le point fait partie de tous les ensembles $p^{(n)}[a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, a_{\nu+k}]$, quel que soit k. Mais, comme nous allons le montrer, il est possible de choisir parmi les ensembles $p^{(n)}$, une série déterminée, dont la réunion constituera P_n, et telle qu'un point donné de P_n fasse partie d'un seul ensemble de cette série. De plus, en vue d'applications ultérieures, nous nous astreindrons à ce que, dans chaque ensemble de cette série, le nombre h des quotients incomplets qui ont des valeurs fixes soit au moins égal à n.

Prenons, parmi les ensembles $q^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$:

1° ceux d'entre eux pour lesquels $h = n$, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ prenant toutes les valeurs possibles.

2° ceux pour lesquels $h > n$, avec la condition $\alpha_h \leqq n$.

Appelons, pour abréger, *ensembles normaux* $q^{(n)}$ les ensembles $q^{(n)}$ qui viennent d'être définis, et *ensembles normaux* $p^{(n)}$ les $p^{(n)}$ correspondants.

Je dis qu'*un point déterminé A de P_n appartient à un et un seul ensemble normal* $p^{(n)}$. En effet, soit $(a_1, a_2, \ldots)$ ce point. Le seul ensemble $q^{(n)}$ qui remplit l'une des conditions 1° ou 2° et qui contient A est l'ensemble $q^{(n)}[a_1, a_2, \ldots, a_h]$, h étant le plus petit nombre supérieur ou égal à n, tel que tous les a de rang supérieur à h soient supérieurs à n.

D'après cela, deux ensembles normaux $p^{(n)}$ distincts n'ont aucun point commun, deux ensembles normaux $q^{(n)}$ distincts ne peuvent avoir en commun que des points rationnels.

34. D'après la propriété caractéristique des points de P_n, il est évident que P_{n+1} est contenu dans P_n. D'une manière plus détaillée, étudions la disposition d'un ensemble normal de P_{n+1} par rapport aux ensembles normaux de P_n.

Soit $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ un ensemble normal $q^{(n+1)}$; on a:

$$\text{soit} \quad k = n + 1, \quad \text{soit} \quad k > n + 1, \quad \text{avec} \quad \alpha_k \leqq n + 1.$$

Si les nombres $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_k$, sont tous supérieurs à n, posons: $h = n$; sinon, certains d'entre eux étant inférieurs ou égaux à n, prenons, parmi ces derniers, celui qui a le rang le plus élevé, et désignons par h ce rang. Ainsi, on a, soit $h = n$, soit $h > n$, avec $\alpha_h \leqq n$, de sorte que l'ensemble $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ est normal; de plus, les nombres $\alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_k$ (si $k > h$) sont supérieurs à n. Par suite, tout point de $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \ldots, \alpha_k]$ possède la propriété caractéristique des points de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$. Donc *tout ensemble normal* $q^{(n+1)}$ *est contenu dans un certain ensemble normal* $q^{(n)}$, lequel est unique, car un ensemble normal $q^{(n)}$ autre que $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, n'ayant en commun avec cet ensemble que des points rationnels, ne peut contenir $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \ldots, \alpha_k]$.

Je dis que *l'ensemble* $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ *est non dense dans* $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$. Pour le démontrer, si nous tenons compte d'une part de ce fait que l'ensemble $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ a pour dérivé $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ et est donc dense par rapport à lui, d'autre part de ce que $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ est parfait, par suite fermé, il suffit (cf. § 8) de faire voir qu'au voisinage de tout point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ existe un point qui fait partie de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ sans faire partie de $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$. Or, soit A un point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots).$$

Considérons, j étant un entier arbitraire, le point B:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots, \beta_{h+j}, n+1, n+1, \ldots)$$

dans lequel tous les quotients qui suivent celui de rang $h+j$ sont égaux à $n+1$. Ce point appartient bien à $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, puisque les quotients de rang $> h$ sont $> n$, mais il n'appartient pas à P_{n+1}, puisqu'il y a une infinité de quotients égaux à $n+1$; donc il n'appartient pas à $p^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$, et, étant irrationnel, n'appartient pas non plus à $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$. De plus, en prenant j assez grand, le point B peut être pris aussi près qu'on veut du point A. La proposition est donc démontrée.

Cela posé, modifiant les notations précédentes, nous supposerons qu'on ait rangé d'abord les ensembles normaux $q^{(1)}$ dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par la notation $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i, \ldots$. Chacun des ensembles normaux $q^{(2)}$ appartient à un et un seul des ensembles normaux $q^{(1)}$; considérons ceux des ensembles normaux $q^{(2)}$ qui sont contenus dans q_i; il y en a une infinité dénombrable; nous supposerons qu'on les ait rangés dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par $q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,j}, \ldots$. Nous définirons, par l'application du même procédé, des ensembles q à $3, 4, \ldots, n, \ldots$ indices, qui seront les ensembles normaux $q^{(3)}, q^{(4)}, \ldots, q^{(n)}, \ldots$.

On a ainsi des ensembles parfaits non denses dans le continu désignés par la notation générale: $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, les entiers n, $i_1, i_2, \ldots, i_n$ prenant toutes les valeurs entières positives. L'ensemble $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}}$ est contenu dans l'ensemble $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ et est non dense par rapport à lui.

Soit $p_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ l'ensemble des points *irrationnels* de $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. La réunion de tous les $p_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, n étant fixe, constitue l'ensemble P_n des points irrationnels pour lesquels tous les quotients incomplets, à partir d'un certain rang, surpassent n.

35. Il existe des points qui font partie de P_n, quel que soit n; ce sont les points irrationnels représentables par des fractions continues dans lesquelles le nombre des quotients incomplets inférieurs à n est fini, quel que soit n; je désigne l'ensemble de ces points par P_ω; ainsi, *P_ω est l'ensemble des points irrationnels pour lesquels le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n,* et l'on a, P_0 désignant le segment $(0, 1)$:

$$P_0 > P_1 > P_2 > \ldots > P_n > \ldots > P_\omega.$$

Soit A un point déterminé de P_ω, représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Ce point fait partie de $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$; il appartient donc à un ensemble normal $q^{(1)}$ bien déterminé, soit q_{i_1}, à un ensemble normal $q^{(2)}$ bien déterminé qui, puisqu'il a en commun avec q_{i_1} un point irrationnel, doit être contenu dans q_{i_1}, soit donc q_{i_1, i_2}; d'une manière générale, le point A est contenu dans un ensemble normal $q^{(n)}$ déterminé, qui est de la forme $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. Ainsi, au point A de P_ω correspond une suite d'entiers positifs bien déterminée $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ telle que le point A est contenu dans tous les ensembles:

$$q_{i_1} > q_{i_1, i_2} > \ldots > q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} > \ldots.$$

Réciproquement, donnons-nous une suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ et considérons les ensembles:

$$(1) \qquad P_0 > q_{i_1} > q_{i_1, i_2} > \ldots > q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} > \ldots.$$

Ces ensembles étant fermés, et le premier d'entre eux étant borné, il existe au moins un point qui leur est commun. Si nous revenons aux notations premières relatives aux ensembles q, ces ensembles seront désignés de la manière suivante:

$$q_{i_1} = q^{(1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}] \text{ avec } h_1 \geqq 1,$$

$$q_{i_1, i_2} = q^{(2)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}] \text{ avec } h_2 \geqq 2 \text{ et } h_2 \geqq h_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}, \ldots, \alpha_{h_n}] \text{ avec } h_n \geqq n \text{ et } h_n \geqq h_{n-1}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Du fait que $h_n \geqq n$ résulte que h_n croît indéfiniment, de sorte que les entiers α définis par ce qui précède sont en nombre infini; il y a donc un et un seul point contenu dans tous les ensembles q de (1); c'est le point irrationnel défini par:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}, \ldots, \alpha_{h_n}, \ldots),$$

et ce point appartient à tous les P_n, par suite à P_ω. Ainsi, à toute suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ correspond un point déterminé de P_ω, à savoir le point unique contenu dans tous les ensembles $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. Nous établissons de la sorte, entre l'ensemble S de toutes les suites d'entiers positifs et l'ensemble P_ω, une correspondance *biunivoque et réciproque* définie par la loi suivante:

Il y a correspondance entre l'élément A de S:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$$

et le point B de P_ω représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$$

si le point $(a_1, a_2, \ldots)$ est contenu dans tous les ensembles $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, quel que soit n.

Je dis que la partie de P_ω contenue dans l'ensemble $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, soit $D[q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}, P_\omega]$, *est dense dans* $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. En effet, soit

$$q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h];$$

au voisinage de tout point A de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, soit:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots)$$

existe un point faisant partie du même ensemble et de P_ω; il suffit de prendre le point:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_{h+j}, n+1, n+2, \ldots)$$

où les quotients qui suivent celui de rang $h+j$ sont les nombres de la suite naturelle à partir de $n+1$. Ce point, qui fait partie de P_ω et de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_h]$, peut être pris aussi près qu'on veut de A, en prenant j assez grand. La proposition est donc démontrée.

A fortiori, si $r > n$, *l'ensemble* $D[q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}, P_r]$ *est dense dans* $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, puisque P_r contient P_ω.

36. Cela posé, nous allons donner des exemples de fonctions de classes 2 et 3, définies sur P_0. Remarquons d'abord que, d'après le § 29, la classe α d'une fonction f définie sur P_0, si $\alpha > 1$, est indépendante des valeurs de f aux points *rationnels* de P_0, qui forment un ensemble dénombrable.

Donnons-nous $n+1$ nombres finis, quelconques, que nous désignerons par $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ et considérons la fonction φ définie de la manière suivante: sur $P_i - P_{i+1}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $\varphi = u_i$; sur P_n, $\varphi = u_n$. φ est ainsi définie en tout point de P_0; je dis que φ est de classe $\leqq 2$. En effet, φ est de classe $\leqq 2$ sur chaque ensemble normal $q^{(n)}$, puisqu'on a sur un tel ensemble: $\varphi = u_n$, sauf aux points rationnels de l'ensemble; admettons comme démontré que φ est de classe $\leqq 2$ sur tous les ensembles normaux $q^{(i+1)}$; alors, comme, sur chaque ensemble normal $q^{(i)}$, φ diffère de la constante u_i aux points d'un ensemble comprenant, d'une part un ensemble dénombrable, d'autre part une infinité dénombrable d'ensembles $q^{(i+1)}$ sur chacun desquels φ est de classe $\leqq 2$ par hypothèse, φ est aussi de classe $\leqq 2$ sur l'ensemble $q^{(i)}$ considéré (§ 28); en remontant de proche en proche, on reconnaît ainsi que φ est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

37. Donnons-nous maintenant un système de nombres finis comprenant une suite infinie: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et en outre un nombre u_ω; considérons la fonction f ainsi définie: sur $P_i - P_{i+1}$ $[i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots]$,

$f = u_i$; sur P_ω, $f = u_\omega$. Je dis que f, qui est ainsi définie en tout point de P_0, est de classe $\leqq 3$.

En effet, désignons par f_n la fonction qui est égale à u_i sur $P_i - P_{i+1}$ $[i = 0, 1, 2, \ldots, n-1]$, et à u_ω sur P_n; f_n est de classe $\leqq 2$ d'après le § 36. Je dis qu'on a: $\lim f_n = f$. En effet, tout point A de P_0 appartient, soit à un des ensembles $P_i - P_{i+1}$, soit à P_ω; dans le premier cas, A appartenant à $P_i - P_{i+1}$, on a, dès que n dépasse la valeur i: $f_n(A) = u_i = f(A)$, d'où $\lim\limits_{n=\infty} f_n(A) = f(A)$; dans le second cas, A fait partie de P_n, quel que soit n; on a donc, pour toute valeur de n: $f_n(A) = u_\omega = f(A)$; donc encore: $\lim f_n(A) = f(A)$. Ainsi f, limite de f_n qui est de classe $\leqq 2$, *est de classe* $\leqq 3$.

Dans le cas particulier où l'on a: $\lim u_n = u_\omega$, je dis que f est de classe $\leqq 2$. En effet, formons la fonction $f - f_n$; elle est égale, sur $P_0 - P_1$, $P_1 - P_2$, $P_{n-1} - P_n$, à 0; sur $P_n - P_{n+1}$, $P_{n+1} - P_{n+2}, \ldots,$ $P_{n+h} - P_{n+h+1}, \ldots$ respectivement à $u_n - u_\omega$, $u_{n+1} - u_\omega, \ldots, u_{n+h} - u_\omega, \ldots$ enfin, sur P_ω, à 0. Si ε est un nombre positif, dès que n est assez grand, toutes les quantités $u_n - u_\omega$, $u_{n+1} - u_\omega, \ldots$ sont en valeur absolue inférieures à ε; on a donc: $|f - f_n| < \varepsilon$, ce qui montre que f_n tend uniformément vers f; donc f est de classe $\leqq 2$ d'après le § 3.

38. Je dis maintenant que si l'on n'a pas: $\lim u_n = u_\omega$, la fonction f n'est pas de classe $\leqq 2$, *par suite est certainement de classe* 3. Pour cela, je vais montrer qu'on aboutit à une contradiction en supposant, comme je vais le faire, qu'il existe une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ toutes de classe $\leqq 1$, et telles qu'on ait: $\lim f_\nu = f$.

Du fait que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ n'a pas pour limite u_ω résulte qu'il existe un nombre positif λ tel que, quel que soit n, il y a un entier $n_1 > n$ tel que:

$$|u_{n_1} - u_\omega| > \lambda.$$

Prenons μ tel que: $0 < \mu < \lambda$ et posons: $\lambda = \mu + 2\varepsilon$.

Cela posé, considérons un ensemble normal $q^{(n)}$ déterminé, choisi arbitrairement, et soit H une *portion* de cet ensemble, c'est-à-dire, d'après la définition du § 8, l'ensemble parfait qui est le dérivé de l'ensemble des points de $q^{(n)}$ intérieurs à un segment Σ contenant à son intérieur au moins un point de $q^{(n)}$.

Déterminons un entier $n_1 > n$ tel que:

$$(1) \qquad |u_{n_1} - u_\omega| > \lambda = \mu + 2\varepsilon.$$

L'ensemble $D(q^{(n)}, P_{n_1})$ est *dense* dans l'ensemble $q^{(n)}$, par suite $D(H, P_{n_1})$ est dense dans l'ensemble parfait H, de sorte qu'on peut trouver un point A intérieur à Σ, faisant partie de H et de P_{n_1}; ce point appartenant à P_{n_1}, fait partie d'un ensemble normal $q^{(n_1)}$ bien déterminé, soit K la portion de cet ensemble normal déterminée par Σ. K est contenu dans H.

K est un ensemble parfait; chacune des fonctions f_i est de classe $\leqq 1$ sur K, par suite ponctuellement discontinue; il y a donc un ensemble Π de première catégorie par rapport à K, tel qu'en tout point de $K - \Pi$, chacune des fonctions f_i est continue par rapport à K. D'autre part, K est une *portion* d'un certain ensemble normal $q^{(n_1)}$; on a $f = u_{n_1}$ aux points de cet ensemble qui ne font pas partie de P_{n_1+1} et qui ne sont pas rationnels, et comme $D(q^{(n_1)}, P_{n_1+1})$ est de première catégorie par rapport à $q^{(n_1)}$, l'ensemble L des points de K où l'on n'a pas: $f = u_{n_1}$, est de première catégorie par rapport à K. L'ensemble $K - M(\Pi, L)$ est donc *dense* dans K; nous pouvons prendre un point B intérieur à Σ et contenu dans cet ensemble; on a: $f(B) = u_{n_1}$, et toutes les fonctions f_i sont continues en B par rapport à K.

Cela posé, donnons-nous un entier p. Comme $\lim f_\nu(B) = f(B) = u_{n_1}$, nous pouvons déterminer un entier $p_1 > p$ tel que:

$$|f_{p_1}(B) - u_{n_1}| < \varepsilon.$$

Comme f_{p_1} est continue en B par rapport à K, nous pouvons déterminer une portion H_1 de K contenant B, telle que, C étant un point *quelconque* de H_1, on ait:

$$|f_{p_1}(C) - f_{p_1}(B)| < \varepsilon,$$

ce qui donne, en combinant avec l'inégalité précédente:

$$|f_{p_1}(C) - u_{n_1}| < 2\varepsilon.$$

En rapprochant de l'inégalité (1), on obtient:

$$(2) \qquad |f_{p_1}(C) - u_\omega| > \mu.$$

En résumé, étant donnés, d'une part un entier p, d'autre part une portion H d'un ensemble normal $q^{(n)}$, on peut déterminer un entier $p_1 > p$ et une portion H_1 d'un ensemble normal $q^{(n_1)}$, avec $n_1 > n$, et H_1 étant compris dans H, tels que pour tout point C de H_1, on ait l'inégalité (2).

Appliquons cette proposition une seconde fois en remplaçant p et H par p_1 et H_1, nous obtenons un entier $p_2 > p_1$ et une portion H_2 d'un ensemble normal $q^{(n_2)}$, avec $n_2 > n_1$, et H_2 étant compris dans H_1, tels qu'en tout point C de H_2, on a:

$$|f_{p_2}(C) - u_\omega| > \mu.$$

En répétant indéfiniment l'application de ce procédé, on obtient, d'une part deux suites d'entiers croissant indéfiniment:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_i < \ldots,$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots,$$

d'autre part des ensembles parfaits dont chacun est contenu dans celui qui précède:

$$H_1 > H_2 > \ldots > H_i > \ldots,$$

H_i étant une portion d'ensemble normal $q^{(n_i)}$, de telle sorte qu'en tout point C de H_i on a:

$$|f_{p_i}(C) - u_\omega| > \mu. \tag{3}$$

Il existe un point contenu dans tous les ensembles fermés H, par suite, satisfaisant à (3) quel que soit i; un tel point, soit C, appartenant à une infinité d'ensembles normaux $q^{(n_1)}, q^{(n_2)}, \ldots, q^{(n_i)}, \ldots$, les n_i croissant indéfiniment, fait partie de P_ω; on a donc:

$$f(C) = u_\omega.$$

L'inégalité (3) s'écrit donc:

$$|f_{p_i}(C) - f(C)| > \mu,$$

ce qui, comme p_i croît indéfiniment, est en contradiction avec le fait que $\lim f_{p_i}(C) = f(C)$. La proposition est donc démontrée.

Nous avons ainsi établi *l'existence effective de fonctions de classe* 3.[1] On peut particulariser, en prenant, par exemple: $u_0 = u_1 = \ldots = u_n = \ldots = 0$, $u_\omega = 1$, ce qui nous donne, comme exemple de fonction de classe 3, la fonction égale à 0 en tout point du segment $(0, 1)$, sauf aux points irrationnels dont le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n, pour lesquels elle est égale à 1.

---

[1] Dès 1898, M. VOLTERRA, à qui j'avais communiqué le théorème sur les fonctions de classe 1 (§ 13), m'avait indiqué un exemple d'une fonction qui n'est certainement pas de classe $\leqq 2$.

TABLE.