BEMERKUNGEN ZU EINEM SATZE VON SOPHUS LIE ÜBER EIN ANALOGON ZUM ABEL'SCHEN THEOREM

VON

LEO KÖNIGSBERGER
in HEIDELBERG.

In einem am 31ten Mai 1879 an mich nach Wien gerichteten Briefe schreibt WEIERSTRASS: »... Sorgen Sie aber dafür, dass der hundertjährige Geburtstag ABEL's und JACOBI's würdig begangen werde, und gedenken Sie dann auch derer, die als die ersten es als ihre Lebensaufgabe betrachtet haben, die Arbeiten dieser Männer fortzusetzen, ...«. Dieser Mahnung eingedenk erscheint es bei Gelegenheit der Feier des hundertjährigen Geburtstages ABEL's, eines der grössten Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts, vielleicht nicht unpassend, wenn ich aus Briefen, welche der ausgezeichnete norwegische Mathematiker SOPHUS LIE, der der Wissenschaft nur allzufrüh durch den Tod entrissen worden, im Januar 1892 an mich nach Heidelberg gerichtet hat, einige Stellen veröffentliche, welche Untersuchungen über das verallgemeinerte ABEL'sche Theorem betreffen, die — so viel ich weiss — in seinen gedruckten Arbeiten sich nicht vorfinden, und an die ich einige Bemerkungen zu knüpfen mir erlauben will.

SOPHUS LIE schreibt »... Vielleicht werden Sie noch den folgenden Satz mit Interesse umfassen. Obgleich mein Beweis desselben ausserordentlich kurz ist, so beruht doch derselbe auf so eigenthümlichen geometrischen Anschauungen, dass ich vermuthe, dass mein Resultat neu ist. Ich betrachte $m + 1$ Gleichungen von der Form

$$v_k = A_{k1}(t_1) + \ldots + A_{km}(t_m), \qquad (k=1,2,\ldots,m+1)$$

und mache über sie nur die einzige Voraussetzung, dass sich aus ihnen nur eine Relation zwischen $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$ ableiten lässt, dann ist die Relation

$$\Omega(v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}) = 0$$

dann und nur dann algebraisch, wenn zwei beliebige Grössen

$$A_{ki}(t_i), A_{ji}(t_i)$$

durch eine algebraische Relation gebunden sind. Setzen Sie insbesondere

$$A_{ki} = \int \varphi_{ki}(x_i) dx_i$$

und verstehen dabei unter $\varphi_{ki}(x_i)$ ganz beliebige (?) Functionen von x_i, so haben Sie einen Satz über Abel'sche Integrale, den man mit Benutzung eines Abel'schen Satzes noch mehr praecisiren kann. Darf ich Sie bitten, nur auf einer Postkarte mitzutheilen, ob mein Satz, der sich übrigens ausserordentlich verallgemeinern lässt, in der Literatur schon vorkommt. Ist der Satz bekannt, so bin ich darauf gespannt, ob der Beweis so einfach wie meiner ist. Mein Beweis beruht auf geometrischen Anschauungen, die zwar sehr einfach sind, die aber doch, soweit mir bekannt ist, fast nur von mir angewandt worden sind. Hoffentlich entschuldigen Sie meine fortgesetzten Mittheilungen. Wenn ich mich in diesen Dingen so unsicher fühle, so liegt es nur darin, dass ich plötzlich auf ein mir neues Gebiet hineingekommen bin. Der allgemeine Satz, der sich ebenfalls leicht beweisen lässt, lautet: Lassen sich aus $mn + 1$ gegebenen Gleichungen

$$v_k = A_{k1}(t_1, \ldots, t_m) + A_{k2}(t_{m+1}, \ldots, t_{2m}) + \ldots + A_{kn}(t_{m(n-1)+1}, \ldots, t_{mn}) \qquad (k=1,2,\ldots,mn+1)$$

eine und nur eine Relation $\Omega(v_1, \ldots, v_{mn+1}) = 0$ ableiten, so ist dieselbe algebraisch dann und nur dann, wenn $m + 1$ beliebige Grössen

$$A_{k_1 i} \quad A_{k_2 i}, \ldots, A_{k_{m+1} i}$$

immer durch eine algebraische Relation gebunden sind. Dieser Satz wird doch jedenfalls wohl neu sein. Haben die A_{ki} die Form totaler Integrale von algebraischen Functionen, so hat der oben genannte Satz schon Werth; den Fall $m = 1$ haben Sie, wie ich erfahre, schon erledigt. Die Begründung meines ersten Satzes ist leider auf Mannigfaltigkeitsbetrachtungen begründet, die Ihnen vielleicht als reinem Algebraisten unangenehm sind, Auch mein letzter Satz beruht auf Mannigfaltigkeitsbetrachtungen, ein rein analytischer Beweis würde sehr schwerfällig ausfallen.»

Es folgen auf meine Antwort in ferneren Briefen weitere Umgestaltungen, Veränderungen und Berichtigungen der angeführten Sätze, welche auf strengeren geometrischen Betrachtungen, die jedoch nicht angegeben sind, beruhen sollen, und es schliessen diese Mittheilungen mit der Bemerkung, die uns nach dem raschen Ende des ausgezeichneten Forschers wehmüthig ergreift: »Seit langer Zeit habe ich in dem Maasse an Schlaflosigkeit gelitten, dass ich alle Lust zur Wissenschaft verloren hatte. Als ich nun wieder anfing, wurde ich dadurch sehr überrascht, dass ich auf einem mir fremden Gebiete neue allgemeine Sätze fand. Meine nervöse Unruhe zwang mich dazu, sogleich nachzufragen, ob meine Resultate Werth hätten. Dadurch erklärt sich die verfrühte Mittheilung des letzten Satzes, gleichzeitig die nonchalante Form meiner Briefe . . .» Damit brach der Briefwechsel über diesen Gegenstand ab.

Ich will nun an dieser Stelle in wenigen kurzen Betrachtungen rein analytischer Natur auf den oben von Lie ausgesprochenen Satz näher eingehen,

dass, wenn sich aus $m + 1$ Gleichungen von der Form

$$v_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + \ldots + A_{km}(t_m) \qquad (k=1,2,\ldots,m+1) \tag{1}$$

nur eine Relation zwischen $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$

$$\Omega(v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}) = 0 \tag{2}$$

ableiten lässt, dieselbe dann und nur dann algebraisch ist, wenn zwei beliebige Grössen

$$A_{ki}(t_i), \; A_{ji}(t_i)$$

algebraisch von einander abhängen,

und will dann den Zusammenhang mit der bekannten Arbeit von Abel darlegen »sur les fonctions qui satisfont à l'équation

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \psi(xf(y) + yf(x))»,$$

in welcher derselbe eine Erweiterung des algebraischen Additionstheorems anzubahnen beabsichtigte.

Setzt man die Beziehung (2) in die Form

$$v_{m+1} = \omega(v_1, v_2, \ldots, v_m), \tag{3}$$

und bezeichnet für die constanten Werthe

$$t_2 = \tau_{21}, \quad t_3 = \tau_{31}, \quad \ldots, \quad t_m = \tau_{m1}$$

den Ausdruck

$$A_{k2}(\tau_{21}) + A_{k3}(\tau_{31}) + \ldots + A_{km}(\tau_{m1}) \quad \text{mit} \quad B_{k1},$$

für die constanten Werthe

$$t_1 = \tau_{12}, \quad t_3 = \tau_{32}, \quad \ldots, \quad t_m = \tau_{m2}$$

den Ausdruck

$$A_{k1}(\tau_{12}) + A_{k3}(\tau_{32}) + \ldots + A_{km}(\tau_{m2}) \quad \text{mit} \quad B_{k2}$$

u. s. w., so erhält man aus (3) die m Gleichungen

$$A_{m+11}(t_1) + B_{m+11} = \omega\big(A_{11}(t_1) + B_{11}, A_{21}(t_1) + B_{21}, \ldots, A_{m1}(t_1) + B_{m1}\big)$$
$$A_{m+12}(t_2) + B_{m+12} = \omega\big(A_{12}(t_2) + B_{12}, A_{22}(t_2) + B_{22}, \ldots, A_{m2}(t_2) + B_{m2}\big)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{m+1m}(t_m) + B_{m+1m} = \omega\big(A_{1m}(t_m) + B_{1m}, A_{2m}(t_m) + B_{2m}, \ldots, A_{mm}(t_m) + B_{mm}\big)$$

und somit durch Addition dieser Gleichungen wiederum nach (3)

$$\omega\big(A_{11}(t_1) + B_{11}, \ldots, A_{m1}(t_1) + B_{m1}\big) + \ldots + \omega\big(A_{1m}(t_m) + B_{1m}, \ldots, A_{mm}(t_m) + B_{mm}\big)$$
$$= \omega\big(A_{11}(t_1) + \ldots + A_{1m}(t_m), \ldots, A_{m1}(t_1) + \ldots + A_{mm}(t_m)\big) + B_{m+11} + \ldots + B_{m+1m}.$$

Durch Substitution eines willkührlichen, von den früheren verschiedenen Werthesystems

$$t_2 = \tau_2, \quad t_3 = \tau_3, \quad \ldots, \quad t_m = \tau_m$$

folgt nun, indem man zur Abkürzung die Constanten einführt

$$B_{11} = a_1, B_{21} = a_2, \ldots, B_{m1} = a_m, A_{\lambda 2}(\tau_2) + A_{\lambda 3}(\tau_3) + \ldots + A_{\lambda m}(\tau_m) = \alpha_\lambda,$$

und

$$A_{11}(t_1) = u_{11}, \quad A_{21}(t_1) = u_{21}, \quad \ldots, \quad A_{m1}(t_1) = u_{m1},$$

ferner die Constante

$$B_{m+11} + \dots + B_{m+1m} - \omega\big(A_{12}(\tau_2) + B_{12}, \dots, A_{m2}(\tau_2) + B_{m2}\big) - \dots$$
$$- \omega\big(A_{1m}(\tau_m) + B_{1m}, \dots, A_{mm}(\tau_m) + B_{mm}\big) = B$$

setzt, die Functionalgleichung in der Variabeln t_1

$$(4) \quad \omega(u_{11}+a_1, u_{21}+a_2, \dots, u_{m1}+a_m) = \omega(u_{11}+\alpha_1, u_{21}+\alpha_2, \dots, u_{m1}+\alpha_m)+B,$$

worin $a_1, a_2, \dots, a_m$ der Annahme gemäss von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ verschieden sind, und ω nunmehr als algebraische Function vorausgesetzt werden soll.

Diese Gleichung kann eine in $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m1}$ identische sein oder sie liefert u_{m1} als algebraische Function von $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m-11}$.

Unter der Voraussetzung der Identität oder unter der Annahme, dass, wenn

$$u_{11} + \alpha_1 = U_1, \quad u_{21} + \alpha_2 = U_2, \ \dots, \ u_{m1} + \alpha_m = U_m, \quad a_k - \alpha_k = \mu_k$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(5) \quad \omega(U_1 + \mu_1, U_2 + \mu_2, \dots, U_m + \mu_m) = \omega(U_1, U_2, \dots, U_m) + B$$

identisch befriedigt wird, würden, wenn die algebraische Function $\omega(U_1, U_2, \dots, U_m)$ der irreductibeln Gleichung genügt

$$(6) \qquad \omega^\rho + r_1(U_1, \dots, U_m)\omega^{\rho-1} + \dots + r_\rho(U_1, \dots, U_m) = 0,$$

in welcher $r_1, \dots, r_\rho$ rationale Functionen der Variabeln $U_1, U_2, \dots, U_m$ bedeuten, die Lösungen der Gleichung

$$(7) \quad \Omega^\rho + r_1(U_1+\mu_1, \dots, U_m+\mu_m)\Omega^{\rho-1} + \dots + r_\rho(U_1+\mu_1, \dots, U_m+\mu_m) = 0$$

sich von denen der Gleichung (6) nur um dieselbe additive Constante B unterscheiden, so dass dieselbe Function zusammengesetzt aus den Differenzen der Lösungen (6) und (7) unverändert bleibt. Bildet man nun eine aus den Differenzen der Lösungen bestehende symmetrische Function derselben, so wird diese als ganze rationale Function φ der Coefficienten der Gleichung aufgefasst bekanntlich der partiellen Differentialgleichung

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} + (\rho - 1) r_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r_2} + (\rho - 2) r_2 \frac{\partial \varphi}{\partial r_3} + \dots = 0$$

genügen, und da man, wie leicht zu sehen, stets ein in den neu eintretenden Coefficienten lineares, in den früheren Coefficienten ganzes Integral bilden kann

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi = r_2(U_1, \ldots, U_m) - \dfrac{\rho - 1}{2\rho} r_1(U_1, \ldots, U_m)^2 \\ \varphi = r_3(U_1, \ldots, U_m) - \dfrac{\rho - 2}{\rho} r_2(U_1, \ldots, U_m) r_1(U_1, \ldots, U_m) \\ \qquad\qquad + \dfrac{(\rho - 1)(\rho - 2)}{3\rho^2} r_1(U_1, \ldots, U_m)^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

so folgt, dass diese Ausdrücke rationale periodische Functionen von $U_1, \ldots, U_m$ mit den Perioden $\mu_1, \ldots, \mu_m$ sein werden.

Nun ergiebt sich aber zunächst aus der Vergleichung von (6) und (7), dass

$$(9)\qquad r_1(U_1 + \mu_1, \ldots, U_m + \mu_m) = r_1(U_1, \ldots, U_m) - \rho B,$$

oder wenn man diese Gleichung nach U_λ differentiirt, worin λ einen beliebigen der Indices $1, 2, \ldots, m$ bedeutet, für die rationale Function

$$(10)\qquad \frac{\partial r_1(U_1, \ldots, U_m)}{\partial U_\lambda} = \rho(U_1, \ldots, U_m)$$

die nothwendig identisch zu befriedigende Gleichung

$$(11)\qquad \rho(U_1 + \mu_1, \ldots, U_m + \mu_m) = \rho(U_1, \ldots, U_m),$$

so dass nur die Form der periodischen rationalen Functionen beliebig vieler Variabeln zu bestimmen bleibt.

Um zunächst die Frage für ganze Functionen zu erörtern, so ist, ohne auf functionentheoretische Betrachtungen einzugehen, unmittelbar ersichtlich, dass eine periodische ganze Function *einer* Variabeln eine Constante sein muss, weil sonst zu einem bestimmten Werthe derselben unendlich viele Argumente gehören würden. Setzt man nun eine ganze periodische Function von zwei Variabeln u_1 und u_2 in die Form

$$g(u_1, u_2) = g_0(u_1)u_2^\lambda + g_1(u_1)u_2^{\lambda-1} + \ldots + g_\lambda(u_1),$$

so folgt aus der Periodicitätsbedingung

$$g(u_1 + \mu_1, u_2 + \mu_2) = g(u_1, u_2),$$

dass $g_0(u_1 + \mu_1) = g_0(u_1)$, also $g_0(u_1)$ gleich einer Constanten c ist, und wenn man nun die ganze periodische Function von u_1 und u_2 bildet

$$h(u_1, u_2) = \frac{c}{a_{22}^\lambda}(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^\lambda,$$

welche, wenn die Constanten a_{12} und a_{22} der Bedingung genügen

$$a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0 \tag{12}$$

das Periodensystem μ_1, μ_2 besitzt, so wird die ganze Function zweier Variabeln

$$g(u_1, u_2) - h(u_1, u_2)$$

wieder dieselben Perioden haben, aber in Bezug auf u_2 nur vom $\lambda - 1^{\text{ten}}$ Grade sein. Erniedrigt man den Grad in Bezug auf u_2 in derselben Weise weiter, bis man zu einer ganzen periodischen Function nur einer Variabeln, also zu einer Constanten gelangt, so erhält man als allgemeinste Form von ganzen periodischen Functionen zweier Variabeln

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2) = A_0(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^\lambda + A_1(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\lambda-1} + \ldots \\ + A_{\lambda-1}(a_{12}u_1 + a_{22}u_2) + A_\lambda. \end{aligned} \tag{13}$$

Ordnet man weiter eine ganze Function der drei Variabeln u_1, u_2, u_3 wieder nach einer dieser Variabeln in der Form

$$g(u_1, u_2, u_3) = g_0(u_1, u_2)u_3^\lambda + g_1(u_1, u_2)u_3^{\lambda-1} + \ldots + g_\lambda(u_1, u_2), \tag{14}$$

so wird wieder, wenn die Periodicitätsgleichung bestehen soll

$$g(u_1 + \mu_1, u_2 + \mu_2, u_3 + \mu_3) = g(u_1, u_2, u_3),$$

die Function $g_0(u_1, u_2)$ der Beziehung

$$g_0(u_1 + \mu_1, u_2 + \mu_2) = g_0(u_1, u_2)$$

genügen müssen und daher nach dem Vorigen die Form haben

$$g_0(u_1, u_2) = B_0(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^\mu + B_1(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\mu-1} + \ldots + B_\mu,$$

wenn $a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0$ ist. Bildet man sodann die mit den Perioden μ_1, μ_2, μ_3 behaftete Function

$$h(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{a_{33}^\lambda} g_0(u_1, u_2)(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3)^\lambda, \tag{15}$$

worin die Constanten a_{13}, a_{23}, a_{33} der Bedingung unterliegen

$$a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2 + a_{33}\mu_3 = 0,$$

so wird die Differenz

$$g(u_1, u_2, u_3) - h(u_1, u_2, u_3)$$

wiederum die Perioden μ_1, μ_2, μ_3 besitzen, aber in Bezug auf u_3 nur vom $\lambda - 1^{\text{ten}}$ Grade sein; die weitere Reduction des Grades in Bezug auf u_3 liefert somit als allgemeinste Form einer periodischen ganzen Function dreier Variabeln

$$(16)\quad g(u_1, u_2, u_3) = \sum^{\rho_1}\sum^{\rho_2} A_{\rho_1\rho_2}(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\rho_1}(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3)^{\rho_2},$$

und es hat somit jede ganze Function von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *mit den Perioden* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ *die Form*

$$(17)\quad g(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$
$$= \sum^{\rho_1}\sum^{\rho_2} \ldots \sum^{\rho_{m-1}} A_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{m-1}}(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\rho_1}(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3)^{\rho_2} \ldots$$
$$(a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \ldots + a_{mm}u_m)^{\rho_{m-1}},$$

worin die Constanten a_{12}, a_{22}, a_{13}, $\ldots$, a_{1m}, $\ldots$, a_{mm} *den Bedingungen unterliegen*

$$(18)\quad a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0, \qquad a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2 + a_{33}\mu_3 = 0, \quad \ldots,$$
$$a_{1m}\mu_1 + a_{2m}\mu_2 + \ldots + a_{mm}\mu_m = 0,$$

und geht somit, wenn

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 = v_1, \qquad a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 = v_2, \quad \ldots,$$
$$a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \ldots + a_{mm}u_m = v_{m-1}$$

gesetzt wird, in eine ganze Function der $m - 1$ *Variabeln* $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ *über.*

Sei die in einer ganzen Function von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vorkommende höchste Potenz von u_1 die λ_1^{te}, die in dem Coefficienten dieser Potenz vorkommende höchste Potenz von u_2 die λ_2^{te}, u. s. w. und nennen wir das so herausgehobene Glied der ganzen Function das höchste Glied derselben, so sieht man unmittelbar, dass die Substitution von

$$u_1 + \mu_1, u_2 + \mu_2, \ldots, u_m + \mu_m \quad \text{für} \quad u_1, u_2, \ldots, u_m$$

das höchste Glied der Function unverändert lässt; es folgt somit, *dass Zähler und Nenner einer rational gebrochenen periodischen Function selbst wieder ganze periodische Functionen sind, und diese daher allgemein die Form besitzt*

$$(19)\qquad r(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$= \frac{\sum_{\rho_1}\sum_{\rho_2}\dots\sum_{\rho_{m-1}} A_{\rho_1\rho_2\dots\rho_{m-1}}(a_{12}u_1+a_{22}u_2)^{\rho_1}(a_{13}u_1+a_{23}u_2+a_{33}u_3)^{\rho_2}\dots(a_{1m}u_1+a_{2m}u_2+\dots+a_{mm}u_m)^{\rho_{m-1}}}{\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\dots\sum_{\sigma_{m-1}} B_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m-1}}(a_{12}u_1+a_{22}u_2)^{\sigma_1}(a_{13}u_1+a_{23}u_2+a_{33}u_3)^{\sigma_2}\dots(a_{1m}u_1+a_{2m}u_2+\dots+a_{mm}u_m)^{\sigma_{m-1}}},$$

worin die Constanten $a_{12}, \dots, a_{mm}$ wieder den Bedingungen (18) *unterliegen.*

Soll nun die rationale Function der Bedingungsgleichung (9)

$$(20)\qquad r_1(U_1+\mu_1, U_2+\mu_2, \dots, U_m+\mu_m) = r_1(U_1, U_2, \dots, U_m) - \rho B$$

unterworfen sein, in welcher ρB eine Constante bedeutet, so wird ihr nach einer der Variabeln U_λ genommener partieller Differentialquotient die Perioden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ haben, und somit nach (19)

$$(21)\qquad \frac{\partial r_1(U_1, U_2 \dots U_m)}{\partial U_\lambda} =$$

$$\frac{\sum_{\rho_1}\sum_{\rho_2}\dots\sum_{\rho_{m-1}} A_{\rho_1\rho_2\dots\rho_{m-1}}(a_{12}U_1+a_{22}U_2)^{\rho_1}(a_{13}U_1+a_{23}U_2+a_{33}U_3)^{\rho_2}\dots(a_{1m}U_1+a_{2m}U_2+\dots+a_{mm}U_m)^{\rho_{m-1}}}{\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\dots\sum_{\sigma_{m-1}} B_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m-1}}(a_{12}U_1+a_{22}U_2)^{\sigma_1}(a_{13}U_1+a_{23}U_2+a_{33}U_3)^{\sigma_2}\dots(a_{1m}U_1+a_{2m}U_2+\dots+a_{mm}U_m)^{\sigma_{m-1}}}$$

sein, und *hieraus ergiebt sich für die allgemeinste Form einer periodischen rationalen Function von $U_1, U_2, \dots, U_m$, welche der Gleichung* (20) *Genüge leistet*

$$(22)\qquad r_1(U_1, U_2, \dots, U_m) =$$

$$\frac{\sum_{\delta_1}\sum_{\delta_2}\dots\sum_{\delta_{m-1}} D_{\delta_1\delta_2\dots\delta_{m-1}}(a_{12}U_1+a_{22}U_2)^{\delta_1}(a_{13}U_1+a_{23}U_2+a_{33}U_3)^{\delta_2}\dots(a_{1m}U_1+a_{2m}U_2+\dots+a_{mm}U_m)^{\delta_{m-1}}}{\sum_{\varepsilon_1}\sum_{\varepsilon_2}\dots\sum_{\varepsilon_{m-1}} E_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{m-1}}(a_{12}U_1+a_{22}U_2)^{\varepsilon_1}(a_{13}U_1+a_{23}U_2+a_{33}U_3)^{\varepsilon_2}\dots(a_{1m}U_1+a_{2m}U_2+\dots+a_{mm}U_m)^{\varepsilon_{m-1}}}$$

$$-\frac{\rho}{\mu_\lambda}BU_\lambda + C.$$

Gehen wir nun zur Bestimmung der allgemeinsten Form der durch die Gleichung (6) *definirten algebraischen Function über, welche der Beziehung* (5) *Genüge leistet*, so wird zunächst vermöge (9) die Form des Coefficienten $r_1(U_1, \dots, U_m)$ durch (22) bestimmt sein, und es werden somit *nach* (8), *da die Ausdrücke φ rationale periodische Functionen von $U_1, U_2, \ldots, U_m$, also in der Form* (19) *darstellbar sind, die sämmtlichen Coefficienten der Gleichung* (6) *die Gestalt annehmen*

$$r_a(U_1, U_2, \ldots, U_m) = R_0 + R_1 U_\lambda + R_2 U_\lambda^2 + \ldots + R_a U_\lambda^a, \tag{23}$$

wenn $R_0, R_1, \ldots, R_a$ rationale periodische Functionen von der durch die Gleichung (19) *gegebenen Form sind.*

Hieraus folgt nun, dass sich unter der oben gemachten Voraussetzung der identischen Beziehung (5) nach (3), wenn für λ in dem Ausdrucke (23) der Index m gewählt wird, v_{m+1} als algebraische Function von

$$a_{12}v_1 + a_{22}v_2, \; a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3, \; \ldots, \; a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \ldots + a_{mm}v_m \text{ und } v_m$$

ergiebt, wenn die Constanten nach Feststellung der oben gewählten Perioden den Bedingungen unterliegen

$$a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0, \qquad a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2 + a_{33}\mu_3 = 0, \quad \ldots,$$
$$a_{1m}\mu_1 + a_{2m}\mu_2 + \ldots + a_{mm}\mu_m = 0,$$

und die Coefficienten der v_{m+1} definirenden algebraischen Gleichung in Bezug auf die explicite vorkommende Grösse v_m von dem Grade ist, den der Index des Coefficienten anzeigt.

Fasst man aber ebenso in der Gleichung (2) v_m als algebraische Function von $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_{m+1}$ auf, so wird sich auch v_m als algebraische Function von

$$a'_{12}v_1 + a'_{22}v_2, \; a'_{13}v_1 + a'_{23}v_2 + a'_{33}v_3, \; \ldots,$$
$$a'_{1m}v_1 + a'_{2m}v_2 + \ldots + a'_{m-1m}v_{m-1} + a'_{mm}v_{m+1} \quad \text{und} \quad v_{m+1}$$

darstellen lassen, worin die Constanten mit den Perioden $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_{m-1}, \mu'_{m+1}$ durch die Gleichungen verbunden sind

$$a'_{12}\mu'_1 + a'_{22}\mu'_2 = 0, \qquad a'_{13}\mu'_1 + a'_{23}\mu'_2 + a'_{33}\mu'_3 = 0, \quad \ldots,$$
$$a'_{1m}\mu'_1 + a'_{2m}\mu'_2 + \ldots + a'_{m-1m}\mu'_{m-1} + a'_{mm}\mu'_{m+1} = 0,$$

und wiederum die Coefficienten der algebraischen Gleichung in v_m in Bezug auf ihren Grad in v_{m+1} durch den Index des Coefficienten bestimmt sind; da nun in der ersten Darstellung v_{m-1} nur mit $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}$ und mit $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, v_m$ additiv mit constanten Coefficienten verbunden vorkommt, während in der zweiten Darstellung v_{m-1} nur mit $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, v_{m+1}$ ebenfalls additiv mit constanten Coefficienten verbunden sich darstellt, und dieselben Überlegungen statthaben für jede der $m+1$ Variabeln $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$, wobei die Coefficienten der die periodischen Functionen definirenden algebraischen Gleichungen die oben angegebene Form besitzen, so sieht man leicht, *da oben vorausgesetzt war, dass zwischen den $m+1$ Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$ nur eine algebraische Relation existiren sollte, dass die Annahme der identischen Beziehung* (5) *nicht statthaft ist, wenn nicht die Beziehung* (3) *die Argumente $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$ nur linear enthält,* in welchem Falle sich in der That nichts über die Eigenschaften der in dem Gleichungsystem (1) enthaltenen Functionen aussagen lässt.

Nachdem die Voraussetzung der Identität der Gleichung (4) erledigt ist, bleibt nur zu untersuchen, was aus der Existenz dieser in den Grössen $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{m1}$ algebraischen Beziehung gefolgert werden kann.

Bezeichnet man mit Berücksichtigung der Bedeutung der Grössen $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{m1}$ diese algebraische Beziehung durch

$$\Omega_{11}\big(A_{11}(t_1), A_{21}(t_1), \ldots, A_{m1}(t_1)\big) = 0$$

und die analog wie oben aus (3) durch Einsetzen von speciellen Werthesystemen von

$$t_1, t_3, \ldots, t_m; \; t_1, t_2, t_4, \ldots, t_m; \; \ldots; \; t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$$

hergeleiteten algebraischen Gleichungen durch

$$\Omega_{12}\big(A_{12}(t_2), A_{22}(t_2), \ldots, A_{2m}(t_2)\big) = 0, \quad \ldots,$$
$$\Omega_{1m}\big(A_{1m}(t_m), A_{2m}(t_m), \ldots, A_{mm}(t_m)\big) = 0,$$

schafft man ferner, ebenso wie früher v_{m+1}, aus der algebraischen Beziehung (2) jetzt $v_m, v_{m-1}, \ldots, v_2$ heraus, so dass sich die Beziehungen

$$\Omega_{21}\big(A_{11}(t_1), A_{21}(t_1), \ldots, A_{m-11}(t_1), A_{m+11}(t_1)\big) = 0, \quad \ldots,$$
$$\Omega_{2m}\big(A_{1m}(t_m), A_{2m}(t_m), \ldots, A_{m-1m}(t_m), A_{m+1m}(t_m)\big) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Omega_{m1}\big(A_{11}(t_1), A_{31}(t_1), \ldots, A_{m1}(t_1), A_{m+11}(t_1)\big) = 0, \quad \ldots,$$
$$\Omega_{mm}\big(A_{1m}(t_m), A_{3m}(t_m), \ldots, A_{m-1m}(t_m), A_{m+1m}(t_m)\big) = 0$$

ergeben, so wird man aus dem Systeme der m offenbar von einander unabhängigen Gleichungen

$$\Omega_{1i}\big(A_{1i}(t_i),\, A_{2i}(t_i),\, A_{3i}(t_i),\, \ldots,\, A_{m-1i}(t_i),\, A_{mi}(t_i)\big) = 0$$
$$\Omega_{2i}\big(A_{1i}(t_i),\, A_{2i}(t_i),\, A_{3i}(t_i),\, \ldots,\, A_{m-1i}(t_i),\, A_{m+1i}(t_i)\big) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Omega_{mi}\big(A_{1i}(t_i),\, A_{3i}(t_i),\, \ldots,\, A_{mi}(t_i),\, A_{m+1i}(t_i)\big) = 0$$

$m - 1$ der $m + 1$ A-Grössen eliminiren und *somit für beliebige k und j eine algebraische Beziehung zwischen $A_{ki}(t_i)$ und $A_{ji}(t_i)$ herleiten können.*

Besteht nun umgekehrt zwischen je zwei Functionen

$$A_{ki}(t_i) \quad \text{und} \quad A_{ji}(t_i)$$

eine algebraische Beziehung, so erhält man m^2 algebraische Gleichungen, welche mit den $m + 1$ Gleichungen (1) zusammengestellt $m^2 + m + 1$ Gleichungen liefern, aus denen die $m(m + 1)$ Grössen

$$A_{1i}(t_i),\, A_{2i}(t_i),\, \ldots,\, A_{m+1i}(t_i) \qquad\qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

unter der Voraussetzung, dass ein und nur ein Zusammenhang zwischen den Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$ identisch für alle $t_1, t_2, \ldots, t_m$ besteht, eliminirt werden können, so dass sich ein algebraischer Zusammenhang von der Form (2) ergiebt.

Der von Lie ausgesprochene Satz lautet demnach folgendermassen:

Wenn sich aus $m + 1$ Gleichungen von der Form

$$(24) \qquad \begin{cases} A_{11}(t_1) + A_{12}(t_2) + \ldots + A_{1m}(t_m) = v_1 \\ A_{21}(t_1) + A_{22}(t_2) + \ldots + A_{2m}(t_m) = v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}(t_1) + A_{m2}(t_2) + \ldots + A_{mm}(t_m) = v_m \\ A_{m+11}(t_1) + A_{m+12}(t_2) + \ldots + A_{m+1m}(t_m) = v_{m+1} \end{cases}$$

nur eine Relation $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$

$$(25) \qquad \Omega(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}) = 0$$

ableiten lässt, so ist diese, wenn sie nicht die Argumente $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$

nur linear enthält, dann und nur dann algebraisch, wenn zwei beliebige Grössen

$$A_{ki}(t_i) \quad \textit{und} \quad A_{ji}(t_i) \quad \textit{für} \quad k, j = 1, 2, \ldots, m+1, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

algebraisch von einander abhängen.

Wir wollen den Satz zum Zwecke der Anwendung desselben noch anders aussprechen:

Wenn für beliebige Argumente $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *und den Functionen dieser Argumente*

$$B_{11}(u_1), B_{21}(u_1), \ldots, B_{m1}(u_1), \quad \ldots, \quad B_{1m}(u_m), B_{2m}(u_m), \ldots, B_{mm}(u_m)$$

eine und nur eine in den Argumenten $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *identische Relation von der Form besteht*

$$(16) \quad \Omega\big(u_1 + u_2 + \ldots + u_m, B_{11}(u_1) + B_{12}(u_2) + \ldots + B_{1m}(u_m), \ldots,$$
$$B_{m1}(u_1) + B_{m2}(u_2) + \ldots + B_{mm}(u_m)\big) = 0,$$

so ist diese dann und nur dann algebraisch, wenn die sämmtlichen B-Functionen algebraische Functionen ihrer Argumente sind, oder dass, wenn diese alle oder nur zum Theil transcendent sind, die Beziehung (26) ebenfalls eine transcendente sein muss, vorausgesetzt, dass die Relation (26) nicht eine in ihren Argumenten lineare ist.

oder endlich,

wenn für die Umkehrungsfunctionen des Systems

$$\begin{array}{l} B_{11}(u_1) + B_{12}(u_2) + \ldots + B_{1m}(u_m) = w_1 \\ B_{21}(u_1) + B_{22}(u_2) + \ldots + B_{2m}(u_m) = w_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{m1}(u_1) + B_{m2}(u_2) + \ldots + B_{mm}(u_m) = w_m, \end{array}$$

welche mit

$$u_1 = \varphi_1(w_1, w_2, \ldots, w_m), \qquad u_2 = \varphi_2(w_1, w_2, \ldots . w_m), \quad \ldots,$$
$$u_m = \varphi_m(w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

bezeichnet werden mögen, eine und nur eine Relation von der Form besteht

$$\Omega\big(w_1, w_2, \ldots, w_m, \varphi_1(w_1, w_2, \ldots, w_m) + \varphi_2(w_1, w_2, \ldots, w_m) + \ldots + \varphi_m(w_1, w_2, \ldots w_m)\big) = 0$$

so ist diese, wieder von dem Falle der linearen Relation abgesehen, dann und nur dann algebraisch, wenn die $B(u_k)$ *selbst algebraische Functionen von* u_k, *also auch die* $\varphi_\lambda(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ *algebraische Functionen ihrer Argumente sind.*

Während Lie die Ausdehnung des algebraischen Additionstheorems auf allgemeine algebraische Beziehungen zwischen Transcendenten im Auge hat, geht Abel in seiner Arbeit[1] »sur les fonctions qui satisfont à l'équation $\varphi(x)+\varphi(y)=\psi\big(xf(y)+yf(x)\big)$« darauf aus, transcendente Beziehungen für das Additionstheorem zu ermitteln, und ich will noch in einigen Worten das, was Abel dort angedeutet, ergänzen, indem ich zunächst die Frage aufwerfe, wie die Functionen φ_1, φ_2 und ψ beschaffen sein müssen, damit

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = \psi\big(F(x, y)\big) \tag{27}$$

ist, worin die Form von $F(x, y)$ nachher näher bestimmt werden soll.

Zunächst darf zur Vereinfachung der Untersuchung angenommen werden, dass $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$ ist, da, wenn dies nicht der Fall ist, und zwei Auflösungen der Gleichungen $\varphi_1(x) = 0$ und $\varphi_2(y) = 0$ mit ξ und η bezeichnet werden, die Substitution von $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$ die Gleichung (27) in die ähnlich gestaltete überführt, für welche $x' = 0$ und $y' = 0$ die Summanden der linken Seite verschwinden lassen. Aus der Beziehung (27) ergiebt sich nunmehr für $y = 0$ resp. $x = 0$

$$\varphi_1(x) = \psi\big(F(x, 0)\big) = \psi(x_1), \qquad \varphi_2(y) = \psi\big(F(0, y)\big) = \psi(y_1),$$

und die Gleichung (27) geht somit in

$$\psi(x_1) + \psi(y_1) = \psi\big(f(x_1, y_1)\big)$$

oder endlich, wenn

$$\psi(x_1) = X, \qquad \psi(y_1) = Y \quad \text{oder} \quad x_1 = \chi(X), \qquad y_1 = \chi(Y)$$

[1] Oeuvres complètes, nouv. édition, tome premier, XVII.

gesetzt wird, in

$$X + Y = \psi f(\chi(X), \chi(Y))$$

oder in

$$\chi(X + Y) = f(\chi(X), \chi(Y))$$

über, worin f eine algebraische oder transcendente Function sein kann.

Nachdem gezeigt worden, dass die Untersuchung der Gleichung (27) stets auf die einer Functionalgleichung von der Form

$$\varphi(x + y) = f(\varphi(x), \varphi(y)) \tag{28}$$

zurückgeführt werden kann, ist unmittelbar ersichtlich, dass es sich um die Ermittlung derjenigen Functionen handelt, welche ein algebraisches oder transcendentes Additionstheorem haben, und es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die zu (27) analogen Functionalgleichungen für Functionen von mehreren unabhängigen Variabeln ebenfalls auf die Untersuchung der entsprechenden Additionstheoreme führen.

Substituirt man für das Additionstheorem (28) gleich das allgemeine Functionaltheorem

$$\psi(\omega(x, y)) = F(\psi(x), \psi(y)), \tag{29}$$

worin $\omega(x, y)$ eine algebraische Function von x und y bedeutet, und bezeichnet φ die inverse Function der ψ-Function, so geht dasselbe über in

$$\varphi(F(x, y)) = \omega(\varphi(x), \varphi(y)), \tag{30}$$

und es ist somit nur dieses zum Geschlechte 1 gehörige Functionaltheorem zu untersuchen, in welchem ω eine algebraische Function der Argumente $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ bedeutet. Für den Fall dass $F(x, y)$ eine algebraische Function von x und y sein soll, habe ich die Frage in meiner Arbeit[1] »*Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines andern Functionaltheorems als des Abel'schen*» beantwortet; soll jedoch F eine transcendente Function bedeuten dürfen, so erhalten wir durch Differentiation von (30) nach x und y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi(x)}\varphi'(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi(y)}\varphi'(y)$$

und hieraus durch Elimination von $\frac{\partial \varphi}{\partial F}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi(y)}\varphi'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi(x)}\varphi'(x). \tag{31}$$

[1] Journal für Mathematik. B. 100 und 101.

Ist nun die algebraische Function ω von $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ durch die irreductible Gleichung definirt

$$(32)\quad \omega^n + r_1(\varphi(x), \varphi(y))\omega^{n-1} + r_2(\varphi(x), \varphi(y))\omega^{n-2} + \ldots + r_n(\varphi(x), \varphi(y)) = 0,$$

worin $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, so lassen sich bekanntlich die partiellen Ableitungen von ω nach $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ genommen in der Form von ganzen Functionen $n - 1^{\text{ten}}$ Grades von ω darstellen mit Coefficienten, die rational aus $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ zusammengesetzt sind, so dass die Gleichung (31) die Gestalt annimmt

$$(33)\quad \frac{\partial F}{\partial x}[\rho_1(\varphi(x), \varphi(y))\omega^{n-1} + \ldots + \rho_n(\varphi(x), \varphi(y))]\varphi'(y)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial y}[\sigma_1(\varphi(x), \varphi(y))\omega^{n-1} + \ldots + \sigma_n(\varphi(x), \varphi(y))]\varphi'(x).$$

Setzt man nun in (32) und (33) $y = 0$ und eliminirt die Function $(\omega)_{y=0}$, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$(34)\quad G\left(\varphi(0), \varphi'(0), \varphi(x), \varphi'(x), \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=0}\right) = 0,$$

worin G eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet. Differentiirt man ferner die Gleichung (33) nach y, eliminirt wiederum ω und setzt $y = 0$, so ergiebt sich

$$(35)\quad G_1\left(\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0), \varphi(x), \varphi'(x), \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{y=0}\right) = 0,$$

worin G_1 wiederum eine ganze Function darstellt, und aus den Gleichungen (34) und (35) wird sich die Bestimmung der gesuchten Functionen ergeben.

Um zunächst nur auf den von Abel für das Additionstheorem zu Grunde gelegten Fall, in welchem

$$F(x, y) = xf(y) + yf(x), \qquad \omega(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist, näher einzugehen, so ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn

$$\varphi'(0) = a, \qquad f(0) = \alpha, \qquad f'(0) = \alpha'$$

gesetzt wird, die Gleichung (33) oder (31) in

$$(36)\quad (f(y) + yf'(x))\varphi'(y) = (f(x) + xf'(y))\varphi'(x)$$

und für $y = 0$ in

$$(37) \qquad \big(f(x) + \alpha' x\big)\varphi'(x) = a\alpha$$

übergeht. Differentiirt man nun (36) nach y, so folgt

$$\big(f(y) + yf'(x)\big)\varphi''(y) + \big(f'(y) + f'(x)\big)\varphi'(y) = xf''(y)\varphi'(x)$$

und für $y = 0$

$$(38) \qquad a\varphi''(0) + \big(\alpha' + f'(x)\big)a = xf''(0)\varphi'(x),$$

welche, wenn aus (37) der Werth von $\varphi'(x)$ und der hieraus durch Differentiation nach x sich ergebende Werth von $\varphi''(0) = -\frac{2\alpha'}{\alpha}a$ eingesetzt und $-\alpha'^2 - \alpha' f''(0)$ mit m bezeichnet wird, in

$$(39) \qquad f'(x)\big(f(x) + \alpha' x\big) + \big(mx - \alpha' f(x)\big) = 0$$

übergeht. Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (11) von Abel überein, und deren Integral liefert, wenn $m = -n^2$ gesetzt wird, die Function $f(x)$ aus der Gleichung

$$\alpha^{2n} = \big(f(x) - nx\big)^{n+\alpha'}\big(f(x) + nx\big)^{n-\alpha'},$$

während $\varphi(x)$ nach (37) durch den Ausdruck gegeben ist

$$\varphi(x) = a\alpha \int \frac{dx}{f(x) + \alpha' x}.$$

Ebenso einfach gestaltet sich der viel allgemeinere Fall, in welchem

$$F(x, y) = xf(y) + y\chi\big(f(x)\big) + y^2\chi_1\big(f(x)\big), \qquad \omega\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist, wie überhaupt durch die Aufstellung der Differentialgleichungen (34), (35) sowie der weiter zu bildenden die Methode zur Herleitung aller zum Geschlechte 1 gehörigen transcendenten Functionaltheoreme für Functionen *einer* Variabeln gegeben ist, und ebenso vollzieht sich die Aufstellung der zum Geschlechte 2 gehörigen, die sich in der Form darstellen

$$G\big(\varphi(F_1(x, y, z)), \varphi(F_2(x, y, z)), \varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)\big) = 0,$$

worin G eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen und F_1, F_2 wiederum transcendente Functionen bedeuten, u. s. w. Sind aber Functionen von mehreren unabhängigen Variabeln gegeben, und soll z. B.

wieder ein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem bestehen welches dann in der Form darzustellen ist

$$G_1\big(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_2(y_1, y_2)\big), \varphi_1\big[F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)\big] = 0$$

$$G_2\big(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_2(y_1, y_2)\big), \varphi_2\big[F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)\big] = 0,$$

worin G_1 und G_2 wiederum ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen, F_1 und F_2 transcendente Functionen bedeuten, so führen ganz analoge Betrachtungen auf die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der gesuchten Functionen.