

SUR UNE FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALE

PAR

ERNST LINDELÖF

à HELSINGFORS.

1. Dans son Mémoire: *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*, daté de 1823, ABEL a établi la formule suivante¹:

$$(1) \quad \Sigma \varphi(x) = \int \varphi(x) dx - \frac{1}{2} \varphi(x) + 2 \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{2i} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

où $\Sigma \varphi(x)$ désigne »l'intégrale finie» de la fonction $\varphi(x)$, c'est à dire la solution de l'équation fonctionnelle: $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$. Après y être arrivé, ABEL continue en ces termes: »Cette expression de l'intégrale finie d'une fonction quelconque me paraît très remarquable, et je ne crois pas qu'elle ait été trouvée auparavant.» — En fait, l'expression en question avait déjà été trouvée par PLANA en 1820².

En 1825 ABEL est revenu sur la formule (1) et en a donné une nouvelle démonstration, dans un Mémoire intitulé: *L'intégrale finie $\Sigma^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple*³. Mais cette démonstration n'indique pas, non plus que la première, les conditions dans lesquelles est applicable la formule dont il s'agit.

Il est assez curieux que le remarquable résultat découvert par PLANA et ABEL ait dû attendre une démonstration rigoureuse jusqu'en 1889, date

¹ *Oeuvres complètes d'Abel* (édition SYLOW-LIE), t. I, p. 23.

² Voir *ibid.*, t. II, p. 290.

³ *Ibid.*, t. I, p. 35.

à laquelle a paru le Mémoire de KRONECKER: *Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale*¹, où la formule (1) se trouve enfin rattachée à la théorie des résidus de CAUCHY qui en constitue l'origine naturelle. Plus tard M. J. PETERSEN² a fait connaître quelques applications intéressantes de cette même formule.

Dans un Mémoire, intitulé: *Quelques applications d'une formule sommatoire générale*, qui sera inséré dans le tome XXXI des *Acta societatis scientiarum Fennicæ*, nous avons développé quelques applications nouvelles de la formule (1), à laquelle nous avons d'ailleurs été conduit indépendamment des travaux mentionnés ci-dessus. Sur l'invitation de M. MITTAG-LEFFLER, nous indiquerons brièvement ici quelques-uns des résultats auxquels nous sommes arrivés, renvoyant pour les démonstrations et pour les développements ultérieurs au Mémoire cité.

2. Parmi les applications que comporte la formule (1), il y en a une qui nous paraît particulièrement intéressante et qui concerne le prolongement analytique des séries de TAYLOR

$$F(x) = \sum_0^{\infty} \varphi(n)x^n,$$

où φ est une fonction analytique de son argument.

Posons $x = re^{i\theta}$, $z = \tau + it = \rho e^{i\psi}$, $\varphi(\tau \pm it) = p(\tau, t) \pm iq(\tau, t)$, et admettons relativement à la fonction $\varphi(z)$ les hypothèses suivantes:

- 1° $\varphi(z)$ est holomorphe pour toute valeur z telle que $\tau \geq 0$.
- 2° le nombre positif ε étant donné arbitrairement petit, on peut trouver un autre nombre positif R tel que, pour $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho > R$, on ait

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon\rho}.$$

Ces conditions supposées remplies, la fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$F(x) = \frac{1}{2} \varphi(0) + H(x) + J(x),$$

¹ *Journal de Crelle*, t. 105, pp. 345—354.

² *Vorlesungen über Funktionentheorie* (Copenhague 1898).

où

$$H(x) = -2 \int_0^{\infty} \{p(0, t) \sin(t \log x) + q(0, t) \cos(t \log x)\} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

$$J(x) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) x^{\tau} d\tau,$$

et de ces expressions on peut tirer successivement les conclusions suivantes:

- (a) La fonction $H(x)$ est holomorphe pour $-2\pi < \theta < 2\pi, r > 0$.
- (b) La fonction $J(x)$ reste holomorphe dans tout le plan, excepté l'origine, à condition que le point x ne vienne pas traverser le segment $1 \dots \infty$ du rayon d'argument $\theta = 0$, ni se confondre avec un point de ce segment.
- (c) La fonction $F(x)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine T , formé du plan entier où l'on aura tracé la coupure $+1 \dots +\infty$ suivant l'axe réel. Ce résultat avait déjà été établi par M. LE ROY¹, mais par une voie beaucoup moins directe.
- (d) La fonction $F(x)$ tend vers zéro lorsque le point x tend vers l'infini avec un argument déterminé, en restant intérieur au domaine T .
- (e) La différence entre une branche quelconque de la fonction $F(x)$ et sa branche principale (celle dont il est question dans le théorème (c)) peut s'exprimer par la somme d'un nombre fini de termes dont chacun est un multiple entier, positif ou négatif, d'une branche de la fonction $J(x)$. Les singularités de $F(x)$ sont donc toutes comprises parmi celles de $J(x)$.

Nous allons citer encore un théorème assez général et comportant plusieurs applications intéressantes, dont nous avons développé quelques-unes dans notre Mémoire.

Supposons vérifiées les hypothèses suivantes:

- 1° $\varphi(z)$ est holomorphe pour toute valeur z telle que $\tau \geq 0$;
- 2° quelque grand que soit l'angle ϕ_0 , on peut trouver un nombre positif R tel que $\varphi(z)$ soit holomorphe pour $-\phi_0 < \phi < \phi_0, \rho > R$ (sauf peut-être à l'infini);

¹ Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2^e Série, Tome II, 1900).

3° quelque grand que soit ϕ_0 et quelque petit que soit ε , on a

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon\rho} \text{ pour } -\phi_0 < \phi < \phi_0,$$

dès que ρ dépassera une certaine limite.

Dans ces conditions, on peut affirmer que la fonction $F(x)$ ne peut admettre d'autres points singuliers que 0, 1 et ∞ (le point 0 étant en général point singulier pour toute branche de $F(x)$ autre que la branche principale).

3. Nous dirons en second lieu quelques mots sur l'application de la formule (1) à la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN. Comme conséquence immédiate, cette formule entraîne l'égalité

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + 2 \int_0^{\infty} (1+t^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

et par une petite modification, on en déduit

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} - 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{4} + t^2\right)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} 2t) \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1}.$$

Ces expressions définissent la fonction $\zeta(s)$ dans tout le plan et en mettent en évidence plusieurs propriétés intéressantes.

Par une autre modification de la formule (1), on arrive à l'égalité

$$\zeta(s) = 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{t^{-s} dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

d'où résulte immédiatement le théorème fondamental de RIEMANN suivant lequel l'expression

$$(2) \quad \chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

ne change pas de valeur lorsqu'on y substitue $1-s$ à s .

Nous insisterons un peu plus sur l'égalité

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} \\ & + 2n^{-s} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{-\frac{s}{2}} \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{t}{n}\right) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}, \end{aligned}$$

qui se déduit également de la formule (1). En développant le dernier terme suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, on trouve

$$(3) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_1^k T_\nu + R_k,$$

avec

$$T_\nu = (-1)^{\nu+1} \frac{B_\nu s(s+1)\dots(s+2\nu-2)}{2^\nu \cdot 1 \cdot 2 \dots (2\nu-1)} \cdot \frac{1}{n^{s+2\nu-1}},$$

B_ν désignant, comme d'ordinaire, le $\nu^{\text{ème}}$ nombre de BERNOULLI. On voit que cette dernière expression de $\zeta(s)$ est précisément celle que fournit la formule sommatoire d'EULER, et le reste R_k peut donc se présenter p. ex. sous la forme

$$R_k = - \frac{s(s+1)\dots(s+2k+1)}{1 \cdot 2 \dots (2k+2)} \int_n^\infty \frac{\overline{P}_{2k+2}(\tau)}{\tau^{s+2k+2}} d\tau,$$

$\overline{P}_{2k+2}(\tau)$ désignant la fonction périodique à la période 1 qui, pour $0 \leq \tau \leq 1$, se confond avec le polynôme de BERNOULLI:

$$P_{2k+2}(\tau) = \tau^{2k+2} - (k+1)\tau^{2k+1} + C_{2k+2}^{(2)} B_1 \tau^{2k} - C_{2k+2}^{(4)} B_2 \tau^{2k-2} + \dots$$

En tenant compte des propriétés bien connues de ce polynôme, et en posant $s = x + iy$, on peut tirer de l'expression ci-dessus, pour le module du reste R_k , la limite supérieure suivante:

$$(4) \quad |R_k| < |s + 2k + 1| \left(\frac{1}{x + 2k + 1} + \frac{1}{2n} \right) |T_{k+1}|.$$

La formule (3) est intéressante sous plusieurs rapports, et surtout parce qu'elle fournit le seul moyen vraiment pratique pour le calcul numérique des valeurs de la fonction $\zeta(s)$. En particulier, on peut s'en servir pour chercher les zéros de $\zeta(s)$ qui sont compris sur la droite D parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point $s = \frac{1}{2}$, et à cet effet on peut profiter de la remarque très simple que voici:

Du théorème de RIEMANN, on peut conclure que la fonction $\chi(s)$, définie par l'expression (2), prend des valeurs réelles sur la droite D . Pour

un point quelconque s de cette droite, le reste suivant le module 2π de la quantité

$$\Omega = \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \arg \zeta(s)$$

est donc égal à 0 ou à π , suivant que $\chi(s)$ est positif ou négatif. Comme $\chi(s)$ ne change évidemment de signe qu'en s'annulant, et comme cette fonction, d'autre part, présente sur la droite en question précisément les mêmes zéros que $\zeta(s)$, on voit dès lors que, pour séparer les zéros de la fonction $\zeta(s)$ compris sur un segment donné de la droite D , on n'aura qu'à calculer, avec une erreur moindre que $\frac{\pi}{2}$, la valeur de la quantité Ω pour une suite de points suffisamment rapprochés de ce segment.

Nous nous permettrons de publier ici les résultats numériques¹ que nous avait fournis un calcul de quelques jours entrepris au commencement de l'année, résultats qui sont certes beaucoup moins précis que ceux qu'a fait connaître dernièrement M. GRAM², mais qui suffisent cependant pour illustrer la méthode que nous venons d'esquisser.

Dans le tableau qui suit, $\xi(y)$ et $\eta(y)$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de la quantité $\zeta\left(\frac{1}{2} + iy\right)$, et ω désigne le reste suivant le module 2π (converti en degrés) de la valeur approchée qu'a fournie notre calcul pour la quantité Ω . Les valeurs de $\xi(y)$ et de $\eta(y)$ ont été calculées à l'aide de la formule (3), en y faisant $n = 10$, $k = 1$ et en négligeant le reste.

¹ Nous avons communiqué ces résultats à M. MITTAG-LEFFLER dans une lettre datée du 22 janvier 1902.

² *Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* (présentée à l'Académie des Sciences de Copenhague le 7 février 1902; réimprimée ci-dessus, p. 289).

y	$\xi(y)$	$\eta(y)$	Ω	y	$\xi(y)$	$\eta(y)$	Ω
12	1.016	-0.744	180° 1'	32	0.86	-0.20	180°. ₂
13	0.444	-0.656	180° 3'	34	0.52	1.62	0°. ₂
14	0.021	-0.104	179° 19'	36	2.35	-1.19	-0°. ₄
14. ²⁵	-0.012	0.092	0° 47'	38	0.47	0.56	177°. ₈
15	0.148	0.706	-0° 1'	40	0.83	-1.03	181°. ₈
18	2.331	-0.187	0° 2'	42	1.02	0.42	2°. ₈
20	0.427	-1.062	-0° 7'	44	-0.05	1.37	182°. ₃
22	0.718	0.665	179° 53'	46	3.29	-1.46	179°. ₂
24	0.958	-0.585	180° 0'	47	0.24	-1.95	177°. ₆
26	0.504	1.344	-0° 2'	48	0.07	0.05	(-5°. ₈)
28	2.713	-0.679	-0° 2'	49	0.65	-0.31	-8°. ₅
30	-0.124	-0.598	-0° 3'	50	-0.16	0.42	186°. ₈

A l'aide de l'inégalité (4), on s'assure facilement que la valeur exacte de la quantité désignée par Ω , pour l'un quelconque des arguments y indiqués dans le tableau (excepté $y = 48$), est bien égale à celle des quantités 0° et 180° qui s'écarte le moins de la valeur calculée de ω . Par suite, les chiffres qui précèdent nous permettent d'énoncer ce résultat que le segment de la droite D qui correspond à l'intervalle 12—50 de l'ordonnée y , renferme certainement dix zéros de la fonction $\zeta(s)$ dont les ordonnées sont respectivement comprises entre les limites:

$$14-14.25, \quad 20-22, \quad 24-26, \quad 30-32, \quad 32-34, \\ 36-38, \quad 40-42, \quad 42-44, \quad 47-49, \quad 49-50.$$

Les zéros une fois séparés, on pourra les calculer avec telle approximation qu'on désire, en prenant dans la formule (3) l'entier n suffisamment grand, et en choisissant convenablement l'entier k .