SUR LES INVARIANTS
DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES
DU QUATRIÈME ORDRE

PAR

G. H. HALPHEN

à PARIS.

Je me propose d'étudier ici la théorie détaillée des invariants pour les équations du quatrième ordre, et d'identifier cette théorie avec celle des invariants différentiels pour les courbes gauches. Une partie de cette étude se trouve déjà dans mon mémoire *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables;* (1) mais je ne renverrai pas le lecteur à ce mémoire, et l'on trouvera ici une exposition complète, suivie d'applications.

1. Soit une équation linéaire du quatrième ordre

$$\frac{d^4Y}{dX^4} + 4P_1\frac{d^3Y}{dX^3} + 6P_2\frac{d^2Y}{dX^2} + 4P_3\frac{dY}{dX} + P_4Y = 0, \tag{1}$$

où les lettres P désignent des fonctions de X. En dénotant par u et μ deux fonctions de X, posant

$$\frac{dx}{dX} = \mu, \qquad Y = uy, \tag{2}$$

et prenant x, y pour nouvelles variables, on obtient une transformée

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4p_1\frac{d^3y}{dx^3} + 6p_2\frac{d^2y}{dx^2} + 4p_3\frac{dy}{dx} + p_4y = 0. \tag{3}$$

---

(1) Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut de France. T. XXVIII N° 1 (Paris 1883).

Les nouveaux coefficients p s'expriment au moyen des anciens coefficients P et de u, μ avec leurs dérivées u', u'', ... μ', μ'', ... prises par rapport à X. Toute fonction de p, $\frac{dp}{dx}$, ... est donc exprimable par P, $\frac{dP}{dX}$, ... u, u', ... μ, μ', ... Si cette fonction f est telle que u, u', ... μ, μ' ... disparaissent de son expression, on a alors

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right) = f\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right),$$

et f est un *invariant absolu*. L'existence de telles fonctions sera bientôt prouvée. Nous la supposons d'abord.

2. Sans qu'il soit besoin de développer les relations entre les P et les p, observons seulement le caractère suivant:

En dénotant par λ_{m-1} une fonction linéaire des coefficients P, affectés d'indices non supérieurs à $(m - 1)$, on a

$$p_m = \frac{1}{\mu^m}(P_m + \lambda_{m-1}).$$

Généralisons cette remarque comme il suit. Attribuons à $\frac{d^n P_m}{dX^n}$ le *poids* $(m + n)$. Par la même lettre λ, affectée d'un indice, désignons une fonction linéaire des P et de leurs dérivées, où le poids de chaque terme ne dépasse pas l'indice de λ. De la précédente formule, nous déduirons celle-ci:

$$\frac{d^n p_m}{dx^n} = \frac{1}{\mu^{m+n}}\left(\frac{d^n P_m}{dX^n} + \lambda_{m+n-1}\right).$$

Étendons encore la convention en admettant pour λ une forme non linéaire. Soit A_n une fonction entière des P, $\frac{dP}{dX}$, ..., et dont tous les termes soient d'un même poids n. Soit a_n la même fonction formée avec p, $\frac{dp}{dx}$, ... Nous aurons

$$a_n = \frac{1}{\mu^n}(A_n + \lambda_{n-1}). \tag{4}$$

On ne manquera pas d'observer que les restes λ sont nuls dans le cas particulier où u est l'unité, et μ une constante.

3. Considérons un invariant absolu, rationnel par rapport aux P et leurs dérivées. Mettons les poids en évidence, en réunissant au numérateur ainsi qu'au dénominateur les termes de poids commun, ordonnons par rapport aux poids, et dénotons ces poids par des indices. Soient ainsi

$$\frac{A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots}{B_m + B_{m-1} + B_{m-2} + \ldots} = \frac{a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots}{b_m + b_{m-1} + b_{m-2} + \ldots}$$

les deux expressions de l'invariant, par les $P, \frac{dP}{dX}, \ldots$ d'une part; par les $p, \frac{dp}{dx}, \ldots$ d'autre part. Ces deux expressions doivent être identiques, en vertu des relations telles que (4): c'est là ce que suppose l'invariance.

Prenons d'abord le cas simple où u est l'unité et μ une constante. Nous aurons identiquement:

$$\frac{A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots}{B_m + B_{m-1} + B_{m-2} + \ldots} = \mu^{m-n}\frac{A_n + \mu A_{n-1} + \mu^2 A_{n-2} + \ldots}{B_m + \mu B_{m-1} + \mu^2 B_{m-2} + \ldots}.$$

De là résulte $n = m$, $A_{n-1} = 0$, $B_{m-1} = 0, \ldots$; l'invariant se réduit au quotient de deux fonctions A_n, B_n, toutes deux homogènes quant au poids, et toutes deux d'un même poids n.

Prenons maintenant le cas général; nous aurons, suivant (4), et avec deux restes λ_{n-1}, λ'_{n-1}, une identité telle que

$$\frac{A_n + \lambda_{n-1}}{B_n + \lambda'_{n-1}} = \frac{A_n}{B_n}.$$

Or les deux restes étant de poids moindre que n, à tous leurs termes, et A_n, B_n pouvant être supposés sans facteur commun, le quotient $\lambda_{n-1} : \lambda'_{n-1}$ ne saurait être égal à $A_n : B_n$. Donc les deux restes sont nuls.

Donc le numérateur, ainsi que le dénominateur, d'un invariant absolu est un invariant *relatif*, ayant la propriété que caractérise la relation

$$\varphi\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right) = \frac{1}{\mu^n}\varphi\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right).$$

Le nombre n est le *poids* de l'invariant; il est entier et positif quand φ est, comme dans cette analyse, une fonction entière.

4. Si une relation algébrique entre P, $\frac{dP}{dX}$, ... est invariante pour les substitutions (2), c'est à dire si cette relation

$$\psi\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right) = 0$$

a pour transformée

$$\psi\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right) = 0,$$

alors ψ, supposée fonction entière, est un invariant. On le prouve en raisonnant comme tout à l'heure.

De telles relations invariantes peuvent être aisément conçues et fournissent la voie la plus naturelle pour obtenir les invariants. Pour ce but, on n'a qu'à choisir une équation exprimant, entre les intégrales, une relation invariable à la fois par les substitutions (2) et par le changement des intégrales entre elles.

Il existe, par exemple, une telle équation exprimant que les intégrales sont liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants. Il n'y a aucun embarras théorique, mais seulement longueur de calcul, à former cette équation de la manière suivante: si y est une intégrale de l'équation proposée (3), y^2 satisfait à une équation différentielle linéaire du 10ème ordre, dont on peut calculer les coefficients en fonction de p, $\frac{dp}{dx}$, ... Dans cette équation, mise sous forme entière, le coefficient de la dérivée du 10ème ordre fournit la fonction ψ dont il s'agit. Je reviendrai plus loin (nº 30) sur ce calcul. La fonction ψ sera d'ailleurs trouvée par une autre voie.

5. C'est la considération d'une autre transformée, celle-ci du 6ème ordre, qui va nous fournir le plus simple des invariants. Prenons l'équation primitive privée de son second terme,

$$y^{\text{IV}} + 6p_2y'' + 4p_3y' + p_4y = 0$$

et dénotons les dérivées par des accents.

Soient u, w deux intégrales, et posons

$$z = uw' - wu'.$$

L'inconnue z satisfait à une équation linéaire du 6^{ème} ordre, que nous allons former. Suivant une notation usitée pour les déterminants, écrivons en différentiant successivement

$$z = (uw')$$
$$z' = (uw'')$$
$$z'' = (uw''') + (u'w'').$$

À la dérivée suivante, nous éliminerons u^{IV} et w^{IV} au moyen de l'équation proposée; en tenant compte des relations précédentes, nous aurons

$$z''' + 6p_2z' + 4p_3z = 2(u'w''').$$

En continuant, nous obtenons à la dérivation suivante

$$(z''' + 6p_2z' + 4p_3z)' - 2p_4z = 2(u''w''') - 12p_2(u'w'').$$

Posant ensuite

$$Z = (z''' + 6p_2z' + 4p_3z)'' + 6p_2(z''' + 6p_2z' + 4p_3z) - 4p_4z' - 2p_4'z,$$

la cinquième différentiation nous donne:

$$Z = 4(2p_3 - 3p_2')(u'w'').$$

Voici enfin la transformée cherchée:

$$(2p_3 - 3p_2')Z' - (2p_3' - 3p_2'')Z - 2(2p_3 - 3p_2')^2(z''' + 6p_2z' + 4p_3z) = 0.$$

Cette transformée se réduit au cinquième ordre, et consiste en $Z = 0$, dans le cas particulier où l'on a identiquement

$$\varphi = 2p_3 - 3p_2' = 0.$$

La relation $\varphi = 0$ exprime donc que les six fonctions (uw') sont liées linéairement. Une telle propriété est invariante pour les substitutions (2), et se conserve aussi quand on change les intégrales. Donc φ est un invariant.

Pour avoir les mêmes notations que dans ma théorie des courbes gauches,(1) je prendrai comme invariant fondamental $-\frac{1}{30}\varphi$, que je désignerai par la lettre v. Voici donc le premier invariant à employer:

$$v = \frac{1}{30}(3p_2' - 2p_3). \tag{5}$$

6. Arrêtons-nous un instant pour faire une application en prenant pour exemple l'équation

$$y^{IV} - 2n(n+1)\wp y'' - 2n(n+1)\wp' y' + \left[\frac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{6}\wp'' + \alpha\right] y = 0. \tag{6}$$

Les lettres n et α désignent deux constantes. Quant à la lettre $\wp$, elle représente la fonction elliptique de M. Weierstrass; pour abréger l'écriture, j'omets, après cette lettre $\wp$, celle qui représente la variable indépendante. Je rappelle, d'après les notations usitées, les relations

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$$

$$\wp''' = 12\wp\wp'.$$

Dans cet exemple, l'invariant v est nul; en faisant le calcul de Z, on trouve alors que le dernier terme manque. De la sorte, en prenant

$$\zeta = z' = uw'' - wu'',$$

on a une transformée du $4^{\text{ème}}$ ordre:

$$\zeta^{IV} - 4n(n+1)\wp\zeta'' - 6n(n+1)\wp'\zeta' + [\beta - 2n(n+1)\wp'']\zeta = 0, \tag{7}$$

dans laquelle la constante β est liée à α par la relation

$$\beta = \frac{n^2(n+1)^2}{3}g_2 - 4\alpha.$$

---

(1) *Sur les invariants différentiels des courbes gauches.* Journal de l'École Polytechnique. XLVII$^{\text{éme}}$ Cahier (Paris 1880).

J'ai déjà, dans mon mémoire *Sur la réduction des équations linéaires* (p. 272), signalé l'équation (6), au cas où n est un nombre entier, comme intégrable d'une manière analogue à l'équation de LAMÉ. On verra plus loin (n° 22) qu'elle se ramène à l'équation de LAMÉ elle-même.

7. J'ai pris, au n° 5, une équation privée de son second terme. Il est facile de revenir au cas général. On fait disparaître le second terme de l'équation (1) en prenant $y = Ye^{\int P_1 dX}$ La transformée a les coefficients suivants

$$(8)\quad \begin{cases} p_1 = 0, \; p_2 = P_2 - P_1' - P_1^2, \; p_3 = P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3 - P_1'', \\ p_4 = P_4 - 4P_1P_3 + 6P_1^2P_2 - 3P_1^4 - 6P_2P_1' + 6P_1^2P_1' + 3P_1'^2 - P_1'''. \end{cases}$$

Dans un invariant où l'on a fait $p_1 = 0$, il suffit de remplacer p_2, p_3, p_4 par ces valeurs (8), pour obtenir la forme générale.

J'emploierai communément la même lettre, majuscule ou minuscule, pour un même invariant supposé se rapporter à l'équation (1) ou à l'équation (3). Ainsi, pour l'équation complète (1), l'invariant (5) sera désigné par V; il aura l'expression suivante, où les dérivées sont prises par rapport à X:

$$(9)\qquad 30V = -P_1''' + 3(P_2' - 2P_1P_1') - 2(P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3).$$

Son poids est égal à 3. En conséquence, la même quantité v, exprimée par les coefficients de (3), et avec les dérivées prises par rapport à x, donne lieu à l'identité

$$V = \mu^3 v.$$

8. Envisageons quatre intégrales distinctes Y, comme les coordonnées homogènes d'un point Y de l'espace. Ce point varie avec X et a pour lieu une courbe *attachée* à l'équation. Changer les intégrales Y revient à transformer homographiquement la courbe; changer Y en uY ne change pas le point; changer la variable indépendante n'altère pas la courbe. On voit donc que la courbe attachée, définie par une quelconque de ses homographiques, est invariante pour les substitutions (2). Donc ses invariants sont aussi des invariants de l'équation différentielle.

Les coefficients de l'équation, exprimés par les intégrales, sont des fonctions des éléments infinitésimaux de la courbe en un même point. Donc les invariants de l'équation, composés algébriquement avec les coefficients et leurs dérivées, sont des *invariants différentiels* de la courbe attachée.

Les déterminants (uw'), considérés au n° 5, sont les coordonnées de la tangente à la courbe. Ainsi l'invariant v a la signification suivante: *l'équation* $v = 0$ *caractérise toute courbe dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire.*

Dans ma théorie des courbes gauches, j'ai employé les coordonnées cartésiennes x, y, z, et pris les dérivées par rapport à x. J'ai fait usage, en outre, des notations suivantes

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4 \cdot 5 \ldots n} \frac{y''z^{(n)} - z''y^{(n)}}{y''z''' - z''y'''} \\ b_n &= \frac{1}{3 \cdot 4 \ldots n} \frac{y^{(n)}z''' - y'''z^{(n)}}{y''z''' - z''y'''}. \end{aligned}\right\} n \geqq 4$$

Tout invariant différentiel entier, divisé par une puissance convenable de $(y''z''' - z''y''')$, s'exprime en fonction entière des quantités a, b. Avec ces notations, j'ai trouvé par la propriété géométrique précédente, l'invariant

$$v = a_6 - 2b_5 - 3a_4a_5 + 3a_4b_4 + 2a_4^3.$$

Les deux invariants, dénotés tous deux par v, ne peuvent différer que par un facteur numérique. Voici comment on peut faire facilement la comparaison.

Prenons une équation privée de ses deux derniers termes; elle admet alors les solutions 1, x. Si l'on appelle y, z deux autres solutions, on a, d'après les notations précédentes,

$$p_1 = -a_4, \quad p_2 = -2b_4.$$

De là, en différentiant:

$$p_1^{(k)} = -5 \cdot 6 \ldots (k+4)a_{k+4} + \cdots$$

$$p_2^{(k)} = -2 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (k+4)b_{k+4} + \cdots$$

formules où sont négligés des restes contenant des dérivées, toutes d'ordre inférieur à $(k+4)$.

On voit par là que, dans V, fourni par la relation (9), le terme de l'ordre le plus élevé provient de $-\frac{1}{30}P_1''$; et c'est précisément a_6.

Ainsi l'invariant v, adopté ici, coïncide exactement avec celui de ma théorie des courbes. La même précaution sera prise, dans la suite, pour les autres invariants. La vérification pourra être faite de la même manière; mais je me dispenserai de la reproduire.

9. La connaissance d'un seul invariant conduit à la formation immédiate de tous les autres, au moyen d'une forme réduite de l'équation différentielle.

À cet effet, employons l'invariant V. Dans la substitution (2) prenons μ de façon à réduire v à une constante numérique, soit $\frac{1}{30}$; et u de façon à priver la transformée du second terme. Ce choix est réalisé ainsi

$$\mu = (30V)^{\frac{1}{3}}, \quad u = V^{-\frac{1}{2}}e^{-\int P_1 dX}.$$

En appelant ξ, η, au lieu de x, y, les variables nouvelles, nous avons la forme réduite suivante

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} - 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + K\eta = 0.$$

Les lettres H, K désignent deux fonctions des P, $\frac{dP}{dX}$, ..., et ce sont manifestement des invariants absolus. Leurs numérateurs sont rationnels, leurs dénominateurs sont des puissances de V. Il en va de même de $\frac{dH}{d\xi}$; car on a:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{1}{(30V)^{\frac{1}{3}}}\frac{dH}{dX} = H_1.$$

De même encore les dérivées successives de H, K, prises par rapport à ξ, s'expriment par une double suite d'invariants absolus, à numérateurs rationnels, et à dénominateurs égaux à des puissances de V. Soient H_1, H_2, ...; K_1, K_2, ... ces invariants absolus.

Tout invariant absolu peut être, sans altération, calculé sur l'équation réduite. Donc tout invariant absolu rationnel est exprimable rationnellement par H, H_1, H_2, ...; K, K_1, K_2, ...; et tout invariant relatif entier, divisé par une puissance de V, est exprimable en fonction entière des mêmes quantités.

10. Le calcul de K est immédiat ainsi: prenons l'équation privée du second terme, alors u se réduit à $V^{-\frac{1}{2}}$. Donc $K = 0$ exprime que l'équation admet la solution $V^{-\frac{1}{2}}$, et le numérateur de K est l'invariant suivant

$$\varphi = v^{\frac{9}{2}}\left[\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{IV}} + 6p_2\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)'' + 4p_3\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)' + p_4 v^{-\frac{1}{2}}\right],$$

où l'on n'a plus qu'à mettre V au lieu de v, et à substituer aux p les expressions (8), pour obtenir l'expression générale du numérateur Φ. On a d'ailleurs

$$K = \frac{\Phi}{V^4(30V)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette analyse, faite au moyen de l'invariant V, peut se faire de même au moyen de tout autre. Ainsi p_2, p_3, p_4 désignant encore les quantités (8), et ω un invariant quelconque du poids m, la combinaison

$$\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)^{\mathrm{IV}} + 6p_2\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)'' + 4p_3\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)' + p_4\omega^{-\frac{3}{m}}$$

est un invariant.

11. Pour avoir l'expression de H, employons les formules générales de transformation, mais en nous bornant à une formule unique qui nous suffira.

Soit une équation privée du second terme

$$\frac{d^4Y}{dX^4} + 6P_2\frac{d^2Y}{dX^2} + 4P_3\frac{dY}{dX} + P_4Y = 0.$$

Changeons la variable indépendante d'une manière arbitraire, en posant, comme précédemment,

$$\frac{dx}{dX} = \mu.$$

En même temps, changeons l'inconnue de manière que la transformée manque aussi du second terme. Pour ce but, il faut prendre

$$Y = y\mu^{-\frac{3}{2}}.$$

Posons alors

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dX} = \lambda.$$

La transformée étant

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 6p_2\frac{d^2y}{dx^2} + 4p_3\frac{dy}{dx} + p_4y = 0,$$

son coefficient p_2 est donné par la formule

$$(10) \qquad 6p_2 = \frac{1}{\mu^2}\left(6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right).$$

Dans cette formule (10), facile à vérifier, la dérivée λ' est prise par rapport à X.

En y mettant $(30V)^{\frac{1}{3}}$ pour μ, et, par conséquent, $\frac{1}{3}\frac{V'}{V}$ pour λ, nous trouvons pour le numérateur de H:

$$\Delta = \frac{5}{6}VV'' - \frac{35}{36}V'^2 - 3P_2V^2.$$

En revenant, par les formules (8), au cas d'une équation complète, nous avons l'invariant

$$(11) \qquad \Delta = \frac{5}{6}VV'' - \frac{35}{36}V'^2 - 3(P_2 - P_1^2 - P_1')V^2.$$

De là résulte, pour H, l'expression

$$H = -\frac{\Delta}{V^2(30V)^{\frac{2}{3}}}.$$

Voici, à propos de Δ, une observation qui sera utile plus loin. En retenant seulement les premiers termes de V, donné par (9), nous pouvons écrire

$$\Delta = \frac{5}{6} V\left(\frac{-P_1^{IV} + 3P_2'''}{30}\right) - \frac{35}{36}\left(\frac{P_1'''}{30}\right)^2 + AP_1''' + B,$$

A et B ne contenant pas de dérivée au delà du second ordre.

12. D'après le nº 9, les trois invariants V, Δ, Φ peuvent servir à la formation d'une double suite indéfinie d'invariants, par le moyen desquels tout invariant s'exprime rationnellement. Mais Δ et Φ ne sont pas les plus simples qu'on puisse choisir; il en existe deux autres qui ne contiennent pas de dérivée au delà du $3^{\text{ème}}$ ordre. C'est ce que je vais faire voir.

La voie qui va être suivie pour obtenir le premier de ces invariants donne aussi l'invariant V; elle s'applique aux équations de tous les ordres.

Soit l'équation

$$z'' = gz. \tag{12}$$

En faisant $y = z^3$, on en déduit, pour y, l'équation suivante:

$$y^{IV} - 10gy'' - 10g'y' + 3(3g^2 - g'')y = 0. \tag{13}$$

Si z_1 et z_2 sont deux intégrales de (12), distinctes entre elles, on a, pour (13), les quatre intégrales

$$z_1^3, \quad z_1^2 z_2, \quad z_1 z_2^2, \quad z_2^3.$$

Ainsi l'équation (13) est le type de l'équation du $4^{\text{ème}}$ ordre ayant quatre intégrales satisfaisant aux relations

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}.$$

En d'autres termes, à l'équation (13) est attachée la *cubique gauche*. Comparée à l'équation générale, privée du second terme, la forme (13) donne lieu aux relations

$$3p_2 = -5g, \quad 2p_3 = -5g', \quad p_4 = 3(3g^2 - g''),$$

d'où, par élimination de g,

$$(14) \qquad 3p_2' - 2p_3 = 0, \qquad p_4 - \frac{6}{5}p_3' - \left(\frac{9}{5}\right)^2 p_2^2 = 0.$$

Ces deux relations (14) peuvent être considérées comme les équations différentielles des cubiques gauches.

13. Voici, en manière de digression, un exemple de l'équation (13). Prenons

$$g = n(n+1)\wp,$$

les notations étant les mêmes qu'au n° 6. Nous avons ainsi l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - 10n(n+1)\wp y'' - 10n(n+1)\wp' y'$$
$$+ \frac{3}{2}n(n+1)\left[n(n+1)\frac{g_2}{2} + (n+2)(n-1)\wp''\right]y = 0.$$

Cette dernière est, d'après notre analyse, une transformée de l'équation de Lamé dans un cas particulier

$$z'' = n(n+1)\wp z.$$

Elle est donc intégrable quand n est un nombre entier. Mais l'équation en z est aussi intégrable pour $n = \frac{1}{2}$ (voyez plus loin, n° 47). Ce cas donne le résultat suivant:

l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - \frac{15}{2}\wp(u)y'' - \frac{15}{2}\wp'(u)y' + \frac{9}{32}\left[\frac{3}{2}g_2 - 5\wp''(u)\right]y = 0$$

a pour intégrale générale:

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathfrak{F}\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right)\right],$$

$\mathfrak{F}$ étant un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré à coefficients arbitraires.

14. Revenons aux équations (14), dont la première est $v = 0$. La seconde, tout en n'ayant pas un invariant pour premier membre, va servir à en former un. Soit ω ce premier membre, et soit Ω la même quantité formée avec les lettres P, en supposant qu'on envisage la même substitution qu'au n° 11. Je vais chercher la liaison entre ω et Ω.

De la formule (10) ainsi que de la relation $v = \frac{1}{\mu^3} V$, je déduis les suivantes:

$$\frac{dp_2}{dx} = \frac{1}{\mu^3}\left(\frac{dP_2}{dX} - 2\lambda P_2 + \ldots\right)$$

$$p_3 = \frac{1}{\mu^3}(P_3 - 3\lambda P_2 + \ldots)$$

$$\frac{dp_3}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\frac{dP_3}{dX} - 3\lambda P_3 - 3\lambda\frac{dP_2}{dX} + \ldots\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}\left(\Omega + \frac{18}{5}\lambda\frac{dP_2}{dX} + \ldots\right).$$

Dans ces formules, on a négligé des restes: dans la dernière, le reste ne contient manifestement aucune dérivée des quantités P. Il en sera tout autant du reste R, que l'on obtiendra en écrivant la dernière égalité sous cette autre forme:

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}(\Omega + 36\lambda V + R).$$

Or la propriété exprimée par les relations (14) est invariante. Donc le système des équations $\omega = 0$, $v = 0$ doit se changer en $\Omega = 0$, $V = 0$. Donc $R = 0$ doit se réduire à une combinaison de ces dernières. Mais, ne contenant aucune dérivée, R est, par suite, identiquement nul. La liaison cherchée est donc

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}(\Omega + 36\lambda V).$$

En dérivant les deux membres de $v = \frac{1}{\mu^3} V$, on obtient

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\frac{dV}{dX} - 3\lambda V\right).$$

En conséquence:

$$\omega + 12\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\Omega + 12\frac{dV}{dX}\right).$$

J'ai donc ainsi trouvé un invariant nouveau. Pour mettre les notations d'accord avec celles de la théorie des courbes gauches, je le désignerai par $42s_7$; l'indice 7 rappelle qu'il est du $7^{\text{ème}}$ ordre par rapport aux intégrales. Voici son expression pour l'équation sans second terme

$$(15) \qquad 42s_7 = p_4 - 2p_3' + \frac{6}{5}p_2'' - \frac{81}{25}p_2^2.$$

On aura l'expression générale par l'emploi des formules (8). Il est inutile de la transcrire; on remarquera seulement que le terme de l'ordre le plus élevé est $-\frac{1}{5.6.7}P_1'''$.

Avec s_7 et v on peut former une suite indéfinie d'invariants, analogue à la suite $H, H_1, H_2, \ldots$ Les ordres, marqués par les indices, croissent constamment d'une unité, les poids de quatre unités:

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(vs_7' - \frac{4}{3}v's_7\right), \quad s_9 = \frac{1}{9}\left(vs_8' - \frac{8}{3}v's_8\right), \quad s_{10} = \frac{1}{10}\left(vs_9' - \frac{12}{3}v's_9\right), \ldots$$

Dans l'invariant S_n, le terme de l'ordre le plus élevé est

$$-\frac{1}{5.6\ldots n}V^{n-7}P_1^{(n-4)}.$$

15. Les invariants Δ et S_8 sont tous deux du poids 8. En les combinant linéairement, nous formerons celui-ci: $\frac{1}{35}\Delta - \frac{4}{3}S_8$, qui, d'après le n° 11, ne contient plus P_1^{IV}. On y trouve un terme du second degré en P_1''', qu'on peut faire disparaître en retranchant $\frac{7}{36}S_7^2$. Nous obtenons de la sorte l'invariant

$$(16) \qquad T_7 = \frac{1}{35}\Delta - \frac{4}{3}S_8 - \frac{7}{36}S_7^2;$$

il ne contient pas de dérivée au-dessus du $3^{\text{ème}}$ ordre. Les dérivées P_2''' et P_1''', seules dérivées du $3^{\text{ème}}$ ordre qui y figurent, y entrent linéairement. Enfin le terme en P_2''' a pour coefficient $-\frac{1}{2.5.6.7}V$.

Avec t_7 et v on forme, de même qu'avec s_7 et v, une suite indéfinie d'autres invariants:

$$t_8 = \frac{1}{8}\left(vt_7' - \frac{8}{3}v't_7\right), \quad t_9 = \frac{1}{9}\left(vt_8' - \frac{12}{3}v't_8\right), \quad t_{10} = \frac{1}{10}\left(vt_9' - \frac{16}{3}v't_9\right), \; \ldots$$

L'invariant T_n est linéaire par rapport à $P_2^{(n-4)}$ et $P_1^{(n-4)}$, seules dérivées d'ordre $(n-4)$ qui y figurent. Le coefficient de $P_2^{(n-4)}$ est égal à $-\frac{1}{2.5.6\ldots n}V^{n-6}$.

16. Soit un invariant exprimé par s_7, t_7, s_8, t_8, ... Sa dérivée, prise par rapport à la variable ξ (n° 9), s'exprime facilement de la même manière. Par exemple, l'équation (16) donne l'expression de δ. On en déduit

$$8t_8 = \frac{1}{35}\left(v\delta' - \frac{8}{3}v'\delta\right) - 12s_9 - \frac{28}{9}s_7s_8,$$

relation qui fournit le numérateur $\left(v\delta' - \frac{8}{3}v'\delta\right)$ de $\frac{d\Delta}{d\xi}$. En conséquence, les numérateurs des invariants H, H_1, ... sont exprimables en fonction entière de v, s_7, s_8, ... t_7, t_8, ...

En calculant l'invariant absolu $v^{-\frac{3}{4}}s_7$ sur l'équation réduite, nous obtenons:

$$\frac{42s_7}{(30v)^{\frac{3}{4}}} = K - \frac{3}{5}\frac{d^2H}{d\xi^2} - \frac{9}{25}H^2.$$

Nous avons donc aussi le moyen d'exprimer le numérateur de K par les mêmes invariants, et, par suite, les numérateurs de K_1, K_2, ...

Donc tout invariant relatif, multiplié par une puissance convenable de v, est exprimable en fonction entière des invariants *fondamentaux* v, s_7, t_7, s_8, t_8, ...

17. La construction des invariants fondamentaux tombe en défaut si v est identiquement nul. Dans ce cas particulier, il est tout naturel de procéder absolument de même qu'au n° 6, mais en prenant s_7, au lieu de v, pour base de la construction. Si s_7 et v sont nuls tous deux, c'est alors le cas où l'équation peut être réduite à la forme (13), et il n'existe plus aucun invariant.

Arrêtons-nous sur le cas où v est identiquement nul, mais non s_7. On peut, au lieu de s_7, prendre la combinaison

$$W = \frac{1}{6}\left(\frac{dV}{dX} - 7S_7\right),$$

qui ne contient plus de dérivée du 3ème ordre, et reproduit $-\frac{7}{6}S_7$ dès que V est identiquement nul. Cette combinaison W est alors un invariant dans ce cas particulier. Pour l'équation privée du second terme, on a:

$$-36w = p_4 - \frac{6}{5}p_3' - \left(\frac{9}{5}\right)^2 p_2^2.$$

En prenant pour point de départ une équation complète, où V est nul, et posant

$$\frac{d\xi}{dX} = (-36W)^{\frac{1}{4}}, \qquad Y = \eta W^{-\frac{3}{8}} e^{-\int P_1 dX},$$

on obtiendra la transformée réduite

$$(17) \qquad \frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2J\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\frac{dJ}{d\xi}\frac{d\eta}{d\xi} + \left(1 + \frac{3}{5}\frac{d^2J}{d\xi^2} + \frac{9}{25}J^2\right)\eta = 0.$$

Le numérateur de J est

$$\theta = \frac{5}{4}WW'' - \frac{45}{42}W'^2 - 6(P_2 - P_1^2 - P_1')W^2,$$

et l'on a

$$J = -\frac{\theta}{12(-W)^{\frac{5}{2}}}.$$

La quantité θ n'est invariante que si V est nul; mais il existe un invariant du cas général qui se réduit à θ si V devient nul. On l'obtient en changeant de variable de manière à rendre s_7 constant. Son expression par les invariants fondamentaux est la suivante:

$$\theta = \frac{1}{v^2}\left[2\delta\left(\frac{7}{6}s_7\right)^2 + \frac{5\cdot 7^2}{2}s_9 s_7 - \frac{5\cdot 7^2}{2}s_8^2\right],$$

d'où l'on peut chasser δ par l'emploie de la formule (16).

18. Les deux premiers invariants absolus qu'on puisse former, dans le cas général, sont $\frac{s_7^3}{v^4}$ et $\frac{t_7^3}{v^8}$. Dans le cas où v est nul, on a pour premier invariant absolu $\frac{\theta^2}{w^5}$.

Quand ces invariants absolus sont des constantes, l'équation réduite est à coefficients constants; la courbe attachée est ce que j'appelle une courbe *anharmonique.*

Quand, v étant nul, le premier invariant absolu est constant, l'équation réduite manque du premier et du troisième terme. L'équation caractéristique est donc bicarrée: soient $\pm\alpha$, $\pm\beta$ ses racines. Les intégrales sont $e^{\pm\alpha\xi}$, $e^{\pm\beta\xi}$. Donc quatre intégrales satisfont à la condition $\eta_1\eta_4 = \eta_2\eta_3$. De là une proposition de géométrie: *toute courbe anharmonique, dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est située sur une surface du 2^d degré.* On verra plus loin (nº 26) une réciproque de cette proposition.

19. La dualité géométrique s'introduit par la considération de l'équation *adjointe,* due à Lagrange.

Soit l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} + 6p_2 y'' + 4p_3 y' + p_4 y = 0;$$

son adjointe est

$$z^{\mathrm{IV}} + 6(p_2 z)'' - 4(p_3 z)' + p_4 z = 0,$$

ou bien, développée:

$$z^{\mathrm{IV}} + 6p_2 z'' - 4(p_3 - 3p_2')z' + (p_4 - 4p_3' + 6p_2'')z = 0.$$

En désignant par c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes arbitraires, on a pour z l'expression suivante par les intégrales y:

$$z = (c_1 y_2 y_3' y_4'').$$

Ainsi les courbes attachées aux deux équations adjointes se correspondent dans la dualité géométrique.

En rangeant dans une même classe toutes les équations susceptibles d'être ramenées à une même forme réduite, ou, ce qui revient au même, à qui est attachée une seule et même courbe, on voit que les adjointes des équations d'une seule classe forment elles-mêmes une seule classe. Ces deux classes sont *adjointes* l'une à l'autre.

Les invariants d'une équation sont également invariants pour l'adjointe.

En faisant le calcul de l'adjointe pour l'équation (17), on retrouve cette équation elle-même. Ainsi *chaque classe, dont l'invariant v est nul, est à elle-même sa propre adjointe.* Sous forme géométrique, voici la même proposition: *les lignes droites qui, faisant partie d'un complexe linéaire, enveloppent une courbe, constituent une figure corrélative à elle-même.*

D'après la proposition du n° 18, *toute courbe anharmonique dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est arête de rebroussement d'une développable circonscrite à une surface du 2^d degré.* (1)

20. Faisons maintenant le calcul de l'adjointe pour l'équation générale, mais réduite:

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} - 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + K\eta = 0.$$

Nous obtenons

$$\frac{d^4\zeta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} + 1\right)\frac{d\zeta}{d\xi} + K\zeta = 0.$$

Pour réduire cette dernière, il suffit de changer la variable indépendante en prenant $\xi_1 = -\xi$, pour cette variable. Donc, dans le passage d'une équation à son adjointe, les invariants H et K se conservent, tandis que V se reproduit, sauf le signe. Ce dernier fait se vérifie aisément par

---

(1) Les deux surfaces du 2^d degré, sur l'une desquelles est l'arête de rebroussement, tandis que la développable est circonscrite à l'autre, ont en commun un quadrilatère gauche. Les tangentes communes aux deux surfaces se partagent en deux congruences distinctes. Ce cas remarquable de décomposition a été trouvé par M. ARCHER HIRST, qui me l'a communiqué verbalement, il y a quelques années.

l'expression de V; on reconnaîtra de même que S_7 se reproduit sans altération. Conséquemment S_n se reproduit au facteur $(-1)^{n-1}$ près.

Le dénominateur de H étant la puissance $\frac{8}{3}$ de V, et H se reproduisant, il en résulte que le numérateur de H se reproduit sans altération. C'est l'invariant $\varDelta$. A cause de la formule (16), on conclut que T_7 se se modifie et se change en $T_7 + \frac{8}{3} S_8$. Par suite, T_n se change en $(-1)^{n-1}\left(T_n + \frac{8}{3} S_{n+1}\right)$.

Grâce à ces observations, il sera facile de trouver, pour tout invariant, l'expression de son adjoint. Il suffit, à cet effet, de l'exprimer par les invariants fondamentaux, et d'y faire les changements dont je viens de parler.

21. J'ai terminé ici la théorie générale que j'avais en vue de traiter, et j'aborde les applications. Pour commencer ces applications, je reprends l'analyse traitée dans le n° 5 et suivie d'un exemple dans le n° 6. J'ai considéré, en cet endroit, une équation, dont l'invariant v est nul, et j'ai construit une transformée qui est généralement du 5ème ordre. Dans l'exemple adopté, cette transformée manquait du dernier terme et s'abaissait ainsi au quatrième ordre. Je vais chercher le type général des équations qui donnent lieu à cette circonstance.

La transformée a pour premier membre

$$Z = (z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z)'' + 6p_2(z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z) - 4p_4 z' - 2p_4' z.$$

Elle manque du dernier terme sous la condition

$$4p_3'' + 24p_2 p_3 - 2p_4' = 0.$$

On a d'ailleurs, par hypothèse,

$$2p_3 - 3p_2' = 0.$$

Désignant par g une fonction arbitraire, je satisfais à la dernière relation si je prends

$$p_2 = -\frac{1}{3} g, \quad p_3 = -\frac{1}{2} g'.$$

La première relation donne alors

$$p_4' = -g''' + 2gg'.$$

En intégrant, et désignant la constante d'intégration par $-\frac{1}{4}c^2$, j'ai donc

$$p_4 = g^2 - g'' - \frac{1}{4}c^2.$$

Ainsi le type général des équations dont il s'agit est le suivant

$$y^{\mathrm{IV}} - 2gy'' - 2g'y' + \left(g^2 - g'' - \frac{1}{4}c^2\right)y = 0. \tag{18}$$

Calculant Z et faisant $z' = \zeta$, j'ai la transformée

$$\zeta^{\mathrm{IV}} - 4g\zeta'' - 6g'\zeta' + (c^2 - 2g'')\zeta = 0. \tag{19}$$

Cette équation (19) ne contenant, dans ses coefficients, qu'une seule fonction g, n'est pas susceptible d'être transformée, par les substitutions (2), en une équation quelconque. La classe, dont elle est un type, possède, en effet, une propriété invariante, provenant de ce fait que les coordonnées de la droite dans l'espace sont liées par une relation quadratique. Pour parler le langage de l'algèbre, disons que les six déterminants $\zeta = (y_i y_j'')$, formés avec quatre intégrales de (18), sont liés par une relation quadratique. D'après l'identité $v = 0$, ils sont liés aussi par une relation linéaire, et se réduisent ainsi à *cinq*, distincts entre eux. Mais, l'équation transformée s'étant abaissée au quatrième ordre, un de ces déterminants ζ est nul. Donc la relation quadratique existe entre les quatre autres. Donc *les intégrales de l'équation* (19) *sont liées par une relation quadratique à coefficients constants.*

Pour préciser cette relation, posons

$$\zeta_{ij} = y_i y_j'' - y_j y_i''. \qquad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Nous avons

$$\zeta_{12}\zeta_{34} - \zeta_{13}\zeta_{24} + \zeta_{14}\zeta_{23} = 0.$$

Supposons les y choisis de telle sorte que ζ_{12} soit nul. Il reste

$$\zeta_{13}\zeta_{24} = \zeta_{14}\zeta_{23}.$$

L'équation (18) peut s'écrire ainsi:

$$\left[y'' - \left(g - \frac{1}{2}c\right)y\right]'' - \left(g + \frac{1}{2}c\right)\left[y'' - \left(g - \frac{1}{2}c\right)\right] = 0.$$

Elle admet donc les intégrales φ_1, φ_2 de l'équation du second ordre:

$$(20) \qquad \varphi'' = \left(g - \frac{1}{2}c\right)\varphi.$$

Comme on ne change pas (18) par le changement de c en $-c$, elle admet aussi les intégrales ψ_1, ψ_2 de cette autre:

$$(21) \qquad \psi'' = \left(g + \frac{1}{2}c\right)\psi.$$

Si nous prenons

$$y_1 = \varphi_1, \quad y_2 = \varphi_2, \quad y_3 = \psi_1, \quad y_4 = \psi_2,$$

nous aurons

$$\zeta_{12} = 0, \quad \zeta_{34} = 0, \quad \zeta_{13} = c\varphi_1\psi_1, \quad \zeta_{14} = c\varphi_1\psi_2, \quad \zeta_{23} = c\varphi_2\psi_1, \quad \zeta_{24} = c\varphi_2\psi_2.$$

Ainsi *l'équation* (19) *a pour intégrales les produits de celles des équations* (20) *et* (21), *et l'équation* (18) *a, pour intégrales, celles mêmes des équations* (20) *et* (21).

Il n'est pas sans intérêt de remarquer la conséquence suivante:

$$\varphi\psi'' - \psi\varphi'' = c\varphi\psi.$$

$$(22) \qquad c\int\varphi\psi dx = \varphi\psi' - \psi\varphi'.$$

22. Pour l'exemple choisi au n° 6, les équations (20) et (21) sont comprises dans la forme ambigüe

$$\varphi'' = \left[n(n+1)\mathrm{p}(u) \pm \frac{1}{2}c\right]\varphi,$$

où, suivant l'usage, je désigne par u la variable indépendante. La constante α, de l'équation (6), s'exprime ainsi:

$$\alpha = \frac{n^2(n+1)^2}{12}g_2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Prenons, en particulier, ce cas

$$n = \frac{3}{2}, \quad c = \sqrt{3g_2}.$$

Vous avons pour φ les intégrales suivantes (n° 47)

$$\varphi_1 = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right]$$

$$\varphi_2 = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\wp^3\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3g_2}}{2}\wp^2\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{3}g_3\right].$$

En changeant le signe de $\sqrt{3g_2}$, on a ψ_1 et ψ_2. Il en résulte pour y la forme:

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathfrak{F}\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right)\right],$$

où $\mathfrak{F}$ est un polynôme arbitraire du $3^{\text{ème}}$ degré. Nous avons déjà trouvé cette intégrale au n° 13 pour une équation formée par un autre moyen. En effectuant le calcul, on retrouve bien ici cette même équation.

23. Les propriétés de l'équation (19) ont été établies d'une manière indirecte. Il convient d'établir directement que cette équation est le type de toute équation du quatrième ordre entre les intégrales de laquelle existe une relation quadratique.

Soit une telle équation, et supposons la relation quadratique reductible à la forme

$$Y_1 Y_4 = Y_2 Y_3.$$

Prenant pour nouvelle variable x et pour nouvelle inconnue y

$$x = \frac{Y_3}{Y_4}, \quad y = \frac{Y}{Y_4},$$

j'ai une transformée admettant les solutions 1, x, $\frac{Y_1}{Y_4}$, $\frac{Y_2}{Y_4}$. En désignant

$\frac{Y_2}{Y_4}$ par α, j'ai pour $\frac{Y_1}{Y_4}$ l'expression αx. Ainsi la transformée admet les solutions 1, x, α, αx. Considérons les deux équations

$$y'' = 0, \quad y'' = \frac{\alpha''}{\alpha'} y'.$$

La première admet les solutions 1, x; la seconde 1, α. Les quatre produits des intégrales de la première par les intégrales de la seconde sont 1, x, α, αx, c'est à dire les intégrales de la transformée. Revenant à la proposée et transformant en même temps, d'une manière convenable, les deux équations du 2[d] ordre, je peux conclure ainsi: *toute équation du 4[ème] ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique, à discriminant différent de zéro, a pour intégrales les produits des intégrales de deux équations du 2[d] ordre.* [1]

24. Soient deux équations du second ordre, avec la même variable indépendante:

$$\frac{d^2A}{dX^2} + 2P_1\frac{dA}{dX} + P_2 A = 0, \quad \frac{d^2B}{dX^2} + 2Q_1\frac{dB}{dX} + Q_2 B = 0.$$

Si l'on y change les deux inconnues A, B de manière à faire disparaître le second terme dans chacune, les seconds coefficients deviennent respectivement $P_2 - P_1^2 - P_1'$ et $Q_2 - Q_1^2 - Q_1'$. L'égalité de ces deux quantités exprime donc que les intégrales A sont proportionnelles aux intégrales B. Cette propriété étant indépendante de X, on voit que la combinaison

$$F = Q_2 - Q_1^2 - Q_1' - (P_2 - P_1^2 - P_1')$$

est un invariant des équations simultanées. Si donc cet invariant n'est pas nul, on pourra changer la variable indépendante de manière à rendre cet invariant égal à un nombre à volonté. Je laisse ce nombre indéterminé et le désigne par c. Si, en même temps, je change les inconnues pour faire disparaître les seconds termes, j'obtiens la forme réduite:

$$\text{(23)} \qquad \frac{d^2a}{dx^2} = \left(g + \frac{1}{2}c\right)a, \quad \frac{d^2b}{dx^2} = \left(g - \frac{1}{2}c\right)b.$$

---

[1] Voyez, à ce sujet, une note de M. Goursat, intitulée *Sur une classe d'équations linéaires du 4[ème] ordre* (Comptes-Rendus, XCVII, p. 31).

La lettre g désigne une fonction de la variable, invariant absolu. Faisons maintenant

$$y = ab.$$

Les différentiations successives donnent:

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{db}{dx} + b\frac{da}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{da}{dx}\frac{db}{dx} + 2gab$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2gy\right) = 2g\frac{dy}{dx} + c\left(a\frac{db}{dx} - b\frac{da}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2gy\right) - 2\frac{d}{dx}\left(g\frac{dy}{dx}\right) = -c^2ab.$$

Donc enfin y satisfait à l'équation:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4g\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dg}{dx}\frac{dy}{dx} + \left(c^2 - 2\frac{d^2g}{dx^2}\right)y = 0. \tag{24}$$

D'après la proposition dont l'énoncé termine le n° 23, nous pouvons conclure ainsi: *toute équation du quatrième ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique est réductible par une substitution de la forme (1) au type (24). La constante c est à volonté, sauf zéro, si le discriminant de la relation quadratique n'est pas nul.*

En complétant, d'une manière bien aisée, l'analyse précédente, on peut ajouter que, *si le discriminant est nul, la forme (24) subsiste; mais la constante c est nulle.*

Voici le problème qui se présente maintenant: *exprimer en fonction des coefficients la condition sous laquelle une équation est réductible à la forme (24); trouver la substitution qui opère cette réduction, et la fonction g.*

25. Pour résoudre ce problème, il s'offre une voie indirecte que je ne suivrai pas, mais que j'indiquerai néanmoins. C'est une conséquence de la relation (22).

Envisageons le déterminant formé avec trois fonctions et leurs premières et secondes dérivées, en choisissant pour ces fonctions $\varphi_1\psi_1$, $\varphi_2\psi_1$, $\varphi_1\psi_2$.

Tenant compte de ce que les φ et ψ satisfont aux équations (20) et (21), on obtient, par un calcul facile, l'expression suivante de ce déterminant, à un facteur constant près:

$$[\varphi_1\psi_1(\varphi_2\psi_1)'(\varphi_1\psi_2)''] = \psi_1\varphi_1' - \varphi_1\psi_1'.$$

D'après (22), ceci est l'intégrale de $c\varphi_1\psi_1$.

On conclut de là que l'équation adjointe de (19) est vérifiée par les intégrales des solutions de l'équation (19) elle-même. Cette propriété se reconnaît d'ailleurs avec facilité sur l'équation. Effectivement son adjointe est

$$\eta^{IV} - 4g\eta'' - 2g'\eta' + c^2\eta = 0.$$

En dérivant cette dernière et faisant $\eta' = \zeta$, on retrouve l'équation (19).

Soit maintenant une équation, de la forme générale (1). Avec trois de ses intégrales on obtient une intégrale de l'adjointe ainsi

$$Z = [Y_1 Y_2' Y_3'']e^{4\int P_1 dX}.$$

En employant la substitution générale (2), on pourra écrire

$$Z = u^3\mu^3\left[y_1\frac{dy_2}{dx}\frac{d^2y_3}{dx^2}\right]e^{4\int P_1 dX}.$$

Supposons maintenant que la substitution envisagée transforme l'équation proposée en (24). Nous aurons alors:

$$Z = u^3\mu^3 e^{4\int P_1 dX}\int y dx = u^3\mu^3 e^{4\int P_1 dX}\int\frac{\mu}{u}\,Y dX.$$

En différentiant les deux membres de cette égalité, on peut conclure ainsi:

Toute équation du $4^{\text{ème}}$ ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique est caractérisée par la propriété suivante:

Soit $\Phi(Z) = 0$ son adjointe, et $F(Y) = 0$ la transformée de cette adjointe par la substitution

$$Y = AZ' + BZ,$$

où A et B sont des fonctions arbitraires: Il est possible de choisir A et B de telle sorte que $F(Y) = 0$ soit précisément l'équation proposée.

26. L'emploi de cette dernière proposition mène sans difficulté aux équations d'où dépend la solution du problème; mais d'une manière moins simple que la méthode ci-après.

Soit une équation, sans second terme, et à variable X

$$Y^{\text{IV}} + 6P_2Y'' + 4P_3Y' + P_4Y = 0,$$

qu'il s'agit de transformer en l'équation (24). Je poserai, comme au n°. 11,

$$\frac{dx}{dX} = \mu, \qquad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dX} = \lambda.$$

Je dénoterai par des accents les dérivées prises par rapport à X. Dans l'équation (24), on a

$$p_2 = -\frac{2}{3}g, \quad p_3 = -\frac{3}{2}\frac{dg}{dx}, \quad p_4 = c^2 - 2\frac{d^2g}{dx^2}.$$

J'en conclus d'abord

$$30v = 3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3 = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{\mu}g'.$$

Avant de poursuivre, observons cette conséquence: *toute équation du $4^{ème}$ ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique, et dont l'invariant v est nul, est susceptible d'être transformée en une équation à coefficients constants.* En effet, l'hypothèse $v = 0$ exige que g soit une constante. De là une réciproque pour la proposition énoncée au n° 18: *toute courbe située sur une surface du 2^d degré, et dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est anharmonique.*

Le cas où v est nul doit être désormais écarté.

De la relation précédente, jointe à $V = \mu^3 v$, je déduis celle-ci:

$$\text{(I)} \qquad g' = \frac{30V}{\mu^2}.$$

C'est une première équation entre les inconnues g, μ. L'application de la formule (10) me donne cette autre:

$$\text{(II)} \qquad -4g = \frac{1}{\mu^2}\left(6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right),$$

à quoi il faut joindre

(III) $$\lambda = \frac{\mu'}{\mu}.$$

J'ai donc ainsi trois équations à trois inconnues g, μ, λ. En prenant pour μ une solution de ces équations, et déterminant y par la formule $y = Y\mu^{\frac{3}{2}}$, on aura une transformée telle que:

(A) $$\frac{d^4y}{dx^4} - 4g\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dg}{dx}\frac{dy}{dx} + \gamma y = 0.$$

Dans le problème actuel, γ doit être $c^2 - 2\frac{d^2g}{dx^2}$. De là une nouvelle équation, qui entraîne une condition entre les données. J'aurai cette équation en calculant l'invariant s_7. Voici son expression

$$42s_7 = c^2 - \frac{36}{25}g^2 + \frac{1}{5}\frac{d^2g}{dx^2}.$$

J'ai d'ailleurs:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{30V}{\mu^3}, \quad \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{30}{\mu^4}(V' - 3\lambda V).$$

En conséquence, la nouvelle équation du problème est:

(IV) $$c^2 - \frac{36}{25}g^2 = \frac{6}{\mu^4}(7S_7 - V' + 3\lambda V).$$

Laissons d'abord cette dernière, et voyons comment se résout le système des trois premières équations. Pour ce but, on doit différentier l'équation (II), et chasser g'; μ^2 disparaît, et il reste:

(V) $$\lambda'' - 3\lambda\lambda' + \lambda^3 + \frac{12}{5}P_2\lambda - \frac{6}{5}(P_2' + 20V) = 0.$$

C'est de cette équation, à la seule inconnue λ, que dépend la réduction à la forme (A). Cette équation se ramène à la forme linéaire si l'on fait $\lambda = -\frac{\rho'}{\rho}$, c'est à dire $\rho = \frac{1}{\mu}$. La transformée est effectivement

$$\rho''' + \frac{12}{5}P_2\rho' + \frac{6}{5}(P_2' + 20V)\rho = 0.$$

Cette équation, du troisième ordre, que nous notons en passant, est, comme on voit, un *covariant* de l'équation proposée.

Prenons l'équation (IV), différentions les deux membres et remplaçons g et g' par les valeurs (I) et (II). De cette façon, μ disparait, et nous obtenons une nouvelle équation en λ:

$$\text{(VI)} \qquad \lambda' - \lambda^2 + \frac{V' - 4S_7}{3V}\lambda + \frac{7S'_7 - V''}{21V} - \frac{36}{35}P_2 = 0.$$

Il est à noter que cette dernière devient linéaire, elle aussi, avec l'inconnue ρ. Opérons différemment sur (IV) en y remplaçant g par son expression (II); et nous avons:

$$\text{(VII)} \qquad c^2\mu^4 = 6(7S_7 - V' + 3\lambda V) + \left(\frac{3}{10}\right)^2\left(6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right)^2.$$

Cette relation donne μ sans intégration, après qu'on a trouvé λ. Enfin la relation (II) donnera g.

La solution du problème dépend donc des équations simultanées (V) et (VI).

27. Ecrivons les équations simultanées (V), (VI) sous la forme abrégée

$$\text{(VIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0 \\ &\lambda'' - 3\lambda\lambda' + \lambda^3 + C\lambda + D = 0, \end{aligned} \right.$$

différentions la première, éliminons λ'', puis éliminons λ' entre la résultante et la première; nous aurons ainsi cette valeur de λ:

$$\lambda = \frac{B' - D - AB}{C + A^2 + B - A'}.$$

En la substituant dans la première, nous aurons l'équation de condition.

Le calcul des deux termes de la fraction qui représente λ est un peu long; mais on y trouve un guide sûr, si l'on a soin de grouper les termes de manière à faire apparaître les invariants fondamentaux. A cet effet, on chasse P_2 au moyen de l'invariant Δ, qu'on fait disparaître ensuite. Dans ce calcul, on voit s'introduire les deux invariants suivants:

$$\text{(IX)} \quad \left| \begin{aligned} M &= S_8 + 2T_7 + \frac{1}{6} S_7^2 \\ N &= T_8 + \frac{4}{3} S_7 T_7 - \frac{3}{2} V^4, \end{aligned} \right.$$

et l'on obtient finalement pour λ l'expression:

$$\text{(X)} \qquad \lambda = \frac{V' - 7S_7}{3V} + \frac{2N}{VM}.$$

Sans nous préoccuper, pour le moment, de l'équation de condition, calculons les deux autres inconnues.

La première équation (VIII) donne

$$6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2 = 6P_2' + 5B + 5A\lambda - \frac{5}{2}\lambda^2$$

sans différentiation. En y mettant la valeur (X) de λ, nous obtenons:

$$6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2 = -\frac{10}{V^2 M^2}(M^2 T_7 - MNS_7 + N^2).$$

Pour abréger, écrivons

$$\text{(XI)} \quad \left| \begin{aligned} & M^2 T_7 - MNS_7 + N^2 = \Phi \\ & \Phi^2 + 4M^3 N V^4 = \Psi. \end{aligned} \right.$$

Les relations (VII), (II) nous donnent:

$$\text{(XII)} \qquad c^2 \mu^4 = \frac{9\Psi}{V^4 M^4}, \quad g\mu^2 = \frac{5\Phi}{2V^2 M^2}.$$

28. Pour avoir l'équation de condition, au lieu de substituer λ dans la première équation (VIII), nous pouvons différentier logarithmiquement l'expression de μ, et égaler $\frac{\mu'}{\mu}$ à l'expression (X). De cette façon nous obtenons l'équation de condition sous la forme suivante:

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{d}{dX} \log \frac{\Psi}{M^4 V^{\frac{16}{3}}} = \frac{4}{3} \frac{6N - 7MS_7}{VM}.$$

Elle est explicitement sous forme invariante; car la quantité sous le signe logarithme est un invariant absolu.

L'équation (XIII) admet la solution particulière $\Psi = 0$. Cette condition répond à l'hypothèse $c = 0$, comme le montre la première équation (XII).

Supposons d'abord c différent de zéro. Les équations du 2[d] ordre (23) sont comprises dans la forme ambigüe:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(g \pm \frac{1}{2}c\right)z.$$

En revenant à la variable X, on a la transformée:

$$\frac{d^2z}{dX^2} - \lambda\frac{dz}{dX} = \left(g\mu^2 \pm \frac{1}{2}c\mu^2\right)z.$$

Donc, d'après (XII):

$$\text{(XIV)} \qquad \frac{d^2z}{dX^2} - \left(\frac{V' - 7S_7}{3V} + \frac{2N}{VM}\right)\frac{dz}{dX} = \frac{5\Phi \pm 3\sqrt{\Psi}}{2V^2M^2}z.$$

Voici donc la conclusion:

L'égalité (XIII) *exprime la condition pour que les intégrales soient liées par une relation quadratique. Si Ψ n'est pas nul, on formera les deux équations du 2[d] ordre comprises dans la formule* (XIV); *soient alors z_1 une solution de l'une d'elles, et z_2 une solution de l'autre. On aura Y par la formule*

$$Y = V^{\frac{3}{2}}M^{\frac{3}{2}}\Psi^{-\frac{3}{8}}z_1z_2.$$

En ce cas, la courbe attachée est sur uné surface du 2[d] degré, non conique; ou, en d'autres termes, *la relation quadratique a son discriminant différent de zéro.*

Supposons maintenant c nul. On a alors μ par une quadrature, ce qui modifie l'expression de Y, et voici la conclusion:

Si Ψ est nul, soient z_1 et z_2 deux intégrales de l'équation (XIV), *unique en ce cas, ces intégrales étant distinctes ou non. On aura trois intégrales Y par la formule*

$$Y = z_1z_2V^{-\frac{1}{2}}e^{\int\frac{7MS_7 - 6N}{2VM}dX}$$

La courbe attachée est sur un cône du 2^d degré; la relation quadratique a son discriminant égal à zéro.

Dans ma théorie des invariants différentiels, j'avais déjà trouvé l'équation $\Psi = 0$, pour celle des courbes tracées sur les cônes du 2^d degré.

Si M est nul, les équations simultanées (VIII) exigent que N soit nul aussi. La seconde équation (VIII) résulte alors de la première, et λ reste indéterminée. Donc *le système $M = 0$, $N = 0$ caractérise le cas où la courbe attachée est l'intersection commune d'une infinité de surfaces du 2^d degré.* Ces équations se trouvent également dans ma théorie des invariants différentiels. Pour ce cas, les formules finales sont en défaut; je reviendrai plus loin sur la solution qui s'y rapporte (n° 37).

29. Si l'on calcule l'équation de condition par la substitution de λ dans la première relation (VIII), on trouve le résultat suivant:

$$(\mathrm{XV}) \qquad M(VN' - 4V'N) - N\left(VM' - \frac{8}{3}V'M\right) - 8M^2S_8 + \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}M^2 J$$

$$+ \frac{1}{6}(MS_7 - 2N)(6N - 7MS_7) = 0.$$

Tous les termes sont des invariants qu'on peut aisément exprimer par les invariants fondamentaux: J au moyen de la formule (16), M et N au moyen de (IX), et les autres ainsi:

$$VN' - 4V'N = 9T_9 + \frac{32}{35}(S_7T_8 + S_8T_7)$$

$$VM' - \frac{8}{3}V'M = 9S_9 + 16T_8 + \frac{8}{3}S_7S_8.$$

Le coefficient du terme en T_9 est, sauf un facteur numérique, l'invariant M. Dans l'équation (XIII), mise sous forme entière, ce coefficient est $M[\Phi(2N - MS_7) + 2M^3V^4]$. Ainsi *l'équation* (XIII) *est compliquée du facteur étranger $\Phi(2N - MS_7) + 2M^3V^4$.*

À son tour, *l'équation* (XV) *est compliquée du facteur V^3*, comme je vais le montrer maintenant. Mais il est impossible de faire disparaître ce facteur en conservant l'expression au moyen des invariants fondamentaux.

30. Le procédé, que j'ai seulement indiqué au n° 4, tout en fournissant l'équation de condition sous une forme illisible, pour ainsi dire, la donne cependant dégagée de tout facteur. C'est ce qu'avant tout nous allons reconnaître.

Prenant, pour point de départ, l'équation

$$y^{IV} + 6p_2y'' + 4p_3y' + p_4y = 0,$$

posant $z = y^2$, différentiant successivement et abrégeant l'écriture par l'emploi des trois combinaisons

$$\begin{aligned} Z &= z^{IV} + 6p_2z'' + 4p_3z' + 2p_4z \\ Z_1 &= Z' + 4p_4z' \\ Z_2 &= Z_1' + 3p_2Z + 10p_4z'', \end{aligned}$$

on trouve les équations ci-après:

$$z = y^2$$

$$z' = 2yy'$$

$$z'' = 2yy'' + 2y'^2$$

(a) $$z''' = 2yy''' + 6y'y''$$

(b) $$Z = 8y'y''' + 6y''^2 + 12p_2y'^2$$

(c) $$Z_1 = 20y''y''' - 24p_3y'y'' + 4(3p_2' - 8p_3)y'^2$$

$$Z_2 = 20y'''^2 - 126p_2y''^2 - 144p_3y'y'' + 4(3p_2'' - 8p_3' + 5p_4 + 9p_2^2)y'^2.$$

En différentiant cette dernière, chassant y^{IV} par le moyen de l'équation proposée, et $y''y'''$, $y'y'''$, yy''' par le moyen des équations (a), (b), (c), on obtient une nouvelle combinaison linéaire de z et de ses dérivées jusqu'au $7^{\text{ème}}$ ordre, Z_3, dont l'expression a la forme:

$$Z_3 = \alpha_3y''^2 + \beta_3y'y'' + \gamma_3y'^2.$$

Différentiant deux fois en se servant encore des équations (a), (b), (c), on obtient deux équations analogues

$$Z_4 = \alpha_4 y''^2 + \beta_4 y'y'' + \gamma_4 y'^2 \ .$$

$$Z_5 = \alpha_5 y''^2 + \beta_5 y'y'' + \gamma_5 y'^2.$$

Ici Z_4 et Z_5 sont linéaires par rapport à z et ses dérivées jusqu'aux ordres 8 et 9 respectivement.

Pour que z satisfasse à une équation linéaire du $9^{\text{ème}}$ ordre seulement, la condition est manifestement

$$(\alpha_3 \beta_4 \gamma_5) = 0.$$

Telle est la relation cherchée, dont le calcul serait encore assez pénible. Mais le poids du premier membre est mis en évidence. En effet, chaque β a son poids supérieur d'une unité à la quantité α de même indice, et chaque γ de deux unités. En outre, les indices des α sont égaux à leurs poids. Le déterminant est ainsi du poids 15. Le premier membre de l'équation (XV) est du poids 24; la différence est précisément égale au poids du facteur V^3, dont je vais prouver l'existence dans (XV). Ainsi l'équation actuelle est dégagée de ce facteur.

On observera, en outre, que les conditions pour l'existence d'une équation du $8^{\text{ème}}$ ordre en z, sont:

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \frac{\beta_3}{\beta_4} = \frac{\gamma_3}{\gamma_4}.$$

Par conséquent, le système $M = 0$, $N = 0$ doit concorder avec cet autre: $(\alpha_3 \beta_4) = 0$, $(\alpha_3 \gamma_4) = 0$. M et N ont les poids 8 et 12, tandis que $(\alpha_3 \beta_4)$ et $(\alpha_3 \gamma_4)$ ont les poids 8 et 9. Il y a donc une combinaison des équations $M = 0$, $N = 0$ qui, contenant le facteur V, se réduit au poids 9. Cette circonstance, mise en évidence, facilite le calcul.

31. En ordonnant suivant les puissances croissantes de V, on reconnaît que la combinaison $6N + (V' - 7S_7)M$ fournit un polynôme divisible par V. Introduisant cette combinaison, je pose

$$6N + (V' - 7S_7)M = R.$$

Pour condenser les formules, j'emploie les lettres minuscules et j'écris simplement s, au lieu de s_7. J'obtiens de la sorte:

$$\text{(XVI)}\quad \begin{aligned} M &= -\frac{1}{18}(v'-s)(v'-4s)+\frac{1}{3}\left(\frac{v''}{7}-\frac{5}{8}s'\right)v-\frac{6}{35}p_2v^2, \\ R &= -\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 7}(v'-s)(v''-7s')+\frac{1}{6}\left[\frac{9}{35}(4s-v')p_2+\frac{1}{4}\left(\frac{v'''}{7}-s''\right)\right]v \\ &\quad -\frac{3}{4\cdot 5\cdot 7}p_2'v^2-3v^3. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que, d'après la formule (X), R est le numérateur de λ; et l'on a:

$$\lambda = \frac{R}{M}.$$

L'équation (XV) a été obtenue en mettant l'expression $\frac{VR}{VM}$, au lieu de λ, dans la première relation (VIII). Cette opération a exigé la multiplication par V^2. En mettant, pour λ, l'expression réduite $\frac{R}{M}$, on n'aura à multiplier que par le seul facteur V, provenant de ce que A et B contiennent ce facteur en dénominateur. Donc déjà le premier membre de (XV) contient un facteur V.

En second lieu, cette multiplication par V est superflue; effectivement l'équation où l'on substitue $\frac{R}{M}$ à λ est la suivante

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0.$$

La substitution donne

$$\text{(XVII)}\qquad M(R'+AR+BM)-R(M'+R)=0.$$

D'ailleurs les expressions de A et B sont les suivantes

$$\text{(XVIII)}\quad \begin{aligned} VA &= \frac{1}{3}(v'-4s), \\ VB &= \frac{1}{3\cdot 7}(7s'-v'')-\frac{36}{35}p_2v. \end{aligned}$$

En les comparant au premier terme de chacune des expressions (XVI), on voit que, dans $V(AR+BM)$, le terme indépendant de v disparaît. Donc la multiplication par V est superflue, et l'équation (XV) contient un second facteur V.

Enfin le résultat de la substitution contient lui-même le facteur v. Effectivement, en ne prenant que le premier terme, on trouve:

$$R' + AR + BM = -\frac{1}{2^3\,7^2}(v''-7s')(4v''-7s')+\ldots$$

$$-(M'+R) = -\frac{1}{2^3 . 7}(v'-4s)(4v''-7s')+\ldots$$

De là résulte, d'après (XVI), que le premier terme disparaît dans la combinaison (XVII).

Il est donc établi que le premier membre de l'équation (XV) contient le facteur V^3. D'ailleurs, il n'y a pas à chercher d'autre facteur étranger: en effet, le coefficient de $P_2^{(V)}$ est réduit maintenant à M, dans l'équation débarrassée du facteur V^3. Ce coefficient est indécomposable et ne peut disparaître.

32. Nous avons été conduits à cette théorie des équations réductibles au type (24) par l'exemple (7), rencontré au n° 6 de ce mémoire. Ainsi, dans la catégorie générale comprenant les équations (à variable indépendante u)

$$y^{\mathrm{IV}} + \mathbf{a}\wp(u)y'' + \mathbf{b}\wp'(u)y' + [\mathbf{c}\wp''(u) + \mathbf{d}]y = 0; \tag{25}$$

figure, en premier lieu, le type

$$y^{\mathrm{IV}} - 2\mathbf{e}\wp(u)y'' - 3\mathbf{e}\wp'(u)y' + [\mathbf{d} - \mathbf{e}\wp''(u)]y = 0, \tag{26}$$

comme étant explicitement sous la forme (24).

Je vais chercher, dans la catégorie (25), les équations qui, sans être du type (26), sont réductibles à la forme (24). En d'autres termes, le type (26) exclu, je vais chercher, parmi les équations (25), celles dont les intégrales sont liées par une relation quadratique.

Au lieu d'introduire explicitement les coefficients de (25), je prends pour inconnues des coefficients qui en dépendent, et je pose:

$$p_2 = 35a\wp(u), \quad v = b\wp'(u), \quad s_7 = c\wp''(u) + dg_2.$$

D'après les expressions (5) et (15) de v et de s_7, ces données entraînent, pour l'équation (25), les coefficients suivants:

$$(27) \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{a} = 5.6.7a, \quad \mathbf{b} = 5.6(7a - 2b), \\ \mathbf{c} = 3 \cdot 7\left(2c - \frac{10}{7}b + 3a + \frac{63}{2}a^2\right), \quad \mathbf{d} = 3 \cdot 7\left(2d + \frac{63}{4}a^2\right)g_2. \end{array} \right.$$

33. Dans les formules qui vont suivre, j'écrirai simplement $\wp$, $\wp'$, .. au lieu de $\wp(u)$, $\wp'(u)$, ...

Au moyen des relations

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2, \quad \wp''' = 12\wp\wp', \quad \wp^{\text{IV}} = 12(\wp'^2 + \wp\wp''),$$

on tire facilement des formules (XVI) les résultats suivants:

$$M = (\alpha\wp'' + \beta g_2)(\alpha_1\wp'' + \beta_1 g_2) + \gamma_1\wp\wp'^2,$$

$$\frac{1}{\wp'}R = \tau(\alpha\wp'' + \beta g_2)\wp + \gamma\wp'^2.$$

Les coefficients α, β, ... sont ainsi déterminés:

$$\alpha = \frac{4c - b}{6}, \quad \beta = \frac{2d}{3}, \quad \alpha_1 = \frac{b - c}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{d}{3}, \quad \tau = \frac{b - 7c + 63ab}{7},$$

$$\gamma = -\frac{b}{2}\left[\frac{3}{2}b(a + 4b) + c - \frac{b}{7}\right]$$

$$\gamma_1 = b\left(\frac{4b}{7} - \frac{5c}{2} - 6ab\right).$$

La forme ci-dessus des expressions de M et R pouvait être prévue par raison d'homogénéité. En considérant $\wp$, $\wp'$, $\wp''$, ... comme des poids 2, 3, 4 et g_2, g_3 comme des poids 4, 6, on devait trouver pour M et R

des quantités homogènes, ayant les poids 8 et 9. Chaque quantité de poids impair doit contenir le facteur $\mathfrak{p}'$; et c'est ce qui a lieu pour R.

Sans effectuer les calculs, nous allons prévoir la forme des quantités qu'il reste à considérer.

La combinaison $M(R' + AR + BM) - R(M' + R)$ doit contenir le facteur v, par suite le facteur $\mathfrak{p}'$. Comme R contient ce facteur, il s'ensuit que $R' + AR + BM$ le contient aussi. Le quotient $\frac{1}{\mathfrak{p}'}(R' + AR + BM)$ est du poids 7, par suite contient encore le facteur $\mathfrak{p}'$. On a donc

$$\frac{1}{\mathfrak{p}'^2}(R' + AR + BM) = \alpha_2 \mathfrak{p}'' + \beta_2 g_2.$$

On aura aussi

$$-\frac{1}{\mathfrak{p}'}(M' + R) = (\alpha_3 \mathfrak{p}'' + \beta_3 g_2)\mathfrak{p} + \gamma_3 \mathfrak{p}'^2.$$

Avec ces diverses expressions, on a pour l'équation de condition:

$$(28) \quad \left|\begin{array}{l} (\alpha \mathfrak{p}'' + \beta g_2)[(\alpha_1 \mathfrak{p}'' + \beta_1 g_2)(\alpha_2 \mathfrak{p}'' + \beta_2 g_2) + \tau \mathfrak{p}'^2(\alpha_3 \mathfrak{p}'' + \beta_3 g_2)] \\ \quad + [\gamma_1(\alpha_2 \mathfrak{p}'' + \beta_2 g_2) + \gamma(\alpha_3 \mathfrak{p}'' + \beta_3 g_2) + \tau\gamma_3(\alpha \mathfrak{p}'' + \beta g_2)]\mathfrak{p}\mathfrak{p}'^2 \\ \qquad + \gamma\gamma_3 \mathfrak{p}'^4 = 0. \end{array}\right.$$

À propos des coefficients que je n'ai pas calculés jusqu'à présent, je ferai une simple observation: dans $-\frac{1}{\mathfrak{p}'}(M' + R)$, le terme en $\mathfrak{p}'^2$ provient de deux sources: 1° du terme analogue dans $-\frac{1}{\mathfrak{p}'}R$; 2° du dernier terme de M différentié. Par conséquent, on a:

$$(29) \qquad \gamma + \gamma_1 + \gamma_3 = 0.$$

L'équation (28) doit avoir lieu identiquement. Je l'ai partagée en trois lignes. Si les modules g_2 et g_3 sont tous deux différents de zéro, ce que je suppose, chacune des trois lignes doit être nulle séparément, comme on le voit sans peine. Donc l'un des coefficients γ, γ_3 doit être nul. Donc deux catégories de solutions à rechercher.

34. L'hypothèse $\gamma = 0$ conduit à deux solutions dans lesquelles R est identiquement zéro. L'une d'elles s'obtient par les seules suppositions $\gamma = 0$, $\tau = 0$. En effet, d'après (XVIII), on a:

$$A = -\frac{2(\alpha \wp'' + \beta g_2)}{b \wp'}, \qquad B = -\frac{4\tau}{b} \wp. \tag{30}$$

Les quantités B, R étant nulles, l'équation de condition (XVII) est satisfaite d'elle-même.

Cette solution, qui laisse subsister deux arbitraires, nous conduit à l'équation (26), déjà connue, comme cela était évident. En effet, la circonstance $R = 0$, non accompagnée de $M = 0$, montre que λ est nul, et que, par conséquent, aucune transformation n'est nécessaire pour mettre l'équation sous la forme cherchée (24).

En fait, les équations $\gamma = 0$, $\tau = 0$ donnent

$$b = -\frac{7}{4} a, \qquad c = -\frac{a(1 + 63a)}{4},$$

et, par suite, les formules (27) entrainent, en posant $3 \cdot 5 \cdot 7a = -\mathbf{e}$,

$$\mathbf{a} = -2\mathbf{e}, \quad \mathbf{b} = -3\mathbf{e}, \quad \mathbf{c} = -\mathbf{e},$$

comme il le fallait vérifier.

35. La seconde solution est fournie par les hypothèses

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma_1 = 0.$$

En ce cas, R et M sont tous deux nuls, et, par suite N est nul aussi. Comme je l'ai observé déjà (n° 28), c'est le cas où la courbe attachée à l'équation est l'intersection complète de deux surfaces du 2^d degré. Tous les coefficients sont ici déterminés:

$$a = -\frac{1}{2^4 . 7}, \quad b = -\frac{1}{2^6}, \quad c = -\frac{1}{2^8}, \quad d = 0.$$

Les équations (27) conduisent ainsi à l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - \frac{15}{8} \wp(u) y'' - \frac{15}{16} \wp'(u) y' + \left[\frac{3^3}{2^{10}} g_2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5} \wp''(u)\right] = 0. \tag{31}$$

À cette équation est attachée la courbe biquadratique. (1)

---

(1) *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires*, pages 109 et 137.

Je vais achever l'application des calculs à cette équation (31). On a déjà observé (n° 28) que l'inconnue λ, en ce cas spécial, reste indéterminée. Elle est fournie par la seule équation

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0,$$

qui devient

$$\rho'' + A\rho' = B\rho$$

si l'on fait $\lambda = -\frac{\rho'}{\rho}$. Or, d'après (30), cette dernière équation devient:

$$\rho'' = \frac{3}{4}\,\mathrm{p}(u)\rho,$$

dont nous avons déjà employé l'intégrale générale au n° 13. C'est

$$\rho = \mathrm{p}'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\mathrm{a} + \mathrm{b}\,\mathrm{p}\left(\frac{u}{2}\right)\right].$$

Revenant à l'équation (II), nous avons

$$-4g\mu^2 = 6p_2 + 5B - \frac{5}{2}\lambda^2 = \frac{15}{8}\,\mathrm{p}(u) - \frac{5}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2.$$

$$g\mu^2 = -\frac{15}{32}\,\mathrm{p}(u) + \frac{5}{8}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2.$$

La méthode générale consiste à trouver $c^2\mu^4$ par l'équation (VII); mais, pour simplifier le calcul, on observe qu'ayant

$$\lambda = -\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\mu'}{\mu},$$

on a μ à un coefficient numérique près; c'est l'inverse de ρ. L'équation (VII) sert à déterminer ce coefficient comme il suit.

Si l'on donne à u une valeur qui rende λ infini, la partie principale de $c^2\mu^4$, d'après (VII), est la même que celle de $\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^2\lambda^4$. Ainsi $c\mu^2$ devient infini comme $\frac{3\lambda^2}{4}$. À cet infini correspond un zéro de ρ ou un infini, et le résidu ± 1 pour λ. Donc $\mu\sqrt{c}$ a le résidu ± 1. D'après cette observation, on pourra mettre $c\mu^2$ sous la forme suivante, où w désigne un argument arbitraire:

$$c\mu^2 = \frac{3\wp'\left(\frac{u}{2}\right)\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{16\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2}.$$

Écrivons l'expression de $g\mu^2$ sous une autre forme, en remplaçant $\frac{15}{32}\wp(u)$ par $\frac{5}{8}\frac{\rho''}{\rho}$. Il vient ainsi:

$$g\mu^2 = \frac{5}{8}\left(\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 - \frac{\rho''}{\rho}\right) = \frac{5}{8}\lambda'.$$

Nous avons, en conséquence, pour l'équation du 2^d ordre cherchée:

$$(32)\qquad \frac{d^2z}{du^2} - \lambda\frac{dz}{du} = \left[\frac{5}{8}\frac{d\lambda}{du} \pm \frac{3}{32}\frac{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2}\right]z,$$

formule où λ a la valeur suivante:

$$(33)\qquad \lambda = \frac{1}{4}\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)}.$$

36. Pour intégrer l'équation (32), changeons les variables. Prenons pour variable indépendante $\frac{1}{2}u$; en même temps, introduisons $\frac{w}{2}$ au lieu de w:

$$u = 2\alpha, \quad w = 2\beta.$$

Soient aussi:

$$\omega = \frac{p'(\alpha)}{[p(\alpha) - p(\beta)]^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\omega}\frac{d\omega}{d\alpha}$$

$$z = \omega^{\frac{1}{4}}\zeta,$$

et prenons ζ pour nouvelle inconnue. La transformée est l'équation suivante:

$$\frac{d^2\zeta}{d\alpha^2} = \left[\frac{1}{16\omega}\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} + \frac{3}{8}\omega p'(\beta)\right]\zeta.$$

Le coefficient de ζ, étant développé, devient:

$$\frac{3}{8}\left\{2p(\alpha) - \frac{p'^2(\beta)}{p(\alpha) - p(\beta)} + \frac{p'(\beta)[p'(\alpha) \pm p'(\beta)]}{[p(\alpha) - p(\beta)]^2}\right\} - \frac{3}{4}p(\alpha + \beta).$$

Ainsi la transformée n'est autre que

$$\frac{d^2\zeta}{d\alpha^2} = \frac{3}{4}p(\alpha + \beta)\zeta,$$

c'est à dire, sauf le changement de α en $\alpha \pm \beta$, la même équation que nous avons déjà rencontrée deux fois. Son intégrale est

$$\zeta = p'\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[a + bp\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)\right].$$

Par suite, l'intégrale générale de (32) est:

$$z = \frac{p'\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left[p\left(\frac{u}{2}\right) - p\left(\frac{w}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} p'\left(\frac{u \mp w}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[a + bp\left(\frac{u \mp w}{4}\right)\right].$$

Prenant deux valeurs de z qui répondent à des signes opposés de w, les multipliant entre elles et par le facteur $\mu^{-\frac{3}{2}}$, on a l'intégrale y de l'équation (31) sous la forme:

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u-w}{4}\right)\wp'\left(\frac{u+w}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\wp\left(\frac{u+w}{4}\right) + \mathfrak{c}\wp\left(\frac{u-w}{4}\right) + \mathfrak{d}\wp\left(\frac{u+w}{4}\right)\wp\left(\frac{u-w}{4}\right)\right].$$

Le second facteur est susceptible d'une transformation remarquable qui laisse apercevoir sa nature rationnelle; on a, en effet:

$$\frac{\wp(\alpha) - \wp(\beta)}{\wp'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\wp'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = -\frac{\left[\wp\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \wp\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^4}{\left[\wp'\left(\frac{\alpha}{2}\right)\wp'\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2}.$$

L'expression de y peut donc s'écrire:

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\left[\wp\left(\frac{u}{4}\right) - \wp\left(\frac{w}{4}\right)\right]^2}{\wp'\left(\frac{u}{4}\right)} \left[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\wp\left(\frac{u+w}{4}\right) + \mathfrak{c}\wp\left(\frac{u-w}{4}\right) + \mathfrak{d}\wp\left(\frac{u+w}{4}\right)\wp\left(\frac{u-w}{4}\right)\right].$$

Cette formule, où w est arbitraire, ne gagne pas en généralité à ce qu'on y laisse cette arbitraire subsister. Un facile examen permet de la réduire à la forme suivante:

$$(34) \qquad y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\wp\left(\frac{u}{4}\right) + \mathfrak{c}\wp'\left(\frac{u}{4}\right) + \mathfrak{d}\wp''\left(\frac{u}{4}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{4}\right)}.$$

Telle est la solution de l'équation (31).

L'arbitraire w correspond à chacune des surfaces du 2ᵈ degré passant par la courbe biquadratique. Quatre de ces surfaces se réduisent à des cônes. On retrouve cette circonstance dans l'équation (32), qui cesse d'être ambigüe quand w est une période.

37. Toute équation, pour laquelle les invariants M et N sont nuls, est une transformée de (31). Pour avoir la solution d'une telle équation, il n'y a donc qu'à trouver les variables u et y en fonction de X et Y. On y arrive aisément par le calcul des invariants absolus dans (31).

D'après les valeurs de b, c (nº 35), on a, pour l'équation (31):

$$r = -\frac{1}{2^6}\wp'(u), \quad s_7 = -\frac{1}{2^8}\wp''(u).$$

Il en résulte:

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(rs_7' - \frac{4}{3}r's_7\right) = \frac{1}{2^{17}}[\wp''^2(u) - \wp'(u)\wp'''(u)].$$

On a d'ailleurs (IX)

$$0 = M = s_8 + 2t_7 + \frac{1}{6}s_7^2;$$

on en peut tirer t_7, et en conclure:

$$4t_7 + \frac{5}{3}s_7^2 = \frac{1}{2^{16}}\wp'\wp''' - \frac{3}{2^{14}}\wp\wp'^2.$$

En considérant les deux invariants absolus suivants Ω, Ω_1:

$$(35)\quad \left|\begin{aligned} & 12 + \frac{18r^4s_7}{\left(t_7 + \frac{5}{12}s_7^2\right)^2} = \frac{1}{\Omega}, \\ & -\frac{1}{3}\frac{s_7\left(t_7 + \frac{5}{12}s_7^2\right)}{r^4} = \Omega_1, \end{aligned}\right.$$

on trouve ainsi:

$$\Omega = \frac{\wp^3(u)}{g_2}, \quad \Omega_1 = \frac{\wp(u)\wp''(u)}{\wp'^2(u)}.$$

Il en résulte les formules suivantes:

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{g_3^2}{g_2^3} = \dfrac{\Omega\left[(6-4\Omega_1)\Omega + \Omega_1 - \frac{1}{2}\right]^2}{\Omega_1^2} \\[2ex] \mathfrak{p}(u) = -\dfrac{g_3}{g_2}\dfrac{\Omega_1}{(6-4\Omega_1)\Omega + \Omega_1 - \frac{1}{2}}. \end{cases}$$

En conséquence: *pour une équation dans laquelle les invariants* (IX) *M et N sont nuls, l'intégrale générale est une fonction algébrique des coefficients et sa représentation par les fonctions elliptiques s'obtient ainsi:*

Au moyen des invariants absolus (35) *on calcule par les formules* (36) *le module et l'argument; et l'on a pour l'intégrale générale*

$$Y = \left(\frac{\mathfrak{p}'(u)}{V}\right)^{\frac{3}{2}} y,$$

où y est donné par la formule (34). Dans cet énoncé, *l'équation est supposée privée de son second terme.*

38. J'ai (n° 33) partagé les systèmes de constantes a, b, c, d qui rendent identique l'équation (28), en deux groupes: ceux qui font évanouir γ, et ceux qui font évanouir γ_3. Dans le premier de ces groupes, nous venons d'étudier deux cas. Une discussion facile fait reconnaître que ce groupe ne contient aucun autre système favorable. J'omets ici cette discussion, pour abréger, à cause de son résultat négatif; j'examine maintenant l'hypothèse $\gamma_3 = 0$.

L'égalité (29) donne ici $\gamma = -\gamma_1$. Donc l'évanouissement des termes composant la seconde ligne de (28) exige les conditions

$$(37)\qquad \alpha_2 = \alpha_3, \quad \beta_2 = \beta_3;$$

puis l'évanouissement de la première ligne exige la condition double:

$$\alpha_1 \mathfrak{p}'' + \beta_1 g_2 = -\tau\mathfrak{p}^2 = \alpha_1\left(6\mathfrak{p}^2 - \frac{1}{2}g_2\right) + \beta_1 g_2.$$

Les conditions sont donc, outre (37), les suivantes:

$$(38)\qquad \gamma + \gamma_1 = 0, \quad 6\alpha_1 = -\tau, \quad \alpha_1 = 2\beta_1.$$

Mais je vais montrer que les conditions (37) sont comprises dans les relations (38). À cet effet, je forme, pour ce cas, l'équation (28) par un calcul direct, en substituant λ dans la relation

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0.$$

D'après (38) les valeurs de M et R (n° 33) donnent, pour λ, une expression très-simplifiée:

$$\lambda = \frac{R}{M} = -\frac{\wp'}{\wp}.$$

En tenant compte des expressions (30) de A et B, on a ainsi:

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = -\frac{1}{b\wp}[b\wp'' - 2(\alpha\wp'' + \beta g_2) + 4\tau\wp^2].$$

À cause de (38), la parenthèse peut s'écrire

$$b\wp'' - 2(\alpha\wp'' + \beta g_2) + 4(\alpha_1\wp'' + \beta_1 g_2),$$

et se réduit à zéro, d'après les valeurs de α, α_1, β, β_1 (n° 33). Il est donc établi que les trois conditions (38) suffisent. Elles laissent subsister une arbitraire b, et donnent:

$$a = -\frac{4}{21}\left(b + \frac{1}{2}\right), \qquad c = \frac{b}{7}(3 - 4b), \qquad d = -\frac{2b(b+1)}{7}.$$

En employant les formules (27), et désignant $5b + 1$ par $\frac{n(n+1)}{2}$, on a, de la sorte, l'équation suivante:

$$(39)\qquad y^{\mathrm{IV}} - 4(n^2 + n + 3)\wp(u)y'' - 10n(n+1)\wp'(u)y' + 3g_2 y = 0.$$

Voici donc une nouvelle équation dont les intégrales sont liées par une relation quadratique. La constante n est arbitraire.

39. En achevant les calculs, nous allons trouver les équations du 2^d ordre auxquelles se ramène l'équation (39).

La relation II (n° 26) nous donne ici:

$$g\mu^2 = (n+2)(n-1)\wp(u) - \frac{5}{8}\frac{g_3}{\wp^2(u)}.$$

D'après la valeur de λ, μ ne diffère de $\frac{1}{\wp(u)}$ que par un coefficient constant. Nous déterminons ce coefficient au moyen de la relation (VII), comme nous l'avons fait, dans un cas analogue, au n° 36, et nous trouvons

$$c\mu^2 = \pm\frac{3}{4}\frac{g_3}{\wp^2(u)}.$$

Nous parvenons ainsi à l'équation ambigüe:

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{\wp'(u)}{\wp(u)}\frac{dz}{du} = \left[(n+2)(n-1)\wp^3(u) - \frac{5}{8}g_3 \pm \frac{3}{8}g_3\right]\frac{z}{\wp^2(u)}.$$

Ici nous distinguerons les équations données par les deux signes. Pour le signe $+$, nous changerons de variable en posant

$$z = \eta\wp^{-\frac{1}{2}}(u).$$

La transformée n'est autre que l'équation de Lamé:

$$(40) \qquad \frac{d^2\eta}{du^2} = n(n+1)\wp(u)\eta.$$

Pour l'équation au signe —, en appelant z_1 l'inconnue, nous ferons

$$z_1 = \zeta\wp(u)^{-1},$$

et voici la transformée:

$$(41) \qquad \wp(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \wp'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left[n(n+1)\wp^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right]\zeta.$$

On aura, d'autre part,

$$y = \mu^{-\frac{3}{2}}zz_1 = \wp(u)^{\frac{3}{2}}\cdot\wp(u)^{-\frac{1}{2}}\eta\cdot\wp(u)^{-1}\zeta = \eta\zeta.$$

Donc *l'équation* (39) *a pour intégrales les produits des intégrales des équations* (40) *et* (41) *entre elles.*

40. Parmi les cas où l'on peut intégrer les équations (40) et (41), j'en veux d'abord signaler à part le plus intéressant, qui présente un caractère singulier. C'est celui où l'on suppose $n = \frac{1}{2}$. L'équation (40), nous l'avons déjà dit, a l'intégrale générale

$$\eta = \wp'(u)^{-\frac{1}{2}}\left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\wp\left(\frac{u}{2}\right)\right].$$

Quant à l'équation (41), son intégrale que nous vérifierons plus loin (n° 48), est:

$$\zeta = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\mathbf{a}_1\left\{\wp\left(\frac{u}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}g_2\wp\left(\frac{u}{2}\right) - g_3\right\} + b_1\left\{\wp\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}g_2\right\}\right].$$

Multipliant entre elles les intégrales η, ζ correspondant à

$$\mathbf{a} = 1, \qquad \mathbf{b} = 0; \qquad \mathbf{a}_1 = 1, \qquad \mathbf{b}_1 = 0;$$

puis celles qui correspondent à

$$\mathbf{a} = 0, \qquad \mathbf{b} = -1; \qquad \mathbf{a}_1 = 0, \qquad \mathbf{b}_1 = 1;$$

et ajoutant les deux produits, nous formons l'intégrale particulière de (39)

$$y = \frac{1}{\wp'^2\left(\frac{u}{2}\right)},$$

qui suffit seule à trouver toutes les autres. En effet, la double périodicité des coefficients, dans l'équation (39), montre qu'en ajoutant des périodes à une intégrale, on reproduit encore une intégrale.

L'homogénéité de l'équation (39) permet, par le changement de u en cu, de supposer

$$\wp(u) = -\frac{1+k^2}{3} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

L'addition des périodes, dans l'intégrale ci-dessus, donne alors *l'intégrale générale de* (39), *pour* $n = \frac{1}{2}$, sous la forme: [1]

$$y = \frac{A + B\,\mathrm{sn}^8\frac{u}{2} + C\,\mathrm{cn}^8\frac{u}{2} + D\,\mathrm{dn}^8\frac{u}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}}.$$

Les intégrales sont proportionnelles à quatre polynômes, du $4^{\text{ème}}$ degré par rapport à la variable $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$. Ainsi *la courbe attachée à l'équation* (39), *pour* $n = \frac{1}{2}$, *est la courbe gauche unicursale du* $4^{\text{ème}}$ *degré.* Cette courbe est, on le sait, l'intersection d'une surface du 2^{d} degré et d'une surface du $3^{\text{ème}}$ degré, qui ont en commun deux droites ne se rencontrant pas. La dernière forme de l'intégrale, si l'on fait $\mathrm{sn}^2\frac{u}{2} = t$, donne

$$\frac{y_1}{1} = \frac{y_2}{t^4} = \frac{y_3}{(1-t)^4} = \frac{y_4}{(1-k^2t)^4},$$

et met en évidence les quatre plans osculateurs stationnaires.

41. Voici maintenant, sur la même équation, une dernière remarque. En faisant $n = \frac{1}{2}$, nous voyons qu'elle s'écrit:

$$y^{\mathrm{IV}} - 15\wp(u)y'' - \frac{15}{2}\wp'(u)y' + 3g_2y = 0.$$

C'est un cas de l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - 4gy'' - 2g'y' + c^2y = 0,$$

---

[1] L'équation (39) est un cas particulier d'une équation intégrée dans mon mémoire *sur la réduction des équations différentielles* (page 274 et suivantes). Malheureusement, une faute, dans le calcul des coefficients de cette équation (en haut de la page 274), faute qu'il est aisé de corriger, masque la coïncidence de l'équation (39) avec celle qui se rencontre dans le mémoire cité.

envisagée au n° 25, adjointe de l'équation type (24). Ainsi l'équation actuelle est l'adjointe de l'équation (24), où l'on prend

$$g = \frac{15}{4}\wp(u), \qquad c^2 = 3g_2.$$

D'après le n° 25, considérons les équations

$$\varphi'' = \left(\frac{15}{4}\wp(u) - \frac{\sqrt{3g_2}}{2}\right)\varphi, \qquad \psi'' = \left(\frac{15}{4}\wp(u) + \frac{\sqrt{3g_2}}{2}\right)\psi,$$

et nous aurons $y = \varphi\psi' - \psi\varphi'$.

Déjà, au n° 22, nous avons indiqué les intégrales φ et ψ. En les employant, nous retrouverons l'intégrale y. C'est un calcul facile sur lequel je ne veux pas insister. On remarquera cette conséquence géométrique: *la développable, dont l'arête de rebroussement est la courbe unicursale du 4ème degré, est circonscrite à une surface du 2d degré.* On n'aurait qu'à achever le calcul précédent pour trouver l'équation de cette seconde surface, différente, bien entendu, de celle sur laquelle se trouve la courbe elle-même.

42. Voici un second cas de l'équation (39) qui mérite une mention spéciale; c'est le cas $n = 1$. L'équation est alors:

$$y^{\text{IV}} - 20\wp(u)y'' - 20\wp'(u)y' + 3g_2 y = 0.$$

L'invariant v est nul. Par conséquent, c'est une transformée d'équation à coefficients constants.

Effectivement, les formules du n° 39 donnent ici, en supposant $c = 1$, ce qui est permis:

$$g\mu^2 = -\frac{5}{8}\frac{g_3}{\wp^2(u)}, \qquad \mu^2 = \frac{3}{4}\frac{g_3}{\wp^2(u)},$$

$$g = -\frac{5}{6}.$$

En employant la variable x, qui attribue aux équations du second ordre la forme primitive, on a:

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{3g_3}}{2\wp(u)}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \left(-\frac{5}{6} \pm \frac{1}{2}\right)z.$$

Ainsi, en posant

$$\alpha = \frac{ix}{\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{g_3}}{2}\int\frac{du}{\wp(u)},$$

on a, pour l'équation au signe $+$, les intégrales $e^{\pm\alpha}$; et, pour l'équation au signe $-$, les intégrales $e^{\pm 2\alpha}$.

Par suite, les intégrales y sont

$$y = \wp^3(u)[\mathfrak{a}e^{-3\alpha} + \mathfrak{b}e^{-\alpha} + \mathfrak{c}e^{\alpha} + \mathfrak{d}e^{3\alpha}],$$

proportionnelles, comme on voit, à quatre puissances consécutives d'une même quantité $e^{2\alpha}$. L'équation est donc un cas particulier de l'équation (13). Effectivement, c'est un cas de l'exemple cité au n° 13.

La quadrature, par laquelle s'obtient α, peut être effectuée comme il suit.

En employant les notations usuelles

$$\wp(u) = -\zeta'(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u),$$

on a la formule fondamentale:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(u) - \wp'(w)}{\wp(u) - \wp(w)} = \zeta(u + w) - \zeta(u) - \zeta(w).$$

Supposant $\wp(w) = 0$, ce qui entraîne $\wp'(w) = \pm i\sqrt{g_3}$, on en déduit

$$\pm\frac{i\sqrt{g_3}}{2}\int\frac{du}{\wp(u)} = \log\frac{e^{-u\zeta(w)}\sigma(u + w)}{\wp(u)^{\frac{1}{2}}\sigma(u)} = \pm\alpha.$$

Les deux signes de α correspondent aux deux signes de w. On déduit de là une nouvelle forme des intégrales z, et d'après les notations du n° 39,

$$\eta = e^{-u\zeta(w)}\frac{\sigma(u + w)}{\sigma(u)}, \tag{42}$$

pour intégrale de l'équation (40), savoir

$$\frac{d^2\eta}{du^2} = 2\wp(u)\eta.$$

On retrouve bien ainsi l'intégrale de ce cas particulier de l'équation de Lamé sous la forme habituelle d'une fonction doublement périodique de seconde espèce, forme adoptée par M. Hermite.

L'équation (41), pour ce cas $n = 1$, est en même temps intégrée. Ainsi l'équation

$$\wp(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \wp'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left(2\wp^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right)\zeta$$

a les deux intégrales η^2, obtenues en mettant dans (42), l'une ou l'autre racine de $\wp(w) = 0$.

43. Mentionnons encore, pour l'équation (39), le cas $n = 0$, dans lequel l'équation (41) présente une circonstance curieuse. C'est

$$\wp(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \wp'(u)\frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{2}g_2\zeta.$$

En différentiant aux deux membres, on obtient, par disparition du facteur $\wp(u)$, le résultat suivant:

$$\frac{d^3\zeta}{du^3} = 6\wp(u)\frac{d\zeta}{du}.$$

La dérivée de ζ est ainsi l'intégrale d'une équation de Lamé. L'intégrale de cette équation se présentant d'elle-même sous la forme d'une dérivée, on a immédiatement ζ:

$$\zeta = \frac{\sigma(u + w)}{\sigma(u)} e^{-\left[\frac{\wp'(w)}{2\wp(w)} + \zeta(w)\right]u},$$

l'argument w étant l'une ou l'autre racine de $\wp(w) = -\frac{g_3}{g_2}$. (1) Soient ζ_1 et ζ_2 les deux fonctions comprises dans cette formule, on a, pour l'équation

$$y^{\text{IV}} - 12\wp(u)y'' + 3g_2 y = 0,$$

les intégrales ζ_1, ζ_2, $u\zeta_1$, $u\zeta_2$.

---

(1) *Mémoire sur la réduction des équations différentielles* (page 99).

44. L'équation (40) est intégrable quand n est un nombre entier. Il en est tout autant de l'équation (41). Effectivement ses points singuliers s'obtiennent quand u est une période, ou bien une racine de $\wp(u)$. Les racines de $\wp(u)$ ne fournissent pas de point singulier pour l'équation (40), ni pour l'équation (39); comme on a d'ailleurs $y = \eta\zeta$, il en résulte que ζ reste uniforme aux environs d'une telle racine. D'autre part, quand u est une période, l'équation caractéristique de (41) a les racines n et $-(n+1)$, dont la différence est impaire. Comme les coefficients de $\frac{d^2\zeta}{du^2}$ et de ζ sont des fonctions paires et celui de $\frac{d\zeta}{du}$ une fonction impaire, la différence impaire des deux racines n'entraine aucune condition subsidiaire pour l'existence d'intégrales appartenant à des exposants égaux à ces racines. Donc les intégrales de l'équation (41 sont des fonctions uniformes de la variable u, et l'on pourra, pour chaque valeur entière de n, les trouver par une méthode analogue à celle de l'équation de LAMÉ.

En conséquence, *l'équation* (39), que je transcris ici,

$$y^{\mathrm{IV}} - 4(n^2 + n + 3)\wp(u)y'' - 10n(n+1)\wp'(u)y' + 3g_2 y = 0$$

a son intégrale uniforme, partant est intégrable, quand n est un nombre entier.

Ce résultat mérite d'être remarqué, pour la raison suivante. Au point singulier, l'équation caractéristique a les racines 0, 6 et $\pm(2n+1)$. Les différences paires, d'après la forme de l'équation, n'impliquent des intégrales appartenant à des exposants égaux aux racines que sous le bénéfice d'une condition subsidiaire. Or on n'a aucun moyen direct, ce me semble, de vérifier cette condition à l'égard des deux dernières racines dont la différence est $4n+2$, tandis que, par l'analyse précédente, on est assuré de l'existence de ces intégrales.

45. J'ai terminé l'examen des applications que j'avais en vue de traiter ici; il ne me reste, pour finir ce mémoire, qu'à expliquer comment s'intègrent deux équations du 2[d] ordre, rencontrées dans le cours de ce travail, et dont j'ai supposé connues les intégrales.

L'équation de LAMÉ

$$\frac{d^2z}{du^2} = [n(n+1)\wp(u) + \alpha]z \tag{43}$$

s'intègre par les fonctions elliptiques de seconde espèce dans le cas où

n est un nombre entier, quelle que soit d'ailleurs l'arbitraire α. Elle a donné lieu, pour ce cas, à des études dues à M. HERMITE. Mais, en outre, elle est intégrable aussi quand n est la moitié d'un nombre entier, pourvu que la constante α soit convenablement choisie. Dans un tel cas, l'intégrale est, en quelque sorte, plus simple qu'au cas précédent: c'est, au facteur $\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-n}$ près, un polynome entier de la variable $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$. Ce polynôme contient une constante arbitraire, et son degré est égal à $2n$.

Deux cas de cette proposition ont été utilisés dans le mémoire actuel; ce sont les cas $n = \frac{1}{2}$ et $n = \frac{3}{2}$. Je vais établir ici, à nouveau, ce résultat qui se trouve d'ailleurs prouvé différemment dans mon mémoire *sur la réduction des équations différentielles.*

46. Soient: m un nombre entier, a, b, c des constantes données, et A, B, C, P quatre polynômes inconnus, tous quatre du degré $m - 1$ par rapport à une variable x. Pour fixer les idées, nous supposerons, dans chacun des polynômes, le coefficient unité pour le terme en x^{m-1}. On peut généralement trouver ces quatre polynômes de telle sorte que P, $(x-a)^m A$, $(x-b)^m B$, $(x-c)^m C$, soient liés par deux relations linéaires homogènes.

Effectivement, c'est là un problème déterminé, les quatre polynômes et les quatre constantes des deux relations linéaires fournissant $4m$ inconnues, tandis que les deux relations linéaires fournissent $4m$ équations.

Etant liés par deux relations linéaires, les quatre polynômes P, $(x-a)^m A$, $(x-b)^m B$, $(x-c)^m C$ sont les intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Soient α, β deux quelconques de ces polynômes; l'équation a la forme

$$(\alpha,\beta')y'' - (\alpha\beta'')y' + (\alpha'\beta'')y = 0.$$

En prenant pour α le polynôme P, on voit que les degrés des coefficients sont, dans leur ordre respectif, $3m-3$, $3m-4$, $3m-5$. Si β est le polynôme $(x-a)^m A$, la racine a est multiple, dans ces polynômes, aux ordres respectifs $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-2)$. Comme on peut prendre, au lieu de $(x-a)^m A$, chacun des deux autres polynômes analogues, la même conclusion subsiste pour b et c. Soit donc

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c);$$

les trois coefficients contiennent respectivement le facteur $f(x)$ avec les exposants $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-2)$. Le facteur commun supprimé, on voit que le premier coefficient est $f(x)$. Le second coefficient, avant la suppression du facteur, était la dérivée du premier, changée de signe; il se réduit donc maintenant à $-(m-1)f'(x)$. Le dernier coefficient est du premier degré, et peut s'écrire, on le voit aisément, $\frac{(2m-1)(m-1)}{6}f''(x)+\beta$, où β est une constante dont la valeur n'est pas immédiatement connue. Ainsi:

$f(x)$ étant un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré, on peut choisir la constante β de telle manière que l'équation

$$(44) \qquad f(x)y''-(m-1)f'(x)y'+\left[\frac{(2m-1)(m-1)}{6}f''(x)+\beta\right]y=0$$

ait pour intégrale générale un polynôme entier.

Cette intégrale est du degré $(2m-1)$; un de ses cas particuliers se réduit au degré $(m-1)$. Cette intégrale particulière peut servir à déterminer β.

Effectivement l'équation différentielle fournit une relation récurrente, à quatre termes, entre les coefficients de l'intégrale. En formant cette relation, on trouvera aisément que l'existence d'une solution, du degré $(m-1)$, conduit à une équation de condition. Cette équation est, par rapport à l'inconnue β, du degré m. Ainsi *la constante β est donnée par une équation du $m^{\text{ème}}$ degré.*

On peut remarquer comment l'intervention de l'équation différentielle vient éclairer la solution du problème d'algèbre, posé au début. Voici, en effet, la conclusion: *les coefficients des polynômes inconnus A, B, C, P sont fonctions entières de la racine d'une équation de degré m.*

47. L'équation de Lamé (43), où l'on suppose n égal à la moitié d'un nombre entier, se réduit à la forme (44), par un changement des variables.

Soient, dans l'équation (43),

$$n=m-\frac{1}{2}, \qquad \wp\left(\frac{u}{2}\right)=x, \qquad z=y\,\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-m+\frac{1}{2}}$$

En faisant usage de la formule de duplication:

$$\wp(u) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}\right]^2 - 2\wp\left(\frac{u}{2}\right),$$

on trouvera, pour la transformée:

$$(4x^3 - g_2x - g_3)y'' - (m-1)(12x^2 - g_2)y' + 4[(2m-1)(m-1)x - \alpha]y = 0.$$

C'est précisément la forme (44). Donc *l'équation* (43), *où n est la moitié d'un nombre entier, soit* $\left(m - \frac{1}{2}\right)$, *a pour intégrale générale le produit de* $\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-n}$ *par un polynôme entier en* $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$, *du degré* $(2m-1)$. *Un cas particulier de ce polynôme se réduit au degré* $(m-1)$. *La constante α n'est pas arbitraire; c'est la racine d'une équation de degré m.*

Pour $m = 1$, il est manifeste que α doit être nulle. La transformée est $y'' = 0$. Pour $m = 2$, le calcul est très-simple, et mène au résultat que nous avons appliqué au n° 22; la constante α est $\pm\frac{\sqrt{3g_2}}{2}$. Il n'y a pas lieu d'examiner ici d'autres cas.

48. J'ai utilisé (n° 40) l'intégrale de l'équation

$$\wp(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \wp'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left(\frac{3}{4}\wp^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right)\zeta.$$

On peut la vérifier facilement ainsi. Posant

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = x, \quad \zeta = y\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

on obtient la transformée:

$$\left(x^4 + \frac{1}{2}g_2x^2 + 2g_3x + \frac{1}{16}g_2^2\right)y'' - 2\left(2x^3 + \frac{1}{2}g_2x + g_3\right)y' + \left(6x^2 - \frac{1}{2}g_2\right)y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = \mathbf{a}\left(x^3 + \frac{1}{4}g_2x - g_3\right) + \mathbf{b}\left(x^2 + \frac{1}{4}g_2\right).$$