Acta Math., 203 (2009), 107–148
DOI: 10.1007/s11511-009-0040-0

La somme des chiffres des carrés

par

Christian Mauduit
Institut de Mathématiques de Luminy
Marseille, France

Joël Rivat
Institut de Mathématiques de Luminy
Marseille, France

1. Introduction

L'objet de cet article est de répondre à une question posée par Gelfond en 1968 [12, p. 265] en montrant que la somme des chiffres des carrés est équirépartie dans les progressions arithmétiques.

Dans tout cet article, q désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2. Tout entier n peut s'écrire de manière unique en base q sous la forme

$$n=\sum_{k\geqslant 0} n_k q^k, \quad n_k\in\{0,...,q-1\}, \tag{1}$$

où les n_k sont tous nuls à partir d'un certain rang. Si $\ell=\max\{k:n_k\neq 0\}$, on note

$$\operatorname{rep}_q(n)=n_\ell \dots n_0$$

la représentation de n en base q.

La somme des chiffres du nombre entier n écrit en base q est définie par

$$s_q(n)=\sum_{k\geqslant 0} n_k. \tag{2}$$

Dans toute la suite on notera $e(x)=\exp(2i\pi x)$, $\|x\|$ la distance du nombre réel x à l'entier le plus proche, $\tau(n)$ le nombre de diviseurs du nombre entier n, et $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n.

1.1. Représentation des carrés en base q

Les résultats que nous présentons dans ce travail s'inscrivent dans le cadre de l'étude de la représentation des carrés en base q. On connaît peu de résultats sur ce sujet en dehors de celui de Davenport et Erdős qui ont montré en 1952 [9], pour tout polynôme f à valeurs entières, la normalité du nombre réel dont l'écriture en base q est $0.\operatorname{rep}_q(f(1))\operatorname{rep}_q(f(2))\operatorname{rep}_q(f(3))\ldots$. Il résulte en particulier de leur théorème que

$$\sum_{n\leqslant x} s_q(n^2) \sim (q-1)x\log_q x \quad \text{lorsque } x\to+\infty.$$

Peter a donné dans [23] une version beaucoup plus précise de ce résultat en moyenne en montrant le théorème suivant qui généralise le résultat classique de Delange concernant le cas de la fonction sommatoire de la fonction somme des chiffres :

Théorème A. *Il existe $c\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ et Φ_q une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et nulle part dérivable, tels que, pour tout $x\geqslant 2$, on a*

$$\sum_{n\leqslant x} s_q(n^2) = (q-1)x\log_q x + cx + x\Phi_q(2\log_q x) + O(x^{1-\varepsilon}).$$

On trouvera également dans [2] l'étude de la distribution limite de la fonction somme des chiffres dans l'ensemble des carrés.

La suite des carrés est engendrée par le morphisme σ défini sur l'alphabet $\{a,b,c\}$ par $\sigma(a)=ab$, $\sigma(b)=ccb$ et $\sigma(c)=c$ en ce sens que $m=abccbccccbccccccbccccccccbcc\ldots$ est l'unique mot infini sur l'alphabet $\{a,b,c\}$ point fixe de σ et que si l'on dénote π la projection de $\{a,b,c\}$ vers $\{0,1\}$ définie par $\pi(a)=\pi(c)=0$ et $\pi(b)=1$, alors $\pi(m)$ coïncide avec la fonction indicatrice des carrés (on trouvera dans [11] un introduction à la notion de suite engendrée par un morphisme sur un alphabet fini).

Par contre on ne connaît pas d'algorithme simple permettant de savoir si un nombre entier est un carré à partir de la donnée de son écriture en base q.

Il résulte d'ailleurs des travaux de Büchi concernant l'arithmétique faible du second ordre que la suite des carrés n'est reconnaissable par aucun automate fini (voir [4] ou [27]). Ritchie a donné dans [27] une preuve très élégante et élémentaire de cette non reconnaissabilité dans le cas de la base $q=2$ et Minsky et Papert ont montré dans [20] la non reconnaissabilité de toute suite de nombres entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de densité nulle et telle que $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n=1$ (voir aussi Cobham [5]).

Les théorèmes que nous établissons ici peuvent être interprétés comme une démonstration de l'indépendance statistique entre la propriété multiplicative « être un carré » et une propriété de nature automatique relative à la représentation des nombres entiers en base q (on pourra également parler d'une propriété q-multiplicative ou q-additive, la fonction somme des chiffres vérifiant, pour tous entiers k, a et b tels que $b<q^k$, la relation $s_q(q^k a+b)=s_q(q^k a)+s_q(b)$).

1.2. La fonction somme des chiffres

Il semblerait que le premier mathématicien à avoir introduit la fonction somme des chiffres soit Prouhet en 1851 dans [25]. Mahler est premier à la faire intervenir dans un contexte d'analyse harmonique en introduisant dans [15] la suite $((-1)^{s_2(n)})_{n\geqslant 0}$ afin d'illustrer plusieurs théorèmes d'analyse spectrale obtenus par Wiener [29]. Il montre ainsi en particulier la convergence, pour tout nombre entier $k\geqslant 0$, de la suite $(\gamma_k(N))_{N\geqslant 1}$ définie pour tout nombre entier $N\geqslant 1$ par

$$\gamma_k(N)=\frac{1}{N}\sum_{n<N}(-1)^{s_2(n)}(-1)^{s_2(n+k)},$$

vers une limite non nulle pour une infinité de nombres entiers k.

Ces travaux ont ouvert la voie à l'étude spectrale des systèmes dynamiques symboliques. En effet notons T le décalage défini sur l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{-1,1\}$ par $T(u_n)=u_{n+1}$ et munissons l'espace $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ de la distance ultramétrique définie, si $\mathbf{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{v}=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\begin{cases} 2^{-\inf\{n\in\mathbb{N}:u_n\neq v_n\}}, & \text{si } \mathbf{u}\neq\mathbf{v},\\ 0, & \text{si } \mathbf{u}=\mathbf{v}.\end{cases}$$

Alors l'adhérence de l'orbite sous l'action de T de la suite $((-1)^{s_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ munie de la transformation T constitue un système dynamique symbolique appelé système dynamique de Thue–Morse (voir par exemple [11] ou [26]).

La convergence de la suite $(\gamma_k(N))_{N\geqslant 1}$ peut être comprise comme une conséquence de l'unique ergodicité du système dynamique de Thue–Morse (voir par exemple [26]). Keane a montré dans [14] que pour tout entier k, la limite de la suite $(\gamma_k(N))_{N\geqslant 1}$ est égale au k-ième coefficient de Fourier de la mesure de corrélation associée au système dynamique de Thue–Morse, c'est-à-dire le produit de Riesz

$$\prod_{n\geqslant 0}(1-\cos 2^n t).$$

Des résultats analogues ont été obtenus dans [6] et [19], pour la classe plus générale des suites q-additives ou q-multiplicatives, introduites indépendemment par Bellman et Shapiro [3] et Gelfond [12].

On trouvera dans [1] un survol sur de nombreux problèmes liés à la fonction somme des chiffres et à ses généralisations.

1.3. La somme des chiffres pour les suites éparses

L'étude des propriétés arithmétiques des suites éparses (c'est-à-dire dont le nombre de termes jusqu'à x est $o(x)$) est une source importante de problèmes ouverts en théorie des nombres : nombres premiers de la forme n^2+1 (plus généralement de forme polynomiale), de la forme 2^n-1 (nombres de Mersenne), de la forme 2^n+1 (nombres de Fermat). En 1953, Piatetski-Shapiro a étudié dans [24] la répartition des nombres premiers dans la suite $(\lfloor n^c\rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c>1$, celle-ci pouvant être considérée, pour $1<c<2$, comme un cas intermédiaire entre les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2.

Dans [16] et [17], nous avons étudié la somme des chiffres de cette suite éparse et nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème B. *Si* $c\in\left[1,\frac{7}{5}\right[$, *alors*

- *pour tout* $(a,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, *on a*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\,\mathrm{card}\{n<N : s_q([n^c])\equiv a \bmod m\}=\frac{1}{m},$$

- *la suite* $(s_q([n^c])\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équirépartie modulo* 1 *pour tout nombre irrationnel* α.

La méthode développée dans [16] et [17] ne permet pas d'atteindre le cas limite $c=2$ et donc d'étudier la répartition de la somme des chiffres des carrés. Dans ce dernier cas, le meilleur résultat actuel est dû à Dartyge et Tenenbaum qui montrent en particulier dans [8] :

Théorème C. *Soient* q *et* m *nombres entiers positifs tels que* $q\geqslant 2$ *et* $(m,q-1)=1$. *Alors il existe deux constantes* $C=C(q,m)>0$ *et* $N_0=N_0(q,m)\geqslant 1$ *telles que pour tout* $a\in\{0,1,\dots,m-1\}$ *et pour tout nombre entier* $N\geqslant N_0$, *on a*

$$\mathrm{card}\{n<N : s_q(n^2)\equiv a \bmod m\}\geqslant CN.$$

Plus précisément, Dartyge et Tenenbaum présentent dans [8], d'une part une preuve élégante et élémentaire de ce théorème dans le cas particulier $q=m=2$ (conduisant à la valeur $C(2,2)=\frac{5}{8}-\frac{13}{32}\sqrt{2}>\frac{1}{20}$), et d'autre part une généralisation qui permet de remplacer la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ où f est un polynôme à coefficients entiers de degré $d\geqslant 2$ et tel que $f(\mathbb{N})\subset\mathbb{N}$ (obtenant dans ce cas général une minoration de l'ordre de $N^{2/d!}$). La preuve de ce résultat général nécessite l'utilisation de techniques plus élaborées développées dans [7].

2. Résultats

Nous avons étudié récemment dans [18] la répartition de la somme des chiffres dans la suite des nombres premiers qui constitue un autre exemple classique de suite éparse.

Ce travail, qui résolvait une question posée par Gelfond dans [12], introduisait plusieurs types d'outils de nature à la fois combinatoire, analytique et harmonique. Cependant, la méthode mise en place pour cette étude n'est pas suffisante pour étudier la répartition de la somme des chiffres des carrés en raison de la croissance beaucoup plus rapide de cette suite. L'objet du présent article est d'introduire de nouveaux outils qui nous permettront de surmonter cette difficulté et d'apporter une réponse complète à une autre question posée par Gelfond dans [12] concernant cette fois les carrés, ainsi qu'à des questions analogues concernant les propriétés arithmétiques de la somme des chiffres des carrés :

THÉORÈME 1. *Pour* $q\geqslant 2$ *et* α *tels que* $(q-1)\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, *il existe* $\sigma_q(\alpha)>0$ *et* $x_0:=x_0(q,\alpha)\geqslant 2$ *tels que pour tout nombre réel* $x\geqslant x_0$, *on a*

$$\left|\sum_{n\leqslant x} e(\alpha s_q(n^2))\right| \leqslant 4q^{7/2}(\log q)^{5/2}\tau(q)^{1/2}\left(1+\frac{\log x}{\log q}\right)^{\omega(q)/2+4} x^{1-\sigma_q(\alpha)}. \tag{3}$$

THÉORÈME 2. *Pour* $q\geqslant 2$, *la suite* $(\alpha s_q(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ *est équirépartie modulo* 1 *si et seulement si* $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

THÉORÈME 3. *Pour* q *et* m *entiers* $\geqslant 2$, *il existe* $\sigma_{q,m}>0$ *tel que pour tout* $a\in\mathbb{Z}$,

$$\operatorname{card}\{n\leqslant x : s_q(n^2)\equiv a \bmod m\} = \frac{x}{m}Q(a,d)+O_{q,m}(x^{1-\sigma_{q,m}}), \tag{4}$$

où $d=(q-1,m)$ *et*

$$Q(a,d)=\operatorname{card}\{0\leqslant n<d : n^2\equiv a \bmod d\}. \tag{5}$$

Remarque. Il n'existe pas de formule simple permettant d'exprimer $Q(a,d)$ dans le cas général. Par contre, pour a et d fixés, il est facile de calculer la valeur de

$$Q(a,d)=\prod_{p\mid d} Q(a,p^{v_p(d)})$$

(voir [28, §5.9]). Dans le cas particulier où $d=1$ on a $Q(a,d)=1$, et plus généralement si d est impair, $(a,d)=1$, alors

$$Q(a,d)=\prod_{p\mid d}\left(1+\left(\frac{a}{p}\right)\right)$$

où (a/p) désigne le symbole de Legendre.

3. Description de la preuve du théorème 1

Posons

$$f(n) := \alpha s_q(n). \tag{6}$$

Pour démontrer (3) on effectue un découpage q-adique de la somme $\sum_{n\leqslant x} e(f(n^2))$ auquel on commence par appliquer dans §5.1 l'inégalité de van der Corput. Ceci nous conduit à considérer dans l'exponentielle des différences de la forme

$$f((n+r)^2) - f(n^2),$$

où la variable r est très petite devant n. Or, les chiffres de $(n+r)^2$ et ceux de n^2 coïncident assez rapidement au delà de la taille de nr, une différence n'étant possible que par la propagation d'une retenue. En prenant une petite marge, on s'assure que les entiers n exceptionnels pour lesquels la coïncidence n'a pas lieu sont en nombre négligeable. Nous pouvons ainsi remplacer dans §5.2 la fonction f par une fonction tronquée f_λ qui ne prend en compte que les chiffres de n de poids inférieur à λ (λ est un paramètre qui dépend essentiellement de la taille de n) et qui est périodique de période q^λ.

Plus précisément pour tout entier $\lambda \geqslant 0$, on définit f_λ par la formule

$$f_\lambda(n) := \sum_{k<\lambda} f(n_k q^k), \tag{7}$$

où les entiers n_k désignent les chiffres de n dans son écriture en base q définie par (1). En appliquant une variante de l'inégalité de van der Corput, nous obtenons dans §5.3 des différences de la forme

$$f_\lambda((n+sq^\mu)^2) - f_\lambda(n^2)$$

où la variable s est très petite devant n et $\mu<\lambda$. On constate que dans cette différence, seuls les chiffres de poids supérieur à μ interviennent, ce qui nous permet de remplacer la fonction f_λ par une fonction doublement tronquée $f_{\mu,\lambda}$ définie par

$$f_{\mu,\lambda} := f_\lambda - f_\mu, \tag{8}$$

qui ne prend en compte que les chiffres de poids compris entre μ et λ.

La fonction $f_{\mu,\lambda}$ est périodique de période q^λ et cette propriété va nous permettre dans §5.4 en quelque sorte de séparer la structure digitale de la structure arithmétique du problème en faisant apparaître des sommes de Gauss quadratiques qui sont traitées dans §4.3. La clef permettant de poursuivre la majoration consiste à estimer dans §§5.5–5.7 des moyennes de produits de fonctions génératrices qui s'expriment elles-mêmes à l'aide de produits de polynômes trigonométriques. Cette démarche est analogue à celle que nous avions introduite dans [18] lors de l'étude de la somme des chiffres des nombres premiers, mais les difficultés rencontrées étant d'une nature différente, nous utilisons pour y parvenir une série de lemmes techniques démontrés dans §4.1 et §4.2.

4. Lemmes techniques

4.1. Fonction génératrice

Lemme 1. *Pour tout nombre entier $k\geqslant 1$, la fonction φ_k définie par*

$$\varphi_k(t)=\Big|\sum_{0\leqslant v<k} e(vt)\Big|=\begin{cases}|\sin\pi kt|/|\sin\pi t|, & si\ t\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\\ k, & si\ t\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{9}$$

est paire, continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 et vérifie pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\varphi_k^2(t)=\sum_{|h|<k}(k-|h|)\,e(ht), \tag{10}$$

$$\sum_{0\leqslant r<k}\varphi_k^2\Big(t+\frac{r}{k}\Big)=k^2. \tag{11}$$

Preuve. Voir par exemple le lemme 14 de [18]. □

Lemme 2. *Pour tout nombre entier $k\geqslant 1$, on définit*

$$\Phi(k):=\max_{t\in\mathbb{R}}\frac{1}{k}\sum_{0\leqslant r<k}\varphi_k\Big(t+\frac{r}{k}\Big). \tag{12}$$

Alors pour tous les nombres entiers $k\geqslant 1$ et $k'\geqslant 1$, on a

$$k\mid k'\quad\Longrightarrow\quad\Phi(k)\leqslant\Phi(k'), \tag{13}$$

et pour tout nombre entier $k\geqslant 1$, on a

$$\Phi(k)=\frac{1}{k}\sum_{0\leqslant r<k}\frac{1}{\sin\pi(1/2k+r/k)}\leqslant\frac{2}{k\sin(\pi/2k)}+\frac{2}{\pi}\log\cot\frac{\pi}{2k}\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{2e^{\pi/\sqrt{2}}k}{\pi}. \tag{14}$$

Preuve. Lorsque $k=1$, la propriété (14) est trivialement vérifiée et, pour $k\geqslant 2$, l'égalité et la première majoration de (14), découlent par exemple du lemme 15 de [18]. Par ailleurs, on a

$$\frac{\pi}{k\sin(\pi/2k)}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}\quad\text{et}\quad\cot\frac{\pi}{2k}\leqslant\frac{2k}{\pi}$$

et donc

$$\frac{2}{k\sin(\pi/2k)}+\frac{2}{\pi}\log\cot\frac{\pi}{2k}\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{2e^{\pi/\sqrt{2}}k}{\pi}.$$

Pour montrer (13), écrivons $k'=kd$ et $r'=rd+j$ avec $0\leqslant r<k$ et $0\leqslant j<d$, d'où

$$\Phi(k') = \frac{1}{k}\sum_{0\leqslant r<k}\frac{1}{d}\sum_{0\leqslant j<d}\frac{1}{\sin\pi(1/2kd+r/k+j/kd)}.$$

Or, comme la fonction $t\mapsto(\sin t)^{-1}$ est convexe sur $]0,\pi[$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{d}\sum_{0\leqslant j<d}\frac{1}{\sin\pi(1/2kd+r/k+j/kd)} &\geqslant \frac{1}{\sin\pi\big(1/2kd+r/k+d^{-1}\sum_{0\leqslant j<d} j/kd\big)}\\ &= \frac{1}{\sin\pi(1/2kd+r/k+(d-1)/2kd)},\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(k') \geqslant \frac{1}{k}\sum_{0\leqslant r<k}\frac{1}{\sin\pi(1/2k+r/k)} = \Phi(k).$$

□

Lemme 3. *Pour tout nombre entier $k\geqslant 2$, et tout $t\in\mathbb{R}$, on a*

$$\varphi_k(t)\leqslant k\exp\Big(-\frac{k^2-1}{6}\pi^2\|t\|^2\Big) \quad \textit{lorsque} \;\; \|t\|\leqslant\sqrt{\frac{6}{\pi^2(k^2-1)}}.$$

Preuve. Pour tout $u\in\mathbb{R}$, on vérifie facilement les inégalités

$$\begin{aligned}
&0\leqslant \sin u\leqslant u-\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120} && \text{lorsque } \; 0\leqslant u\leqslant \pi,\\
&0\leqslant u-\frac{u^3}{6}\leqslant \sin u && \text{lorsque } \; 0\leqslant u\leqslant \sqrt{6},\\
&0\leqslant 1-u+\frac{u^2}{3}\leqslant 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\leqslant e^{-u} && \text{lorsque } \; 0\leqslant u\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Comme φ_k est paire et périodique de période 1, on peut supposer que

$$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{6}{\pi^2(k^2-1)}}.$$

Observons que sous cette hypothèse, on a $0\leqslant\pi kt\leqslant\pi$ et $0\leqslant\pi t\leqslant\sqrt{6}$. Pour établir l'inégalité attendue :

$$\sin\pi kt\leqslant k(\sin\pi t)\exp\Big(-\frac{k^2-1}{6}\pi^2t^2\Big),$$

if suffit de montrer que

$$\pi kt-\frac{(\pi kt)^3}{6}+\frac{(\pi kt)^5}{120}\leqslant k\Big(\pi t-\frac{\pi^3t^3}{6}\Big)\Big(1-\frac{k^2-1}{6}\pi^2t^2+\frac{(k^2-1)^2}{3\cdot 6^2}\pi^4t^4\Big),$$

ce qui équivaut à montrer que

$$5\pi^2 t^2 (k^2-1)^2 \leqslant 3k^4+30k^2-60.$$

Or notre hypothèse sur t ci-dessus entraîne la majoration

$$5\pi^2 t^2 (k^2-1)^2 \leqslant 5(k^2-1)^2 \frac{6}{(k^2-1)} = 30k^2-30,$$

et le résultat en découle car $3k^4 \geqslant 3\cdot 2^4 = 48 \geqslant 30$. □

Lemme 4. *Pour tout nombre entier $k\geqslant 2$, et tout $t\in\mathbb{R}$, on a*

$$\varphi_k\left(\frac{t}{k}\right) \leqslant \varphi_k\left(\frac{\|t\|}{k}\right).$$

Preuve. Posons $t=\theta+\ell$ avec $-\frac{1}{2}<\theta\leqslant\frac{1}{2}$ et $\ell\in\mathbb{Z}$. Si $\ell\equiv 0 \bmod k$, comme φ_k est paire et périodique de période 1, on a

$$\varphi_k\left(\frac{t}{k}\right) = \varphi_k\left(\frac{\|t\|}{k}\right).$$

Maintenant, si $\ell\not\equiv 0 \bmod k$, alors

$$\frac{1}{2} \geqslant \left\|\frac{t}{k}\right\| = \left\|\frac{\theta+\ell}{k}\right\| \geqslant \left\|\frac{\ell}{k}\right\| - \left\|\frac{\theta}{k}\right\| \geqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} \geqslant \left|\frac{\theta}{k}\right| = \frac{\|t\|}{k}.$$

La fonction $u\mapsto \sin \pi u$ étant décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit

$$\varphi_k\left(\frac{t}{k}\right) = \varphi_k\left(\left\|\frac{t}{k}\right\|\right) = \frac{|\sin \pi\theta|}{\sin \pi \|(\theta+\ell)/k\|} \leqslant \frac{|\sin \pi\theta|}{\sin(\pi\|t\|/k)} = \varphi_k\left(\frac{\|t\|}{k}\right).$$ □

Lemme 5. *Pour tout nombre entier $k\geqslant 2$, et tout $\delta\in[0, 2/3k]$, on a*

$$\max_{\|t\|\geqslant\delta} \varphi_k(t) = \varphi_k(\delta).$$

Preuve. Comme $t\mapsto \sin t/\sin(2t/3)$ est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$, on a

$$\left(\sin\frac{\pi}{k}\right)\varphi_k\left(\frac{2}{3k}\right) = \left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)\frac{\sin(\pi/k)}{\sin(2\pi/3k)} \geqslant \left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)\frac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi/3)} = 1.$$

Or pour $\|t\|\geqslant 1/k$, on a $\varphi_k(t)\leqslant 1/\sin(\pi/k)$, donc $\max_{\|t\|\geqslant 1/k}\varphi_k(t)\leqslant\varphi_k(2/3k)$. Comme φ_k est décroissante sur $[0, 1/k]$, on a pour tout $\delta\in[0, 2/3k]$,

$$\max_{1/k\geqslant\|t\|\geqslant\delta} \varphi_k(t) = \varphi_k(\delta) \geqslant \varphi_k\left(\frac{2}{3k}\right),$$

d'où l'inégalité attendue. □

Lemme 6. *Pour tout nombre entier $k\geqslant 2$ et tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a*

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \varphi_k(\alpha-t)\varphi_k(\alpha-kt) \leqslant k\varphi_k\left(\frac{\|(k-1)\alpha\|}{k+1}\right).$$

Preuve. En posant $t=\alpha-u$, on a

$$M(\alpha):=\max_{t\in\mathbb{R}} \varphi_k(\alpha-t)\varphi_k(\alpha-kt)=\max_{u\in\mathbb{R}} \varphi_k(u)\varphi_k(ku-(k-1)\alpha).$$

Posons $\delta:=\|(k-1)\alpha\|/(k+1)\leqslant 1/2k$. Pour montrer que $M(\alpha)\leqslant k\varphi_k(\delta)$, nous distinguons deux cas :

- si $\|ku-(k-1)\alpha\|\geqslant\delta$, alors d'après le lemme 5 nous obtenons la majoration attendue :

$$\varphi_k(u)\varphi_k(ku-(k-1)\alpha) \leqslant \varphi_k(u)\varphi_k(\delta) \leqslant k\varphi_k(\delta),$$

- si $\|ku-(k-1)\alpha\|<\delta$, alors d'après le lemme 4 on a $\varphi_k(u)=\varphi_k(ku/k)\leqslant\varphi_k(\|ku\|/k)$. Mais

$$\begin{aligned}\|ku\| = \|ku-(k-1)\alpha+(k-1)\alpha\| &\geqslant \|(k-1)\alpha\|-\|ku-(k-1)\alpha\| \\ &\geqslant \|(k-1)\alpha\|-\delta=(k+1)\delta-\delta=k\delta,\end{aligned}$$

donc comme φ_k est décroissante sur $[0,1/2k]$, on a $\varphi_k(\|ku\|/k)\leqslant\varphi_k(\delta)$, d'où la majoration attendue :

$$\varphi_k(u)\varphi_k(ku-(k-1)\alpha) \leqslant \varphi_k\left(\frac{\|ku\|}{k}\right)k \leqslant \varphi_k(\delta)k. \qquad \square$$

Lemme 7. *Pour tout nombre entier $k\geqslant 2$ et tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a*

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \varphi_k(\alpha-t)\varphi_k(\alpha-kt) \leqslant k^2\exp\left(-\frac{\pi^2(k-1)}{6(k+1)}\|(k-1)\alpha\|^2\right).$$

Preuve. En combinant les lemmes 6 et 3, on obtient

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \varphi_k(\alpha-t)\varphi_k(\alpha-kt) \leqslant k\varphi_k\left(\frac{\|(k-1)\alpha\|}{k+1}\right) \leqslant k^2\exp\left(-\frac{\pi^2(k-1)}{6(k+1)}\|(k-1)\alpha\|^2\right). \qquad \square$$

4.2. Valeurs moyennes des produits de fonctions génératrices

Pour $q\geqslant 2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{N}$ et $h\in\mathbb{Z}$, on pose

$$F_\lambda(h,\alpha)=q^{-\lambda}\sum_{0\leqslant u<q^\lambda} e(f_\lambda(u)-huq^{-\lambda}). \tag{15}$$

Il résulte de la définition (15) que

$$F_0(h,\alpha)=1, \tag{16}$$

et que, pour $\lambda\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}F_\lambda(h,\alpha)&=q^{-\lambda}\sum_{0\leqslant j<q}\ \sum_{0\leqslant u<q^{\lambda-1}} e(\alpha(s_q(u)+j)-h(qu+j)q^{-\lambda})\\ &=\frac{1}{q}\sum_{0\leqslant j<q} e(\alpha j-hjq^{-\lambda})F_{\lambda-1}(h,\alpha).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\lambda\geqslant 1$,

$$|F_\lambda(h,\alpha)|=q^{-\lambda}\prod_{1\leqslant j\leqslant\lambda}\varphi_q(\alpha-hq^{-j}), \tag{17}$$

où φ_q est définie par (9).

LEMME 8. *Pour* $q\geqslant 2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{Z}$ *et* $0\leqslant\delta\leqslant\lambda$,

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_\lambda(h,\alpha)|^2=|F_\delta(a,\alpha)|^2. \tag{18}$$

Preuve. La relation (18) s'obtient facilement par récurrence à partir de (11) et (17) (voir [18, lemme 20]). □

LEMME 9. *Pour* $q\geqslant 2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{Z}$, $\lambda\geqslant 2$ *entier*,

$$c_q=\frac{\pi^2}{12\log q}\left(1-\frac{2}{q+1}\right),$$

on a

$$|F_\lambda(h,\alpha)|\leqslant e^{\pi^2/48}q^{-c_q\|(q-1)\alpha\|^2\lambda}. \tag{19}$$

Preuve. D'après (17), on a

$$|F_\lambda(h,\alpha)|\leqslant\prod_{1\leqslant j\leqslant\lfloor\lambda/2\rfloor}\frac{\varphi_q(\alpha-hq^{-2j})\varphi_q(\alpha-hq^{-2j+1})}{q^2}.$$

D'après le lemme 7, on en déduit que

$$|F_\lambda(h,\alpha)|\leqslant\exp\left(-\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{q-1}{q+1}\right)\left\lfloor\frac{\lambda}{2}\right\rfloor\|(q-1)\alpha\|^2\right),$$

d'où le résultat attendu en utilisant la minoration $\left\lfloor\frac{1}{2}\lambda\right\rfloor\geqslant\frac{1}{2}(\lambda-1)$. □

Lemme 10. *Pour* $q\geqslant 2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{N}$ *et* $h\in\mathbb{Z}$, *la fonction* $F_{\mu,\lambda}$ *définie par*

$$F_{\mu,\lambda}(h,\alpha):=q^{-\lambda}\sum_{0\leqslant u<q^{\lambda}}e(f_{\mu,\lambda}(u)-huq^{-\lambda}) \tag{20}$$

vérifie

$$|F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)|=|F_{\lambda-\mu}(h,\alpha)|q^{-\mu}\varphi_{q^{\mu}}(hq^{-\lambda}). \tag{21}$$

Preuve. Pour $0\leqslant\mu<\lambda$, en écrivant $u=q^{\mu}a+b$, d'où $f_{\mu,\lambda}(u)=f(a)$, on a

$$\begin{aligned}F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)&=q^{-\lambda}\sum_{0\leqslant u<q^{\lambda}}e(f_{\mu,\lambda}(u)-huq^{-\lambda})\\&=q^{-\lambda}\sum_{0\leqslant a<q^{\lambda-\mu}}\sum_{0\leqslant b<q^{\mu}}e\left(f(a)-\frac{h}{q^{\lambda}}(q^{\mu}a+b)\right)\\&=F_{\lambda-\mu}(h,\alpha)q^{-\mu}\sum_{0\leqslant b<q^{\mu}}e\left(\frac{-hb}{q^{\lambda}}\right),\end{aligned}$$

d'où l'égalité (21). □

Lemme 11. *Pour des entiers* μ *et* λ *tels que* $1\leqslant\mu<\lambda$, *et pour* $\alpha\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\sum_{0\leqslant h<q^{\lambda}}|F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)|\leqslant\Phi(q^{\mu})q^{\lambda-\mu}, \tag{22}$$

où Φ *est définie par* (12).

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant h<q^{\lambda}}|F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)|&=\sum_{0\leqslant k<q^{\lambda-\mu}}\sum_{0\leqslant \ell<q^{\mu}}|F_{\lambda-\mu}(k+\ell q^{\lambda-\mu},\alpha)|q^{-\mu}\varphi_{q^{\mu}}\left(\frac{k+\ell q^{\lambda-\mu}}{q^{\lambda}}\right)\\&=\sum_{0\leqslant k<q^{\lambda-\mu}}|F_{\lambda-\mu}(k,\alpha)|q^{-\mu}\sum_{0\leqslant \ell<q^{\mu}}\varphi_{q^{\mu}}\left(\frac{k}{q^{\lambda}}+\frac{\ell}{q^{\mu}}\right),\end{aligned}$$

d'où, d'après (12) et en utilisant la majoration triviale $|F_{\lambda-\mu}(k,\alpha)|\leqslant 1$, on déduit (22). □

Remarque. La majoration (22) pourrait facilement être améliorée en utilisant la méthode présentée dans §12 de [18] qui permet de montrer que

$$\sum_{0\leqslant k<q^{\lambda-\mu}}|F_{\lambda-\mu}(k,\alpha)|\ll q^{\eta_q(\lambda-\mu)}$$

avec $\eta_q<\frac{1}{2}$ pour $q\geqslant 2$.

LEMME 12. *Pour des entiers μ, λ et δ tels que $1\leqslant\mu<\lambda$ et $\lambda-\mu\leqslant\delta\leqslant\lambda$, et pour $a\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on a*

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)| \leqslant \Phi(q^{\lambda-\delta})q^{-\mu+\lambda-\delta}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta}}(aq^{-\delta})|F_{\lambda-\mu}(a,\alpha)|. \tag{23}$$

Preuve. On écrit

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)| = \sum_{0\leqslant \ell<q^{\lambda-\delta}} |F_{\lambda-\mu}(a+\ell q^\delta,\alpha)|q^{-\mu}\varphi_{q^\mu}\left(\frac{a+\ell q^\delta}{q^\lambda}\right)$$

et comme $\lambda-\mu\leqslant\delta$, on a $|F_{\lambda-\mu}(a+\ell q^\delta,\alpha)|=|F_{\lambda-\mu}(a,\alpha)|$, d'où

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)| = |F_{\lambda-\mu}(a,\alpha)|q^{-\mu} \sum_{0\leqslant \ell<q^{\lambda-\delta}} \varphi_{q^\mu}\left(\frac{a}{q^\lambda}+\frac{\ell}{q^{\lambda-\delta}}\right).$$

Comme $0\leqslant\lambda-\delta\leqslant\mu$, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\varphi_{q^\mu}\left(t+\frac{\ell}{q^{\lambda-\delta}}\right) = \varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta}}(q^{\lambda-\delta}t)\varphi_{q^{\lambda-\delta}}\left(t+\frac{\ell}{q^{\lambda-\delta}}\right),$$

d'où, d'après (12) avec $k=q^{\lambda-\delta}$, on déduit

$$\begin{aligned} q^{-\mu} &\sum_{0\leqslant \ell<q^{\lambda-\delta}} \varphi_{q^\mu}\left(\frac{a}{q^\lambda}+\frac{\ell}{q^{\lambda-\delta}}\right) \\ &= q^{-\mu+\lambda-\delta}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta}}\left(\frac{a}{q^\delta}\right)q^{-(\lambda-\delta)} \sum_{0\leqslant \ell<q^{\lambda-\delta}} \varphi_{q^{\lambda-\delta}}\left(\frac{a}{q^\lambda}+\frac{\ell}{q^{\lambda-\delta}}\right) \\ &\leqslant \Phi(q^{\lambda-\delta})q^{-\mu+\lambda-\delta}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta}}\left(\frac{a}{q^\delta}\right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne (23) . □

LEMME 13. *Pour des entiers μ, λ et δ tels que $1\leqslant\mu<\lambda$ et $0\leqslant\delta\leqslant\lambda-\mu$, et pour $\ell\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on a*

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h+\ell,\alpha)| \leqslant \Phi(q^\mu)|F_\delta(a,\alpha)F_\delta(a+\ell,\alpha)|, \tag{24}$$

où Φ est définie par (12).

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h+\ell,\alpha)|\\
&\qquad = \sum_{\substack{0\leqslant h'<q^{\lambda-\mu}\\ h'\equiv a \bmod q^\delta}} \sum_{0\leqslant h''<q^\mu} |F_{\mu,\lambda}(h'+h''q^{\lambda-\mu},\alpha)F_{\lambda-\mu}(h'+h''q^{\lambda-\mu}+\ell,\alpha)|\\
&\qquad = \sum_{\substack{0\leqslant h'<q^{\lambda-\mu}\\ h'\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda-\mu}(h',\alpha)F_{\lambda-\mu}(h'+\ell,\alpha)| \sum_{0\leqslant h''<q^\mu} q^{-\mu}\varphi_{q^\mu}\left(\frac{h'+h''q^{\lambda-\mu}}{q^\lambda}\right).
\end{aligned}$$

D'après (12), on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h+\ell,\alpha)|\\
&\qquad \leqslant \Phi(q^\mu) \sum_{\substack{0\leqslant h'<q^{\lambda-\mu}\\ h'\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda-\mu}(h',\alpha)F_{\lambda-\mu}(h'+\ell,\alpha)|\\
&\qquad \leqslant \Phi(q^\mu)\Bigg(\sum_{\substack{0\leqslant h'<q^{\lambda-\mu}\\ h'\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda-\mu}(h',\alpha)|^2\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{\substack{0\leqslant h'<q^{\lambda-\mu}\\ h'\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda-\mu}(h'+\ell,\alpha)|^2\Bigg)^{1/2}
\end{aligned}$$

ce qui, en appliquant (18), conduit à (24). □

LEMME 14. *Pour des entiers μ, λ et δ tels que $1\leqslant\mu<\lambda$ et $\lambda-\mu\leqslant\delta\leqslant\lambda$, et pour $a\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on a*

$$\sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2<q^\lambda\\ h_1+h_2\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)| \leqslant \Phi(q^{\lambda-\delta})\Phi(q^\mu), \tag{25}$$

où Φ est définie par (12).

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2<q^\lambda\\ h_1+h_2\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)|\\
&\qquad\qquad = \sum_{0\leqslant h_2<q^\lambda} |F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)| \sum_{\substack{0\leqslant h_1<q^\lambda\\ h_1\equiv -h_2+a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)|.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (23), et en utilisant la majoration

$$q^{-\mu+\lambda-\delta}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta}}((-h_2+a)q^{-\delta}) \leqslant 1,$$

on obtient

$$\sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2<q^\lambda\\ h_1+h_2\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)| \leqslant \Phi(q^{\lambda-\delta}) \sum_{0\leqslant h_2<q^\lambda} |F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\lambda-\mu}(-h_2+a,\alpha)|.$$

En appliquant (24) avec $\delta=0$, comme $F_{\mu,\lambda}$ et $F_{\lambda-\mu}$ sont périodiques de période q^λ, on a

$$\sum_{0\leqslant h_2<q^\lambda} |F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\lambda-\mu}(-h_2+a,\alpha)| \leqslant \Phi(q^\mu),$$

ce qui conduit à (25). □

4.3. Sommes de Gauss quadratiques

Soient $a,b,m\in\mathbb{Z}$ avec $m\geqslant 1$. On définit les sommes de Gauss

$$G(a,b;m) := \sum_{n=0}^{m-1} e\left(\frac{an^2+bn}{m}\right). \tag{26}$$

Proposition 1. *Si $d=(a,m)$, on a*

- *si $d|b$ alors $G(a,b;m)=dG(a/d,b/d;m/d)$;*
- *si $d\nmid b$ alors $G(a,b;m)=0$.*

Preuve. Posons $m'=m/d$, $a'=a/d$. En écrivant $n=km'+r$, on obtient

$$G(a,b;m) = \sum_{r=0}^{m'-1}\sum_{k=0}^{d-1} e\left(\frac{da'(km'+r)^2+b(km'+r)}{dm'}\right) = \sum_{r=0}^{m'-1} e\left(\frac{a'r^2}{m'}+\frac{br}{dm'}\right)\sum_{k=0}^{d-1} e\left(\frac{bk}{d}\right).$$

Si $d|b$ la somme sur k vaut d et on obtient $G(a,b;m)=dG(a/d,b/d;m/d)$.
Si $d\nmid b$ la somme (géométrique) sur k vaut 0 et on obtient $G(a,b;m)=0$. □

Proposition 2. *Pour tous $a,b,m\in\mathbb{Z}$ avec $m\geqslant 1$, en posant $d=(a,m)$, on a*

$$|G(a,b;m)| \leqslant \sqrt{2dm}. \tag{27}$$

Preuve. Si $d\nmid b$ alors, d'après la proposition 1, on a $G(a,b;m)=0$ ce qui établit (27). Si $d|b$ alors, d'après la proposition 1, on a $G(a,b;m)=dG(a/d,b/d;m/d)$. Or, d'après [13, inégalité (7.4.2), p. 93], comme $(a/d,m/d)=1$, on a $G(a/d,b/d;m/d)\leqslant\sqrt{2m/d}$, ce qui, en multipliant par d, établit (27). □

5. Démonstration du théorème 1

Pour $q\geqslant 2$ et α tel que $(q-1)\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, posons $f(n)=\alpha s_q(n)$. L'objectif de cette partie est de montrer qu'il existe $\sigma_q(\alpha)>0$ et $\nu_1:=\nu_1(q,\alpha)\geqslant 2$ tels que pour tout nombre entier $\nu\geqslant\nu_1$, la somme

$$S_1:=\sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant x} e(f(n^2)) \tag{28}$$

vérifie

$$|S_1|\leqslant 3(q\log q)^{5/2}\tau(q)^{1/2}\nu^{\omega(q)/2+3}q^{(1-\sigma_q(\alpha))\nu} \tag{29}$$

uniformément pour tout x vérifiant $q^{\nu-1}<x\leqslant q^\nu$ (les valeurs explicites de $\sigma_q(\alpha)$ et de $\nu_1(q,\alpha)$ seront données respectivement par les formules (79) et (78)).

En effet le théorème 1 résulte facilement de la majoration (29) car si $q^{\nu-1}<x\leqslant q^\nu$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant x} e(f(n^2)) = e(f(1)) &+ \sum_{1\leqslant j\leqslant \nu_1-1}\ \sum_{q^{j-1}<n\leqslant q^j} e(f(n^2))\\ &+\sum_{\nu_1\leqslant j\leqslant \nu-1}\ \sum_{q^{j-1}<n\leqslant q^j} e(f(n^2)) + \sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant x} e(f(n^2)),\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\Bigl|\sum_{1\leqslant n\leqslant x} e(f(n^2))\Bigr| &\leqslant q^{\nu_1-1}+3(q\log q)^{5/2}\tau(q)^{1/2}\sum_{\nu_1\leqslant j\leqslant\nu} j^{\omega(q)/2+3}q^{(1-\sigma_q(\alpha))j}\\ &\leqslant q^{\nu_1-1}+3(q\log q)^{5/2}\tau(q)^{1/2}\nu^{\omega(q)/2+4}q^{(1-\sigma_q(\alpha))\nu}\\ &\leqslant 4(q\log q)^{5/2}\tau(q)^{1/2}\nu^{\omega(q)/2+4}q^{(1-\sigma_q(\alpha))\nu}\end{aligned}$$

pour

$$\nu\geqslant \nu_0(q,\alpha):=\frac{\nu_1(q,\alpha)}{1-\sigma_q(\alpha)}, \tag{30}$$

ce qui implique

$$\Bigl|\sum_{1\leqslant n\leqslant x} e(f(n^2))\Bigr|\leqslant 4q^{7/2}(\log q)^{5/2}\tau(q)^{1/2}\left(1+\frac{\log x}{\log q}\right)^{\omega(q)/2+4} x^{1-\sigma_q(\alpha)},$$

pour

$$x\geqslant x_0:=q^{\nu_0-1}+1. \tag{31}$$

5.1. Application de l'inégalité de van der Corput

L'objectif de ce paragraphe est de majorer la somme S_1 par des sommes étendues à tout l'intervalle $]q^{\nu-1},q^\nu]$ faisant intervenir des différences de la forme $f((n+r)^2)-f(n^2)$. Pour cela nous allons utiliser la variante suivante de l'inégalité de van der Corput, inspirée de [22] :

LEMME 15. *Pour des entiers* $1\leqslant A\leqslant B\leqslant N$ *et des nombres complexes* $z_1,\dots,z_N$ *de module* $\leqslant 1$, *on a pour tout entier* $R\geqslant 1$,

$$\Big|\sum_{n=A}^{B} z_n\Big| \leqslant \bigg(\frac{B-A+1}{R}\sum_{|r|<R}\Big(1-\frac{|r|}{R}\Big)\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ 1\leqslant n+r\leqslant N}} z_{n+r}\bar{z}_n\bigg)^{1/2}+\frac{R}{2}.$$

Preuve. Par commodité on pose $z_n=0$ pour $n\leqslant 0$ et pour $n\geqslant N+1$. Comme les nombres complexes z_n sont de module $\leqslant 1$, on a

$$\Big|R\sum_{n=A}^{B} z_n-\sum_{-R/2<r\leqslant R/2}\sum_{n=A}^{B} z_{n+r}\Big| \leqslant \sum_{-R/2<r\leqslant R/2} 2|r| \leqslant \frac{R^2}{2},$$

donc

$$\Big|\sum_{n=A}^{B} z_n\Big| \leqslant \frac{1}{R}\sum_{n=A}^{B}\Big|\sum_{-R/2<r\leqslant R/2} z_{n+r}\Big|+\frac{R}{2}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\bigg(\sum_{n=A}^{B}\Big|\sum_{-R/2<r\leqslant R/2} z_{n+r}\Big|\bigg)^2 &\leqslant (B-A+1)\sum_{n=A}^{B}\Big|\sum_{-R/2<r\leqslant R/2} z_{n+r}\Big|^2\\ &\leqslant (B-A+1)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|\sum_{-R/2<r\leqslant R/2} z_{n+r}\Big|^2\\ &= (B-A+1)\sum_{-R/2<r_1\leqslant R/2}\;\sum_{-R/2<r_2\leqslant R/2}\;\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{n+r_1}\bar{z}_{n+r_2}\\ &= (B-A+1)\sum_{-R/2<r_1\leqslant R/2}\;\sum_{-R/2<r_2\leqslant R/2}\;\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_{m+r_1-r_2}\bar{z}_{m}\\ &= (B-A+1)\sum_{-R<r<R}(R-|r|)\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_{m+r}\bar{z}_m,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité attendue en divisant par R^2. □

Soit ϱ un nombre entier tel que $1\leqslant\varrho\leqslant\frac{1}{2}\nu$. En appliquant le lemme 15 à la somme S_1 définie par (28), avec $A=1$, $B=\lfloor x\rfloor-q^{\nu-1}$, $N=q^\nu-q^{\nu-1}$, $z_n=e(f((q^{\nu-1}+n)^2))$ et $R=q^\varrho$, on obtient

$$|S_1|\leqslant q^{(\nu-\varrho)/2}\bigg|\sum_{|r|<q^\varrho}\Big(1-\frac{|r|}{q^\varrho}\Big)\bigg(\sum_{\substack{q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu\\ q^{\nu-1}<n+r\leqslant q^\nu}} e(f((n+r)^2)-f(n^2))\bigg)\bigg|^{1/2}+\frac{q^\varrho}{2}.$$

En supprimant la condition de sommation $q^{\nu-1}<n+r\leqslant q^\nu$, on introduit dans la valeur absolue ci-dessus un terme d'erreur majoré par

$$\sum_{1\leqslant|r|<q^\varrho}\left(1-\frac{|r|}{q^\varrho}\right)2|r|=\frac{2}{3}(q^\varrho-1)(q^\varrho+1)\leqslant\frac{2}{3}q^{2\varrho}.$$

En séparant les cas $r=0$ et $r\neq 0$ et en observant que

$$\sum_{1\leqslant|r|<q^\varrho}\left(1-\frac{|r|}{q^\varrho}\right)=q^\varrho-1\leqslant q^\varrho,$$

nous obtenons finalement

$$|S_1|\leqslant q^{\nu-\varrho/2}+\sqrt{\frac{2}{3}}q^{(\nu+\varrho)/2}+\frac{q^\varrho}{2}+q^{\nu/2}\max_{1\leqslant|r|<q^\varrho}\left|\sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu}e(f((n+r)^2)-f(n^2))\right|^{1/2}. \tag{32}$$

Pour poursuivre la démonstration, nous allons montrer que seuls les chiffres de poids faible dans la différence $f((n+r)^2)-f(n^2)$ contribuent de manière significative. Nous allons donc introduire une notion de somme des chiffres tronquée et montrer que l'on peut remplacer la fonction f par cette fonction tronquée.

5.2. Somme des chiffres tronquée

La fonction f_λ définie par (7) est clairement périodique de période q^λ. Cette fonction tronquée apparaît dans [10] où Drmota et Rivat étudient certaines propriétés de $f_\lambda(n^2)$ lorsque λ est de l'ordre de $\log n$. Elle intervient également dans [18] dans le cadre de l'étude de la somme des chiffres des nombres premiers.

LEMME 16. *Pour tous ν et ϱ entiers avec $\nu\geqslant 2$ et $1\leqslant\varrho\leqslant\frac{1}{2}\nu$, pour tout $r\in\mathbb{Z}$ avec $|r|<q^\varrho$, le nombre $E(r,\nu,\varrho)$ d'entiers n tels que $q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu$ et*

$$f((n+r)^2)-f(n^2)\neq f_{\nu+2\varrho+1}((n+r)^2)-f_{\nu+2\varrho+1}(n^2),$$

vérifie

$$E(r,\nu,\varrho)\leqslant q^{\nu-\varrho}+q^{\nu-2\varrho-1}+q^{(\nu+\varrho+1)/2}. \tag{33}$$

Preuve. On a $0\leqslant|2nr+r^2|<2q^\nu(q^\varrho-1)+q^{2\varrho}<q^{\nu+\varrho+1}$.

Supposons $0\leqslant r<q^\varrho$. Lorsqu'on effectue l'addition $n^2+2nr+r^2$, les chiffres de n^2 d'indice $\geqslant\nu+\varrho+1$ ne pourront être modifiés que par propagation d'une retenue. Nous devons donc compter les entiers n pour lesquels les chiffres a_j de l'écriture en base q de

n^2 vérifient $a_j=q-1$ pour $\nu+\varrho+1\leqslant j<\nu+2\varrho+1$, c'est-à-dire les entiers n pour lesquels il existe un entier m tel que $\lfloor n^2/q^{\nu+\varrho+1}\rfloor=q^\varrho m-1$. Cette égalité signifie que

$$q^\varrho m-1\leqslant \frac{n^2}{q^{\nu+\varrho+1}}<q^\varrho m,$$

ce qui implique, comme m est entier et $q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu$, d'une part que

$$0<\frac{n^2}{q^{\nu+2\varrho+1}}<m\leqslant\left\lfloor\frac{n^2}{q^{\nu+2\varrho+1}}+q^{-\varrho}\right\rfloor\leqslant\lfloor q^{\nu-2\varrho-1}+q^{-\varrho}\rfloor=q^{\nu-2\varrho-1},$$

et d'autre part que pour chaque valeur admissible de m, le nombre de n correspondants est majoré par

$$1+\sqrt{q^{\nu+2\varrho+1}m}\big(1-\sqrt{1-q^{-\varrho}m^{-1}}\,\big).$$

Pour $0\leqslant u\leqslant\frac{3}{4}$, on a

$$1-\sqrt{1-u}=\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\int_0^u(u-t)(1-t)^{-3/2}\,dt\leqslant\frac{u}{2}+u^2,$$

donc comme $m\geqslant1$ et $\varrho\geqslant1$, d'où $0\leqslant q^{-\varrho}m^{-1}\leqslant\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$, on obtient

$$\begin{aligned}E(r,\nu,\varrho)&\leqslant\sum_{0<m\leqslant q^{\nu-2\varrho-1}}\left(1+\left(\frac{q^{-\varrho}m^{-1}}{2}+q^{-2\varrho}m^{-2}\right)\sqrt{q^{\nu+2\varrho+1}m}\right)\\&\leqslant q^{\nu-2\varrho-1}+q^{\nu-\varrho}+\zeta\big(\tfrac{3}{2}\big)q^{(\nu+1)/2-\varrho},\end{aligned}$$

d'où, en observant que $t\mapsto t^{-3/2}$ est convexe et donc que

$$\zeta\big(\tfrac{3}{2}\big)\leqslant\int_{1/2}^{+\infty}t^{-3/2}\,dt=2^{3/2}\leqslant q^{3\varrho/2},$$

la majoration (33).

Lorsque $-q^\varrho<r<0$ en procédant de même nous devons compter les entiers n tels que les chiffres a_j du carré n^2 vérifient $a_j=0$ pour $\nu+\varrho+1\leqslant j<\nu+2\varrho+1$, c'est-à-dire les entiers n pour lesquels il existe un entier m tel que $\lfloor n^2/q^{\nu+\varrho+1}\rfloor=q^\varrho m$. Cette égalité signifie que

$$q^\varrho m\leqslant\frac{n^2}{q^{\nu+\varrho+1}}<q^\varrho m+1,$$

ce qui implique, comme m est entier et $q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu$, d'une part que

$$0\leqslant m\leqslant\frac{n^2}{q^{\nu+2\varrho+1}}\leqslant q^{\nu-2\varrho-1},$$

et d'autre part que pour chaque valeur admissible de m, le nombre de n correspondants est majoré par

$$1+\sqrt{q^{\nu+2\varrho+1}m}\left(\sqrt{1+q^{-\varrho}m^{-1}}-1\right)$$

lorsque $m\neq 0$, et par $q^{(\nu+\varrho+1)/2}$ lorsque $m=0$. Pour $u\geqslant 0$, on a $\sqrt{1+u}-1\leqslant\frac{1}{2}u$, donc

$$\begin{aligned}E(r,\nu,\varrho)&\leqslant q^{(\nu+\varrho+1)/2}+\sum_{0<m\leqslant q^{\nu-2\varrho-1}}\left(1+\frac{q^{-\varrho}m^{-1}\sqrt{q^{\nu+2\varrho+1}m}}{2}\right)\\&\leqslant q^{(\nu+\varrho+1)/2}+q^{\nu-2\varrho-1}+q^{\nu-\varrho},\end{aligned}$$

d'où la majoration (33). □

D'après le lemme 16, dans la sommation sur n du membre de droite de (32), on peut remplacer f par la fonction tronquée $f_{\nu+2\varrho+1}$ définie par (7) au prix d'une erreur $E(r,\nu,\varrho)$ pour cette somme. On obtient

$$|S_1|\leqslant q^{\nu-\varrho/2}+\sqrt{\tfrac{2}{3}}q^{(\nu+\varrho)/2}+\tfrac{1}{2}q^{\varrho}+q^{\nu/2}\max_{1\leqslant|r|<q^{\varrho}}(|S_2(r,\nu,\varrho)|+E(r,\nu,\varrho))^{1/2},$$

où l'on a posé

$$S_2(r,\nu,\varrho):=\sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^{\nu}}e(f_{\nu+2\varrho+1}((n+r)^2)-f_{\nu+2\varrho+1}(n^2)). \tag{34}$$

Pour fixer les idées, nous faisons maintenant l'hypothèse que

$$\nu\geqslant 10 \tag{35}$$

et

$$1\leqslant\varrho\leqslant\tfrac{1}{10}\nu. \tag{36}$$

Sous cette hypothèse, on a d'une part

$$\begin{aligned}q^{\nu-\varrho/2}+\sqrt{\tfrac{2}{3}}q^{(\nu+\varrho)/2}+\tfrac{1}{2}q^{\varrho}&=\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}q^{-\nu/2+\varrho}+\tfrac{1}{2}q^{-\nu+3\varrho/2}\right)q^{\nu-\varrho/2}\\&\leqslant\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}2^{-4}+2^{-19/2}\right)q^{\nu-\varrho/2}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$E(r,\nu,\varrho)\leqslant(1+q^{-\varrho-1}+q^{(-\nu+3\varrho+1)/2})q^{\nu-\varrho}\leqslant(1+2^{-2}+2^{-3})q^{\nu-\varrho}=\tfrac{11}{8}q^{\nu-\varrho}.$$

Ainsi, à l'aide de (36), on déduit de (32) que

$$|S_1|\leqslant\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}2^{-4}+2^{-19/2}\right)q^{\nu-\varrho/2}+q^{\nu/2}\left(\tfrac{11}{8}q^{\nu-\varrho}+\max_{1\leqslant|r|<q^{\varrho}}|S_2(r,\nu,\varrho)|\right)^{1/2}. \tag{37}$$

Pour déduire (29) de (37), il suffit de montrer qu'il existe $\sigma_q(\alpha)>0$ et $\nu_1:=\nu_1(q,\alpha)\geqslant 10$ tels que pour tous nombres entiers ν, ϱ et r vérifiant $\nu\geqslant\nu_1$, $\varrho/\nu\leqslant 2\sigma_q(\alpha)$ et $1\leqslant|r|<q^{\varrho}$, on a

$$|S_2(r,\nu,\varrho)|\leqslant 2(q\log q)^{5/2}\tau(q)^{1/2}\nu^{\omega(q)/2+3}q^{\nu-\varrho}, \tag{38}$$

et d'observer que $q\log q>1$ et

$$1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}2^{-4}+2^{-19/2}+\sqrt{\tfrac{11}{8}+2}<3.$$

5.3. Somme des chiffres doublement tronquées

L'objectif de ce paragraphe est de transformer les sommes $S_2(r,\nu,\varrho)$ afin d'éliminer maintenant la contribution des chiffres de poids faible dans l'estimation de cette somme. À cet effet, nous allons utiliser la généralisation suivante de l'inégalité de van der Corput :

LEMME 17. *Soient $z_1,...,z_N$ des nombres complexes. Pour tous entiers $k\geqslant 1$ et $R\geqslant 1$, on a*

$$\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} z_n\Big|^2\leqslant\frac{N+k(R-1)}{R}\sum_{|r|<R}\left(1-\frac{|r|}{R}\right)\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ 1\leqslant n+kr\leqslant N}} z_{n+kr}\bar{z}_n.$$

Remarque. Pour $k=1$, on retrouve l'inégalité de van der Corput usuelle (voir par exemple [13, lemme 2.5, p. 10]).

Preuve. Par commodité on pose $z_n=0$ pour $n\leqslant 0$ et pour $n\geqslant N+1$. On a les égalités

$$R\sum_n z_n=\sum_{r=0}^{R-1}\sum_n z_{n+kr}=\sum_n\sum_{r=0}^{R-1} z_{n+kr}.$$

Les entiers n pour lesquels la dernière somme est potentiellement non nulle vérifient les inégalités $1-k(R-1)\leqslant n\leqslant N$, donc leur nombre ne dépasse pas $N+k(R-1)$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
R^2\Big|\sum_n z_n\Big|^2 &\leqslant (N+k(R-1))\sum_n\Big|\sum_{r=0}^{R-1} z_{n+kr}\Big|^2\\
&\leqslant (N+k(R-1))\sum_{r_1=0}^{R-1}\sum_{r_2=0}^{R-1}\sum_n z_{n+kr_1}\bar{z}_{n+kr_2}\\
&\leqslant (N+k(R-1))\sum_{r_1=0}^{R-1}\sum_{r_2=0}^{R-1}\sum_m z_{m+k(r_1-r_2)}\bar{z}_m\\
&\leqslant (N+k(R-1))\sum_{-R<r<R}(R-|r|)\sum_m z_{m+kr}\bar{z}_m,
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité attendue en divisant par R^2. $\square$

Nous introduisons

$$\lambda = \nu + 2\varrho + 1, \tag{39}$$

et μ un paramètre entier à choisir ultérieurement, vérifiant

$$1 \leqslant \mu \leqslant \nu - 2\varrho - 1. \tag{40}$$

En appliquant le lemme 17 à la somme $S_2(r,\nu,\varrho)$ définie par (34) avec $N = q^\nu - q^{\nu-1}$, $z_n = e(f_\lambda((q^{\nu-1}+n+r)^2) - f_\lambda((q^{\nu-1}+n)^2))$, $k = q^\mu$ et $R = q^{2\varrho}$, et en posant

$$S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu) := \sum_{n\in I(\nu,s,\mu)} e(f_\lambda((n+r+sq^\mu)^2) - f_\lambda((n+r)^2) - f_\lambda((n+sq^\mu)^2) + f_\lambda(n^2)), \tag{41}$$

où l'intervalle $I(\nu,s,\mu)$ est défini par

$$I(\nu,s,\mu) := \{n \in \mathbb{N} : q^{\nu-1} < n \leqslant q^\nu \text{ et } q^{\nu-1} < n + sq^\mu \leqslant q^\nu\},$$

on obtient en observant que $\mu + 2\varrho \leqslant \nu - 1$,

$$|S_2(r,\nu,\varrho)|^2 \leqslant q^{\nu-2\varrho} \sum_{|s|<q^{2\varrho}} \left(1 - \frac{|s|}{q^{2\varrho}}\right) |S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)|.$$

En séparant les cas $s=0$ et $s\neq 0$, et en observant que

$$\sum_{1\leqslant |s|<q^{2\varrho}} \left(1 - \frac{|s|}{q^{2\varrho}}\right) = q^{2\varrho} - 1,$$

on obtient

$$|S_2(r,\nu,\varrho)|^2 \leqslant q^{2\nu-2\varrho} + q^\nu \max_{1\leqslant |s|<q^{2\varrho}} |S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)|. \tag{42}$$

Comme la fonction f_μ est périodique de période q^μ, on a

$$f_\lambda((n+r+sq^\mu)^2) - f_\lambda((n+r)^2) = f_{\mu,\lambda}((n+r+sq^\mu)^2) - f_{\mu,\lambda}((n+r)^2)$$

et

$$f_\lambda((n+sq^\mu)^2) - f_\lambda(n^2) = f_{\mu,\lambda}((n+sq^\mu)^2) - f_{\mu,\lambda}(n^2),$$

où $f_{\mu,\lambda}$ a été définie par (8). On en déduit

$$\begin{aligned} &S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu) \\ &\quad = \sum_{n\in I(\nu,s,\mu)} e(f_{\mu,\lambda}((n+r+sq^\mu)^2) - f_{\mu,\lambda}((n+r)^2) - f_{\mu,\lambda}((n+sq^\mu)^2) + f_{\mu,\lambda}(n^2)). \end{aligned} \tag{43}$$

La suite de notre travail va consister à démontrer qu'il existe $\sigma_q(\alpha) > 0$ et $\nu_1 := \nu_1(q,\alpha) \geqslant 10$ tels que pour tous nombres entiers ν, ϱ, r, s et μ vérifiant $\nu \geqslant \nu_1$, $\varrho/\nu \leqslant 2\sigma_q(\alpha)$, $1 \leqslant \mu \leqslant \nu - 2\varrho - 1$, $1 \leqslant |r| < q^\varrho$ et

$$1 \leqslant |s| < q^{2\varrho}, \tag{44}$$

on a

$$|S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)| \leqslant \tfrac{1}{4}(q\log q)^5 \tau(q) \nu^{\omega(q)+6} q^{\nu-2\varrho}, \tag{45}$$

ce qui, en utilisant (42) et en observant que $q\log q > 1$ et $\sqrt{\frac{1}{4}+1} < 2$, permet d'obtenir (38).

5.4. Introduction des sommes de Gauss quadratiques

La proposition suivante est une variante d'un procédé connu au moins depuis Vinogradov.

LEMME 18. *Soit un entier $m\geqslant 2$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes périodique de période m. Alors pour tous $M,N\in\mathbb{Z}$ avec $N\geqslant 1$, on a*

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} z_n = \sum_{\ell=0}^{m-1} w_m(M,N,\ell) \sum_{n=0}^{m-1} z_n\, e\Big(\frac{\ell n}{m}\Big),$$

où

$$w_m(M,N,\ell) := \frac{1}{m} \sum_{k=M+1}^{M+N} e\Big(-\frac{\ell k}{m}\Big)$$

vérifie

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} |w_m(M,N,\ell)| \leqslant \frac{N}{m} + \frac{2}{\pi}\log\frac{4m}{\pi} \leqslant \frac{2}{\pi}\Big\lceil\frac{N}{m}\Big\rceil \log\frac{4e^{\pi/2}m}{\pi}.$$

Preuve. Pour chaque classe résiduelle n modulo m on compte le nombre d'indices k tels que $M+1\leqslant k\leqslant M+N$ et $k\equiv n \bmod m$:

$$\sum_{k=M+1}^{M+N} z_k = \sum_{n=0}^{m-1} z_n \sum_{k=M+1}^{M+N} \frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1} e\Big(\frac{\ell(n-k)}{m}\Big),$$

d'où l'égalité annoncée. Comme

$$|w_m(M,N,\ell)| \leqslant \frac{1}{m}\min\Big(N, \frac{1}{|\sin(\pi\ell/m)|}\Big),$$

en utilisant la convexité de la fonction $t\mapsto(\sin t)^{-1}$, on a (méthode des trapèzes)

$$\sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{1}{\sin(\pi\ell/m)} \leqslant \int_{1/2}^{m-1/2} \frac{du}{\sin(\pi u/m)} = \frac{2m}{\pi}\log\cot\frac{\pi}{4m} \leqslant \frac{2m}{\pi}\log\frac{4m}{\pi},$$

donc

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} |w_m(M,N,\ell)| \leqslant \frac{N}{m} + \frac{2}{\pi}\log\frac{4m}{\pi}.$$

De plus,

$$\frac{N}{m} + \frac{2}{\pi}\log\frac{4m}{\pi} \leqslant \Big\lceil\frac{N}{m}\Big\rceil\Big(1+\frac{2}{\pi}\log\frac{4m}{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big\lceil\frac{N}{m}\Big\rceil\log\frac{4e^{\pi/2}m}{\pi}. \qquad \square$$

Nous observons que $f_{\mu,\lambda}$ est périodique de période q^λ. Donc on peut écrire

$$\begin{aligned}
&S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)\\
&\quad=\frac{1}{q^{4\lambda}}\sum_{0\leqslant u_1<q^\lambda}\ \sum_{0\leqslant u_2<q^\lambda}\ \sum_{0\leqslant u_3<q^\lambda}\ \sum_{0\leqslant u_4<q^\lambda} e(f_{\mu,\lambda}(u_1)-f_{\mu,\lambda}(u_2)-f_{\mu,\lambda}(u_3)+f_{\mu,\lambda}(u_4))\\
&\qquad\times\sum_{n\in I(\nu,s,\mu)}\ \sum_{0\leqslant h_1<q^\lambda} e\biggl(\frac{h_1((n+r+sq^\mu)^2-u_1)}{q^\lambda}\biggr)\sum_{0\leqslant h_2<q^\lambda} e\biggl(\frac{h_2((n+r)^2-u_2)}{q^\lambda}\biggr)\\
&\qquad\times\sum_{0\leqslant h_3<q^\lambda} e\biggl(\frac{h_3((n+sq^\mu)^2-u_3)}{q^\lambda}\biggr)\sum_{0\leqslant h_4<q^\lambda} e\biggl(\frac{h_4(n^2-u_4)}{q^\lambda}\biggr).
\end{aligned}$$

En utilisant (20), on obtient

$$\begin{aligned}
S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)=&\sum_{0\leqslant h_1<q^\lambda} F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)\sum_{0\leqslant h_2<q^\lambda}\overline{F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)}\\
&\times\sum_{0\leqslant h_3<q^\lambda}\overline{F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)}\sum_{0\leqslant h_4<q^\lambda} F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)\\
&\times\sum_{n\in I(\nu,s,\mu)} e\biggl(\frac{h_1(n+r+sq^\mu)^2+h_2(n+r)^2+h_3(n+sq^\mu)^2+h_4n^2}{q^\lambda}\biggr).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 18 avec $m=q^\lambda$ et $N=|I(\nu,s,\mu)|\leqslant q^\nu\leqslant q^\lambda$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)=&\sum_{0\leqslant \ell<q^\lambda}\frac{1}{q^\lambda}\sum_{k\in I(\nu,s,\mu)} e\biggl(\frac{-\ell k}{q^\lambda}\biggr)\sum_{0\leqslant h_1<q^\lambda} F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)\sum_{0\leqslant h_2<q^\lambda}\overline{F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)}\\
&\times\sum_{0\leqslant h_3<q^\lambda}\overline{F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)}\sum_{0\leqslant h_4<q^\lambda} F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)\\
&\times\sum_{n<q^\lambda} e\biggl(\frac{h_1(n+r+sq^\mu)^2+h_2(n+r)^2+h_3(n+sq^\mu)^2+h_4n^2+\ell n}{q^\lambda}\biggr),
\end{aligned}$$

d'où, en utilisant la majoration du lemme 18 et en découpant la somme selon la valeur de $d=(h_1+h_2+h_3+h_4,q^\lambda)$,

$$\begin{aligned}
&|S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)|\\
&\quad\leqslant\frac{2}{\pi}\log\biggl(\frac{4e^{\pi/2}}{\pi}q^\lambda\biggr)\\
&\qquad\times\max_{0\leqslant\ell<q^\lambda}\sum_{d\mid q^\lambda}\ \sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2,h_3,h_4<q^\lambda\\(h_1+h_2+h_3+h_4,q^\lambda)=d}}|F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|\\
&\qquad\times|G(h_1+h_2+h_3+h_4,2r(h_1+h_2)+2sq^\mu(h_1+h_3)+\ell;q^\lambda)|.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 1, lorsque $d\nmid 2r(h_1+h_2)+2sq^{\mu}(h_1+h_3)+\ell$, on a

$$G(h_1+h_2+h_3+h_4, 2r(h_1+h_2)+2sq^{\mu}(h_1+h_3)+\ell; q^{\lambda}) = 0,$$

et dans le cas contraire, d'après la proposition 2,

$$|G(h_1+h_2+h_3+h_4, 2r(h_1+h_2)+2sq^{\mu}(h_1+h_3)+\ell; q^{\lambda})| \leqslant \sqrt{2dq^{\lambda}},$$

donc

$$\begin{aligned} &|S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)| \\ &\quad \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\log\left(\frac{4e^{\pi/2}}{\pi}q^{\lambda}\right)q^{\lambda/2}\max_{0\leqslant \ell<q^{\lambda}}\sum_{d\mid q^{\lambda}} d^{1/2} \\ &\qquad \times \sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2,h_3,h_4<q^{\lambda}\\ (h_1+h_2+h_3+h_4,q^{\lambda})=d\\ d\mid 2r(h_1+h_2)+2sq^{\mu}(h_1+h_3)+\ell}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|. \end{aligned}$$

Nous allons introduire un paramètre Δ vérifiant

$$\Delta < \mu \tag{46}$$

que nous fixerons plus tard et découper la somme ci-dessus en trois sommes selon que $v_q(d)<\Delta$, $\Delta\leqslant v_q(d)<\mu$ et $v_q(d)\geqslant\mu$, où $v_q(d)$ désigne la valuation q-adique de d, c'est-à-dire le plus grand entier δ tel que $q^{\delta}\mid d$.

5.5. Les sommes S_4, S_5 et S_6

Au prix de quelques termes supplémentaires, nous pouvons remplacer la condition $(h_1+h_2+h_3+h_4, q^{\lambda})=d$ par $h_1+h_2+h_3+h_4\equiv 0 \bmod d$, et nous obtenons

$$|S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\log\left(\frac{4e^{\pi/2}}{\pi}q^{\lambda}\right)q^{\lambda/2}\max_{0\leqslant \ell<q^{\lambda}}(S_4+S_5+S_6) \tag{47}$$

avec

$$\begin{aligned} S_4 := S_4(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell) = &\sum_{\substack{d\mid q^{\lambda}\\ v_q(d)<\Delta}} d^{1/2} \\ &\times \sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2,h_3,h_4<q^{\lambda}\\ h_1+h_2+h_3+h_4\equiv 0 \bmod d\\ 2r(h_1+h_2)+2sq^{\mu}(h_1+h_3)+\ell\equiv 0 \bmod d}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|, \end{aligned}$$

$$S_5 := S_5(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell) \sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ \Delta\leqslant v_q(d)<\mu}} d^{1/2} \times \sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2,h_3,h_4<q^\lambda\\ h_1+h_2+h_3+h_4\equiv 0 \bmod d\\ 2r(h_1+h_2)+2sq^\mu(h_1+h_3)+\ell\equiv 0 \bmod d}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|,$$

$$S_6 := S_6(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell) \sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}} d^{1/2} \times \sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2,h_3,h_4<q^\lambda\\ h_1+h_2+h_3+h_4\equiv 0 \bmod d\\ 2r(h_1+h_2)+2sq^\mu(h_1+h_3)+\ell\equiv 0 \bmod d}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|.$$

LEMME 19. *Pour des entiers $0\leqslant\delta_1\leqslant\delta_2\leqslant\lambda$ avec $\lambda\geqslant 1$, et $\theta\in\mathbb{R}$, on a*

$$\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ \delta_1\leqslant v_q(d)\leqslant\delta_2}} d^{1/2}q^{\theta v_q(d)} \leqslant (\delta_2-\delta_1+1)\tau(q^{\lambda-\delta_1})2^{-\lambda/2}q^{\lambda/2}\max\{2^{\delta_1/2}q^{\theta\delta_1}, 2^{\delta_2/2}q^{\theta\delta_2}\}. \tag{48}$$

Preuve. En écrivant d sous la forme kq^δ on obtient

$$\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ \delta_1\leqslant v_q(d)\leqslant\delta_2}} d^{1/2}q^{\theta v_q(d)} = \sum_{\delta_1\leqslant\delta\leqslant\delta_2} q^{(1/2+\theta)\delta} \sum_{\substack{k\mid q^{\lambda-\delta}\\ (k,q)<q}} k^{1/2}.$$

Comme (k,q) est un diviseur strict de q, il en résulte que $(k,q)\leqslant\frac{1}{2}q$, et on en déduit que $k=(k,q^{\lambda-\delta})\leqslant(k,q)^{\lambda-\delta}\leqslant\left(\frac{1}{2}q\right)^{\lambda-\delta}$. De plus, le nombre d'entiers k admissibles est majoré par $\tau(q^{\lambda-\delta})$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ \delta_1\leqslant v_q(d)\leqslant\delta_2}} d^{1/2}q^{\theta v_q(d)} &\leqslant \sum_{\delta_1\leqslant\delta\leqslant\delta_2} \tau(q^{\lambda-\delta})\left(\frac{q}{2}\right)^{(\lambda-\delta)/2} q^{(1/2+\theta)\delta}\\ &\leqslant \tau(q^{\lambda-\delta_1})\left(\frac{q}{2}\right)^{\lambda/2} \sum_{\delta_1\leqslant\delta\leqslant\delta_2} 2^{\delta/2}q^{\theta\delta},\end{aligned}$$

d'où l'inégalité (48) en majorant $2^{\delta/2}q^{\theta\delta}$ par $\max\{2^{\delta_1/2}q^{\theta\delta_1}, 2^{\delta_2/2}q^{\theta\delta_2}\}$. □

Pour majorer $S_4(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)$, nous allons ignorer les conditions sur h_1, h_2, h_3 et h_4, et appliquer (22). On obtient

$$S_4(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell) \leqslant \sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)<\Delta}} d^{1/2}\Phi^4(q^\mu)q^{4(\lambda-\mu)}.$$

Il résulte de (48) avec $\delta_1=0$, $\delta_2=\Delta-1$ et $\theta=0$, que

$$\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)<\Delta}} d^{1/2}\leqslant \Delta\tau(q^\lambda)2^{-\lambda/2}q^{\lambda/2}2^{(\Delta-1)/2},$$

ce qui entraîne la majoration

$$S_4(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\,\Delta\Phi^4(q^\mu)\tau(q^\lambda)q^{4(\lambda-\mu)+\lambda/2-(\log 2/2\log q)(\lambda-\Delta)}. \tag{49}$$

Nous allons maintenant majorer $S_5(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)$ et $S_6(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)$. Posons $\tilde{d}=(d,2|r|)$. Comme $d|q^\lambda$, tous les facteurs premiers de $\tilde{d}$ sont aussi des facteurs premiers de q. Soit p un tel facteur premier. On a $p^{v_p(\tilde{d})}\leqslant 2|r|\leqslant 2q^\varrho$. Ainsi,

$$v_p(\tilde{d})\leqslant\left\lfloor\frac{\varrho\log q+\log 2}{\log p}\right\rfloor\leqslant\left\lfloor\varrho\frac{\log q}{\log 2}+1\right\rfloor=:\varrho_q, \tag{50}$$

et

$$\tilde{d}=\prod_{p|\tilde{d}}p^{v_p(\tilde{d})}\mid\prod_{p|\tilde{d}}p^{\varrho_q}\mid q^{\varrho_q}.$$

Choisissons

$$\Delta=\lambda-\mu+\varrho_q, \tag{51}$$

ce qui, d'après (46), nous impose la condition

$$\varrho_q<2\mu-\lambda=2\mu-\nu-2\varrho-1. \tag{52}$$

Il résulte de (40) et (52) que $\varrho_q\leqslant\mu$, d'où $\tilde{d}|q^\mu$ et donc la condition

$$2r(h_1+h_2)+2sq^\mu(h_1+h_3)+\ell\equiv 0 \bmod d$$

entraîne $\tilde{d}|\ell$, et en notant $r'=2r/\tilde{d}$, $s'=2sq^{\varrho_q}/\tilde{d}$ et $\ell'=\ell/\tilde{d}$, $d'=d/\tilde{d}$, cette condition équivaut à

$$r'(h_1+h_2)+s'q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell'\equiv 0 \bmod d'.$$

En notant maintenant r'' l'inverse de r' modulo d' (après avoir observé que $(r',d')=1$), $\ell''=r''\ell'$,

$$s''=r''s'=r''\frac{2sq^{\varrho_q}}{(d,2|r|)}, \tag{53}$$

cette condition est finalement équivalente à

$$h_1+h_2+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''\equiv 0 \bmod d'.$$

Si on pose $v_q(d)=\delta$, alors comme $\tilde{d}|q^{\varrho_q}$, ce qui implique $v_q(\tilde{d})\leqslant\varrho_q$, on en déduit que $v_q(d')=v_q(d)-v_q(\tilde{d})\geqslant\delta-\varrho_q$ ($\geqslant\lambda-\mu$ d'après (51) et $\delta\geqslant\Delta$), et donc

$$q^{\delta-\varrho_q} \mid d'. \tag{54}$$

On peut donc affaiblir la condition de sommation précédente en

$$h_1+h_2+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell'' \equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}. \tag{55}$$

Dans $S_5(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)$, la condition (55) devient $h_1+h_2\equiv-\ell'' \bmod q^{\delta-\varrho_q}$, d'où, en affaiblissant aussi la condition $h_1+h_2+h_3+h_4\equiv0 \bmod d$ en $h_1+h_2+h_3+h_4\equiv0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}$, on déduit

$$\begin{aligned} &S_5(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)\\ &\quad\leqslant \sum_{\substack{d|q^\lambda\\ \Delta\leqslant\delta=v_q(d)<\mu}} d^{1/2}\\ &\qquad\times \sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2,h_3,h_4<q^\lambda\\ h_1+h_2+h_3+h_4\equiv0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}\\ h_1+h_2\equiv-\ell'' \bmod q^{\delta-\varrho_q}}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|, \end{aligned}$$

on voit que les conditions de sommation deviennent

$$h_1+h_2 \equiv -\ell'' \bmod q^{\delta-\varrho_q} \quad \text{et} \quad h_3+h_4 \equiv \ell'' \bmod q^{\delta-\varrho_q}.$$

On peut appliquer (25) car d'après (51) on a $\delta-\varrho_q\geqslant\lambda-\mu$, et on obtient, à l'aide de (13),

$$S_5(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell) \leqslant \sum_{\substack{d|q^\lambda\\ \Delta\leqslant\delta=v_q(d)<\mu}} d^{1/2}\Phi^2(q^{\lambda-\delta+\varrho_q})\Phi^2(q^\mu) \leqslant \Phi^4(q^\mu) \sum_{\substack{d|q^\lambda\\ \Delta\leqslant v_q(d)<\mu}} d^{1/2}.$$

Il résulte de (48) avec $\delta_1=\Delta$, $\delta_2=\mu-1$ et $\theta=0$, que

$$\sum_{\substack{d|q^\lambda\\ \Delta\leqslant v_q(d)<\mu}} d^{1/2} \leqslant (\mu-\Delta)\tau(q^{\lambda-\Delta})2^{-\lambda/2}q^{\lambda/2}2^{(\mu-1)/2},$$

ce qui entraîne finalement la majoration

$$S_5(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mu-\Delta)\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\Delta})q^{\lambda/2-(\log 2/2\log q)(\lambda-\mu)}. \tag{56}$$

Dans $S_6(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)$, en affaiblissant la condition $h_1+h_2+h_3+h_4\equiv 0 \bmod d$ en $h_1+h_2+h_3+h_4\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}$, avec $\delta=v_q(d)$, on obtient

$$S_6(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)\leqslant \sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}} d^{1/2}\big(S_7(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)+S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\big) \tag{57}$$

avec

$$S_7(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d) := \sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2,h_3,h_4<q^\lambda\\ h_1+h_2+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}\\ h_3+h_4-s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)-\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}\\ \|(h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell'')/q^{\delta-\varrho_q}\|\geqslant q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q+4\varrho}}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|,$$

$$S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d) := \sum_{\substack{0\leqslant h_1,h_2,h_3,h_4<q^\lambda\\ h_1+h_2+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}\\ h_3+h_4-s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)-\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}\\ \|(h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell'')/q^{\delta-\varrho_q}\|< q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q+4\varrho}}} |F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|.$$

5.6. Majoration de S_7

Commençons par majorer $S_7(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)$. Notons $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des couples d'entiers (h_1,h_3) avec $0\leqslant h_1<q^\lambda$ et $0\leqslant h_3<q^\lambda$, qui vérifient

$$\left\|\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right\|\geqslant q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q+4\varrho}.$$

Comme d'après (51) on a $\delta-\varrho_q\geqslant\mu-\varrho_q\geqslant\lambda-\mu$, on peut appliquer (23) à la sommation sur h_2. En observant que d'après (13) on a $\Phi(q^{\lambda-\delta+\varrho_q})\leqslant\Phi(q^\mu)$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\leqslant h_2<q^\lambda\\ h_1+h_2+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}}} &|F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)|\\ &\leqslant \Phi(q^\mu)|F_{\lambda-\mu}(h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell'',\alpha)|\\ &\qquad\times q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta-\varrho_q}}\left(\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right)\\ &= \Phi(q^\mu)|F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)|\\ &\qquad\times q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta-\varrho_q}}\left(\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right).\end{aligned}$$

Or, pour $t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a $\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta-\varrho_q}}(t)\leqslant(\sin\pi\|t\|)^{-1}\leqslant(2\|t\|)^{-1}$, donc pour $(h_1,h_3)\in\mathcal{H}^+$, on a

$$q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta-\varrho_q}}\left(\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right)\leqslant\frac{q^{-4\varrho}}{2},$$

et on en déduit

$$\sum_{\substack{0\leqslant h_2<q^\lambda\\ h_1+h_2+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}}}|F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)|\leqslant\frac{1}{2}\Phi(q^\mu)q^{-4\varrho}|F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)|.$$

Comme d'après (51) on a $\delta-\varrho_q\geqslant\mu-\varrho_q\geqslant\lambda-\mu$, on peut appliquer (23) à la sommation sur h_4. En observant que d'après (13) on a $\Phi(q^{\lambda-\delta+\varrho_q})\leqslant\Phi(q^\mu)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\leqslant h_4<q^\lambda\\ h_3+h_4-s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)-\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}}}|F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|\\
&\qquad\leqslant\Phi(q^\mu)|F_{\lambda-\mu}(-h_3+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell'',\alpha)|\\
&\qquad\qquad\times q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta-\varrho_q}}\left(\frac{-h_3+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right)\\
&\qquad\leqslant\Phi(q^\mu)|F_{\lambda-\mu}(-h_3+\ell'',\alpha)|,
\end{aligned}$$

où cette dernière majoration est obtenue à l'aide de la majoration triviale $\varphi_k(t)\leqslant k$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&S_7(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\\
&\quad\leqslant\frac{1}{2}\Phi^2(q^\mu)q^{-4\varrho}\\
&\qquad\times\sum_{(h_1,h_3)\in\mathcal{H}^+}|F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\lambda-\mu}(-h_3+\ell'',\alpha)|\\
&\quad\leqslant\frac{1}{2}\Phi^2(q^\mu)q^{-4\varrho}\Bigg(\sum_{0\leqslant h<q^\lambda}|F_{\mu,\lambda}(h,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h+\ell'',\alpha)|\Bigg)^2.
\end{aligned}$$

On en déduit, grâce à (24),

$$S_7(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant\tfrac{1}{2}\Phi^4(q^\mu)q^{-4\varrho}. \tag{58}$$

En appliquant (48) avec $\delta_1=\mu$, $\delta_2=\lambda$ et $\theta=0$, on a

$$\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}}d^{1/2}\leqslant(\lambda-\mu+1)\tau(q^{\lambda-\mu})q^{\lambda/2},$$

donc la contribution de $S_7(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)$ dans la majoration (57) est

$$\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}}d^{1/2}S_7(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant\frac{1}{2}(\lambda-\mu+1)\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\mu})q^{\lambda/2-4\varrho}. \tag{59}$$

5.7. Majoration de S_8

Notons $\mathcal{H}^-$ l'ensemble des couples d'entiers (h_1,h_3) avec $0\leqslant h_1<q^\lambda$, $0\leqslant h_3<q^\lambda$, qui vérifient
$$\left\|\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right\|<q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q+4\varrho},$$
et posons
$$\varrho'_q:=\left\lfloor\frac{2\varrho\log q}{\log 2}+1\right\rfloor \tag{60}$$
(cette quantité apparaîtra de manière naturelle dans la majoration (64)).

Supposons que
$$\mu+\varrho_q+\varrho'_q\leqslant\lambda, \tag{61}$$
et commençons par montrer que lorsque δ vérifie $\mu+\varrho_q+\varrho'_q\leqslant\delta$ et que h_1 est fixé, la condition $(h_1,h_3)\in\mathcal{H}^-$, entraîne que les entiers h_3, s'il en existe, vérifient
$$h_3\equiv a(h_1)\bmod q^{\delta-\mu-\varrho_q-\varrho'_q}, \tag{62}$$
où $0\leqslant a(h_1)<q^{\delta-\mu-\varrho_q-\varrho'_q}$.

En effet, pour h_1 fixé, soient h_3 et h'_3 tels que $(h_1,h_3)\in\mathcal{H}^-$ et $(h_1,h'_3)\in\mathcal{H}^-$. Alors
$$\begin{aligned}\left\|\frac{s''(h_3-h'_3)}{q^{\delta-\mu}}\right\|&=\left\|\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}-\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h'_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right\|\\&\leqslant\left\|\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right\|+\left\|\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h'_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right\|\\&<2q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q+4\varrho}.\end{aligned}$$

Or sous l'hypothèse
$$2\mu\geqslant\lambda+\varrho_q+4\varrho+1\quad(=\nu+\varrho_q+6\varrho+2,\ \text{d'après (39)}) \tag{63}$$
on a $2q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q+4\varrho}\leqslant q^{\mu-\delta}$ et donc
$$\left\|\frac{s''(h_3-h'_3)}{q^{\delta-\mu}}\right\|=0,$$
c'est-à-dire $s''(h_3-h'_3)\equiv 0\bmod q^{\delta-\mu}$, ce qui, compte tenu de (53), montre que
$$r''\frac{2sq^{\varrho_q}}{(d,2|r|)}(h_3-h'_3)\equiv 0\bmod q^{\delta-\mu}.$$

Comme le nombre entier r'' est par construction premier avec d' et que $q|d'$ d'après (54), r'' est inversible modulo $q^{\delta-\mu}$, ce qui en multipliant par $(d,2|r|)$ montre que

$$2sq^{\varrho_q}(h_3-h_3') \equiv 0 \bmod q^{\delta-\mu}.$$

Par ailleurs, pour tout facteur premier p de q tel que $p|2s$, on a $p^{v_p(2|s|)} \leqslant 2|s|$ et d'après (44), $|s|<q^{2\varrho}$, ce qui entraîne

$$v_p(2|s|) \leqslant \left\lfloor \frac{2\varrho\log q+\log 2}{\log p} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{2\varrho\log q}{\log 2}+1 \right\rfloor = \varrho_q'. \tag{64}$$

On a

$$2|s| = \prod_{\substack{p|(2|s|)\\ p|q}} p^{v_p(2|s|)} \prod_{\substack{p|(2|s|)\\ p\nmid q}} p^{v_p(2|s|)},$$

avec

$$\prod_{\substack{p|(2|s|)\\ p|q}} p^{v_p(2|s|)} \mid q^{\varrho_q'} \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{p|(2|s|)\\ p\nmid q}} p^{v_p(2|s|)}$$

inversible modulo $q^{\delta-\mu}$.

On en déduit que

$$q^{\varrho_q'}q^{\varrho_q}(h_3-h_3') \equiv 0 \bmod q^{\delta-\mu},$$

et finalement

$$h_3-h_3' \equiv 0 \bmod q^{\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q'},$$

ce qui montre (62) pour un certain $a(h_1)$ vérifiant $0 \leqslant a(h_1) < q^{\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q'}$.

Nous pouvons maintenant majorer $S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)$. Comme d'après (51) on a $\delta-\varrho_q \geqslant \mu-\varrho_q \geqslant \lambda-\mu$, on peut appliquer (23) à la sommation sur h_2. En observant que d'après (13) on a $\Phi(q^{\lambda-\delta+\varrho_q}) \leqslant \Phi(q^\mu)$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\leqslant h_2<q^\lambda\\ h_1+h_2+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}}} & |F_{\mu,\lambda}(-h_2,\alpha)| \\ & \leqslant \Phi(q^\mu)|F_{\lambda-\mu}(h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell'',\alpha)| \\ & \quad \times q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta-\varrho_q}}\left(\frac{h_1+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right) \\ & \leqslant \Phi(q^\mu)|F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)|,\end{aligned}$$

où cette dernière majoration est obtenue à l'aide de la majoration triviale $\varphi_k(t) \leqslant k$.

De même en appliquant (23) à la sommation sur h_4, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\leqslant h_4<q^\lambda\\ h_3+h_4-s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)-\ell''\equiv 0 \bmod q^{\delta-\varrho_q}}} |F_{\mu,\lambda}(h_4,\alpha)|
&\leqslant \Phi(q^\mu)|F_{\lambda-\mu}(-h_3+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell'',\alpha)|\\
&\quad\times q^{-\mu+\lambda-\delta+\varrho_q}\varphi_{q^{\mu-\lambda+\delta-\varrho_q}}\left(\frac{-h_3+s''q^{\mu-\varrho_q}(h_1+h_3)+\ell''}{q^{\delta-\varrho_q}}\right)\\
&\leqslant \Phi(q^\mu)|F_{\lambda-\mu}(-h_3+\ell'',\alpha)|.\end{aligned}$$

Distinguons maintenant deux cas selon le signe de $\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q'$:

- Lorsque $\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q'\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\\
&\leqslant \Phi^2(q^\mu)\sum_{(h_1,h_3)\in\mathcal{H}^-}|F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\lambda-\mu}(-h_3+\ell'',\alpha)|\\
&\leqslant \Phi^2(q^\mu)\sum_{0\leqslant h_1<q^\lambda}|F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)|\\
&\qquad\times\sum_{\substack{0\leqslant h_3<q^\lambda\\ h_3\equiv a(h_1) \bmod q^{\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q'}}}|F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\lambda-\mu}(-h_3+\ell'',\alpha)|,\end{aligned}$$

d'où en appliquant (24),

$$\begin{aligned}S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant \Phi^3(q^\mu)&\sum_{0\leqslant h_1<q^\lambda}|F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)|\\
&\times|F_{\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q'}(-a(h_1),\alpha)F_{\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q'}(-a(h_1)+\ell'',\alpha)|,\end{aligned}$$

et d'après (19),

$$\begin{aligned}S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant e^{\pi^2/24}&\Phi^3(q^\mu)q^{-2c_q\|(q-1)\alpha\|^2(\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q')}\\
&\times\sum_{0\leqslant h_1<q^\lambda}|F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)|.\end{aligned}$$

En appliquant maintenant (24) pour $\delta=0$, on en déduit

$$S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant e^{\pi^2/24}\Phi^4(q^\mu)q^{-2c_q\|(q-1)\alpha\|^2(\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q')}.$$

- Lorsque $\delta-\mu-\varrho_q-\varrho_q'<0$, on écrit

$$\begin{aligned}S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant \Phi^2(q^\mu)&\sum_{0\leqslant h_1<q^\lambda}|F_{\mu,\lambda}(h_1,\alpha)F_{\lambda-\mu}(h_1+\ell'',\alpha)|\\
&\times\sum_{0\leqslant h_3<q^\lambda}|F_{\mu,\lambda}(-h_3,\alpha)F_{\lambda-\mu}(-h_3+\ell'',\alpha)|\leqslant\Phi^4(q^\mu),\end{aligned}$$

d'après (24) avec $\delta=0$.

Nous sommes maintenant en mesure d'estimer la contribution de $S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)$ dans la majoration (57) :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}} & d^{1/2}S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\\ &\leqslant e^{\pi^2/24}\Phi^4(q^\mu)\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ \mu+\varrho_q+\varrho'_q\leqslant v_q(d)\leqslant\lambda}} d^{1/2}q^{-2c_q\|(q-1)\alpha\|^2(\delta-\mu-\varrho_q-\varrho'_q)}\\ &\quad+\Phi^4(q^\mu)\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ \mu\leqslant v_q(d)<\mu+\varrho_q+\varrho'_q}} d^{1/2}.\end{aligned}$$

On majore le premier terme du membre de droite ci-dessus en appliquant (48) avec $\delta_1=\mu+\varrho_q+\varrho'_q$, $\delta_2=\lambda$ et $\theta=-2c_q\|(q-1)\alpha\|^2$ et le second terme en appliquant (48) avec cette fois $\delta_1=\mu$, $\delta_2=\mu+\varrho_q+\varrho'_q-1$ ($\leqslant\lambda$ d'après (61)) et $\theta=0$:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}} & d^{1/2}S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\\ &\leqslant e^{\pi^2/24}(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q+1)\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q})q^{\lambda/2}\\ &\qquad\times(q^{-(\log 2/2\log q)(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q)}+q^{-2c_q\|(q-1)\alpha\|^2(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q)})\\ &\qquad+(\varrho_q+\varrho'_q)\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\mu})q^{\lambda/2}q^{-(\log 2/2\log q)(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q+1)}\\ &\leqslant e^{\pi^2/24}(\lambda-\mu+1)\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\mu})q^{\lambda/2}\\ &\qquad\times(q^{-(\log 2/2\log q)(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q)}+q^{-2c_q\|(q-1)\alpha\|^2(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q)}),\end{aligned}$$

car, en observant que $1\leqslant e^{\pi^2/24}$, on a

$$e^{\pi^2/24}(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q+1)+(\varrho_q+\varrho'_q)\leqslant e^{\pi^2/24}(\lambda-\mu+1).$$

Ainsi,

$$\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}} d^{1/2}S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant 2e^{\pi^2/24}(\lambda-\mu+1)\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\mu})q^{\lambda/2-c'_q(\alpha)(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q)}, \tag{65}$$

avec

$$c'_q(\alpha)=\min\left\{2c_q\|(q-1)\alpha\|^2,\frac{\log 2}{2\log q}\right\}. \tag{66}$$

5.8. Conclusion

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que conformément à ce que nous avons annoncé à la fin du §5.3, nous sommes maintenant en mesure de démontrer (45).

D'après (51) et (46), on a $\Delta=\lambda-\mu+\varrho_q<\mu$, donc la majoration (49) entraîne

$$S_4(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mu\Phi^4(q^\mu)\tau(q^\lambda)q^{\lambda/2+4(\lambda-\mu)-(\log 2/2\log q)(\mu-\varrho_q)}.$$

D'après (39) et (50), on a

$$\begin{aligned}4(\lambda-\mu)-\frac{\log 2}{2\log q}(\mu-\varrho_q)&\leqslant 4(\nu+2\varrho+1-\mu)-\frac{\log 2}{2\log q}\mu+\frac{\log 2}{2\log q}\left(\varrho\frac{\log q}{\log 2}+1\right)\\&=4\nu-\left(4+\frac{\log 2}{2\log q}\right)\mu+\frac{17}{2}\varrho+4+\frac{\log 2}{2\log q},\end{aligned}$$

d'où

$$S_4(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)\leqslant\mu\Phi^4(q^\mu)\tau(q^\lambda)q^{\lambda/2+4\nu-(4+\log 2/2\log q)\mu+17\varrho/2+4}. \tag{67}$$

De même, la majoration (56) entraîne

$$\begin{aligned}S_5(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)&\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mu\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\mu-\varrho_q})q^{\lambda/2-(\log 2/2\log q)(\lambda-\mu)}\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mu\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\mu-\varrho_q})q^{\lambda/2-(\log 2/2\log q)(\nu-\mu)}q^{-(\log 2/2\log q)(2\varrho+1)},\end{aligned}$$

d'où

$$S_5(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell)\leqslant 2^{-\varrho-1}\mu\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\mu-\varrho_q})q^{\lambda/2-(\log 2/2\log q)(\nu-\mu)}. \tag{68}$$

En notant que $\lambda-\mu+1\leqslant\Delta=\lambda-\mu+\varrho_q<\mu$, d'après (59) on obtient

$$\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}} d^{1/2}S_7(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant\frac{1}{2}\mu\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\mu})q^{\lambda/2-4\varrho}. \tag{69}$$

De même, d'après (65) on obtient

$$\sum_{\substack{d\mid q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}} d^{1/2}S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d)\leqslant 2e^{\pi^2/24}\mu\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\mu})q^{\lambda/2-c'_q(\alpha)(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q)},$$

or, d'après (39), (50) et (60), et comme $\varrho\geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}-c'_q(\alpha)(\lambda-\mu-\varrho_q-\varrho'_q)&=-c'_q(\alpha)(\nu-\mu)+c'_q(\alpha)(\varrho_q+\varrho'_q-2\varrho-1)\\&\leqslant -c'_q(\alpha)(\nu-\mu)+c'_q(\alpha)\left(3\varrho\frac{\log q}{\log 2}+1-2\varrho\right)\\&\leqslant -c'_q(\alpha)(\nu-\mu)+3\varrho\frac{\log q}{\log 2}c'_q(\alpha),\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\substack{d|q^\lambda\\ v_q(d)\geqslant\mu}} d^{1/2}S_8(r,s,\nu,\varrho,\mu,\ell,d) \leqslant 2e^{\pi^2/24}\mu\Phi^4(q^\mu)\tau(q^{\lambda-\mu})q^{\lambda/2-c_q'(\alpha)(\nu-\mu)+3\varrho(\log q/\log 2)c_q'(\alpha)}. \tag{70}$$

Sous les conditions

$$\mu\leqslant\nu-2\varrho-1, \tag{40}$$

$$\varrho_q<2\mu-\nu-2\varrho-1, \tag{52}$$

$$\mu+\varrho_q+\varrho_q'\leqslant\nu+2\varrho+1, \tag{61}$$

$$2\mu\geqslant\nu+\varrho_q+6\varrho+2, \tag{63}$$

et en insérant dans (47) les majorations (67), (68), (57), (69) et (70), nous venons de montrer que

$$\begin{aligned}|S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)|\leqslant \frac{2\sqrt2}{\pi}\mu\log\Big(\frac{4e^{\pi/2}}{\pi}q^\lambda\Big)\Phi^4(q^\mu)\tau(q^\lambda)q^{\nu+2\varrho+1}q^{4-4\varrho}\\ \times\Big(q^{4\nu-(4+\log 2/2\log q)\mu+25\varrho/2}+\frac{1}{2^{\varrho+1}q^4}q^{-(\log 2/2\log q)(\nu-\mu)+4\varrho}\\ +\frac{1}{2q^4}+\frac{2e^{\pi^2/24}}{q^4}q^{-c_q'(\alpha)(\nu-\mu)+c_q''(\alpha)\varrho}\Big),\end{aligned}$$

avec

$$c_q''(\alpha)=4+\frac{3\log q}{\log 2}c_q'(\alpha).$$

En imposant

$$\frac{\varrho}{\nu}\leqslant\xi, \tag{71}$$

on obtient

$$\begin{aligned}|S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)|\leqslant \frac{2\sqrt2}{\pi}\mu\log\Big(\frac{4e^{\pi/2}}{\pi}q^\lambda\Big)\Phi^4(q^\mu)\tau(q^\lambda)q^{\nu-2\varrho+5}\\ \times\Big(q^{(4+25\xi/2)\nu-(4+\log 2/2\log q)\mu}\\ +\frac{1}{2^6}q^{-(\log 2/2\log q-4\xi)\nu+(\log 2/2\log q)\mu}\\ +\frac{1}{2^5}+\frac{e^{\pi^2/24}}{2^3}q^{-(c_q'(\alpha)-c_q''(\alpha)\xi)\nu+c_q'(\alpha)\mu}\Big).\end{aligned} \tag{72}$$

Il est maintenant nécessaire de fixer nos paramètres de sorte que les exposants de q dans la parenthèse ci-dessus soient tous négatifs ou nuls :

$$\frac{1+25\xi/8}{1+\log 2/8\log q}\nu\leqslant\mu\leqslant\nu\min\Big\{1-\frac{8\log q}{\log 2}\xi,1-\frac{c_q''(\alpha)}{c_q'(\alpha)}\xi\Big\}. \tag{73}$$

Pour tout nombre réel ξ vérifiant

$$0<\xi<\xi_q(\alpha):=\frac{\log 2}{25\log q+(8\log q+\log 2)c_q'''(\alpha)}, \tag{74}$$

avec

$$c_q'''(\alpha)=\max\left\{\frac{8\log q}{\log 2},\frac{c_q''(\alpha)}{c_q'(\alpha)}\right\},$$

pour tout nombre entier $\nu\geqslant\nu_2(\xi)$ avec

$$\nu_2(\xi):=\frac{8\log q+\log 2}{\log 2-\xi(25\log q+(8\log q+\log 2)c_q'''(\alpha))}, \tag{75}$$

l'intervalle défini par (73) contient au moins un nombre entier μ.

Lemme 20. *Pour $\lambda\geqslant 1$, sous les hypothèses* (71) *et* (74) *on a*

$$\tau(q^\lambda)\leqslant\tau(q)\lambda^{\omega(q)}\leqslant e^{3/25}\tau(q)\nu^{\omega(q)}. \tag{76}$$

Preuve. En utilisant la multiplicativité de la fonction τ, on a les inégalités

$$\tau(q^\lambda)=\prod_{p|q}\tau(p^{\lambda v_p(q)})=\prod_{p|q}(\lambda v_p(q)+1)\leqslant\prod_{p|q}(\lambda v_p(q)+\lambda)=\lambda^{\omega(q)}\tau(q),$$

ce qui établit la première inégalité de (76). Maintenant

$$\lambda^{\omega(q)}=(\nu+2\varrho+1)^{\omega(q)}\leqslant(1+3\xi)^{\omega(q)}\nu^{\omega(q)}\leqslant\left(1+\frac{3\log 2}{25\log q}\right)^{\omega(q)}\nu^{\omega(q)},$$

et on vérifie aisément que

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{3\log 2}{25\log q}\right)^{\omega(q)}\leqslant\left(1+\frac{3\log 2}{25\log q}\right)^{\log q/\log 2}&=\exp\left(\frac{\log q}{\log 2}\log\left(1+\frac{3\log 2}{25\log q}\right)\right)\\ &\leqslant\exp\left(\frac{\log q}{\log 2}\,\frac{3\log 2}{25\log q}\right)=\exp\left(\frac{3}{25}\right),\end{aligned}$$

ce qui établit la seconde inégalité de (76). □

Il nous reste à déterminer à quelles conditions sur ν tout entier μ vérifiant (73) satisfait les conditions (40), (52), (61) et (63) rappelées au début de ce paragraphe.

En effet, pour un tel nombre entier μ, on vérifie facilement que lorsque $\nu\geqslant\nu_3(\xi)$ avec

$$\nu_3(\xi):=\frac{1}{6\xi}, \tag{77}$$

on a

$$\mu \leqslant \nu\left(1-\frac{8\log q}{\log 2}\xi\right) \leqslant \nu(1-2\xi)-1,$$

ce qui implique (40).

De plus

$$\begin{aligned}\mu+\varrho_q+\varrho_q' &\leqslant \nu\left(1-\frac{8\log q}{\log 2}\xi\right)+\frac{\log q}{\log 2}\xi\nu+1+2\frac{\log q}{\log 2}\xi\nu+1\\ &= \nu\left(1-\frac{5\log q}{\log 2}\xi\right)+2 \leqslant \nu+2\varrho+1,\end{aligned}$$

ce qui implique (61).

Enfin on a, en utilisant la minoration de (73), puisque $q\geqslant 2$,

$$2\mu \geqslant 2\frac{1+25\xi/8}{1+\log 2/8\log q}\nu \geqslant \frac{2\nu}{1+\frac{1}{8}} \geqslant \nu+\frac{\nu}{25}+\frac{6(\log 2)\nu}{25\log q}+3,$$

ce qui, compte tenu de (71) et (74), implique

$$2\mu \geqslant \nu+\frac{\log q}{\log 2}\xi\nu+6\xi\nu+3 \geqslant \nu+\frac{\log q}{\log 2}\varrho+6\varrho+3,$$

et donc, en vertu de la définition de ϱ_q (50), implique à la fois (52) et (63). Observons enfin qu'en vertu de (39), (71) et (73) on a

$$\mu(\lambda+3) \leqslant \nu^2\left(1-\frac{8\log q}{\log 2}\xi\right)(1+6\xi) \leqslant \nu^2,$$

d'où

$$\mu\log\left(\frac{4e^{\pi/2}}{\pi}q^{\lambda}\right) \leqslant \mu\log(8q^{\lambda}) \leqslant \mu\log(q^{\lambda+3}) \leqslant \nu^2\log q.$$

Choisissons maintenant par exemple $\xi=\frac{99}{100}\xi_q(\alpha)$ et posons

$$\nu_1(q,\alpha):=\max\{10,\nu_2(\xi),\nu_3(\xi)\} \tag{78}$$

et

$$\sigma_q(\alpha):=\tfrac{1}{2}\xi=\tfrac{99}{200}\xi_q(\alpha). \tag{79}$$

Il résulte donc de (72) et (76) que pour tous nombres entiers ν, ϱ, r et s vérifiant $\nu\geqslant \nu_1(q,\alpha)$, $\varrho/\nu\leqslant 2\sigma_q(\alpha)$, $1\leqslant\mu\leqslant\nu-2\varrho-1$, $1\leqslant|r|<q^{\varrho}$, $1\leqslant|s|<q^{2\varrho}$, on a

$$|S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}e^{3/25}(\log q)\Phi^4(q^{\mu})\tau(q)\nu^{\omega(q)+2}q^{\nu-2\varrho+5}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^5}+\frac{e^{\pi^2/24}}{2^3}\right).$$

Par ailleurs, comme $\mu\leqslant\nu-2\varrho-1\leqslant\nu-3$, à l'aide de (14) on obtient

$$\Phi(q^\mu)\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{2e^{\pi/\sqrt{2}}q^\mu}{\pi}\leqslant\frac{2}{\pi}\log(8q^\mu)\leqslant\frac{2}{\pi}\log(q^{\mu+3})\leqslant\frac{2}{\pi}\nu\log q$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}|S_3(r,s,\nu,\varrho,\mu)|&\leqslant\frac{2^5\sqrt{2}}{\pi^5}e^{3/25}(\log q)^5\tau(q)\nu^{\omega(q)+6}q^{\nu-2\varrho+5}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^5}+\frac{e^{\pi^2/24}}{2^3}\right)\\&\leqslant\frac{1}{4}(\log q)^5\tau(q)\nu^{\omega(q)+6}q^{\nu-2\varrho+5},\end{aligned}$$

c'est-à-dire (45).

6. Démonstration du théorème 2

Pour démontrer le théorème 2, commençons par remarquer que si $\alpha\in\mathbb{Q}$, alors la suite $(\alpha s_q(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs et n'est donc pas équirépartie modulo 1. Si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors pour tout $h\in\mathbb{Z}$, $h\neq0$, on a $(q-1)h\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, donc d'après le théorème 1, il existe $\sigma_q(h\alpha)>0$ tel que

$$\sum_{n\leqslant x}e(h\alpha s_q(n^2))=O_q(x^{1-\sigma_q(h\alpha)}),$$

ce qui prouve que la suite $(\alpha s_q(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 d'après le critère de Weyl [21, chapitre 1, p. 1].

7. Démonstration du théorème 3

Lemme 21. *Si $d|q-1$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $s_q(n)\equiv n \bmod d$.*

Preuve. Comme $d|q-1$ signifie que $q\equiv1 \bmod d$, en écrivant n en base q on a

$$n=\sum_i n_iq^i\equiv\sum_i n_i\equiv s_q(n)\quad\bmod d. \qquad\square$$

Pour démontrer le théorème 3, écrivons

$$\operatorname{card}\{n\leqslant x: s_q(n^2)\equiv a \bmod m\}=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{m}\sum_{0\leqslant j<m}e\Big(\frac{j}{m}(s_q(n^2)-a)\Big).$$

Posons $d=(m,q-1)$, $m'=m/d$, $J=\{km':0\leqslant k<d\}$,

$$J'=\{0,...,m-1\}\setminus J=\{km'+r:0\leqslant k<d \text{ et } 1\leqslant r<m'\}.$$

Pour $j=km'\in J$, à l'aide du lemme 21, on a

$$e\Big(\frac{j}{m}s_q(n^2)\Big)=e\bigg(\frac{km'}{dm'}s_q(n^2)\bigg)=e\bigg(\frac{k}{d}s_q(n^2)\bigg)=e\bigg(\frac{k}{d}n^2\bigg),$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{m}\sum_{j\in J}e\Big(\frac{j}{m}(s_q(n^2)-a)\Big)&=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{d}e\bigg(\frac{k}{d}(n^2-a)\bigg)=\frac{d}{m}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^2\equiv a \bmod d}}1\\ &=\frac{d}{m}\Big(\frac{x}{d}+O(1)\Big)Q(a,d)=\Big(\frac{x}{m}+O(1)\Big)Q(a,d),\end{aligned}$$

où $Q(a,d)$ est défini par (5). Ainsi,

$$\operatorname{card}\{n\leqslant x:s_q(n^2)\equiv a \bmod m\}=\frac{x}{m}Q(a,d)+O(d)+\frac{1}{m}\sum_{j\in J'}e\Big(\frac{-aj}{m}\Big)\sum_{n\leqslant x}e\Big(\frac{j}{m}s_q(n^2)\Big). \tag{80}$$

Si $J'=\varnothing$, ce qui correspond au cas dégénéré où $m|q-1$, alors l'égalité ci-dessus établit l'égalité (4) avec un terme d'erreur nul. Nous pouvons maintenant supposer que $J'\neq\varnothing$. Posons $q'=(q-1)/d$. On a $(q',m')=1$, donc pour $j=km'+r\in J'$, on a

$$\frac{(q-1)j}{m}=\frac{dq'(km'+r)}{dm'}=q'k+\frac{q'r}{m'}\notin\mathbb{Z},$$

d'où, d'après le théorème 1, on déduit que pour tout $j\in J'$ il existe $\sigma_q(j/m)>0$ tel que

$$\sum_{n\leqslant x}e\Big(\frac{j}{m}s_q(n^2)\Big)=O(x^{1-\sigma_q(j/m)}).$$

Rappelons que $J'\neq\varnothing$ et posons $\sigma_{q,m}=\min_{j\in J'}\sigma_q(j/m)>0$. En insérant la majoration ci-dessus dans (80), on obtient

$$\operatorname{card}\{n\leqslant x:s_q(n^2)\equiv a \bmod m\}=\frac{x}{m}Q(a,d)+O(x^{1-\sigma_{q,m}}),$$

ce qui démontre le théorème 3.

Bibliographie

[1] ALLOUCHE, J. P. & SHALLIT, J., *Automatic Sequences.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[2] BASSILY, N. L. & KÁTAI, I., Distribution of the values of q-additive functions on polynomial sequences. *Acta Math. Hungar.*, 68 (1995), 353–361.

[3] BELLMAN, R. & SHAPIRO, H. N., On a problem in additive number theory. *Ann. of Math.*, 49 (1948), 333–340.

[4] BÜCHI, J. R., Weak second-order arithmetic and finite automata. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 6 (1960), 66–92.

[5] COBHAM, A., Uniform tag sequences. *Math. Systems Theory*, 6 (1972), 164–192.

[6] COQUET, J., KAMAE, T. & MENDÈS FRANCE, M., Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, 105 (1977), 369–384.

[7] DARTYGE, C. & TENENBAUM, G., Sommes des chiffres de multiples d'entiers. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55:7 (2005), 2423–2474.

[8] — Congruences de sommes de chiffres de valeurs polynomiales. *Bull. London Math. Soc.*, 38 (2006), 61–69.

[9] DAVENPORT, H. & ERDŐS, P., Note on normal decimals. *Canadian J. Math.*, 4 (1952), 58–63.

[10] DRMOTA, M. & RIVAT, J., The sum-of-digits function of squares. *J. London Math. Soc.*, 72 (2005), 273–292.

[11] FOGG, N. P., *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics.* Lecture Notes in Mathematics, 1794. Springer, Berlin–Heidelberg, 2002.

[12] GEL'FOND, A. O., Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. *Acta Arith.*, 13 (1967/1968), 259–265.

[13] GRAHAM, S. W. & KOLESNIK, G., *van der Corput's method of exponential sums.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 126. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[14] KEANE, M., Generalized Morse sequences. *Z. Wahrsch. und Verw. Gebiete*, 10 (1968), 335–353.

[15] MAHLER, K., The spectrum of an array and its application to the study of the translation properties of a simple class of arithmetical functions. II: on the translation properties of a simple class of arithmetical functions. *J. of Math. Phys. Mass. Inst. Techn.*, 6 (1927), 158–163.

[16] MAUDUIT, C. & RIVAT, J., Répartition des fonctions q-multiplicatives dans la suite $([n^c])_{n\in\mathbf{N}}$, $c>1$. *Acta Arith.*, 71 (1995), 171–179.

[17] — Propriétés q-multiplicatives de la suite $\lfloor n^c \rfloor$, $c>1$. *Acta Arith.*, 118 (2005), 187–203.

[18] — Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers. À paraître dans *Ann. of Math.*

[19] MENDÈS FRANCE, M., Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1. *J. Number Theory*, 5 (1973), 1–15.

[20] MINSKY, M. & PAPERT, S., Unrecognizable sets of numbers. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 13 (1966), 281–286.

[21] MONTGOMERY, H. L., *Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 84. Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1994.

[22] NIEDERREITER, H. & SHPARLINSKI, I. E., On the distribution of inversive congruential pseudorandom numbers in parts of the period. *Math. Comp.*, 70 (2001), 1569–1574.

[23] PETER, M., The summatory function of the sum-of-digits function on polynomial sequences. *Acta Arith.*, 104 (2002), 85–96.

[24] Piatetski-Shapiro, I. I., On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$. *Mat. Sb.*, 33:75 (1953), 559–566 (en russe).
[25] Prouhet, E., Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 33 (1851), 225.
[26] Queffélec, M., *Substitution Dynamical Systems—Spectral Analysis*. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer, Berlin–Heidelberg, 1987.
[27] Ritchie, R. W., Finite automata and the set of squares. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 10 (1963), 528–531.
[28] Sierpiński, W., *Elementary Theory of Numbers*. North-Holland Mathematical Library, 31. North-Holland, Amsterdam, 1988.
[29] Wiener, N., The spectrum of an array and its applications to the study of the translation properties of a simple class of arithmetical functions. I: The spectrum of an array. *J. of Math. Phys. Mass. Inst. Techn.*, 6 (1927), 145–157.

Christian Mauduit
Institut de Mathématiques
de Luminy CNRS-UMR 6206
163 avenue de Luminy, Case 907
FR-13288 Marseille Cedex 9
France
mauduit@iml.univ-mrs.fr

Joël Rivat
Institut de Mathématiques
de Luminy CNRS-UMR 6206
163 avenue de Luminy, Case 907
FR-13288 Marseille Cedex 9
France
rivat@iml.univ-mrs.fr

Reçu le 29 août 2007