

ÜBER EINIGE PROBLEME IN DER THEORIE DER ABEL'SCHEN  
FUNCTIONEN

VON

WILHELM WIRTINGER

in INNSBRUCK.

Die vielen Anregungen, welche aus dem nach ABEL benannten Theorem hervorgegangen sind, erstrecken sich auf das ganze Gebiet der heutigen Algebra und Functionentheorie und, in Verbindung damit, auch der Geometrie und anderer Zweige der mathematischen Wissenschaften. Und doch ist die Bedeutung dieses Satzes noch nicht erschöpft. Ja es scheint, dass wir erst an denjenigen Functionen von mehr als einer Variablen, die uns allein genauer bekannt sind, den ABEL'schen, die Gesichtspunkte und Methoden inductiv erkennen müssen, welche uns den Weg zu einer ebenso eingehenden Erkenntniss dieser Gegenstände der Analysis zeigen, wie wir sie für eine Variable besitzen.

Schon JACOBI hatte bemerkt, dass die zur Darstellung der ABEL'schen Functionen führenden Thetareihen von selbst auf allgemeinere mehrfach periodische Functionen führen, als sie durch die Lösung des nach ihm benannten Umkehrproblems gegeben werden. RIEMANN und WEIERSTRASS haben die Theorie der so erklärten mehrfach periodischen Functionen eingehenden Studien unterworfen, jedoch leider nur einige wenige grundlegende Sätze, ohne Beweis veröffentlicht. Nur der Satz, dass eine endlichvieldeutige analytische Function von  $n$  Variablen nicht mehr als  $2n$  unabhängige Periodensysteme haben kann, ist auch mit seinem Beweis uns von beiden Forschern überliefert.

Über die Beziehungen dieser allgemeinen Functionen zur Theorie der algebraischen besitzen wir von WEIERSTRASS nur die kurzen Andeutungen

in den Berliner Berichten von 1869. Gerade diese Fragen aber waren es, die der Gegenstand meiner Bemühungen gewesen sind. Die Resultate, welche ich erreicht habe, geben für sich einen gewissen Abschluss und ich rechne es mir zur Ehre an, dass sie sich in einigen Punkten mit den auf ganz verschiedenem Wege erlangten eines so ausgezeichneten Mathematikers, wie Herrn POINCARÉ, berühren. Sie ergeben aber auch neue Gesichtspunkte für die überlieferte Theorie der ABEL'schen Functionen von 2, 3, 4 Variablen, sowie überhaupt neue Problemstellungen für die zu einem algebraischen Gebilde erster Stufe gehörigen ABEL'schen Functionen und Integrale.

Da aber diese Untersuchungen zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Stellen nicht immer unter ausdrücklicher Betonung des innern Zusammenhanges publiciert sind, so glaubte ich der ehrenden Einladung des Herrn Herausgebers folgen zu dürfen, eine Übersicht derselben an dieser dem Andenken ABEL's gewidmeten Stelle vorzulegen. Ich bin dabei auch nach zwei Richtungen weiter gegangen, und habe zwei Probleme näher erörtert, bei denen ich über die Problemstellung nicht hinausgekommen bin, die mir aber bei der grossen Schwierigkeit und Bedeutung, welche ihnen innewohnt, doch nicht ohne Interesse zu sein scheinen.

### 1. *Die allgemeinen $2n$ -fach periodischen Functionen von $n$ Variablen.*

Den Ausgangspunkt der Theorie der eindeutigen  $2n$ -fach periodischen Functionen bilden die folgenden drei Sätze:

1) Sollen überhaupt solche Functionen existieren, welche im Endlichen durchaus den Charakter von rationalen haben, so müssen zwischen den Perioden gewisse Bilinearrelationen bestehen, deren Coefficienten ganze Zahlen sind.

2) Zwischen  $n + 1$  solchen Functionen besteht dann eine algebraische Gleichung.

3) Alle Functionen dieser Art mit demselben Periodensystem sind rational durch geeignete  $n + 1$  unter ihnen darstellbar.

Von den beiden ersten Sätzen ist jeder eine unmittelbare Folge des andern und diesen Zusammenhang haben PICARD und POINCARÉ auseinandergesetzt. Die Beweise von APPELL für zwei Variable und der spätere von POINCARÉ fussen wesentlich auf der Theorie der eindeutigen Functionen

mehrerer Variablen. Ich selbst suchte den Beweis zu gewinnen, indem ich von vornherein die Beziehungen zur Theorie der ABEL'schen Integrale an die Spitze stelle, und bewies, *dass wenn auch nur eine einzige solche Function existirt, welche im endlichen durchaus den Charakter einer rationalen hat, dass es dann auch immer unendlich viele algebraische Gebilde erster Stufe giebt, unter deren Integralen erster Gattung sich  $n$  linear unabhängige befinden, deren Perioden sich aus den vorgelegten Perioden linear und ganzzahlig zusammensetzen lassen.*<sup>1</sup> Aus der Bilinearrelation zwischen den Perioden der ABEL'schen Integrale folgt dann sofort die Existenz einer Bilinearrelation zwischen den vorgelegten Perioden und aus der Substitution von Summen von  $n$  solchen Integralen in die  $2n$ -fach periodischen Functionen deren Darstellbarkeit als algebraische, symmetrische Functionen von  $n$  Veränderlichen, und damit der zweite Satz. Dass man umgekehrt aus dem Erfülltsein der Bilinearrelationen und einer zugehörigen Ungleichung auf die Existenz von  $2n$ -fach periodischen Functionen der verlangten Beschaffenheit schliessen darf, geht dann aus den Untersuchungen von FROBENIUS<sup>2</sup> über allgemeine JACOBI'sche Functionen hervor.

Die Methode der Beweisführung hat sich dann auch später bei der Herleitung ähnlicher Sätze für die automorphen Functionen mehrerer Variablen<sup>3</sup> erfolgreich gezeigt, und ist auch noch weiterer Anwendungen fähig.

## 2. Die Bilinearrelationen vom Standpunkt einer allgemeinen Theorie der Functionen mehrerer Variablen.

Es ist nun nöthig auf den Inhalt der Bilinearrelationen näher einzugehen. Seien  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  die  $n$  Variablen, und seien die  $2n$  Perioden der Variablen  $x_i$  bezeichnet mit  $\omega_{ik}$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Die in Rede stehenden Relationen,  $\frac{n(n-1)}{2}$  an der Zahl, lauten dann

$$(I) \quad \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} (\omega_{i\alpha} \omega_{h\beta} - \omega_{i\beta} \omega_{h\alpha}) = 0 \quad (\alpha > \beta; \alpha, \beta = 1 \dots 2n)$$

wo die  $c_{\alpha, \beta}$  ganze Zahlen bedeuten. Ich habe in der angeführten Ab-

<sup>1</sup> Wiener Monatshefte, II, 1895.

<sup>2</sup> Journal für Mathematik, Bd. 97, 1884.

<sup>3</sup> Wiener Sitz. ber. 1899. Abt. II a. November.

handlung gezeigt, dass man die zugehörigen Functionen algebraisch auf solche zurückführen kann, für welche die Bilinearrelationen dieselbe Gestalt wie in der Theorie der ABEL'schen Integrale haben, nämlich

$$(2) \quad \sum_{a=1}^n (\omega_{ia} \omega_{h, n+a} - \omega_{ha} \omega_{i, n+a}) = 0$$

und wir wollen daher die folgenden Betrachtungen an diese Form der Relationen knüpfen.

Spaltet man die Variablen und die Perioden in ihre reellen und imaginären Bestandtheile und setzt also

$$x_h = y_{2h-1} + iy_{2h}, \quad \omega_{h,k} = \eta_{2h-1,k} + i\eta_{2h,k}$$

so kann man die  $2n$  Grössen  $y$  als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten eines Punktes im Raum von  $2n$  Dimensionen auffassen. Der Gesamtheit der Grössen

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \eta_{l,k} \quad (l = 1 \dots 2n, 0 \leq \lambda_k < 1)$$

entspricht dann ein  $2n$ -fach ausgedehntes Gebiet, welches dem Periodenparallelogramm in der Theorie der elliptischen Functionen völlig analog ist und als Periodenparallelotop bezeichnet werden soll.

Jedes Werthesystem der  $y$  ist dann einem und nur einem Werthesystem im Innern oder an der Grenze dieses Parallelotopes nach den Perioden congruent. Die Bilinearrelationen sagen dann aus, dass ein solches Parallelotop durchaus nicht willkürlich angenommen werden darf, wenn es zugehörige  $2n$ -fach periodische Functionen der hier betrachteten Art geben soll. Würde man also im Sinne der RIEMANN'schen Functionentheorie ein solches Parallelotop als Fundamentalbereich auffassen wollen, so wären dazu nur solche Parallelotope brauchbar, welche bestimmten Relationen arithmetischen Charakters, eben den Relationen 1) oder 2) genügen würden. Dieser Umstand ist nun äusserst überraschend, und würde, wenn diese Erscheinung nicht auch unter einem andern Gesichtspunkt aufgefasst werden könnte, jede Hoffnung, die schöne und weittragende Auffassung RIEMANN's auf mehr als eine Variable zu übertragen, gänzlich zerstören. In der That, wir würden dann zu erwarten haben, dass jedesmal, wo wir vor einem Fundamentalbereich stehen, es von erst zu erforschenden arithmetischen Eigenschaften desselben abhängen würde, ob überhaupt zu diesem Bereich

gehörige Functionen existiren. Aber auch nach anderer Richtung wäre das Ergebnis dieser Überlegung entmuthigend. Die schöne und fruchtbare Verbindung zwischen elliptischen Functionen und quadratischen Formen, die ihren augenfälligen Ausdruck in der doppelten Auffassung eines parallelogrammatischen Punktgitters als eines Systems von Periodenparallelogrammen und als Repräsentant einer bestimmten Classe von quadratischen Formen findet, würde für mehr als eine Variable nur bei ganz beschränkten Formenclassen und für ganz beschränkte Parallelotope möglich sein.

Man kann der Ansicht sein, dass diese Gründe hinreichend sind, um die erwähnten Auffassungen, welche im Gebiete einer Variablen sich so fruchtbar gezeigt haben, zu verlassen und diese wenigstens für das Gebiet von mehr Variablen nicht mehr als naturgemäss anzusehen. Aber eine genauere Überlegung zeigt, dass noch ein Ausweg möglich ist. Bedenkt man nämlich, dass bei Angabe eines Fundamentalbereiches im Gebiete einer Variablen auch noch eine Massbestimmung gegeben sein muss, um für diesen Bereich die partiellen Differentialgleichungen der reellen und imaginären Theile der zugehörigen Functionen aufzustellen und zu discutiren, und sucht man diesen Gesichtspunkt auf mehr als eine Variable zu übertragen, so bemerkt man sofort, dass eine Massbestimmung allein, wie sie durch Zuordnung einer quadratischen Differentialform gegeben wird, nicht ausreicht, sondern dass noch weitere Angaben hinzutreten müssen, deren allgemeine analytische Formulirung mir vielleicht bei anderer Gelegenheit auseinanderzusetzen vergönnt ist. Im vorliegenden Fall lassen sich dieselben einfach und direct bezeichnen. Wenn nämlich einzig und allein ein Parallelotop gegeben ist mit einer gewöhnlichen euclidischen Massbestimmung, so ist dadurch noch in keiner Weise gesagt, welche Richtungen gerade diejenigen Coordinatenaxen haben müssen, welche wir zur Beziehung des Bereiches auf den  $2n$ -fach ausgedehnten Bereich von  $n$  complexen Veränderlichen wählen müssen, und wenn auch diese gegeben sind, in welcher Weise wir sie zu Paaren vereinigen müssen um complexe Variable zu bekommen. Im Gebiete einer complexen Variablen tritt diese Frage desshalb zurück, weil hier jede orthogonale Transformation des Coordinatensystems auch zu einer von der erstgewählten linear analytisch abhängigen Variablen führt. Das ist nun bei mehreren complexen Variablen keineswegs der Fall. Ist also irgend ein Parallelotop gegeben, mit gewöhnlicher euclidischer Massbestimmung, also analytisch durch Beziehung auf ein bestimmtes gewöhnliches Car-

tesisches Coordinatensystem, so entsteht die Frage ob man nicht durch passende Wahl eines andern Coordinatensystems das Parallelotop so darstellen kann, dass, wenn dieses neue System zur Beziehung der Punkte des Parallelotops auf das periodisch sich wiederholende Gebiet von  $n$  complexen Veränderlichen benützt wird, dieses letztere dann die Bilinearrelationen erfüllt. Das ist aber in der That möglich, wie sogleich gezeigt werden soll.

Bezeichnen wir nämlich wie früher mit  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  die  $n$  complexen Veränderlichen, zerlegen jede in ihren reellen und imaginären Bestandtheil, und verfahren ebenso mit den Perioden, so kommt unsere Frage darauf hinaus, eine orthogonale Substitution  $(\alpha_{\lambda\mu})$  in den  $y$  anzugeben, so dass die transformirten Grössen

$$(1) \quad \begin{aligned} y'_k &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_{k\lambda} y_\lambda, \\ \eta'_{\mu k} &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_{\mu\lambda} \eta_{\lambda k}, \quad \omega'_{hk} = \eta'_{2h-1, k} + i\eta'_{2h, k} = \sum_{\lambda=1}^{2n} (\alpha_{2h-1, \lambda} + i\alpha_{2h, \lambda}) \eta_{\lambda k} \end{aligned}$$

die Relationen

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n (\omega'_{\gamma, k} \omega'_{\delta, n+k} - \omega'_{\delta k} \omega'_{\gamma, n+k}) = 0$$

erfüllen.

Setzt man die Werte aus (1) in (2) ein, so erhält man

$$(3) \quad \sum_{\mu=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\alpha_{2\gamma-1, \lambda} + i\alpha_{2\gamma, \lambda})(\alpha_{2\delta-1, \mu} + i\alpha_{2\delta, \mu}) \sum_{k=1}^n (\eta_{\lambda, k} \eta_{\mu, n+k} - \eta_{\mu, k} \eta_{\lambda, n+k}) = 0.$$

Oder wenn man die Bezeichnung einführt:

$$\sum_{k=1}^n (\eta_{\lambda k} \eta_{\mu, n+k} - \eta_{\mu, k} \eta_{\lambda, n+k}) = p_{\lambda, \mu} = -p_{\mu, \lambda}$$

und (3) in den reellen und imaginären Theil spaltet:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} (\alpha_{2\gamma-1, \lambda} \alpha_{2\delta-1, \mu} - \alpha_{2\delta, \mu} \alpha_{2\gamma, \lambda}) p_{\lambda, \mu} &= 0, \\ \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} (\alpha_{2\gamma-1, \lambda} \alpha_{2\delta, \mu} + \alpha_{2\gamma, \lambda} \alpha_{2\delta-1, \mu}) p_{\lambda, \mu} &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$(5) \quad \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} \alpha_{h\lambda} \alpha_{k\mu} p_{\lambda\mu} = P_{h, k} = -P_{k, h}$$

so besagen die Gleichungen (4)

$$(6) \quad \begin{aligned} P_{2\gamma-1, 2\delta-1} &= P_{\gamma, 2\delta}, \\ P_{2\gamma-1, 2\delta} &= -P_{2\gamma, 2\delta-1}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man daher mit  $X_h, Y_k$  zwei Reihen cogredienter Variabler und setzt

$$(7) \quad U_\lambda = \sum_{h=1}^{2n} X_h \alpha_{h\lambda}, \quad V_\mu = \sum_{k=1}^{2n} Y_k \alpha_{k\mu}$$

so ergeben die Gleichungen (5) nach Multiplication mit  $X_h Y_k$  und Summation über alle Werte  $h, k$

$$(8) \quad \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} p_{\lambda, \mu} U_\lambda V_\mu = \sum_{h, k=1}^{2n} P_{h, k} X_h Y_k.$$

Wenn es also gelingt, die durch die  $p_{\lambda, \mu}$  gegebene alternirende Bilinearform links in (8) durch eine orthogonale Transformation in die rechte Seite überzuführen, wobei die  $P_{h, k}$  an die Bedingungen (6) gebunden sind, so ist das System der Coefficienten dieser Substitution ( $\alpha_{\lambda, \mu}$ ) ein solches, welches das ursprüngliche Coordinatensystem in ein neues überführt, und auf dieses System bezogen, also auf die complexen Veränderlichen  $y'_{2h-1} + iy'_{2h}$ , hat dann unser gegebenes Parallelotop die Eigenschaft, die Bilinearrelationen zu erfüllen, und bestimmt daher ein System  $2n$ -fach periodischer Functionen.

Eine solche orthogonale Substitution giebt es aber immer, denn wir können die Bilinearform links in (8) durch eine orthogonale Transformation auf ihre Normalform bringen<sup>1</sup> und diese schreiben

$$(9) \quad \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} p_{\lambda, \mu} U_\lambda V_\mu = \sum_{\gamma=1}^n (X_{2\gamma-1} Y_{2\gamma} - X_{2\gamma} Y_{2\gamma-1}) a_\gamma.$$

Die Relationen (6) sind hier erfüllt, es giebt also eine orthogonale Substitution von der verlangten Beschaffenheit.

*Man kann also ein beliebig gegebenes Parallelotop als Fundamentalbereich eines Systems  $2n$ -fach periodischer Functionen auffassen, wenn man nur die*

<sup>1</sup> R. LIPSCHITZ, Berl. Ber. 1890, 1. pg 514 ff. Die dort benutzten Grössen  $\beta_m^{(i)}$  sind complex ebenso wie die Variablen  $\eta_i, \zeta_{-i}$ . Doch giebt eine einfache Rechnung, dass man auch nach Zerlegung in den reellen und imaginären Bestandtheil sowohl der  $\beta_m^{(i)}$  als auch der  $\eta, \zeta$  eine reelle orthogonale Substitution erhält.

*complexen Variablen entsprechend darin orientirt, und zwar ohne an der Massbestimmung des Gebietes etwas zu ändern.*

Ob es möglich ist, diese Wahl der complexen Variablen noch auf von der angegebenen wesentlich verschiedene Arten zu treffen, oder ob alle diese durch lineare Transformation der complexen Variablen aus einander hervorgehen ist eine sehr interessante Frage, ebenso welche Beziehungen eventuell zwischen den zu einem und demselben Parallelotop gehörigen Functionen bestehen. Damit ist auch gezeigt, dass man einer definiten quadratischen Form immer wenigstens ein System  $2n$ -fach periodischer Functionen zuordnen kann, wenn man eine solche Form als ein Punktgitter interpretirt, natürlich bei gerader Anzahl der Variablen der Form.

### 3. Die mehrdeutigen Umkehrprobleme.

Sei nun  $G$  eines von den unendlich vielen algebraischen Gebilden erster Stufe, auf welchen  $n$  Integrale erster Gattung existieren, so beschaffen, dass die Perioden derselben auf dem Gebilde  $G$  linear und homogen aus den Perioden  $\omega_{ik}$  zusammengesetzt werden können, so wird  $G$  im allgemeinen von höherem Geschlechte als  $n$  sein, die Integrale auf  $G$  daher mehr als  $2n$  linearunabhängige Periodenwege besitzen, und ausser den genannten Integralen erster Gattung werden noch andere auf dem Gebilde vorhanden sein.

Drückt man nun in den RIEMANN'schen Bilinearrelationen die Integralperioden durch die Perioden des vorgegebenen Systems  $2n$ -fach periodischer Functionen aus, so erhält man bei geeigneter Wahl dieser letzteren die Bilinearrelationen in der Gestalt:

$$(10) \quad N \sum_{a=1}^n d_a (\omega_{\lambda, a} \omega_{\mu, n+a} - \omega_{\mu, a} \omega_{\lambda, n+a}) = 0$$

wo  $N$  einen gemeinsamen Theiler bedeutet, der für das folgende von Bedeutung ist, und jede der ganzen positiven Zahlen  $d_a$  durch die folgende theilbar ist. Man hat dann die Bilinearform in ihrer Normalform vor sich. Bezeichnet man die benützten Integrale erster Gattung mit  $t_a$  so kann man die Congruenzen ansetzen

$$(11) \quad \sum_{v=1}^n \int^{z_v} dt_a \equiv x_a \pmod{\omega_{a,1}, \dots, \omega_{a,2n}}$$



und sieht sogleich, dass diese im allgemeinen d. h. bei frei veränderlichen  $x_n$  nur durch eine endliche Anzahl von Werthsystemen der  $z_1 \dots z_n$  befriedigt werden, da ja die  $2n$ -fach periodischen Functionen algebraische Functionen der  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  sind und unter diesen gewiss  $n$  solche vorhanden sind, deren Functionaldeterminante nicht verschwindet. Man hat also hier eine Verallgemeinerung des JACOBI'schen Umkehrproblems vor sich, welche zwar nur auf besonderen Gebilden möglich ist, nicht alle Integrale erster Gattung heranzieht, aber im allgemeinen mehrdeutig ist. Wie viele Lösungssysteme nach den  $z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_n$  hat nun das System von Congruenzen (11)?

Ich habe die Anzahl  $L$  der Lösungen bestimmt,<sup>1</sup> indem ich untersuchte, wie oft das fundamentale Parallelotop von den  $x_1, x_2, \dots, x_n$  überdeckt wird, wenn die  $z_1, z_2, \dots, z_n$  unabhängig von einander das Gebilde  $G$  durchlaufen, und fand

$$(12) \quad L = N^n d_1 d_2 \dots d_n.$$

Aber damit ist erst der erste Schritt für das Studium dieses Umkehrproblems gethan. Die nächste Frage wäre die nach dem Affect der in Frage kommenden Gleichung von dem in (12) angegebenen Grade.

Soll nun das Umkehrproblem eindeutig sein, so muss sowohl  $N$  als auch jedes  $d$  den Wert eins haben. Dann aber ergibt sich in Verbindung mit einem Satz, den ich an anderer Stelle bewiesen habe, dass dann das Umkehrproblem nothwendig ein JACOBI'sches oder einer seiner Grenzfälle ist.

#### 4. *Jacobi'sche Functionen und ihr Verhalten auf Gebilden $G$ .*

Unter einer JACOBI'schen Function der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  verstehen wir mit FROBENIUS eine ganze Function dieser Variablen, deren Logarithmus bei Vermehrung der  $x$  um ein System simultaner Perioden sich um eine lineare Function der  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ändert. Durch geeignete Wahl der Variablen und der Perioden kann man ohne der Allgemein-

<sup>1</sup> Wiener Monatshefte, Bd. VII, pag. 20.

heit Abbruch zu thun, dieses Verhalten durch eine Gleichung von der Gestalt:

$$(13) \quad \log \psi \left( x_a + \sum_{\beta=1}^n (a_{\beta} \varepsilon_{a\beta} + a_{n+\beta} \tau_{a\beta}) \right) \\ = -R \left( \sum_{\alpha=1}^n a_{n+\alpha} \left( x_a + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^n a_{n+\beta} \tau_{a\beta} \right) \right) + \log \psi(x_a)$$

ausdrücken. Hier bedeutet  $R$  eine ganze Zahl, die Ordnung der JACOBI'schen Function, und es ist  $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$  ( $\alpha \neq \beta$ ),  $\varepsilon_{\alpha,\alpha} = d_a^{-1}$ . Dabei ist  $R$  durch jede der Zahlen  $d_a$  theilbar. Diese Functionen lassen sich auch durch Thetareihen mit  $R^{\text{tel}}$  Charakteristiken ausdrücken und es giebt  $R^n \prod_{\alpha=1}^n d_a^{-1}$  linearunabhängige Functionen dieser Art, durch welche sich alle der Functionalgleichung (13) genügenden ganzen Functionen linear und homogen mit constanten Coefficienten darstellen lassen.

Man kann nun einzelne solcher Functionen und auch ganze Systeme auf ihr Verhalten auf einem Gebilde  $G$  untersuchen, nachdem man vorher für die  $x_a$  Summen von Integralen  $t_a$  eingesetzt hat. Das wichtigste Hilfsmittel ist dabei die Ausführung der Integration über das logarithmische Differential JACOBI'scher Functionen oder Producte von solchen über die ganze Begrenzung des durch Querschnitte in ein einfach zusammenhängendes verwandelten Gebildes  $G$ , wie es von RIEMANN für die Theta eines algebraischen Gebildes und ein einzelnes Integral geschehen ist.

Das allgemeinste Resultat, zu welchem ich am angeführten Orte dabei gelangt bin, ist folgendes:

*Werden in einem System von  $s$  Jacobischen Functionen  $\phi_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) mit den Ordnungszahlen  $R_k$  in die ersten  $r$  derselben für die  $x$  die Ausdrücke substituirt*

$$x_a = \sum_{\rho=1}^{s-1} \int^{z_{\rho}} dt_a - e_{a,k} \quad (k=1, \dots, r)$$

*in die übrigen  $s - r$  dagegen*

$$x_a = \sum_{\rho=1}^{s-1} \int^{z_{\rho}} dt_a + \int^{z_s} dt_a - e_{a,k} \quad (k=r+1, r+2, \dots, s)$$

so hat das Gleichungssystem, welches entsteht, wenn man alle diese Jacobi'schen Functionen gleich Null setzt, nach  $z$ , im allgemeinen

$$(3) \quad R_1 R_2 \dots R_s N^s \frac{|n}{n-s+1} (s-r)(n-s+r+1)$$

Lösungen.

Ferner ist bis auf einen von den  $e_{a,k}$  unabhängigen Summanden

$$(14) \quad \sum_{\sigma} \int_{\sigma}^{z_{\sigma}} dt_a$$

$$= - R_1 R_2 \dots R_s N^s \frac{s|n-1}{n-s+1} \left\{ (s-r) \sum_{k=1}^r e_{ak} - (n-s+r+1) \sum_{r+1}^s e_{a,k} \right\}$$

wo die Summe links über alle Lösungen des Gleichungssystems nach  $z$  zu erstrecken ist.

Dieser Satz enthält die von Herrn POINCARÉ aufgestellten Sätze über die Lösung solcher Gleichungssysteme als Specialfall und liefert für  $r = 0$  im Zusammenhang mit der früher bestimmten Anzahl für die Lösungen des vorher besprochenen mehrdeutigen Umkehrproblems auch den Satz, das ein System von  $n$  JACOBI'schen Gleichungen  $\phi_k(x_a - e_{a,k}) = 0$  für die  $x_a$  im allgemeinen

$$(15) \quad R_1 R_2 \dots R_n |n(d_1 d_2 \dots d_n)^{-1}$$

Lösungen hat, zwischen welchen die Relationen

$$(16) \quad \sum_h x_a^{(h)} = R_1 R_2 R_3 \dots R_n (d_1 d_2 \dots d_n)^{-1} |n-1 \sum_{k=1}^n e_{a,k} + T'_a$$

bestehen.

Die Beweismethoden sind hier von denen des Herrn POINCARÉ gänzlich verschieden, da sie auf directer Bestimmung und nicht auf einem Schluss vom Besonderen auf Allgemeines beruhen.

### 5. Die Thetafunctionen und die verallgemeinerte Kummer'sche Fläche.

Der grosse Reichthum an Beziehungen und Formeln, welche zwischen den als Thetafunctionen bezeichneten Reihen besteht, insbesondere aber der

Umstand, dass gerade diese Functionen in der Theorie der JACOBI'schen Umkehrprobleme auftreten, und die allgemeinsten  $2n$ -fach periodischen Functionen rational durch diese Reihen ausgedrückt werden können, hat das Interesse der Mathematiker immer gerade auf diese Functionen besonders hingelenkt. Insbesondere waren es die  $2n$  Thetafunctionen

$$(17) \quad \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g_1, g_2, \dots, g_n \\ h_1, h_2, \dots, h_n \end{smallmatrix} \right|} (v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n = -\infty, +\infty} e^{\pi i \sum_{i,k}^{1 \dots n} \tau_{ik} \left( m_i + \frac{g_i}{2} \right) \left( m_k + \frac{g_k}{2} \right) + 2\pi i \sum_{i=1}^n \left( v_i + \frac{h_i}{2} \right) \left( m_i + \frac{g_i}{2} \right)},$$

die eingehenden Untersuchungen auf die verschiedenen Verbindungen und Formeln zwischen ihnen unterworfen wurden. Dabei bezeichnen  $g_i, h_i$ , die Zahlen  $0, 1$ , und das System dieser  $2n$  Zahlen soll in der Folge kurz mit  $\varepsilon$  bezeichnet werden, die Function selbst aber mit  $\vartheta_\varepsilon(v_i)$ .

Die Quadrate dieser Functionen sind nach bekannten Sätzen sämtlich durch  $2n$  unter ihnen linear darstellbar. Für  $n = 2$  war es seit langem bekannt, dass man die KUMMER'sche Fläche erhalte, wenn man vier passend gewählte Quadrate von Thetafunctionen den homogenen Punktcoordinaten des Raumes von drei Dimensionen proportional setzte und nun die  $v_1, v_2$  alle Werthe innerhalb des Periodenparallelotops durchlaufen liess. Dabei wurde die KUMMER'sche Fläche doppelt überdeckt. KLEIN hat diese und andere damit zusammenhängende Darstellungen vielfach mit der Theorie der hyperelliptischen Functionen in Zusammenhang gebracht, aber er hatte auch in Vorlesungen bereits dasjenige Gebilde in Betracht gezogen, welches entsteht, wenn man die homogenen Punktcoordinaten eines Raumes von  $2^n - 1$  Dimensionen proportional setzt den  $2^n$  linearunabhängigen Quadraten von Thetafunctionen und die Ordnung des so definirten Gebildes bestimmt. Auf eine genauere Untersuchung dieses Gebildes wurde ich von ihm seinerzeit hingewiesen. Diese ergab, dass die merkwürdigen Sätze über Collineationen und Correlationen, welche die KUMMER'sche Fläche in sich überführen, auch auf dieses allgemeinere Gebilde sich ausdehnen lassen, und dass man es hier wie dort mit einer den  $2^{2^n}$  Thetafunctionen in bestimmter Weise zugeordneten Configuration von  $2^{2^n}$  Punkten, deren jeder ein  $2^{n-1}$ -facher Punkt des Gebildes, und  $2^{2^n}$  linearen  $R_{2^n-2}$ , deren jeder  $2^{n-1}(2^n - 1)$  Punkte der Configuration enthält, zu thun habe.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Wiener Monatshefte, I, 1890. Dort auch weitere Nachweisungen über die im vorigen gestreifte Literatur für  $n = 3$ : Göttinger Nachrichten, 1889.

Dieses Gebilde, welches ich später als  $M_n^q$  bezeichnet habe, erscheint als der der Untersuchung zugänglichste Repräsentant der algebraischen Relationen zwischen den Thetafunctionen. Die Gesammtheit der algebraischen Relationen zwischen den linearunabhängigen Thetaquadraten kann als ein Modul im Sinne DEDEKIND's aufgefasst werden.

Ich bin nun, indem ich HILBERT's<sup>1</sup> charakteristische Function des Moduls heranzog, zu den folgenden Resultaten gelangt:<sup>2</sup>

1) Die Ordnung des Gebildes ist  $q = \lfloor n 2^{n-1} \rfloor$ .

Dies war schon früher auf Grund der POINCARÉ'schen Sätze von KLEIN angegeben, wird aber hier auf Grund der Relationen zwischen den Theta, also eigentlich des HERMITE'schen Satzes von der Anzahl linearunabhängiger Theta einer bestimmten Ordnung aufs neue bewiesen. Es folgt übrigens auch aus (15).

2) Das Geschlecht eines vollständigen Schnittes der  $M_n^q$  mit  $n - 1$  Mannigfaltigkeiten von  $2^n - 2$  Dimensionen und den Ordnungszahlen  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$  ist im allgemeinen, d. h. bei frei veränderlichen Coefficienten der Gleichungen dieser Mannigfaltigkeiten  $p = q_1 q_2 \dots q_{n-1} \binom{n-1}{\sum_{i=1}^{n-1} q_i} \lfloor n 2^{n-2} \rfloor + 1$ .

3) Die Mannigfaltigkeit  $M_n^q$  ist durch die Relationen vierten Grades zwischen den Thetaquadraten vollständig und ohne etwaigen Restschnitt definiert.

An anderer Stelle<sup>3</sup> habe ich die das Geschlecht betreffende Zahl auf einem ganz andern Wege abgeleitet, nämlich durch directe Aufstellung der zu einer solchen Curve gehörigen Integrale erster Gattung.

Damit war eine bestimmte algebraische Grundlage für die Untersuchung der  $M_n^q$  gewonnen, und wir kommen später noch auf ihre Verwerthung für die allgemeine Theorie der Thetafunctionen zurück.

## 6. Der Modul der Relationen zwischen den Functionen $\vartheta_\varepsilon(\mathcal{O}, \tau_{ik})$ .

Viel schwieriger, aber eben deshalb nicht weniger wichtig wäre es nun auch die algebraischen Relationen zu untersuchen, welche zwischen den

<sup>1</sup> Math. Annalen, 36.

<sup>2</sup> Untersuchungen über allgemeine Thetafunctionen, Leipzig, Teubner 1895.

<sup>3</sup> l. c. § 27.

Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente bestehen. Hier wären eben die Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Modulfunctionen zu schaffen. Ich bin nun allerdings hier nicht zu abschliessenden Resultaten gelangt, aber in Anbetracht der Schwierigkeit des Gegenstandes möge man entschuldigen, wenn ich den Ansatz hier widergebe, den ich im Jahre 1895 Herrn MINKOWSKI brieflich mitgetheilt habe, weil derselbe die Zurückführung der Hauptfrage auf ein Problem der Zahlentheorie giebt, und da eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung gewisser von JACOBI in der Theorie der binären quadratischen Formen und der Darstellung von Zahlen als Summen von Quadraten gestellter und gelöster Probleme aufweist.

Die Verhältnisse der Nullwerthe der geraden Theta von  $n$  Variablen lassen sich sämmtlich als algebraische Functionen von Parametern darstellen, zwischen welchen entweder gar keine oder nur algebraische Relationen bestehen.<sup>1</sup> Die Gesammtheit dieser Relationen zwischen den Thetanullwerthen welche man als durch Nullsetzen ganzer rationaler homogener Functionen derselben ausgedrückt denken kann, bilden daher einen Modul und dieser wird zugleich dasjenige Gebilde definiren, welches entsteht, wenn wir in den  $\vartheta_i(\circ, \tau_{ik})$  die  $\tau_{ik}$  alle mit den Convergenzbedingungen der Thetareihen verträglichen Werthe annehmen lassen. Ja, dieses Gebilde wird dabei sogar unendlich oft überdeckt, indem diejenigen linearen Transformationen der  $\tau_{ik}$  welche mod. 2 der Identität congruent sind, die einzelnen Theta im wesentlichen ungeändert lassen. Werthsysteme der  $\tau_{ik}$ , welche durch eine solche Transformation auseinander hervorgehen, sollen als äquivalent gelten, so dass von solchen als von einem einzigen System gesprochen werden soll. Die erste und wichtigste Frage ist natürlich die nach der Ordnung eines solchen Gebildes. Anders formulirt heisst das, wir wollen wissen, wie viele nicht äquivalente Werthsysteme der  $\tau_{ik}$  einem System von  $\frac{1}{2}n(n+1)$  linearen Gleichungen zwischen den Thetanullwerthen genügen. Daran reihen sich andere Fragen, die sämmtlich darauf hinauslaufen, den algebraischen Zusammenhang der Thetanullwerthe unter sich zu erforschen.

Einen aussichtsreichen functionentheoretischen Ansatz zu machen ist mir nicht gelungen, weil wir zur Zeit noch keine deutliche Vorstellung

---

<sup>1</sup> *Untersuchungen über Thetafunctionen*, § 35, 36.

von dem Fundamentalbereich der  $\tau_{ik}$  haben und auch, weil an den Grenzen dieses Bereiches Singularitäten im Verhalten der Theta auftreten, von denen wir noch keine Ahnung haben. Was geschieht z. B. mit den Theta von drei Variablen, wenn die definirende Curve vierter Ordnung unvermittelt in eine vierfach zählende Gerade übergeht?

Ich fasste daher den Plan den Modul der Relationen der Thetanullwerthe direct von ihrer analytischen Darstellung aus zu untersuchen, und wurde dadurch auf ein Problem geführt, welches als die natürliche Verallgemeinerung der Aufgabe erscheint die Darstellungen einer Zahl als Summe von Quadraten zu untersuchen.

Beginnen wir mit  $n = 1$ , also den elliptischen Functionen. Hier ist

$$(18) \quad \vartheta_{00}(0, \tau) = \vartheta_{00} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2}, \quad \vartheta_{01}(0, \tau) = \vartheta_{01} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2 + n \pi i},$$

$$\vartheta_{10}(0, \tau) = \vartheta_{10} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{4} \pi i \tau (2n+1)^2}.$$

Bilden wir nun mit drei ganzen Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  den Ausdruck

$$(19) \quad \vartheta_{00}^{\lambda_1} \vartheta_{01}^{\lambda_2} \vartheta_{10}^{\lambda_3} = \sum_{n_i, n_k, n_l} e^{\frac{\pi i \tau}{4} \left[ \sum_{i=1}^{\lambda_1} (2n_i)^2 + \sum_{k=1}^{\lambda_2} (2n_k)^2 + \sum_{e=1}^{\lambda_3} (2n_e+1)^2 \right] + i\pi \sum_{k=1}^{\lambda_2} n_k}$$

so kann man denselben als Potenzreihe nach  $e^{\frac{\pi i \tau}{4}}$  auffassen und schreiben

$$(20) \quad \vartheta_{00}^{\lambda_1} \vartheta_{01}^{\lambda_2} \vartheta_{10}^{\lambda_3} = \sum_{\mu} A_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} e^{\frac{\mu \pi i \tau}{4}}$$

wo  $A_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$  folgendermassen definiert ist: Es sei  $D_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$  die Anzahl der Darstellungen von  $\mu$  in der Form

$$(21) \quad \mu = \sum_{i=1}^{\lambda_1} (2n_i)^2 + \sum_{k=1}^{\lambda_2} (2n_k)^2 + \sum_{e=1}^{\lambda_3} (2n_e+1)^2$$

bei welchen  $\sum_{k=1}^{\lambda_2} n_k$  gerade ist, und analog  $\Delta_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$  die Anzahl der Darstellungen, für welche  $\sum_{k=1}^{\lambda_2} n_k$  ungerade ist. Dann ist

$$(22) \quad A_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} = D_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} - \Delta_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}.$$

Nun hat jede mögliche Relation  $N^{\text{ten}}$  Grades zwischen den Thetanullwerthen die Form

$$(23) \quad \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = N} C_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \vartheta_{00}^{\lambda_1} \vartheta_{01}^{\lambda_2} \vartheta_{10}^{\lambda_3} = 0.$$

Daher besteht für jedes  $\mu$  die Gleichung

$$(24) \quad \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = N} C_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} A_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} = 0.$$

Mit anderen Worten, die von  $\mu$  unabhängigen linearen Relationen zwischen den  $A_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$  ( $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = N$ ) liefern ohne weiters die Relationen zwischen den Thetanullwerthen vom  $N^{\text{ten}}$  Grade.

Sei nun  $Z_N$  die Anzahl der linear unabhängigen unter den Relationen (24), dann ist

$$(25) \quad \frac{(N+1)(N+2)}{2} - Z_N$$

die charakteristische Function des Moduls der Thetarelationen im Sinne HILBERT'S. Hieraus kann man dann die Ordnung des Gebildes unmittelbar ablesen. Wegen der Relation

$$(26) \quad \vartheta_{00}^4 - \vartheta_{01}^4 - \vartheta_{10}^4 = 0$$

ist nun hier das Gebilde, welches erster Stufe ist, schon vollständig definiert und jede solche Relation muss durch die linke Seite dieser Gleichung theilbar sein. Die charakteristische Function wird daher  $4N - 2$  und daraus folgt rückwärts

$$(27) \quad Z_N = \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 4N + 2 = \frac{(N-2)(N-3)}{2}.$$

Dies ist also die Anzahl der Relationen, welche zwischen den Darstellungsanzahlen unabhängig von den  $\mu$  bestehen. Man erhält diese Relationen selbst, wenn man bemerkt, dass die allgemeinste Thetarelation durch Multiplication eines beliebigen homogenen Polynoms  $(N-4)^{\text{ten}}$  Grades mit der linken Seite von (26) erhalten wird. Sie lauten

$$(28) \quad A_{\mu}^{\nu_1+4, \nu_2, \nu_3} - A_{\mu}^{\nu_1, \nu_2+4, \nu_3} - A_{\mu}^{\nu_1, \nu_2, \nu_3+4} = 0.$$



Um nun diese Fragestellung auf  $n$  Variable zu übertragen sei

$$(29) \quad \vartheta_\varepsilon = \sum_{n_i = -\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{4} \sum_{i,k}^{1 \dots n} \tau_{ik}(2n_i + g_i)(2n_k + g_k) + \frac{1}{2} \pi i \sum_{k=1}^n (2n_k + g_k) h_k}, \quad (i=1 \dots n)$$

wo die Zahlen  $g_i, h_i$  die Charakteristik der Thetafunction angeben, jedoch immer die Charakteristik eine gerade, also  $\sum_{i=1}^n g_i h_i \equiv 0 \pmod{2}$  ist.

Die verschiedenen Charakteristiken zugehörigen Thetanullwerthe sollen durch den untern Index unterschieden werden. Die Anzahl der geraden Charakteristiken und Theta soll mit  $r$  bezeichnet werden, so dass  $r = 2^{n-1}(2^n + 1)$ . Bildet man hier wieder den Ausdruck

$$(30) \quad \prod_{\nu=1}^r \vartheta_{\varepsilon_\nu}^{\lambda_\nu} \quad \left( \sum_{\nu=1}^r \lambda_\nu = N \right)$$

und verfährt wie vorhin, so erhält man

$$(31) \quad \prod_{\nu=1}^r \vartheta_{\varepsilon_\nu}^{\lambda_\nu} = \sum_{n_i^{(\sigma)}} e^{\frac{\pi i}{4} \sum_{i,k} \tau_{ik} \sum_{\nu=1}^{\lambda_\nu} \sum_{\sigma=1}^{\lambda_\nu} (2n_i^{(\sigma)} + g_i^{(\nu)})(2n_k^{(\sigma)} + g_k^{(\nu)}) + \frac{\pi i}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{\lambda_\nu} \sum_{\sigma=1}^{\lambda_\nu} (2n_k^{(\sigma)} + g_k^{(\nu)}) h_k^{(\nu)}}$$

Fasst man die Reihe rechts wieder als Potenzreihe nach den  $e^{\frac{\pi i \tau_{ik}}{4}}$  auf und setzt

$$(32) \quad \prod_{\nu=1}^r \vartheta_{\varepsilon_\nu}^{\lambda_\nu} = \sum_{(\mu_{ik})} A_{(\mu_{ik})}^{\lambda_1 \dots \lambda_r} e^{\frac{\pi i}{4} \sum_{i,k} \mu_{ik} \tau_{ik}}$$

so folgt

$$\mu_{ik} = \sum_{\nu=1}^{\lambda_\nu} \sum_{\sigma=1}^{\lambda_\nu} (2n_i^{(\sigma)} + g_i^{(\nu)})(2n_k^{(\sigma)} + g_k^{(\nu)})$$

und daher, wenn  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) neue Unbestimmte sind

$$(33) \quad \sum_{i,k} \mu_{ik} u_i u_k = \sum_{\nu=1}^{\lambda_\nu} \sum_{\sigma=1}^{\lambda_\nu} \left[ \sum_{k=1}^n (2n_k^{(\sigma)} + g_k^{(\nu)}) u_k \right]^2.$$

D. h. die quadratische Form  $\sum \mu_{ik} u_i u_k$  stellt sich dar als eine Summe von  $N$  Quadraten von Linearformen.

Bedeutet nun  $D_{(\mu_{ik})}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)}$  die Anzahl dieser Darstellungen, für welche die immer gerade Zahl  $\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^r \sum_{\sigma=1}^{\lambda_\nu} (2n_k^{(\sigma)} + g_k^{(\sigma)}) h_k^{(\sigma)}$  durch vier theilbar ist,  $\Delta_{(\mu_{ik})}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)}$  die Anzahl der Darstellungen, wo dies nicht der Fall ist, so ist wiederum

$$(34) \quad A_{(\mu_{ik})}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)} = D_{\mu_{ik}}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)} - \Delta_{\mu_{ik}}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)}.$$

Jede Relation zwischen den Thetanullwerthen zieht wie oben eine solche zwischen den  $A_{(\mu_{ik})}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)}$  nach sich, mit Coefficienten, welche unabhängig sind von den  $(\mu_{ik})$ .

Die Zahl der linearunabhängigen unter diesen Relationen sei wieder  $Z_N$  und diese Relationen selbst

$$(35) \quad \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = N} C_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu} A_{\mu_{ik}}^{\lambda_1, \dots, \lambda_\nu} = 0.$$

Dann ist

$$(36) \quad \binom{N+r-1}{r-1} - Z_N$$

die charakteristische Function des Moduls der Relationen der Thetanullwerthe und zwar nach dem HILBERT'schen Satze für genügend grosses  $N$  eine ganze rationale Function vom Grade  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . Ist dann  $\alpha$  der Coefficient der höchsten Potenz von  $N$  in dieser Function, so ist

$$\left\lfloor \left( \frac{1}{2}n(n+1) \right) \alpha \right\rfloor$$

die Ordnung des Gebildes. Ja, es würde sogar die Ermittlung von  $Z_N$  genügen für eine Reihe von unbegrenzt wachsenden, sonst aber beliebig specialisirten Werten von  $N$ , um  $\alpha$  ermitteln zu können.

Die Differenz, auf die es hier eigentlich ankommt, hat nun nach HILBERT die Form

$$(37) \quad \binom{r+N-1}{r-1} - Z_N = \sum_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{2}n(n+1)} \alpha_\rho \binom{N}{\rho}$$

und daraus folgt bereits ein asymptotischer Ausdruck für  $Z_N$  da es ja bis

auf Glieder von der Ordnung  $\frac{1}{2}n(n+1)$  mit dem Binomialcoefficienten übereinstimmen muss, welcher in  $N$  von der Ordnung  $N^{r-1}$  ist, wo  $r = 2^{n-1}(2^n + 1)$  ist.

Man erkennt, dass hier an die Stelle der Anzahl der Darstellungen einer *Zahl* als Summe von *Quadraten* von Zahlen die Anzahl der Darstellungen einer *quadratischen Form* als Summe von *Quadraten von Linearformen* zur Untersuchung gestellt ist, eine Frage, welche für  $n = 1$  eben in die obige übergeht und daher als eine Verallgemeinerung derselben aufzufassen ist.

Man kann in dieser Art der Fragestellung noch weiter gehen und auch nach dem Modul der Relationen Fragen, welche zwischen den Theta bestehen, wenn diese als Functionen sämtlicher Grössen  $v_i$  und  $\tau_{ik}$  betrachtet werden. Die Formen dieses Moduls könnten dann nur Coefficienten haben, welche rein numerische Constante sind. Ein solcher Modul kommt allerdings erst für  $n > 4$  zu Stande, aber seine Untersuchung wäre von grosser Wichtigkeit.

### 7. Die algebraischen Curven auf der $M$ und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen.

RIEMANN hat die von ihm in die Theorie der ABEL'schen Integrale und Functionen eingeführten Theta ausdrücklich als eine specielle Classe bezeichnet, da deren Parameter von den  $3p - 3$  Moduln des algebraischen Gebildes abhängen, während sie doch in der Zahl  $\frac{1}{2}p(p+1)$  vorhanden sind, also für ein  $p$  grösser als drei nothwendig specialisirt sein müssen. Er hat auch die Bemerkung hinzugefügt, dass die allgemeinen Theta sich nach einer ganz ähnlichen Methode behandeln lassen.

Das Studium der Mannigfaltigkeit  $M_n^2$  erlaubt nun in dieser Richtung weitergehende Angaben zu machen. Da sie von den Werthen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  doppelt überdeckt ist, da ja die Thetaquadrate durchaus gerade Functionen sind, so scheiden sich die auf ihr gelegenen Curven in zwei Classen, nämlich solche für welche die beiden Doppelüberdeckungen längs der Curve zusammenhängen und solche für welche das nicht der Fall ist. Unter Ordnung einer Curve werde nun im zweiten Fall die Anzahl ihrer Schnitt-

punkte mit einem linearen Raum von  $2^n - 2$  Dimensionen, im ersten Fall aber das doppelte dieser Zahl verstanden. Dann gelten die folgenden Sätze:

*Die Ordnung einer Curve ist ein gerades Vielfache der Variablenzahl also  $2gn$ . Die RIEMANN'schen Theta, welche zur eventuell doppeltüberdeckten Curve gehören zerfallen nach einer Transformation  $g^{\text{ten}}$  Grades in Factoren, von denen die einen Theta von  $n$  Variablen sind, und zwar gerade die zur Definition der vorgelegten  $M_n^g$  benützten.*

Es werden also die allgemeinsten Thetafunctionen als Factoren transformirter, specieller, RIEMANN'scher Theta höheren Geschlechtes erhalten. Im Besondern ergibt sich, dass die allgemeinsten Theta von  $n$  Variablen sicher bereits aus den Theta erhalten werden können, welche zu speciellen Gebilden vom Geschlecht  $(n - 1) \lfloor n 2^{n-1} + 1$  gehören und durch Transformationen vom Grade  $\lfloor n - 1 2^{n-1}$  zum Zerfallen in geeignete Factoren gebracht werden können. Die Bedingungen für dieses Verhalten lassen sich wenigstens principiell algebraisch aufstellen.

Von den andern Resultaten, welche sich daraus ergeben, will ich nur hervorheben, dass sich als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die gegebene  $M_n^g$  zu RIEMANN'schen Theta gehört, d. h. ihre  $\tau_{i,k}$  als zu dem Periodensystem der Integrale erster Gattung eines algebraischen Gebildes vom Geschlecht  $n$  gehörend aufgefasst werden können, ergibt, dass eine Curve von der Ordnung  $2n$  auf der  $M_n^g$  gelegen ist.

Jede Curve der  $M_n^g$  giebt ferner Anlass zur Bildung eines dem JACOBI'schen Umkehrproblem analogen, aber mehrdeutigen Umkehrproblems in  $n$  Variablen, welches nach den Ausführungen in N° 3  $g^n$  Lösungen hat, weil hier alle dort mit  $d$  bezeichneten Zahlen gleich 1 werden.

### 8. Über eine speciellere Classe von Thetafunctionen.

Nach diesen Ergebnissen lag es nahe, nach solchen algebraischen Gebilden zu suchen, deren RIEMANN'schen Theta von vornherein in Factoren zerfallen, wenn eine passende Transformation auf sie angewendet wurde. Dabei suchte ich es von vornherein so einzurichten, dass die  $\tau_{i,k}$  der so erhaltenen Thetafunctionen eine Mannigfaltigkeit von möglichst vielen Dimension bildeten. Eine eingehendere Untersuchung führt nun zu nachstehendem Ergebniss.

Denken wir uns ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte  $n + 1$  etwa dadurch gegeben, dass wir die  $n + 1$  Differentiale erster Gattung  $du_a$  proportional den homogenen Coordinaten eines Raumes von  $n$  Dimensionen setzen und bezeichnen diese mit  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}$ . Es ist dies nichts anderes als die bekannte WEBER-NÖTHER'sche Normalcurve. Wir bilden dann die nirgends singuläre Differentialform  $d\omega_x$ , so dass  $du_a = \varphi_a d\omega_x$ . Es giebt dann bekanntlich  $2^{2n+2} - 1$  verschiedene Systeme von quadratischen Formen der  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ , so dass diese auf dem algebraischen Gebilde überall von der zweiten Ordnung Null werden, also wenn eine solche Form mit  $\Phi$  bezeichnet wird, auch  $\sqrt{\Phi}$  auf dem Gebilde durchaus unverzweigt ist. Diese werden gewöhnlich als Wurzelformen zweiter Stufe bezeichnet. Zwischen je  $n + 1$  Wurzelformen desselben Systems besteht dann eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten. Bildet man nun mit  $n$  linearunabhängigen Wurzelformen desselben Systems die  $n$  Integrale

$$dx_i = \int \sqrt{\Phi_i} d\omega_x \quad (i=1\dots n)$$

so zeigt die Untersuchung derselben auf dem algebraischen Gebilde, dass sie nur  $2n$  Systeme unabhängiger Perioden haben, und diese zur Bildung von Thetafunctionen von  $n$  Variablen geeignet sind. Diese Thetafunctionen lassen sich dann mit den RIEMANN'schen Hilfsmitteln eingehend untersuchen und alle die Probleme, welche RIEMANN bei den zu den Integralen erster Gattung gehörigen Theta erledigt hat auch hier erledigen, wobei allerdings merkwürdige Unterschiede im einzelnen eintreten.

*Es gehören also zu einem algebraischen Gebilde vom Geschlecht  $n + 1$  nicht bloss Theta von  $n + 1$  Variablen, sondern auch solche von  $n$  Variablen.*

Eine eingehende Untersuchung zeigt, dass diese Theta von  $3n$  Moduln abhängen, also um 3 Parameter allgemeiner sind als die RIEMANN'schen, welche sie als Grenzfall enthalten. Sie enthalten auch noch die allgemeinsten Theta von vier und fünf Variablen. Eine eingehende Theorie dieser letzteren auf der hier angedeuteten Grundlage würde gewiss unsere Einsicht in diese merkwürdigen Functionen fördern, welche ja die einzigen über die elementaren hinausreichenden Functionen mehrerer Variablen sind, welche wir etwas genauer untersuchen können.

Wenn man nun diese Gesichtspunkte rückwärts auf die Theta von zwei und drei Variablen anwendet, so ergeben sich auch hier neue und

bemerkenswerthe Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden verschiedener Geschlechter. So erhält man diejenigen algebraischen Gebilde vom Geschlecht 3, welche vorgegebene Theta von zwei Variablen liefern, einfach dadurch, dass man die durch die Theta von zwei Variablen gegebene KUMMER'sche Fläche mit einer Ebene schneidet. Der Schnitt ist dann eine ebene Curve vierter Ordnung vom Geschlechte drei, und die 16 singulären Ebenen der KUMMER'schen Fläche schneiden diese Ebene in 16 von den 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung. Die 12 übrigen Doppeltangenten gehören einem STEINER'schen System an, welches zugleich diejenige Schaar von Wurzelformen bestimmt, mit welcher die vorgegebenen Theta erhalten werden.

Um diejenigen Gebilde vom Geschlecht vier zu erhalten, welche vorgegebene Theta von drei Variablen geben, kann man sich in ähnlicher Weise der zugehörigen  $M_3^{24}$  bedienen. Es sind dort gewisse Curven 6<sup>ter</sup> Ordnung welche in berührenden Räumen von drei Dimensionen liegen.

Man kann aber auch direct ohne auf die  $M_3^{24}$  zu recurriren, die gesuchten Gebilde vom Geschlecht vier angeben. Zu den Theta von drei Variablen gehört bekanntlich ein algebraisches Gebilde, welches im allgemeinen in die Gestalt einer ebenen Curve vierter Ordnung gesetzt werden kann. Um nun die dreifach unendlich vielen Gebilde vom Geschlechte vier zu erhalten, welchem in dem hier besprochenen Sinn die vorgelegten Theta von drei Variablen liefern, beachte man, dass man auch dreifach unendlich viele Schaaren von Punktquadrupeln auf der Curve vierter Ordnung hat, so dass die Quadrupel einer Schaar unter sich äquivalent sind, d. h. hier als von einem und demselben Kegelschnittsbüschel, dessen Basispunkte auf der Curve vierter Ordnung liegen, ausgeschnitten betrachtet werden können. Ein Quadrupel einer Schaar bildet nun ein Viereck, und der geometrische Ort der Ecken des Diagonaldreiecks dieses Vierecks ist eine Curve 6<sup>ter</sup> Ordnung, wenn das Quadrupel die Schaar durchläuft. Diese Curve 6<sup>ter</sup> Ordnung hat 6 Doppelpunkte und ist daher vom Geschlechte vier. Sie liefert im angegebenen Sinne nun gerade diejenigen Theta von drei Variablen, welche zur vorgelegten Curve vierter Ordnung gehören. Es findet also die transcendente Beziehung der beiden Curven auch ihren prägnanten geometrisch-algebraischen Ausdruck. Die Aufsuchung solcher und ähnlicher Beziehungen in den Fällen von vier und fünf Variablen würde sicher auch für die bisher wenig bearbeitete Theorie dieser Geschlechter von Interesse sein.

### 9. *Über die Reduction Abel'scher Integrale.*

Man hat bisher bei der Frage nach der Reduction eines ABEL'schen Integrals auf ein solches von niedrigerem Geschlecht fast ausschliesslich die Reduction auf elliptische Integrale studiert, und zwar aus dem vielleicht nicht immer ausgesprochenem Grunde, weil dies der einzige Fall ist, in welchem aus der Reduction der Perioden auf ein Paar auch auf die Existenz eines einzelnen Integrales, welches auf elliptische reducirbar ist, geschlossen werden kann. Bei höherem Geschlecht liegt jedoch die Frage durchaus complicirter, auch dann wenn nur die Reduction auf nicht höhere Geschlechter als drei in Frage kommt, also die  $\tau_{ii}$  noch sämtlich unabhängig von einander sind.

Sei, um die Ideen zu fixieren, vorgelegt ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte 10. Auf diesem seien drei Integrale erster Gattung bekannt, deren 20 Perioden sich simultan auf ein System von sechs Perioden zurückführen lassen, dann darf man nicht etwa schliessen, dass diese drei Integrale simultan durch eine Substitution auf solche vom Geschlechte drei zurückgeführt werden können, wohl aber, dass jedes einzelne von ihnen als eine Summe von drei Integralen erster Gattung vom Geschlechte drei zwischen deren oberen Grenzen eine algebraische Relation besteht, dargestellt werden kann. Eine Theorie solcher Reductionen vom algebraischen Standpunkt aus wäre sehr wichtig und eine wesentliche Förderung des classischen ABEL'schen Problems der Vergleichung der Transcendenten der Integralrechnung. Für eine allgemeine Discussion dieses Problems von transcendenten Seite her sind im vorigen insbesondere in der Theorie der  $M_n^g$  wesentliche Hilfsmittel enthalten, und die niedrigsten Fälle liefern auch bereits Beispiele nach dieser Richtung hin. Die nähere Ausführung dieser Beziehungen ist mir im Augenblick nicht möglich, ich hoffe aber darauf zurückkommen zu können.

### 10. *Über die Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte drei.*

Die vorhergehenden Untersuchungen beziehen sich auf weite und allgemeine Gebiete, zu deren erfolgreicher weiterer Bearbeitung eine genauere

Kenntniss der einfachsten Fälle nach jeder Richtung hin unerlässlich erscheint. Insbesondere wäre es von Interesse die mannigfachen algebraischen und geometrischen Beziehungen welche die KUMMER'sche Fläche aufweist, auch in den höhern Fällen zu verfolgen, und hieraus wieder rückwärts die zu einem algebraischen Gebilde gehörigen Thetafunctionen in möglichst unmittelbare Beziehung zu diesem selbst zu setzen. Für die Theta von drei Variablen, habe ich, wenigstens was ihre Abhängigkeit von den Integralsummen betrifft einen Anfang gemacht.<sup>1</sup> Dabei war der Ausgangspunkt ein wesentlich algebraisch-geometrischer, indem verlangt wurde, das Umkehrproblem mit Vermeidung jeder überflüssigen Irrationalität und mit durchaus an der ebenen Curve vierter Ordnung invarianten Functionen zu lösen. Es erwies sich dieser Plan als in allen Einzelheiten durchführbar und ergab mehrere unmittelbar an der Curve vierter Ordnung auftretende Gebilde, welche eindeutig auf die  $M_3^{24}$  bezogen waren. Auch für die ungeraden Thetafunctionen resp. die von KLEIN eingeführten  $\sigma$ -Functionen selbst ergab sich bis auf constante Factoren eine unmittelbare geometrische Bedeutung. Auch die bekannte Beziehung der KUMMER'schen Fläche<sup>2</sup> auf die Kernfläche eines speciellen Gebüsches von Flächen zweiter Ordnung findet sich in analoger Form wieder, so dass sich hiedurch ein rein algebraisch-geometrischer Zugang zur  $M_3^{24}$  eröffnet. Würde man nun einen ähnlichen Weg bei vier Variablen gehen, so würde man speciell zu einer  $M_4^{192}$  kommen, welche zu RIEMANN'schen Theta gehört, und hätte durch Vergleichung mit der aus Integralen über Wurzelfunctionen beim Geschlecht 5 abgeleiteten  $M_4^{192}$  Gelegenheit, tiefer in das Verständniss der von SCHOTTKY aufgestellten Relation zwischen den  $\tau_{ik}$  einzudringen, welche für die RIEMANN'schen Theta charakteristisch ist.

---

<sup>1</sup> Math. Annalen, 40.

<sup>2</sup> Für deren Verwendung in dem hier gemeinten Sinn vgl. Jahresberichte d. deutschen Math. Ver. 1894—5.